CÁLCULO I (1^o GITI). CURSO 2019-20. **16/10/2019**

SOLUCIONES CONTROL Bloque 1: Números, Funciones, Límites y Continuidad.

1. Calcula las raíces cúbicas de -8.

   Sabiendo que todas son raíces del polinomio
   $$P(x) = x^5 - 2\,x^4 + 2\,x^3 + 8\,x^2 - 16\,x + 16$$
   encuentra su factorización real y compleja.

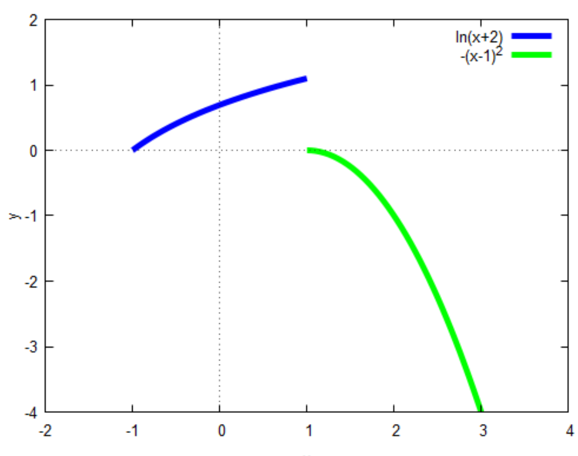
   Las tres raíces cúbicas de -8, w_1, w_2 y w_3 tienen el mismo módulo $|w_i| = \sqrt[3]{|-8|} = 2$ y, como el argumento de -8 es π, sus argumentos son $\theta_{w_1} = \frac{\pi}{3}$, $\theta_{w_2} = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$, y $\theta_{w_3} = \frac{\pi}{3} + 2\frac{2\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$. Por tanto,
   $$w_1 = 1 + \sqrt{3}i, \;\; w_2 = -2 \;\; \text{y} \;\; w_3 = 1 - \sqrt{3}i.$$

   Como las raíces cúbicas de -8 son raíces del polinomio $P(x)$, podemos dividir éste por $x^3 + 8$ de forma exacta, obteniendo:
   $$P(x) = (x^3 + 8)(x^2 - 2x + 2).$$
   Así, las otras dos raíces de $P(x)$ son las del polinomio $x^2 - 2x + 2$, es decir, $1 - i$ y $1 + i$.
   Ahora podemos escribir la factorización compleja de $P(x)$:
   $$P(x) = (x - (1 + \sqrt{3}i))(x - (-2))(x - (1 - \sqrt{3}i))(x - (1 - i))(x - (1 + i)),$$
   y, multiplicando los términos correspondientes a raíces conjugadas, la factorización real:
   $$P(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)(x^2 - 2x + 2).$$

2. Sea la función
   $$f(x) = \begin{cases} \ln(x+2) & ,\text{ si } x \in [-1, 1] \\ -(x-1)^2 & ,\text{ si } x \in (1, 3] \end{cases}$$

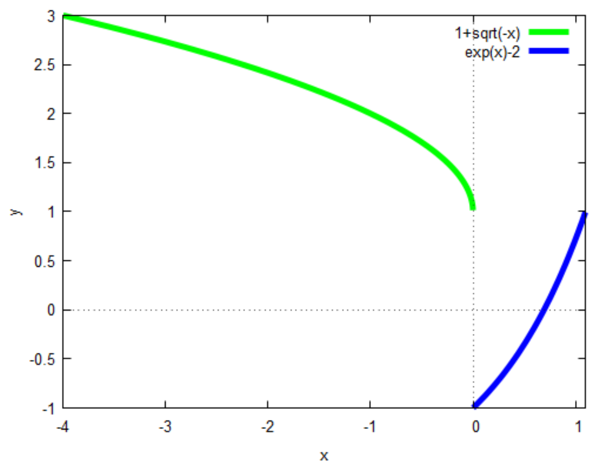
   a) Dibuja justificadamente su gráfica y encuentra su dominio y su rango.
   b) Justifica que tiene inversa, dibuja su gráfica y defínela.

   a) A partir de las gráficas conocidas $y = \ln x$ e $y = x^2$ se puede construir la de f:



