



## Problemas de cinemática<sup>1</sup>

### Problema 1

Una partícula describe la trayectoria plana dada por las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases}, \text{ siendo } R = 1\text{m} \text{ y } \theta \text{ el ángulo que forma el vector de posición con el eje horizontal Ox.}$$

La ley horaria es  $s(t) = v_1 t$ , con  $v_1 = 2\text{ m/s}$ . En el instante inicial  $s_0 = \theta_0 = 0$ . Se pide:

1. Dibuja la trayectoria y la posición de la partícula sobre ella para  $\theta = 30^\circ$ . ¿Cuánto tiempo ha tardado llegar a dicha posición?
2. Determina su ley vectorial horaria  $\vec{r}(t)$ .
3. Calcula su velocidad en coordenadas:
  - cartesianas
  - intrínsecas
  - polares.
4. Análogamente para su aceleración.

### Problema 2

Un radar que sigue a un avión (A) indica su posición mediante sus coordenadas polares ( $r(t), \theta(t)$ ). En un cierto instante se encuentra en la posición definida por  $\theta = 40^\circ$  y  $r = 1920\text{ m}$ . De medidas sucesivas de dichas coordenadas  $r$  y  $\theta$  se deduce que las derivadas en ese instante son las siguientes:  $\dot{r} = 93,6\text{ m/s}$ ;  $\dot{\theta} = -0,039\text{ rad/s}$ ;  $\ddot{r} = 2,923\text{ m/s}^2$  y  $\ddot{\theta} = 0,003807\text{ rad/s}^2$ . Se pide determinar:

1. Expresiones generales de la velocidad y aceleración del avión en coordenadas polares para un instante cualquiera.
2. Particularizar dichas expresiones para el instante en el que se conoce su posición ( $\theta = 40^\circ$  y  $r = 1920\text{ m}$ )
3. Expresar dichos valores de la velocidad y de la aceleración en coordenadas cartesianas.

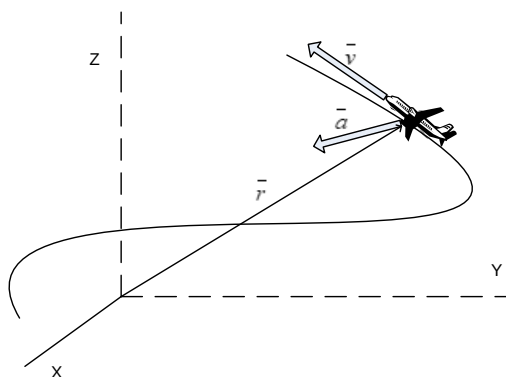
### Problema 3

Un avión describe una trayectoria curvilínea en el espacio. En la posición representada en la figura tiene una velocidad  $\vec{v} = v(-\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})\text{ m/s}$  y una aceleración  $\vec{a} = a(-\vec{j} + \vec{k})\text{ m/s}^2$ . Determina para dicho instante:

1. Componente tangencial de la aceleración del avión.
2. Componente normal de la aceleración del avión.

<sup>1</sup> Nota: Todas las magnitudes se expresan en unidades fundamentales SI

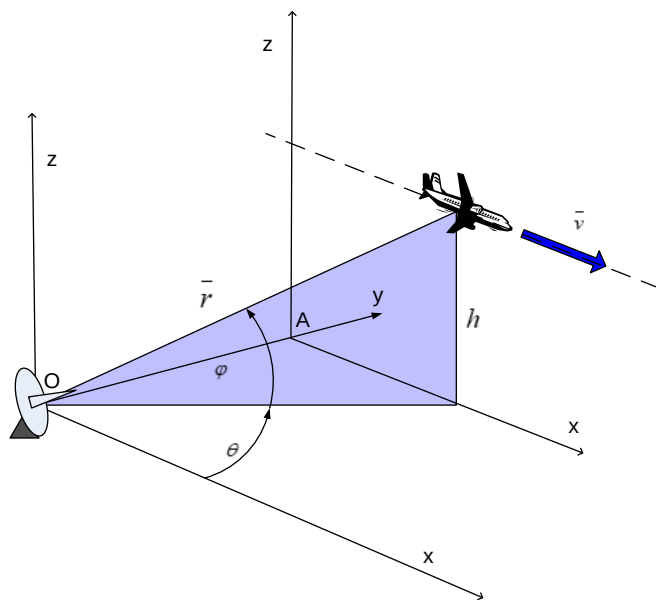
3. Vectores unitarios  $\bar{\tau}$ ,  $\bar{n}$  y  $\bar{b}$  del triedro intrínseco.



