Hoja 5 de Problemas
Formas Bilineales, Formas Cuadráticas y Espacios Euclídeos

1. Estudiar si las siguientes aplicaciones son bilineales

   1. $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 + y_1$
   2. $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1$
   3. $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + 1$
   4. $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1^2$
   5. $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $F((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$
   6. $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $F((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \sum_{i=1}^{3} i \cdot x_i y_i$
   7. $F : \mathbb{R}_2[t] \times \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}$ tal que $F(p(t), q(t)) = p(0)q(0) + p'(0)q'(0)$.
   8. $F : \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $F(A, B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
   9. $F : \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que
   $$F\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}\right) = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{1,2}$$
   10. $F : \mathscr{C}([a, b]) \times \mathscr{C}([a, b]) \to \mathbb{R}$, donde $\mathscr{C}([a, b])$ es el espacio vectorial de las funciones reales continuas del intervalo $[a, b]$ en $\mathbb{R}$, tal que
   $$F(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

2. Sea $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - 3x_2 y_1$. Se pide

   1. Calcular la representación matricial A de F respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.
   2. Determinar la representación matricial B de F respecto a la base $\mathscr{B} = \{(1, 1), (1, 2)\}$
   3. Hallar la matriz de paso P de A a B.
   4. Calcular el valor $F((2, 3), (2, 3))$ utilizando las matrices A y B, respectivamente.

3. Sea $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1 y_1 - 3x_1 y_2 + x_2 y_2$. Se pide

   1. Calcular la representación matricial A de F respecto a la base $\mathscr{B}_1 = \{(1, 0), (1, 1)\}$.
   2. Determinar la representación matricial B de F respecto a la base $\mathscr{B}_2 = \{(2, 1), (1, -1)\}$
   3. Hallar la matriz de paso P de A a B.

4. Sea $\mathscr{V} = \mathscr{C}([a, b])$ el conjunto de las funciones reales continuas de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$. Demostrar que la aplicación
   $$\begin{array}{rccl} Q: & \mathscr{V} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(x)^2 dx \end{array}$$
   es una forma cuadrática definida positiva sobre $\mathscr{V}$.

5. Se considera la forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^2$ definida como $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_1 x_2 + 4x_2^2$. Se pide:

1. Forma bilineal asociada a Q.
2. Nueva expresión de la forma cuadrática al tomar como base $\{(1,-1),(1,2)\}$.

6. Sea $\mathscr{V}$ un espacio vectorial real de dimensión tres y sea $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathscr{V}$. En $\mathscr{V}$ se considera la forma bilineal simétrica definida por:

$$F(v_1,v_1) = F(v_2,v_2) = 1, F(v_3,v_3) = 2, F(v_1,v_2) = F(v_1,v_3) = 0, F(v_2,v_3) = -1$$

   1. Dar la matriz asociada a F respecto de la base $\mathscr{B}$.
   2. Clasificar la forma cuadrática asociada a F.

7. Clasificar las formas cuadráticas reales $Q_a(x,y,z) = x^2 + 2ayz$, según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

8. Se considera la forma bilineal F sobre $\mathbb{R}^3$ definida, en la base canónica por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   Se pide

   1. Demostrar que F define un producto escalar sobre $\mathbb{R}^3$.
   2. En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, <\ >_F)$ se consideran los vectores $u = (1,1,1), v = (1,0,0)$. Calcular $\|u\|, \|v\|, d(u,v), \angle(u,v)$.
   3. Calcular el complemento ortogonal de $\mathscr{W} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y=0\}$ en el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, <\ >_F)$.
   4. En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, <\ >_F)$, aplicar el proceso de ortonormalización de Gram–Schmidt a la base $\{(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$

9. Sea $\mathscr{V} = \mathscr{C}([0,\pi])$ y F la aplicación

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathscr{V} \times \mathscr{V} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^\pi f(x)g(x)dx \end{array}$$

   Se pide

   1. Demostrar que F define un producto escalar sobre $\mathscr{V}$.
   2. En el espacio euclídeo $(\mathscr{V}, <\ >_F)$ se consideran los vectores $u = \mathrm{sen}(x), v = \cos(x)$. Calcular $\|u\|, \|v\|, d(u,v), \angle(u,v)$.

