MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA ESTADÍSTICA II, Curso 2020–21, grupo B

Ejercicios del tema 2

1.- Estudia si el conjunto $M = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1.3} \\ a_{2.1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} : a_{i,j} \in \mathbf{R} \right\}$ de matrices en $\mathbf{R}$ respecto de la suma de matrices y del producto por escalares es un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$.

2.- Estudia si el conjunto $S = \{\{x_n\}_0^\infty : x_n \in \mathbf{R}\}$ de sucesiones en $\mathbf{R}$ respecto de las operaciones

$$\begin{aligned} \{x_n\} + \{y_n\} &= \{x_n + y_n\} \\ \alpha\{x_n\} &= \{\alpha x_n\} \end{aligned}$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$.

3.- Calcula el valor de a y b para que el vector $\vec{v} = (a, -2, 1, b)$ se pueda expresar como combinación lineal de los vectores $\vec{u_1} = (1, 2, 3, 4)$ y $\vec{u_2} = (-1, 0, -2, 3)$.

4.- Siendo $\vec{u_1} = (-5, 2, 8, -16)$, $\vec{u_2} = (-5, 3, 17, -14)$ y $\vec{u_3} = (1, 1, 11, 6)$, expresa $\vec{u_1}$ como combinación lineal de $\vec{u_2}$ y $\vec{u_3}$.

5.- Sea $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ un conjunto de vectores de $\mathbf{R}^3$ tal que $\vec{u_1} = (1, 2, 3)$, $\vec{u_2} = (2, 1, 0)$ y $\vec{u_3} = (-1, -1, 0)$. Demuestra que estos vectores forman una base de $\mathbf{R}^3$ y calcula las coordenadas del vector $(1, -1, 0)$ respecto de esta base.

6.- Determina cuáles de los conjuntos siguientes de vectores son linealmente independientes, cuáles generan el espacio y cuáles forman una base del espacio:

En $\mathbf{R}^2$:
(a) $\{(4/5, 5/4),\ (4, 5)\}$,
(b) $\{(1, 2),\ (11, -7\sqrt{2}),\ (-1, 1)\}$.
En $\mathbf{R}^3$:
(c) $\{(1, -1, -\sqrt{5}),\ (1, 1, \sqrt{5}),\ (0, 1, 2\sqrt{5})\}$,
(d) $\{(1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 2), (-1, -2, -3)\}$.
En $\mathbf{R}^4$:
(e) $\{(1, 1, 1, 1),\ (1, -1, -1, 1),\ (1, -1, 1, -1),\ (1, 1, -1, -1)\}$,
(f) $\{(1, 1, 2, 4),\ (2, -1, -5, 2),\ (1, -1, -4, 0),\ (2, 1, 1, 6)\}$.

7.- Encuentra, si es posible, una base de $\mathbf{R}^3$ contenida en el conjunto $\{(1, 0, 2),\ (0, 1, 1),\ (2, 1, 5),\ (1, 1, 3),\ (1, 2, 1)\}$.

8.- Encuentra, si es posible, una base de $\mathbf{R}^4$ que contenga al conjunto $\{(1, 2, 3, 4), (1, -2, 3, 1)\}$.

9.- Determina todos los valores de α para los que $L((1, 1, 0), (-1, 0, -1), (0, 1, \alpha))$ es igual a $\mathbf{R}^3$.

10.- Sea λ un elemento de $\mathbf{R}$. Halla los valores de λ para los que el conjunto $\{(\lambda, 1-\lambda, 0), (0, \lambda, 1-\lambda), (1-\lambda, 0, \lambda)\}$ de $\mathbf{R}^3$ es linealmente independiente.

11.- En un espacio vectorial V sobre $\mathbf{R}$ de dimensión 3, demuestra que si los vectores $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ forman una base, también es una base la formada por los vectores $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$, siendo

$$\vec{v_1} = \vec{u_1} + 2\vec{u_2}, \qquad \vec{v_2} = 2\vec{u_1} - \vec{u_2}, \qquad \vec{v_3} = \vec{u_3}$$

12.- Demuestra que el conjunto formado por los polinomios

$$\{1 + x, x^2, 3x - 2x^2\}$$

es una base del espacio de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que dos y halla las coordenadas del polinomio $1 + 2x - x^2$ en dicha base.

13.- Estudia si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbf{R}^3$:
(1) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x + y + z = 1\}$.
(2) $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x + y + z = 0\}$.
(3) $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x \geq 0\}$.