#### Problema 4

Un avión vuela horizontalmente con velocidad  $\vec{v}$  a una altura  $h$  respecto del punto O, en el que se halla situada una antena siguiendo su trayectoria rectilínea y uniforme. En el instante inicial ( $t_0 = 0$ ) el avión sobrevuela la posición A. Sabiendo que la distancia del punto A al punto O es  $d$ , determinar:

1. Posición del avión indicando sus coordenadas esféricas ( $r, \theta, \varphi$ ).
2. Velocidad del avión en el sistema de coordenadas esféricas centrado en la antena.
3. Si a partir de un determinado instante comienza a variar su velocidad,  $v(t)$ , siguiendo la misma trayectoria, obtener su aceleración en el sistema de coordenadas esféricas centrado en la antena.



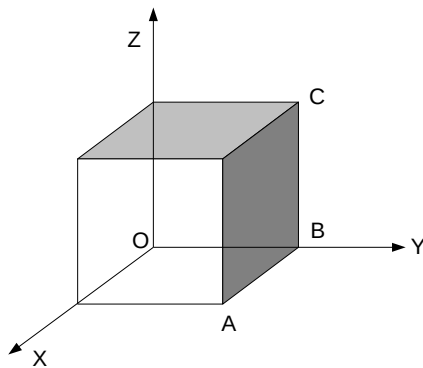
#### Problema 5

Aplica la expresión que relaciona las derivadas de un vector en distintos sistemas de referencia para obtener:

1. Derivadas respecto del tiempo de los versores ( $\bar{u}_\rho, \bar{u}_\theta, \bar{u}_z$ )
2. (OPCIONAL) Derivadas respecto del tiempo de los versores ( $\bar{u}_r, \bar{u}_\theta, \bar{u}_\varphi$ )

### Problema 6

En la figura se muestra un cubo cuyas aristas tienen de longitud  $L$ . En la posición representada en la figura se conocen las velocidades lineales de sus vértices A, B y C, siendo:



$$\begin{aligned} \vec{v}^A &= -v\vec{i} - v\vec{j} + v\vec{k} \\ \vec{v}^B &= -v\vec{i} + 2v\vec{k} \\ \vec{v}^C &= 2v\vec{k} \end{aligned}$$

Determinar para dicho instante:

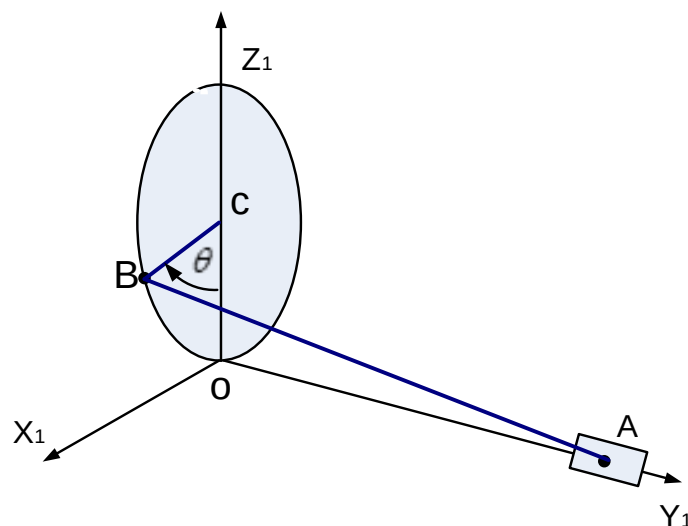
1. Velocidad angular
2. ¿Es posible determinar la velocidad angular del sólido si solo se conocen las velocidades de dos puntos?

