Ejercicios del tema 1

(1) Discute y resuelve por Gauss:

a) $\begin{cases} 3x - y + z = 15 \\ x - y + z = 7 \\ x + 3y - z = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - z = 4 \\ y + z = 8 \\ 2x + y + z = 18 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2y + 3z = 15 \\ 3x + y = 12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ y - z = -3 \\ -x + 3y + z = 10 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + y = 14 \\ y + z = 10 \\ x + z = 8 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ x + y + 4z = 24 \\ 2x + 2y - z = 12 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x - 4y - 2z = -18 \\ 3x - 5y + z = -5 \\ x - 3y - z = -5 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 2 \\ 2x - 2y + 5z = 5 \\ 3x + 4y + 2z = -1 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = -7 \end{cases}$ k) $\begin{cases} 5x + 2y - 3z = -2 \\ 2x - 2y + 5z = 0 \\ 3x + 4y + 2z = -10 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 6x + 4y + 2z = 0 \\ 4x + 6y + 2z = 0 \\ 6x + 3y + 9z = 0 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x + y + z + t = 6 \\ x - y + z - t = -2 \\ 3x - y + 3z - t = 2 \\ 7x - 5y + 7z - 5t = -6 \end{cases}$ n) $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + z = 0 \\ x + 3y + z + 3t = 0 \\ x - y + z + t = 0 \end{cases}$

o) $\begin{cases} x - y + z - u + v = 0 \\ x + y + 2z + 2u - v = 0 \\ -x + 5y + z + 7u - 5v = 0 \end{cases}$ p) $\begin{cases} x - y + t = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ y - 3z + 2t = 0 \end{cases}$

(2) Dado el sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \end{cases}$$

(a) Añade una ecuación lineal de modo que el sistema que resulte sea incompatible.
(b) Añade una ecuación lineal de modo que el sistema de resulte sea compatible indeterminado. Resuelve el sistema formado.

(3) En los siguientes apartados se dan una serie de puntos del plano. Encuentra la función polinómica del grado que se indica, de modo que su grafica contenga a dichos puntos
a) $(1,4)$ y $(4,7)$, $n = 1$
b) $(1,4)$, $(4,7)$ y $(5,0)$, $n = 2$
c) $(1,4)$, $(4,7)$, $(5,0)$ y $(6,1)$, $n = 3$
d) $(0,0)$, $(1,4)$, $(4,7)$, $(5,0)$ y $(6,1)$, $n = 4$

(4) Calcula el valor de m para que el siguiente sistema tenga alguna solución distinta de la trivial $(0,0,0)$. Resuélvelo por Gauss para ese valor.

$$\begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ -4x - 2y + mz = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$$

(5) Para cada valor $m \in \mathbf{R}$, discute y resuelve por Gauss los siguientes sistemas, en los casos en que sea posible:

a) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$

(6) Para las siguientes matrices, calcula su forma normal de Hermite por filas y su rango:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(7) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

efectúa las operaciones: $A \cdot B$, $(\frac{1}{2}A) \cdot (-4B)$, AA^t, B^tB. ¿Se puede calcular $A + B$ o $B \cdot A$?

(8) Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden. ¿Son ciertas las siguientes igualdades? En caso de que no lo sean, ¿para qué pares de matrices A y B sí lo serían?

$$\begin{array}{ccc} \text{(i)} & (A+B)^2 & = & A^2 + 2AB + B^2 \\ \text{(ii)} & (A-B)^2 & = & A^2 - 2AB + B^2 \\ \text{(iii)} & (A+B)(A-B) & = & A^2 - B^2 \end{array}$$

(9) Resuelve la ecuación en X, $AX - 2B + C = D$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(10) Halla todas las matrices que conmuten con la matriz B del ejercicio anterior.

(11) Resuelve por Gauss el sistema de matrices

$$\left\{ \begin{array}{r} X + 3Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ 3X - 2Y = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

(12) Calcula la matriz A^n, con $n \in \mathbf{N}$, siendo:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(13) Calcula

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^{40} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{83}.$$

(14) Identifica las transformaciones elementales que aparecen en las siguientes matrices y halla también su inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(15) Halla, si es posible, la inversa de las matrices utilizando la definición y usando el método de Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(16) Determina cuáles de las siguientes matrices son regulares y calcula, por Gauss, la inversa de las que lo sean:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -2 & -4 & -6 & -8 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

(17) Calcula el rango de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & 7 & -3 & -7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

(18) Una industria produce tres productos X, Y y Z, utilizando dos tipos de materias primas, S y T. Para la manufactura de cada kilo de X se usa 1 gramo de S y 2 gramos de T, para cada kilo de Y, 1 gramo de S y 1 gramo de T y, para cada kilo de Z, 1 gramo de S y 4 gramos de T. El precio de venta del kilo de cada uno de los productos X, Y y Z es $2, 3$ y 5 euros respectivamente. Con la venta de toda la producción de X, Y y Z fabricada con 1 kilo de S y 2 kilos de T, la industria recaudó 2500 euros. ¿Cuántos kilos de cada uno de los productos X, Y y Z se vendieron?

(19) Tres productos X, Y y Z tiene los siguientes porcentajes de hierro, cin y cobre:

	Fe	Zn	Cu
X	50	30	20
Y	40	30	30
Z	30	70	0

¿Cuánto de cada producto debe combinarse para obtener un nuevo producto que contenga 44% de hierro, 38% de cinc y 18% de cobre?

(20) Sean $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dos sucesiones de números reales tales que

$$x_{n+1} = x_n + y_n, \qquad y_{n+1} = -2x_n + 3y_n$$

para cada $n \in \mathbf{N}$. Partiendo de los datos iniciales $x_1 = 2, y_1 = 4$, calcula los primeros valores de la sucesión.

(21) Consideramos cierto grupo de población que está sufriendo una epidemia. En un día dado, una persona de dicho grupo está sana o está enferma. De las personas que están sanas en un día dado, el 95% seguirán sanas al día siguiente. De las personas que están enfermas en un día dado, el 55% seguirán enfermas al día siguiente.

(a) Sea x_n es el porcentaje de personas sanas en la población total el día n (si el porcentaje es, por ejemplo, el 70%, entonces $x_n = 0,7$) y sea y_n el porcentaje de personas enfermas en la problación total el día n. Encuentra la matriz T tal que

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

(b) Si cierto día el porcentaje de población enferma es el 20%, ¿cuál será el porcentaje de enfermos al día siguiente? ¿y al cabo de dos días?