10. Se considera el espacio euclídeo $(\mathbb{R}_2[t], <\ >_{\int_0^1})$. Se pide

    1. Calcular $d(t,t^2), \|t+1\|, \angle(t,t^2)$.
    2. Obtener el complemento ortogonal del subespacio vectorial $\mathscr{W} = \{p(t) \in \mathbb{R}_2[t] \,/\, p(0) = 0\}$.
    3. Aplicar el proceso de ortonormalización de Gram–Schmidt a la base $\{1, t, t^2\}$
    4. Estudiar si los polinomios t y $6t-4$ son ortogonales.

11. En el espacio euclídeo usual $(\mathbb{R}^4, <\ >_u)$ se consideran los subespacios vectoriales

$$\mathscr{W}_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \ /\ x_1 - x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\} \ \mathscr{W}_2 = L(\{(1,1,-2,2),(1,0,-1,0)\},$$

    Se pide:

1. Ecuaciones paramétricas, implícitas y bases para $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2, \mathscr{W}_1 \cap \mathscr{W}_2, \mathscr{W}_1 + \mathscr{W}_2$.
2. Hallar una base ortogonal para $\mathscr{W}_2$ y su complemento ortogonal $\mathscr{W}_2^{\perp}$.

12. Dada la forma bilineal simétrica F sobre $\mathbb{R}^3$ definida en la base canónica por:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Se pide

1. Determinar para que valores de a define F un producto escalar. Para $a = 1$, diagonalizar F mediante una transformación ortogonal.
2. Para $a = 1$, estudiar si los vectores $(1, 1, 1)$ y $(2, -1, -1)$ son ortogonales.

13. Si F es la forma bilineal en $\mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada con respecto de la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

determinar para que valores de a define F un producto escalar.

14. Sea $F : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineal definida en la base canónica por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

1. Demostrar que F es simétrica y obtener la expresión polinomial, respecto a la base canónica, de la forma cuadrática Q asociada a F.
2. Clasificar Q.
3. En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^4, < >_A)$, que define F, obtener una base ortonormal del complemento ortogonal del subespacio vectorial $\mathscr{W} = L(\{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0)\})$.
4. Diagonalizar A mediante trasnformaciones ortogonales.

15. Sea $\mathscr{V} = \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y F la forma bilineal sobre $\mathscr{V}$ representada en la base canónica por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Se pide :

1. Expresión polinomial en la base canónica de la forma cuadrática Q asociada a F.
2. Clasificar Q y estudiar si F define un producto escalar.
3. En el espacio euclídeo real $(\mathscr{V}, <>_A)$ que define F, calcular la distancia y el ángulo entre los vectores

$$u = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y las ecuaciones implícitas del complemento ortogonal de $\mathscr{W} = L(\{u, v\})$.

4. Diagonalizar A mediante transformaciones ortogonales.

16. Dada la forma cuadrática Q sobre $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathscr{M}(Q, B_c) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

1. Clasificar Q.
2. Determinar una base ortogonal respecto de la cual Q se representa de forma diagonal.
3. Sea F la forma bilineal simétrica asociada a Q. En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, <,>_F)$ aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schimidt a la base $\{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$.

17. Diagonalizar, mediante transformaciones ortogonales, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

18. Obtener la factorización QR de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

19. Resover, utilizando la factorización QR, el sitema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

20. Se considera el espacio euclídeo usual $(\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), < >_u)$. Sea $\mathscr{W} = \{A \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,|\, A^T = A\}$. Se pide determinar la matriz simétrica 2×2 que minimiza la distancia a la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

21. Resolver, mediante mínimos cuadrados, el sistema incompatible

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$