### Problema 7

En el mecanismo representado en la figura, la manivela conductora  $CB$  gira en el plano vertical  $X_1OZ_1$  con velocidad angular constante  $\omega$  rad/s. La biela  $BA$  transmite el movimiento a la corredera  $A$  que se traslada sobre el eje  $OY_1$ . Si en el instante inicial la biela  $BA$  está horizontal (B coincide con O), se pide calcular para cualquier instante:

1. Velocidad del punto B
2. Aceleración del punto B indicando cuáles son las componentes tangencial y normal
3. Velocidad de la corredera A

DATOS: Longitud manivela conductora  $CB = R$ ; Longitud de la biela  $AB = L$



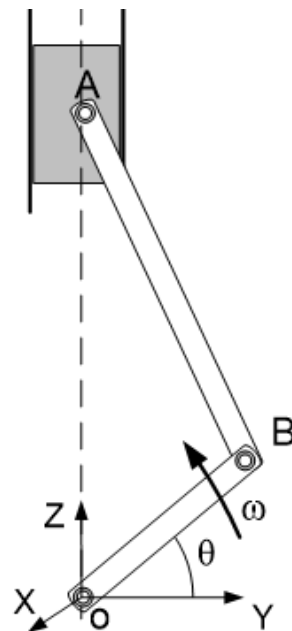
### Problema 8

En la figura aparece el mecanismo [biela-manivela del motor de explosión](#) de un coche, que está constituido por cigüeñal, biela y émbolo. Si el cigüeñal (manivela) gira en el sentido antihorario con una velocidad angular constante  $\omega$ . Cuando el coche se encuentra parado y con el motor encendido, calcular:

1. Velocidad lineal del punto B
2. Aceleración lineal de B
3. Velocidad lineal del émbolo
4. Velocidad angular de la biela AB
5. (OPCIONAL) Aceleración angular de la biela AB
6. Calcular dichos valores para el caso en que: manivela forma  $45^\circ$  con la horizontal ( $\theta = \pi/4$ );  $\omega = 1500 \text{ rpm}$ ;  $OB=R=50 \text{ mm}$ ;  $AB=L=150 \text{ mm}$

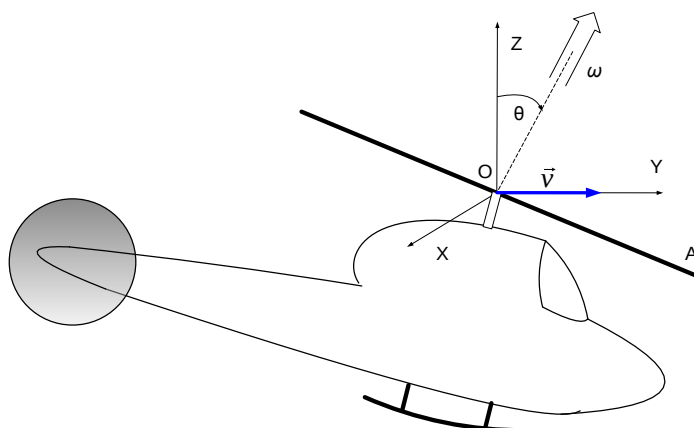
Se recomienda utilizar los ejes  $OXYZ$  representados en la figura y que están ligados al coche.

