CÁLCULO I (1^o GIEAI). CURSO 2016-17.
SOLUCIONES PRÁCTICA BLOQUE 3: Transformada de Laplace, Sucesiones y Series.

1. Estudia para qué valores de $p \in \mathbb{R}$ se verifica que las siguientes integrales son convergentes:

$$\text{(a)} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \qquad \text{(b)} \quad \int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx \qquad \text{(c)} \quad \int_0^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

(a) $p > 1$ (b) $p < 1$ (c) Siempre es divergente

2. Calcula las integrales impropias que converjan:

$$\text{(a)} \int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx \qquad \text{(b)} \int_{-\infty}^0 xe^x\,dx \qquad \text{(c)} \int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}\,dx$$

$$\text{(d)} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx \qquad \text{(e)} \int_{-\infty}^1 \cos(\pi x)\,dx \qquad \text{(f)} \int_3^5 \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$$

$$\text{(g)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx \qquad \text{(h)} \int_0^\infty \cos^2 x\,dx \qquad \text{(i)} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$$

(a)	1	(b)	-1	(c)	2
(d)	$\frac{\pi}{2}$	(e)	no converge	(f)	4
(g)	2	(h)	no converge	(i)	π

3. Comprueba que la siguiente integral impropia converge:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x\cos^2 x}{x^3+1}\,dx$$

Basta observar que $\cos^2 x \le 1$ y $\frac{x}{x^3+1} \le \frac{1}{x^2}$, y utilizar el teorema de comparación.

4. Encuentra las transformadas de Laplace de las siguientes funciones:

(a)	$t+4$	(b)	$a+bt+ct^2$	(c)	$4t^3+t^2$
(d)	ce^{-at+b}	(e)	$\operatorname{sen}\pi t$	(f)	$\cos(\omega t+\theta)$
(g)	$\operatorname{sen}^2 t$	(h)	$\cos^2 \omega t$	(i)	$e^{-t}\cos t$

- Los apartados a) ...e) se resuelven aplicando el principio de linealidad para la transformada de Laplace y las transformadas que aparecen en la tabla. Fíjate en que $ce^{-at+b} = ce^b e^{-at}$.
- Para f) utiliza que $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$. Para g) y h) es necesario tener en cuenta que
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$
junto con el principio de linealidad.
- Finalmente, i) se resuelve con la primera fórmula de traslación: como $\mathcal{L}(cost) = \dfrac{s}{s^2+1} = F(s)$, entonces $\mathcal{L}(e^{-t}cost) = F(s-(-1)) = \dfrac{s+1}{(s+1)^2+1}$.

(a)	$\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{4}{s}$	(b)	$\dfrac{a}{s}+\dfrac{b}{s^2}+\dfrac{2c}{s^3}$	(c)	$\dfrac{24}{s^4}+\dfrac{2}{s^3}$
(d)	$\dfrac{ce^b}{s+a}$	(e)	$\dfrac{\pi}{s^2+\pi^2}$	(f)	$\dfrac{s\cos\theta-\omega\operatorname{sen}\theta}{s^2+\omega^2}$
(g)	$\dfrac{1}{2s}-\dfrac{s}{2s^2+8}$	(h)	$\dfrac{1}{2s}+\dfrac{s}{2s^2+8\omega^2}$	(i)	$\dfrac{s+1}{(s+1)^2+1}$

5. Halla la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

(a)	$1 - 2u(t-1)$	(b)	te^{-t}	(c)	$7e^{-5t}u(t-6)$
(d)	$e^{2\pi t}\cos(2\pi t)$	(e)	$(t-\beta)u(t-c)$	(f)	$u(t-2\pi)\,\mathrm{sen}\,t$

- a) usar linealidad y la transformada de la función escalón.
- b) análogo al apartado i) del ejercicio anterior.
- c) por linealidad $\mathcal{L}\left(7e^{-5t}u(t-6)\right) = 7\mathcal{L}\left(e^{-5t}u(t-6)\right)$. Tenemos

$$F(s) = \mathcal{L}\left(u(t-6)\right) = \frac{1}{s}e^{-6s}$$

  y usamos la primera fórmula de traslación: $F(s-(-5)) = \dfrac{1}{s+5}e^{-6(s+5)}$. No olvides multiplicar por 7.
- d) hay que utilizar la primera fórmula de traslación.
- e) Pensando en usar la segunda fórmula de traslación, suma y resta c dentro del paréntesis:

$$(t-\beta)u(t-c) = (t-c-\beta+c)u(t-c) = (t-c)u(t-c) + (c-\beta)u(t-c)$$

  y usa el principio de linealidad.
- f) ayuda: $\sin(t) = \sin(t-2\pi)$ y usar la segunda fórmula de traslación.