   Como $\ln(x+2)$ está bien definido en $[-1, 1]$ y $-(x-1)^2$ en $(1, 3]$, el dominio de f es $[-1, 3]$.
   La función $\ln(x+2)$ es creciente y por tanto la imagen de $[-1, 1]$ mediante f es $[\ln(-1+2), \ln(1+2)] = [0, \ln(3)]$. Por otro lado, la función $-(x-1)^2$ es decreciente en $(1, 3]$, de manera que su imagen mediante f es $[(-(3-1)^2, -(1-1)^2) = [-4, 0)$. Finalmente el rango de f es $[0, \ln(3)] \cup [-4, 0) = [-4, \ln(3)]$.

b) Como f es estrictamente creciente en $[-1,1]$ y mayor o igual que 0, y estrictamente decreciente y negativa en $(1,3]$, no puede haber dos elementos distintos con la misma imagen, es decir, f es uno a uno y, por tanto, tiene inversa, f^{-1}.
La gráfica de la inversa es



Para definir f^{-1} hay que hacerlo en cada uno de los dos intervalos en los que está definida f obteniendo:

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}: \quad [-4,\ln(3)] & \longrightarrow & [-1,3] \\ x & \longrightarrow & f^{-1}(x) = \begin{cases} 1+\sqrt{-x} & , \text{si } x \in [-4,0) \\ e^x - 2 & , \text{si } x \in [0,\ln(3)] \end{cases} \end{array}$$

3. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{sen(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

a) Justifica si es par o impar. ¿Es periódica?

b) Estudia justificadamente donde es continua.

c) Encuentra sus asíntotas.

a) f no es impar pues $f(0) \neq 0$.
Sí es par ya que:

$$f(-x) = \frac{sen(-x)}{-x} = \frac{-sen(x)}{-x} = \frac{sen(x)}{x} = f(x).$$

No es periódica. Si lo fuese existiría un periodo $T > 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$, y esto implicaría, sustituyendo x por $0, T, 2T, \ldots$, que $1 = f(0) = f(T) = f(2T) = \cdots = f(nT)$, es decir, $1 = \dfrac{sen(nT)}{nT}$, o $sen(nT) = nT$, para todo $n \in \mathbf{N}$, que es imposible ya que el seno toma valores en $[-1,1]$.

b) Como $\text{sen}(x)$ y x son funciones continuas en todo $\mathbf{R}$ podemos asegurar que f, su cociente, lo es salvo quizá en el 0. Pero en el 0 también lo es porque

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1 = f(0).$$

f es continua en todo $\mathbf{R}$.

c) Como f es continua en todo $\mathbf{R}$ no puede tener asíntotas verticales. Comprobemos si tiene horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{sen(x)}{x},$$

el numerador en la fracción no tiene límite y el denominador tiende a ∞, de manera que directamente no podemos conocer el límite de f. El teorema de compresión nos resuelve el problema, como

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{sen(x)}{x} \leq \frac{1}{x}, \text{ para } x > 0$$

y

$$\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$$

se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Análogamente se comprueba que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,$$

y, por tanto, $y = 0$ es asíntota horizontal hacia la izquierda y hacia la derecha.

4. *a*) Enuncia el teorema de Bolzano.

   b) Demuestra que la ecuación $\operatorname{arctg} x = 1 - x$ tiene al menos una solución en el intervalo $(0, 1)$.

   c) Aproxima una solución de la ecuación encontrando su primera cifra decimal exacta.

   a) *Teorema de Bolzano*: Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

   b) La ecuación $\operatorname{arctg} x = 1 - x$ es equivalente a la ecuación $x - 1 + \operatorname{arctg} x = 0$. Definimos la función $f(x) = x-1+\operatorname{arctg} x$ para que los puntos donde se anule sean las soluciones de la ecuación. Aplicamos el teorema de Bolzano a la función f en el intervalo $[0, 1]$:

   - Como tanto el polinomio $x - 1$ como la función arcotangente son continuas en $[0, 1]$, su suma, f, también lo es.
   - $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = \operatorname{arctg}(1) = \dfrac{\pi}{4} > 0$.

   Comprobadas las hipótesis, el teorema nos dice que existe $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, c es solución de la ecuación.

   c) Volvemos a utilizar el teorema de Bolzano. A partir de $f(0{,}5) = -0{,}036352... < 0$ y $f(0{,}6) = 0{,}1404195... > 0$ podemos asegurar que la solución buscada es de la forma $c = 0{,}5....$