MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA ESTADÍSTICA II, Curso 2020–21, grupo B

Ejercicios del tema 4.

(1) Calcula los siguientes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 6 \\ -4 & 5 & 6 & -7 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -8 & 16 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 & 21 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 9 & 2 & -7 & 7 \\ 5 & -6 & 0 & 1 & 8 \\ 8 & 7 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

(2) Demuestra las igualdades para los determinantes siguientes

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & b & c \\ x & x & x & c \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = x(x-a)(x-b)(x-c) \qquad \begin{vmatrix} p^2 & q^2 & pq \\ 2p & 2q & p+q \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (q-p)^3 \qquad \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix} = (x-a)(x-b)(x-c)(x+a+b+c)$$

(3) Demuestra las igualdades para los determinantes siguientes, que se denominan *determinates de Vandermonde*.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c).$

(c) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(a_j - a_i).$$

Indicación: usa las propiedades del determinante e inducción sobre el orden de la matriz.

(4) Calcula, usando las fórmulas demostradas en el ejercicio 2, el siguiente determinante de Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$$

(5) Demuestra las igualdades siguientes:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 1 & 2b & 3b^2 \end{vmatrix} = -(a-b)^4.$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & c^2 \\ 0 & 1 & 2b & 0 & -1 & -2c \\ 0 & 1 & 2a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(a-b)^2(b-c)^2.$

(6) Usa determinantes y usa el método de Gauss–Jordan para decidir si las siguientes matrices son invertibles y para hallar sus matrices inversas en caso de que lo sean. ¿Qué método te parece mejor?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(7) Vuelve a resolver el ejercicio 16 del tema 1 usando en esta ocasión determinantes en lugar del método de Gauss. ¿Qué método te parece mejor?

(8) Halla el rango de las matrices siguientes usando determinantes y usando el método de Gauss. ¿Qué método te parece mejor?

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & -4 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(9) Vuelve a resolver el ejercicio 17 del tema 1 usando en esta ocasión determinantes en lugar del método de Gauss. ¿Qué método te parece mejor?

(10) Vuelve a resolver el ejercicio 15 del tema 2 argumentado con determinantes
Indicación: Forma una matriz con los vectores de cada uno de los conjuntos A, B y C.

(11) Vuelve a resolver los apartados (a) y (c) del ejercicio 26 del tema 3, usando esta vez determinantes en lugar del método de Gauss para estudiar los rangos de las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda & 2 \\ \lambda & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

¿Qué método te parece mejor?

(12) Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & \alpha & 3-\alpha & 6 \\ 2 & 2 & 2 & \alpha & 6 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que si $\alpha \neq 1$, entonces el rango de A es 4. ¿Cuál es el rango de A cuando $\alpha = 1$?

(13) Resuelve, usando la regla de Cramer y usando el método de Gauss–Jordan, el sistema siguiente. ¿Qué procedimiento te parece mejor?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(14) Resuelve, usando la regla de Cramer y usando el método de Gauss–Jordan, los sistemas siguientes. ¿Qué procedimiento te parece mejor?

$$\text{a)} \left\{ \begin{aligned} x+y-z&=4 \\ -x+y-z&=2 \\ y-z&=3 \end{aligned} \right. \quad \text{b)} \left\{ \begin{aligned} x-y+z &= 3 \\ -x+y+z &= -1 \\ y-z &= 1 \end{aligned} \right. \quad \text{c)} \left\{ \begin{aligned} x+y-z-w &= 0 \\ x-y+z-w &= 6 \\ x-w &= 3 \\ 2x-y+z-2w &= 9 \\ 3x-2y+2z-3w &= 15 \end{aligned} \right.$$

(15) Para el sistema
$$\left.\begin{array}{rcl} 3x+3y-z &=& 0\\ -4x-2y+mz &=& 0\\ 3x+4y+6z &=& 0 \end{array}\right\}$$
halla, usando el método de Gauss y usando determinates para calcular el rango de la matriz asociada, aquel valor o valores de m para los que tenga alguna solución distinta de la trivial. ¿Qué procedimiento te parece más fácil? Resuelve el sistema para ese valor o valores.

(16) Discute, usando el método de Gauss y usando determinates para calcular los rangos de las matrices asociadas y de las matrices ampliadas, los sistemas siguientes. ¿Qué procedimiento te parece mejor? En los casos en que los sistemas sean compatibles, calcula su solución o soluciones usando la regla de Cramer y usando el método de Gauss–Jordan. ¿Qué procedimiento te parece mejor?
$$\text{a)}\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z &=& 1\\ x-2y+z &=& 3\\ 5x-5y+2z &=& m \end{array}\right.\quad \text{b)}\left\{\begin{array}{rcl} mx+y-z &=& 1\\ x-2y+z &=& 1\\ 3x+4y-2z &=& -3 \end{array}\right.\quad \text{c)}\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 1\\ mx-2y+2z &=& 1\\ 2x+y+z &=& 1 \end{array}\right.$$

(17) Elimina los parámetros de los siguientes sistemas:
$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& 2a+b+c-1\\ x_2 &=& -a-2b+c+2\\ x_3 &=& a+3b-2c-5\\ x_4 &=& 4a-2b+6c+4 \end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-3\lambda+2\mu\\ y &=& 2+\lambda+\mu\\ z &=& -2\lambda+\mu \end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{l} x=1+4\lambda+2\mu\\ y=2-2\lambda-\mu\\ z=1+2\lambda+\mu \end{array}\right.$$

(18) Consideramos la aplicación lineal $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^4$, cuya matriz, respecto de las bases canónicas, es
$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 1 & 1\\ 2 & 1\\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
M. Halla unas ecuaciones implícitas de la imagen de f. Decide si el vector $(1,0,-1,2)$ pertenece a la imagen de f y, en caso afirmativo, halla todos los vectores v de $\mathbf{R}^2$ que cumplen $f(v)=(1,0,-1,2)$.

(19) Halla ecuaciones paramétricas e implícitas del plano del espacio afín $\mathbf{R}^3$ que pasa a los puntos $(1,0,1),(0,1,0),(1,0,2)$.

(20) Halla ecuaciones paramétricas e implícitas de la recta del espacio afín $\mathbf{R}^3$ que pasa por el punto $(1,1,1)$ y que tiene al vector $(1,-1,-1)$ como vector director.

(21) Halla explícitamente el conjunto de puntos en la intersección de los planos del espacio afín $\mathbf{R}^3$ de ecuaciones $x+2y-z=1$ y $2x-y+z=-1$.

(22) Encuentra ecuaciones paramétricas e implícitas para el subespacio vectorial de $\mathbf{R}^4$ generado por los vectores $(1,0,1,-1),(1,1,0,-1),(1,1,1,1)$. Haz lo mismo para el subespacio vectorial generado por $(1,0,1,-1),(1,1,0,-1)$.

(23) Calcula unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas de la imagen inversa del vector $(2,0,-2)$ de $\mathbf{R}^3$ por la aplicación lineal $f:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^3$ que tiene como matriz respecto de las bases canónicas a la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$