Datos:  $OB = R$   
 $AB = L = 3R$



### Problema 9

Un helicóptero avanza horizontalmente con velocidad constante  $v$ . El eje rotor principal del helicóptero está inclinado un ángulo  $\theta$  respecto de la vertical hacia delante, y contenido en el plano  $OYZ$ , siendo  $R$  la longitud de las palas. La velocidad angular del rotor principal es  $\omega$  constante. Se pide determinar:

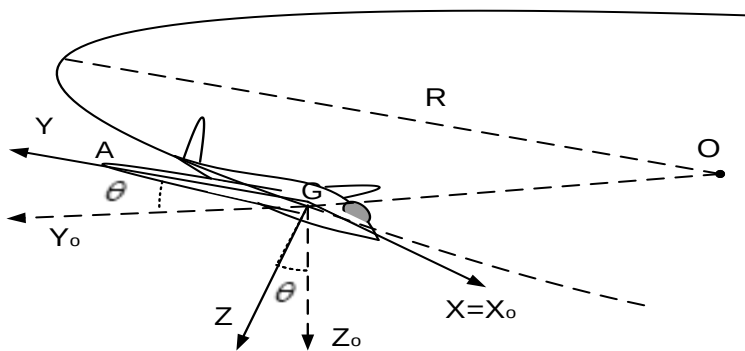


1. Velocidad angular del rotor respecto de suelo
2. Aceleración angular del rotor respecto de suelo
3. Velocidad del piloto respecto del suelo
4. Velocidad del extremo de la pala cuando se sitúa en la parte delantera, sobre el eje longitudinal del helicóptero (punto A)
5. (OPCIONAL) Velocidad del punto A, extremo de la pala, en una posición cualquiera
6. (OPCIONAL) Aceleración del punto A, extremo de la pala, en una posición cualquiera

### Problema 10

El avión de la figura es un prototipo y se encuentra efectuando pruebas de vuelo. En este momento se halla viajando con velocidad constante  $v$  sobre una trayectoria circular de radio  $R$  situada en un plano horizontal. Los ejes  $GXYZ$  están fijos al avión. El eje  $GX$  está contenido en el plano de la trayectoria y es tangente a la misma, mientras que el eje  $Z$  está inclinado respecto a la vertical un ángulo constante  $\theta$ . Se pide determinar del movimiento del avión respecto del suelo:

- Velocidad angular del avión
- Aceleración angular
- Aceleración del punto  $G$  indicando cuáles son las componentes tangencial y normal
- Velocidad del punto  $A$  situado en el extremo del ala que tiene de coordenadas respecto de los ejes  $GXYZ$  ligados al avión  $(0, L, 0)$
- Aceleración del mismo punto  $A$

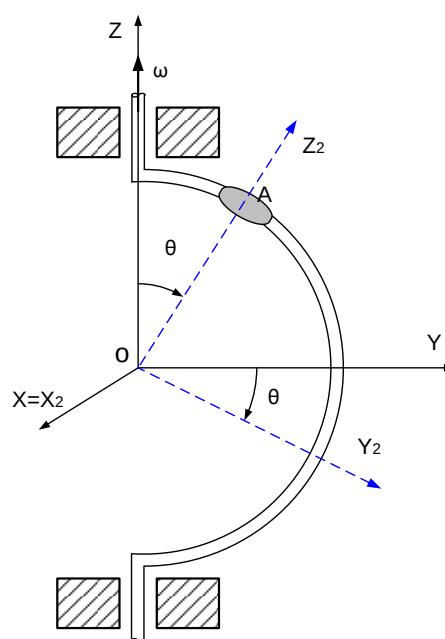


### Problema 11

Una corredera desciende por una armadura semicircular de radio  $R$  obligada a girar alrededor de la vertical con una velocidad angular constante  $\omega$ . Para definir su movimiento se ha ligado a dicha corredera el sistema de ejes  $OX_2Y_2Z_2$  representado en la figura, de forma que  $OZ_2$  acompaña en todo instante al centro de la corredera (punto  $A$ ). Si inicialmente la corredera está situada en el punto más alto de la armadura ( $\theta_0 = 0$ ) y a lo largo de todo el movimiento la velocidad de su punto  $A$  ( $X_2=0, Y_2=0, Z_2=R$ ) relativa a la armadura es de módulo constante  $v$ , determinar:

- Velocidad angular de la corredera relativa a la armadura
- Velocidad angular absoluta de la corredera
- Velocidad lineal absoluta del punto  $A$  de la corredera
- Aceleración angular absoluta de la corredera
- Aceleración lineal absoluta del punto  $A$  de la corredera

Se recomienda utilizar los ejes  $OXYZ$  representados en la figura y que giran con la armadura.