(a)	$\dfrac{1}{s} - \dfrac{2}{s}e^{-s}$	(b)	$\dfrac{1}{(s+1)^2}$	(c)	$\dfrac{7}{s+5}e^{-6(s+5)}$
(d)	$\dfrac{s-2\pi}{(s-2\pi)^2+4\pi^2}$	(e)	$e^{-cs}\left(\dfrac{1}{s^2} + \dfrac{c-\beta}{s}\right)$	(f)	$\dfrac{1}{s^2+1}e^{-2\pi s}$

6. Encuentra la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

(a)	$-3\dfrac{s+5}{s(s+3)}$	(b)	$\dfrac{s-2}{s^2+1}$
(c)	$-\dfrac{2s^3+s^2-3}{(s+1)(s+2)(s^2+1)}$	(d)	$\dfrac{1}{s}(e^{-\alpha s} - e^{-\beta s})$

A la vista de la tabla de transformadas inversas, en a), b) y c) los cocientes hay que escribirlos como suma de fracciones simples. En d) hay que usar la transformada inversa de la función escalón.

- Por ejemplo, en a)

$$\frac{s+5}{s(s+3)} = \frac{5/3}{s} + \frac{-2/3}{s+3}$$

  entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left(-3\frac{s+5}{s(s+3)}\right) = -3\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5/3}{s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-2/3}{s+3}\right)\right) = -5\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right)$$

  y de ahí se tiene la solución que aparece abajo.
- b) y c), d) similares al apartado a).

(a)	$-5 + 2e^{-3t}$	(b)	$\cos t - 2\,\mathrm{sen}\,t$
(c)	$2e^{-t} - 3e^{-2t} + \mathrm{sen}\,t - \cos t$	(d)	$u(t-\alpha) - u(t-\beta)$

7. Usa la transformada de Laplace para resolver los siguientes problemas de valor inicial:

(a)	$x' = x + \mathrm{sen}\,t,\ x(0) = 0$	(b)	$x' = 0{,}1x - e^{-0{,}3t},\ x(0) = 1{,}25$
(c)	$x' = -x + u(t-1),\ x(0) = 0$	(d)	$x' = bx + ate^{bt},\ x(0) = x_0$

(a)	$x(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,t$	(b)	$x(t) = \frac{5}{2}e^{-0{,}3t} - \frac{5}{4}e^{0{,}1t}$
(c)	$x(t) = (1 - e^{1-t})u(t-1)$	(d)	$x(t) = (x_0 + \frac{1}{2}at^2)e^{bt}$

8. Usa la transformada de Laplace para resolver los siguientes problemas de valor inicial:

(a) $x'' + 3x' + 2x = e^{-3t},\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0$ (b) $x'' + \frac{1}{2}x' + x = \cos t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0$

(a) $x(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} - e^{-2t}$ (b) $x(t) = -\frac{8\sqrt{15}}{15}e^{-\frac{1}{4}t}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{15}}{4}t) + 2\operatorname{sen} t$

9. Calcula los siguientes límites de sucesiones:

(a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-1}{n^2+1}$ (b) $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^3-1}$ (c) $\lim_{n\to+\infty} n^3\, e^{-n}$

(d) $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2-n} - n)$ (e) $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{5}{n}\right)^n$ (f) $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{4n+1}{3n-1}\right)$

(g) $\lim_{n\to+\infty} (\ln(n^2+3) - \ln(n^2+1))$ (h) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3^n+1}$ (i) $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n\sqrt{n}$

(a) diverge a $+\infty$ (b) 0 (c) 0 (d) $-\frac{1}{2}$ (e) e^{-5}

(f) $\ln\frac{4}{3}$ (g) 0 (h) 0 (i) no tiene límite

10. Utiliza el teorema de compresión para calcular el límite de las siguientes sucesiones:

(a) $\left\{\frac{4^n}{n!}\right\}$ (b) $\left\{\frac{a^n}{n!}\right\}$ con $a \in \mathbb{R}$ (c) $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$

(a) Para todo $n > 4$ se tiene $0 < \frac{4^n}{n!} < \frac{4^4}{4!}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-4}$ y como $\lim_{n\to+\infty} \frac{4^4}{4!}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-4} = 0$ se tiene $\lim_{n\to+\infty} \frac{4^n}{n!} = 0$.

