Ejercicios del tema 3. Segunda parte

17.- Se considera la aplicación lineal f de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^3$ dada por $f(x,y) = (x+y, -y, y-x)$. Halla

(a) la matriz asociada de f respecto de las bases canónicas de $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$;
(b) las ecuaciones de f respecto de las bases canónicas de $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$;
(c) la dimensión del núcleo de f;
(d) una base de la imagen de f y el rango de f.
(e) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva?

18.- Consideramos la aplicación lineal f de $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^2$ dada por $f(x,y,z) = (x+y, y+z)$, la base $B = \{(1,1,1),(0,1,-1),(1,0,0)\}$ de $\mathbf{R}_3$ y la base $B' = \{(1,2),(0,1)\}$ de $\mathbf{R}^2$. Halla la matriz $M_{B,B'}f$ de f respecto de B y B'.

19.- Sean U y V dos espacios vectoriales de dimensiones 3 y 4 respectivamente. Sea $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base de U y sea $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ una base de V. Sea f la aplicación lineal entre U y V que cumple

(i) $f(\vec{u}_1) = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 - 2\vec{v}_4$;
(ii) $f(\vec{u}_2) = \vec{v}_1 - \vec{v}_3$;
(iii) $f(\vec{u}_3) = \vec{v}_2 - \vec{v}_4$.

Halla:

(a) $f(\vec{u})$, si $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3$.
(b) La matriz de f respecto de B_1 y B_2.
(c) El núcleo y la imagen de f.
(d) El conjunto $\{\vec{u} \in U$ tales que $f(\vec{u}) = \vec{v}\}$, donde $\vec{v} = -\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4$. A este conjunto se le llama *imagen inversa* de $\vec{v}$ y se denota por $f^{-1}(\vec{v})$ (cuidado, en esta ocasión, el símbolo f^{-1} no quiere decir aplicación inversa de f; de hecho, en este caso f no tiene aplicación inversa (¿podrías decir por qué?)).

20.- En $\mathbf{R}^3$ consideramos las bases $B_1 = \{\vec{u}_1 = (1,0,0), \vec{u}_2 = (0,1,1), \vec{u}_3 = (0,1,-1)\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1 = (1,1,-1), \vec{v}_2 = (2,-1,-1), \vec{v}_3 = (0,0,2)\}$. Consideramos la aplicación lineal f del espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ en sí mismo que cumple $f(\vec{u}_1) = \vec{v}_1$, $f(\vec{u}_2) = \vec{v}_2$, $f(\vec{u}_3) = \vec{v}_3$. Halla:

(a) La matriz $M_{B_1,B_2}(f)$ de f respecto a las bases B_1 y B_2 y sus ecuaciones respecto de dichas bases.
(b) La matriz $M_{B_1}(f)$ de f respecto a la base B_1 y sus ecuaciones respecto de dicha base.
(c) La matriz $M_{B_1,B_c}(f)$ de f respecto a la base B_1 y a la base canónica B_c de $\mathbf{R}^3$ y sus ecuaciones respecto de dichas bases.
(d) La matriz $M_{B_c}(f)$ de f respecto a la base canónica B_c de $\mathbf{R}^3$ y sus ecuaciones respecto de dicha base.
(e) Una base del núcleo de f.
(f) La dimensión de la imagen de f.
(g) Las imagenes por f de los vectores $(1,1,1)$, $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$ y $(1,2,0)$ de $\mathbf{R}^3$.
(h) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? ¿Es f biyectiva?

21.- Sea f la aplicación lineal de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^3$ que cumple $f(-1,1) = (-2,1,-2)$ y $f(2,1) = (1,1,4)$ y sea g la aplicación lineal de $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^4$ que cumple $g(1,1,2) = (4,1,1,7)$, $g(-1,0,-2) = (-3,0,-2,-7)$ y $g(3,2,0) = (11,2,-2,-3)$. Halla:

(a) La matriz de $g \circ f$ respecto de las bases canónicas de $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^4$.
(b) Las ecuaciones de $g \circ f$ respecto de las bases canónicas de $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^4$.
(c) La dimensión del núcleo de $g \circ f$ y la dimensión de la imagen de $g \circ f$.

22.- Sea $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(1-1,1)\}$ una base de $\mathbf{R}^3$. Sea f una aplicación lineal de $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^4$ que cumple $f(1,1,0) = (1,1,2,-1)$ y $f(1,-1,1) = (1,-1,3,0)$.

(a) ¿Es f única?
(b) Sea g una aplicación lineal de $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^4$ tal que $g(1,1,0) = (1,1,2,-1)$, $g(1,-1,1) = (1,-1,3,0)$ y $(1,0,1)$ está en el núcleo de g. ¿Es g única?
(c) Halla la matrices $M_{B,B_c^4}(g)$ y $M_{B_c^3,B_c^4}(g)$, donde B_c^3 es la base canónica de $\mathbf{R}^3$ y B_c^4 es la base canónica de $\mathbf{R}^4$.
(d) Halla la dimensión de la imagen de g.
(e) Halla una base del núcleo de g y una base de la imagen de g.

23.- En $\mathbf{R}^4$ consideramos el subespacio vectorial $W = \{(x,0,z,0) \mid x,z \in \mathbf{R}\}$. Halla
(a) una aplicación lineal f de $\mathbf{R}^4$ a $\mathbf{R}^4$ tal que $\mathrm{Im} f = W$;
(b) una aplicación lineal g de $\mathbf{R}^4$ a $\mathbf{R}^4$ tal que $\mathrm{Ker} g = W$.

24.- Halla una aplicación lineal f de $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^4$ tal que $f(1,2,-1) = (1,1,0,4)$ y cuyo núcleo sea el subespacio $\big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+y-z = x-y = 0\big\}$. ¿Es f única?

25.- Halla una aplicación lineal f de $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ que tenga por núcleo el subespacio generado por $(1,0,2)$ y por imagen el subespacio generado por $(1,2,-1)$ y $(2,1,2)$. ¿Es f única?

26.- Sea f la aplicación lineal de $\mathbf{R}^4$ a $\mathbf{R}^3$ cuya matriz respecto de las bases canónicas respectivas es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Halla para qué valores de λ el vector $\vec{v} = (1,2,3)$ pertenezca a la imagen de f.
(b) Para el valor $\lambda = -1$ determina el núcleo y la imagen de f.
(c) Para cada valor de λ, halla la dimensión del núcleo y de la imagen de f.

27.- Describe geométricamente las aplicaciones lineales de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$ cuya matriz con respecto a la base canónica es una de las matrices A siguientes:

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(c) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{(d) } A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

28.- Consideramos la base $B = \{(-1,1),(1,1)\}$ de $\mathbf{R}^2$. Describe geométricamente las aplicaciones lineales de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$ cuya matriz con respecto a la base B es una de las matrices A siguientes:

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

29.- Sean A_1 y A_2 dos matrices reales $m \times n$. Recuerda que A_2 es *equivalente* a A_1 si existe una matriz invertible P de orden n y una matriz invertible Q de orden m tal que $A_2 = Q \cdot A_1 \cdot P$.
(a) Demuestra que A_2 es equivalente a A_1 si y solo si es posible pasar de A_1 a A_2 realizando una sucesión (finita) de operaciones elementales en las filas y en columnas de A_1.
(b) Demuestra que A_2 es equivalente a A_1 si y solo si el rango de A_2 es igual al rango de A_1.
(c) Consideramos las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Demuestra que A_1 y A_2 son equivalentes y encuentra matrices invertibles P y Q tales que $A_2 = Q \cdot A_1 \cdot P$. Haz lo mismo para A_1 y A_3.