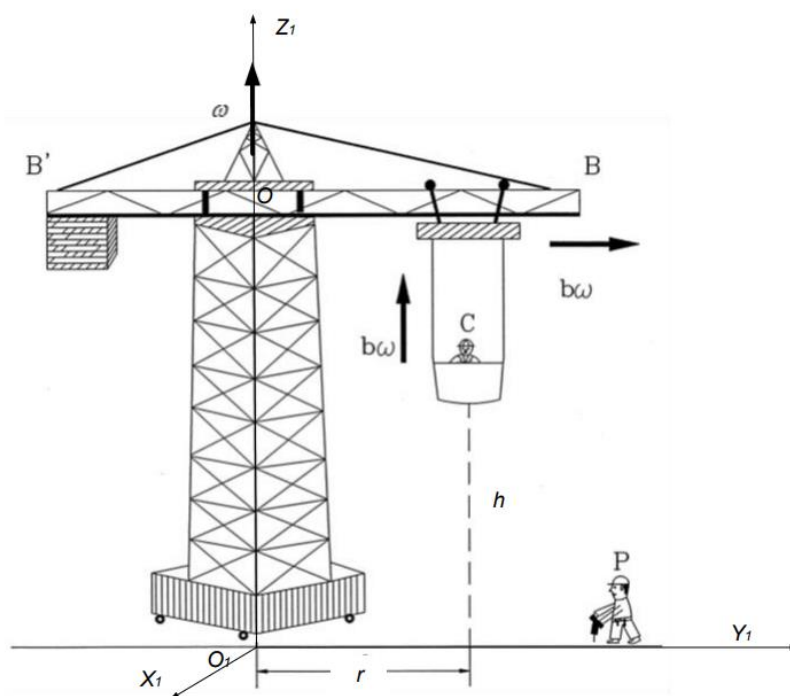


### Problema 12

Un mecánico C se encuentra dentro de la cazoleta de una **grúa torre** que es puesta en movimiento por un operario P que se halla en el suelo a una distancia  $a$  m del eje vertical de la grúa ( $O_1Z_1$ ). La pluma y contrapluma de longitudes  $L$  m y  $d$  m, respectivamente, giran alrededor de la vertical con velocidad angular constante  $\omega$  rad/s. A su vez la cazoleta se desplaza vertical y horizontalmente sobre la pluma con velocidades constantes de valor  $b\omega$  m/s (siendo  $b$  una constante positiva), permaneciendo siempre vertical y en el mismo plano que la pluma.

En un cierto instante el eje de la grúa, P y C se encuentran en un mismo plano vertical ( $O_1Y_1Z_1$ ), siendo la posición de ambos y el estado de movimiento de la grúa los que se indican en la figura. Para dicho instante se pide calcular:

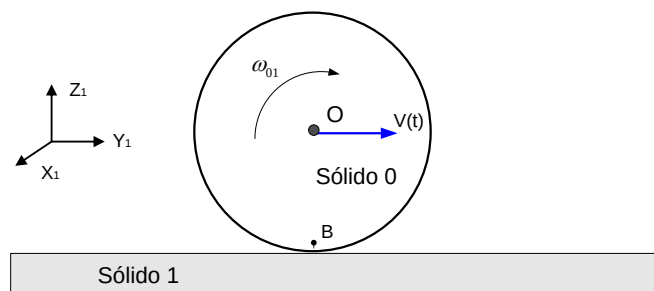
- Velocidad y aceleración del mecánico C respecto de la grúa
- Velocidad y aceleración del mecánico C respecto al operario P
- Velocidad y aceleración angulares de la cesta con respecto del operario P
- Velocidad y aceleración del extremo B' de la contrapluma (longitud  $d$  m) con respecto del operario P
- Particularizar todos los apartados anteriores para los valores:  $\omega=0,5$  rpm;  $b\omega = 20$  m/min;  $r=22$  m;  $h=30$  m;  $a=L=45$  m;  $d=15$  m
- (OPCIONAL) Resuelve los apartados 1) y 2) para un instante cualquiera; es decir, la pluma y el operario P no se encuentran en el mismo plano vertical, habrá girado un cierto ángulo debido a  $\omega$ .



### Problema 13

Un disco de radio  $R$  rueda con velocidad angular  $\bar{\omega}_{01}$  sobre el suelo de forma que su centro  $O$  tiene un movimiento rectilíneo de velocidad  $\vec{v}(t)$  conocida. El plano del disco permanece siempre en el plano vertical  $Y_1Z_1$ .

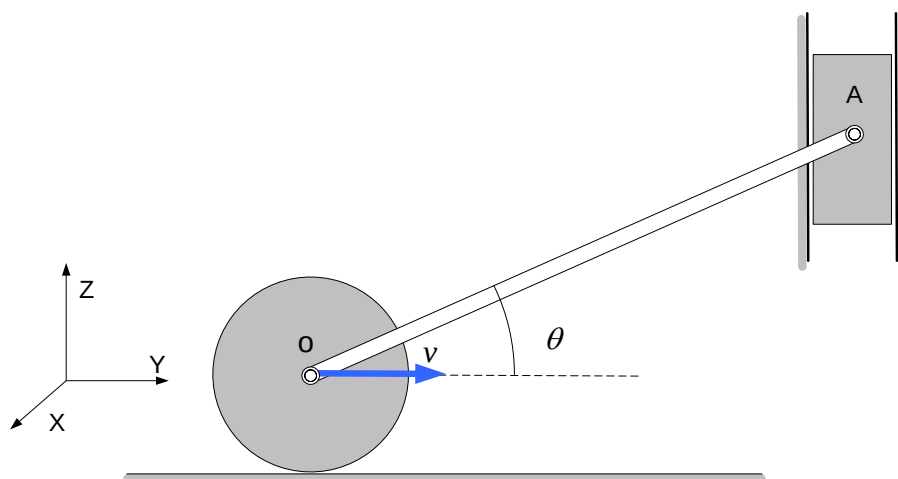
- Si  $\bar{\omega}_{01} = \frac{v(t)}{R}(-\vec{i}_1)$ , determinar:
  1. Velocidad del punto B de contacto en cada instante entre el disco y el suelo
  2. Posición del centro instantáneo de rotación
  3. Aceleración del centro del disco
  4. Aceleración del punto B
- Si  $\bar{\omega}_{01} = 2 \frac{v(t)}{R}(-\vec{i}_1)$ , determinar:
  1. Velocidad del punto B de contacto en cada instante entre el disco y el suelo
  2. Posición del centro instantáneo de rotación
  3. Aceleración del centro del disco
  4. Aceleración del punto B



#### Problema 14

Una barra de longitud  $L$  está unida por su extremo A con una corredera que desliza por una guía vertical, y por su extremo O a un disco de radio  $R$ . El disco rueda sin deslizar sobre la superficie horizontal de modo que su centro O se traslada hacia la derecha con una velocidad constante  $v$  conocida. Para  $\theta = 45^\circ$ , determinar:

1. Centro instantáneo de rotación del movimiento absoluto del disco
2. Velocidad angular de rodadura y pivotamiento del disco en su movimiento respecto del suelo
3. Centro instantáneo de rotación de la barra OA en su movimiento absoluto
4. Velocidad angular absoluta de la barra OA
5. Velocidad lineal absoluta de la corredera



