MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA ESTADÍSTICA II, Curso 2020–21, grupo B

Ejercicios del tema 3, primera parte

1.- Estudia si las siguientes aplicaciones son lineales

$$\begin{array}{rccc} f_1: & \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (0,y,0) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_2: & \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x,x+y,x-y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f_3: & \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x,-y,z+1) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_4: & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ & x & \mapsto & (\cos x, \operatorname{sen} x) \end{array}$$

2.- Sea f una aplicación lineal de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$ que cumple $f(1,1)=(2,3)$ y $f(0,1)=(1,2)$.

(1) Halla $f(3,-2)$
(2) Dado un vector cualquiera (a,b) de $\mathbf{R}^2$, halla $f(a,b)$.
(3) Determina el núcleo de f.
(4) Halla una base de la imagen de f y la dimensión de la imagen de f.
(5) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva?

3.- Sea f una aplicación lineal de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^3$ que cumple $f(1,1)=(1,0,-1)$ y $f(1,2)=(0,-1,1)$.

(1) Halla $f(3,5)$.
(2) Dado un vector cualquiera (a,b) de $\mathbf{R}^2$, halla $f(a,b)$.
(3) Determina el núcleo de f.
(4) Halla una base de la imagen de f y la dimensión de la imagen de f.
(5) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva?

4.- Estudia si existe alguna aplicación lineal de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$ que cumpla $f(1,0)=(1,1)$, $f(1,1)=(0,1)$ y $f(1,-1)=(1,0)$.

5.- Sea f una aplicación lineal de $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ dada por $f(x,y,z)=(z,x-y,-z)$.

(1) Halla una base del núcleo de f y la dimensión del núcleo de f.
(2) Halla una base de la imagen de f y la dimensión de la imagen de f.
(3) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva?

6.- Sea f una aplicación lineal de $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^2$ dada por $f(x,y,z)=(x+z,2x-y+z)$.

(1) Halla una base del núcleo de f y la dimensión del núcleo de f.
(2) Halla una base de la imagen de f y la dimensión de la imagen de f.
(3) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva?

7.- Sea $f:\mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la aplicación lineal dada por $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(y_1,y_2,y_3)$ donde

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

(1) Da unas ecuaciones implícitas y una base del núcleo de f. Halla la dimensión del núcleo de f.
(2) Da una base de la imagen de f y calcula la dimensión de la imagen de f.
(3) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva?

8.- Sea $f:\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ la aplicación lineal dada por $f(x_1,x_2,x_3)=(y_1,y_2,y_3,y_4)$ donde

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(1) Halla el núcleo de f.
(2) Da una base de la imagen de f.
(3) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva?

9.- Sea V el espacio vectorial formado por los polinomios en una variable x con coeficientes reales y grado menor o igual que 3. Para todo polinomio $p(x)$ de V denotamos por $p'(x)$ su derivada. Sea

$$\begin{array}{rccc} f: & V & \longrightarrow & V \\ & p(x) & \mapsto & p'(x). \end{array}$$

(1) Comprueba que f es una aplicación bien definida.
(2) Demuestra que f una aplicación lineal.
(3) Determina el núcleo de f. ¿Qué dimensión tiene?
(4) Determina la imagen de f. ¿Qué dimensión tiene?
(5) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva?

10.- Sea V el espacio vectorial formado por los polinomios una variable X con coeficientes reales y grado menor o igual que 2. Consideramos la aplicación lineal f de V en V que cumple $f(1+x+x^2) = -1+3X$, $f(1+x-x^2) = 3+2x$ y $f(1-x+x^2) = 1+2x$.

(1) Halla $f(-25+15x-10x^2)$ y $f(a+bX+cX^2)$.
(2) Halla la dimensión y una base del núcleo de f.
(3) Halla la dimensión y una base de la imagen de f.
(4) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva?

11.- Sea V un espacio vectorial y sean U y W dos subespacios vectoriales de V suplementarios. Recuerda que, para todo $\overline{v} \in V$, existen $\overline{u} \in U$ y $\overline{w} \in W$ únicos, tales que $\overline{v} = \overline{u} + \overline{w}$. Consideramos la aplicación

$$f: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ \overline{v} & \mapsto & \overline{w}, \end{array}$$

donde $\overline{w}$ es el vector de W que aparece en la expresión anterior $\overline{v} = \overline{u} + \overline{w}$.

(1) Comprueba que f es una aplicación bien definida.
(2) Demuestra que f una aplicación lineal.
(3) Determina el núcleo de f.
(4) Determina la imagen de f.
(5) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva?
(6) Si $V = \mathbf{R}^3$, $U = L((0,0,1))$ y $W = L((1,0,0),(0,1,0))$, calcula $f(x,y,z)$.
(7) Si $V = \mathbf{R}^3$, $U = L((1,1,1))$ y $W = L((1,0,0),(0,1,0))$, calcula $f(2,2,2)$, $f(1,-7,0)$, $f(0,0,1)$ y $f(x,y,z)$.

12.- Sea $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la aplicación lineal dada por $f(x,y,z) = (x+2y+z, -y+z, x-z)$ y sea $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ la aplicación lineal dada por $g(x,y,z) = (x+2y, -x+y+z, 2x+z, x+y+z)$.

(1) Estudia si f es biyectiva y, en caso afirmativo, halla su aplicación inversa.
(2) Halla $g \circ f$ y calcula la dimensión de su imagen. ¿Es $g \circ f$ inyectiva?

13.- Sea $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^5$ una aplicación lineal.

(1) Si f es sobreyectiva y la dimensión del núcleo de f es 2, ¿cuánto vale n?
(2) Si f es sobreyectiva, ¿qué condición ha de cumplir n?
(3) Si f es inyectiva, ¿qué condición ha de cumplir n?
(4) Si $n = 6$, ¿puede ser f inyectiva?
(5) Si $n = 6$, ¿es f sobreyectiva necesariamente?
(6) Si $n = 4$, ¿es f necesariamente inyectiva?
(7) Si $n = 4$, ¿puede ser f sobreyectiva?
(8) Si $n = 5$, ¿es f necesariamente biyectiva?

14.- ¿Existe alguna aplicación lineal f de $\mathbf{R}^{2018}$ a $\mathbf{R}^{2018}$ tal que Ker$f$ =Imf? ¿Y alguna aplicación lineal f de $\mathbf{R}^{2019}$ a $\mathbf{R}^{2019}$ tal que Ker$f$ =Imf?

15.- Un endomorfismo f es una aplicación lineal de un espacio vectorial V en sí mismo. Se dice que un vector $\overline{u} \in V$ es fijo por un endomorfismo f de V si verifica que $f(\overline{u}) = \overline{u}$. Halla los vectores fijos de los endomorfismos f de $\mathbf{R}^3$ dados por:

(1) $f(x,y,z) = (x, x+y, x-y)$.
(2) $f(x,y,z) = (2x-y+z, 4x-2z, 2x+y+2z)$.
(3) $f(x,y,z) = (x+y+z, x-y+z, x+2y+2z)$.

16.- Halla todos los vectores $u \in \mathbf{R}^3$ que verifican la igualdad $f(\overline{u}) = \lambda\overline{u}$, para algún escalar λ de $\mathbf{R}$, para los endomorfismos f de $\mathbf{R}^3$ dados por:

(1) $f(x,y,z) = (3x, 4y, 5z)$.
(2) $f(x,y,z) = (2x-y, 2y-z, 2z-x)$.
(3) $f(x,y,z) = (x, x+y, x+y+z)$.