14.- Determina cuánto deben valer a y b para que el vector $\vec{v} = (a, 1, b, -5)$ pertenezca al subespacio vectorial engendrado por los vectores $\vec{u_1} = (2, 1, 0, 4)$ y $\vec{u_2} = (-1, 1, -1, 1)$.

15.- Halla la dimensión y una base de cada uno de los subespacios de $\mathbf{R}^5$ generados por los siguientes subconjuntos de vectores:

$$\begin{aligned} A &= \{(1,1,1,-1,-1),(2,0,2,0,1),(3,1,3,-1,0),(5,1,5,-1,1)\}, \\ B &= \{(6,3,9,3,3),(8,4,12,4,4),(10,5,15,5,5)\}, \\ C &= \{(1,2,3,4,5),(2,2,2,2,2),(-5,-4,-3,-2,-1),(6,7,8,9,10)\}. \end{aligned}$$

16.- Consideramos el subconjunto W de $\mathbf{R}^4$ formado por los elementos (w, x, y, z) que verifican

$$w + x + y + z = 0 \qquad w - x + y - z = 0,$$

(1) Demuestra que W es un subespacio vectorial de dimensión 2 de $\mathbf{R}^4$.
(2) Estudia si el vector $\vec{u} = (4, 1, -4, -1)$ pertenece a W.
(3) Estudia si los vectores $\vec{u_1} = (2, 1, -2, -1)$ y $\vec{u_2} = (1, 0, -1, 0)$ forman una base de W.
(4) En caso de que las respuestas a (2) y (3) sean afirmativas, halla las coordenadas de $\vec{u}$ respecto de $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$.

17.- En $\mathbf{R}^3$ se considera el conjunto de los vectores (x, y, z) definido por

$$S = \{(x, y, z) : 2x - y + z = 0 \text{ y } x + y + z = 0\}\,.$$

Demuestra que S es un subespacio de $\mathbf{R}^3$ de dimensión 1 y halla una base del mismo.

18.- En $\mathbf{R}^4$ se consideran los subespacios

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z, t) : x + y + z = 0, z + t = 0\} \qquad \text{y} \\ S' &= \{(\lambda + \mu, \lambda + 2\mu, \lambda + 3\mu, \lambda + \mu), \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}. \end{aligned}$$

Halla bases de $S \cap S'$ y de $S + S'$.

19.- En $\mathbf{R}^3$ se consideran los subespacios

$$\begin{aligned} U &= L\{(1,1,1),(1,2,0),(3,5,1)\} \qquad \text{y} \\ W &= \{(x, y, z) : x = 0, y + z = 0\}. \end{aligned}$$

Halla bases de $U \cap W$ y de $U + W$.

20.- Halla un subespacio suplementario del subespacio vectorial de $\mathbf{R}^4$ de ecuación implícita $x + y + z + t = 0$.

21.- Consideramos los subespacios vectoriales $W = L((1, 2, -1)$ y $W' = L((1, 1, 0), (1, 0, -1))$ de $\mathbf{R}^3$.
(1) Demuestra que W' es un subespacio suplementario de W.
(2) Encuentra otro subespacio W'' suplementario de W.

22.- Halla las ecuaciones del cambio de base:
(1) De la base $B = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ a la base $B' = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$, sabiendo que

$$\vec{u_1} = \vec{v_1} + \vec{v_2}, \qquad \vec{u_2} = \vec{v_2} + \vec{v_3}, \qquad \vec{u_3} = \vec{v_1} + \vec{v_3}.$$

(2) De la base B' a la base B.
(3) Las coordenadas del vector $\vec{w} = \vec{u_1} + 3\vec{u_3}$ respecto de B' y las de $\vec{x} = 5\vec{v_1} + 3\vec{v_2} + \vec{v_3}$ respecto de B.

23.- Para cada uno de los pares siguientes de bases B y B' de un espacio vectorial V, halla la matriz del cambio de base de la base B a la base B':
(1) $V = \mathbf{R}^2$:
  (i) $B = \big\{(1, 0), (0, 1)\big\}$, y $B' = \big\{(1, \sqrt{3}), (\sqrt{3}, 1)\big\}$;
  (ii) $B = \big\{(1, 0), (1, 1)\big\}$ y $B' = \big\{(1, -1), (1, 1)\big\}$.
(2) $V = \mathbf{R}^3$:
  (i) $B = \big\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\big\}$ y $B' = \big\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\big\}$;
  (ii) $B = \big\{(13, 5, -6), (8, -10, -4), (-17, 0, -7)\big\}$ y $B' = \big\{(1, -1, 1), (-1, 1, 1), (1, 1, 1)\big\}$.