## Problema 15

Durante las tareas de mantenimiento del tren de aterrizaje delantero de un avión (figura 1) se observa que la rueda derecha en el sentido de la marcha (A) sufre un desgaste mucho mayor que la izquierda (B). En el proceso de investigación de las posibles causas se detecta que, debido a un mal montaje, dicha rueda (A) se encuentra desalineada. En la figura 2 puede observarse que este desalineamiento consiste en una desviación del eje de la rueda un ángulo  $\beta$  respecto del eje de la rueda perfectamente alineada. Ambos ejes están contenidos en un plano horizontal paralelo al suelo, situado a una altura igual al radio  $R$  de las ruedas.

Se sabe que, debido a este defecto de montaje, mientras que la rueda B rueda sin deslizar, la rueda A desliza. Con el fin de valorar el efecto de dicho desalineamiento es necesario conocer la velocidad de deslizamiento del punto de contacto entre la rueda y el suelo. Para ello se pide que se realice el siguiente estudio cinemático para ambas ruedas cuando el avión se traslada por la pista con velocidad  $\vec{v}(t)$  conocida:

1. Velocidad angular absoluta de las ruedas.
2. Velocidad de deslizamiento de ambas ruedas.
3. ¿El resultado anterior apoya la diferencia encontrada en el desgaste de las ruedas? Explica razonadamente tu respuesta.
4. (OPCIONAL) En el caso de no poder eliminar el desalineamiento, calcula la velocidad angular absoluta que debería tener la rueda A para que su velocidad de deslizamiento sea mínima. ¿Se resolvería así el problema?

Nota: Se recomienda que se resuelva primero para la rueda alineada (B) y después para la rueda desalineada (A), comparando ambos resultados.



Figura 1. Vista frontal del tren de aterrizaje delantero

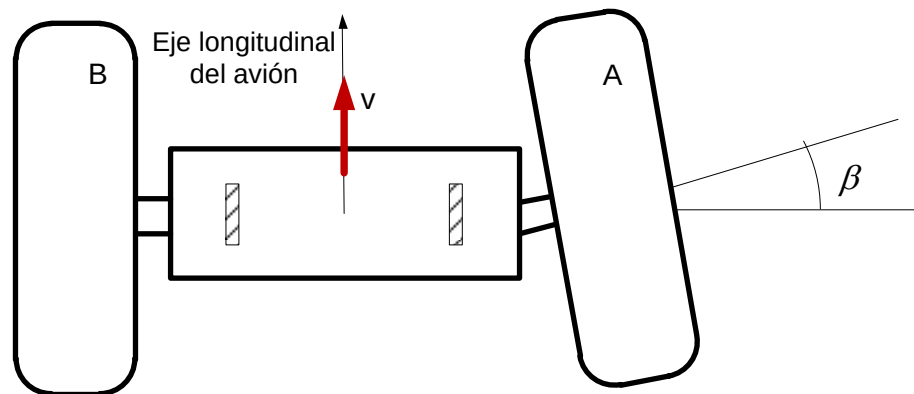


Figura 2. Vista superior del tren de aterrizaje

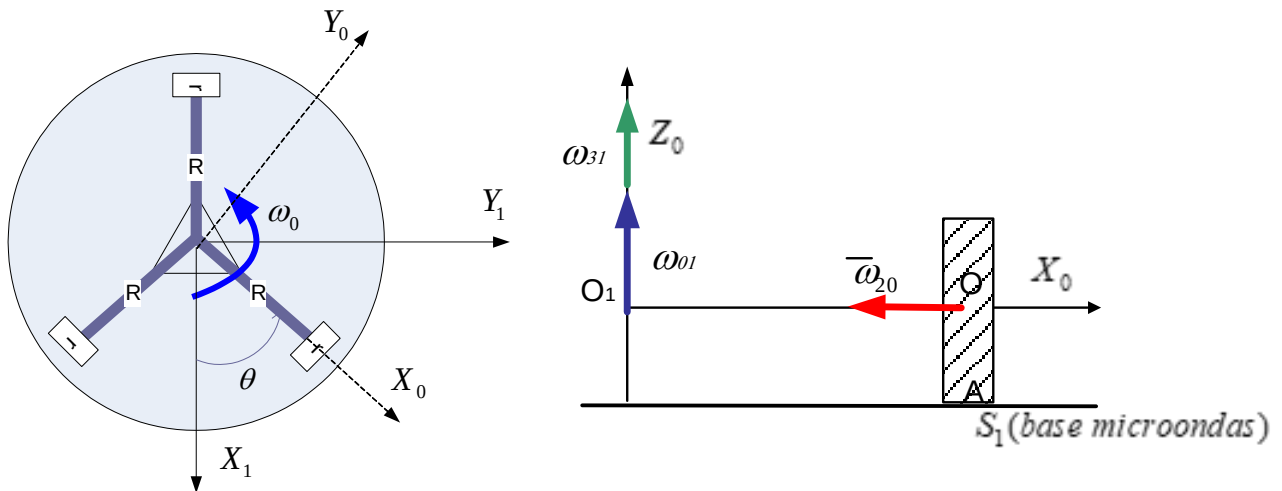


### Problema 16

En la figura aparece el sistema de giro del plato de un horno microondas que actualmente se comercializa en el mercado. Consta de tres brazos situados a  $120^\circ$  unidos en el punto  $O_1$  y que giran respecto del eje vertical central con velocidad angular constante  $\omega_0$ . En el extremo de cada uno de ellos se encuentra un disco de radio  $r$  que gira alrededor del brazo a la vez que rueda sin deslizar sobre la base del microondas. Sobre los tres discos se apoya el plato de cristal de forma que no existe deslizamiento.

Como el movimiento es similar en los tres casos, se ha elegido uno de ellos y se han numerado los sólidos del siguiente modo:

- $S_2$ : Discos de radio  $r$
- $S_3$ : Plato
- $S_0$ : Brazo  $O_1O$  (El sistema de ejes  $O_1X_0Y_0Z_0$  representado en la figura está ligado al mismo, de forma que  $O_1X_0$  coincide con el brazo y  $O_1Z_0$  con la vertical ascendente)
- $S_1$ : Base del microondas (Sistema de ejes fijo  $O_1X_1Y_1Z_1$ , representado en la figura)



Para dicho brazo, se pide determinar:

1. Velocidad angular con la que el disco situado en el extremo gira respecto del brazo
2. Velocidad angular absoluta del disco, es decir, con la que dicho disco gira respecto de la plataforma del microondas
3. Velocidad absoluta del extremo O del brazo
4. Aceleración absoluta del extremo O del brazo
5. Velocidad angular del plato de cristal del microondas
6. Aceleración angular absoluta del disco

### Problema 17

Una aproximación del mecanismo de apertura de la puerta del <METRO> es el que aparece en la figura. Se gira la manivela sobre el punto O fijo a la puerta hasta situarlo en posición vertical, en ese momento el eje B comienza a girar con velocidad angular constante  $\omega$  sobre sus anclajes fijos al vagón que siempre estará parado en este proceso de apertura.

Situados a una distancia  $L$  y solidarios al eje  $B$  hay dos ruedas dentadas que engranan sobre las respectivas cremalleras de la puerta. De esta forma, la puerta se abre mediante un movimiento de rodadura sin deslizamiento sobre los engranajes de radio  $r$ .

A su vez, la manivela recupera su posición horizontal con una velocidad angular constante  $\omega_m$ . Se pide:

1. Velocidad lineal con la que se abre la puerta
2. Velocidad lineal absoluta del extremo A de la manivela
3. Aceleración lineal absoluta del extremo A de la manivela