(b) Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > |a|$ se tiene entonces $0 < \left|\frac{a^n}{n!}\right| < \frac{|a|^N}{N!}\left(\frac{|a|}{N}\right)^{n-N}$ y como $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a|^N}{N!}\left(\frac{|a|}{N}\right)^{n-N} = 0$ se tiene $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

(c) Para todo $n \geq 1$ se tiene $0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$ y como $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ se tiene $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

11. Dadas las siguientes sucesiones estudia si son monótonas:

(a) $\left\{\frac{3+n}{n}\right\}$ (b) $\left\{\frac{e^n}{n^5}\right\}$ (c) $\left\{\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right\}$ (d) $\{n^2 + (-1)^n n\}$

(a) decreciente ; (b) no monótona ; (c) creciente ; (d) creciente .

12. Sea $S = \left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$.

a) Define por recurrencia una sucesión cuyos términos sean los elementos de S.

b) Demuestra, por inducción, que la sucesión es creciente y que 2 es una cota superior.

c) Si la sucesión es convergente encuentra su límite.

d) ¿Está S acotado? ¿Tiene mínimo y máximo?

e) ¿Qué ocurre si en vez del 2 utilizamos para definir S un número positivo cualquiera a?

a) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 \cdot a_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) **Creciente**:

- Es cierto para $\mathbf{n = 1}$: $a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}} = a_2$.
- Si es cierto para $\mathbf{n}$ también lo es para $\mathbf{n + 1}$: si $a_{n-1} < a_n$ entonces $\sqrt{2 \cdot a_{n-1}} < \sqrt{2 \cdot a_n}$ luego $a_n < a_{n+1}$.

2 es una cota superior:

- Es cierto para $\mathbf{n=1}$: $a_1 = \sqrt{2} < 2$.
- Si es cierto para $\mathbf{n}$ también lo es para $\mathbf{n+1}$: si $a_n < 2$ entonces $\sqrt{2 \cdot a_n} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2$ luego $a_{n+1} < 2$.

c) La sucesión es convergente puesto que es monótona y acotada. Su límite L verifica $L = \sqrt{2 \cdot L}$ luego $L = 2$.

d) Como la sucesión es creciente $\sqrt{2}$ es una cota inferior de S y su límite 2 una cota superior, luego S está acotado. El mínimo de S es $\sqrt{2}$ y máximo no tiene.

e) S está acotado, si $a > 1$ entonces el mínimo de S es $\sqrt{a}$ y no tiene máximo, y si $a < 1$ no tiene mínimo y el máximo es $\sqrt{a}$.

13. Sea $S = \left\{\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$. ¿Está S acotado? ¿Tiene mínimo y máximo?

S está acotado. El mínimo de S es $\sqrt{2}$ y máximo no tiene.

14. Determina si la serie converge o diverge. Si converge calcula su suma:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{4}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{7}{6^{n-1}}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^{n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+2}}{7^{n-1}}$ (j) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ (k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2+3n-2}$ (l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n$

(a) $\frac{5}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) Diverge (d) $\frac{4}{7}$

(e) 6 (f) Diverge (g) $\frac{1}{4}$ (h) $\frac{e}{\pi - e}$

(i) $\frac{7}{3}4^3$ (j) $\frac{3}{4}$ (k) $\frac{1}{6}$ (l) Diverge

15. Escribe los siguientes números con desarrollo decimal periódico en forma de fracción de números enteros:

(a) 5,37373737... (b) 0,159159159... (c) 0,45114141414...

(a) $\frac{532}{99}$ (b) $\frac{159}{999}$ (c) $\frac{44663}{99000}$

16. Determina, mediante el criterio de la integral, si la serie converge o diverge.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+9n^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4+2n)^{3/2}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{atan} n}{1+n^2}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^2+1}$

(a) Divergente (b) Convergente (c) Divergente (d) Convergente

(e) Convergente (f) Convergente (g) Convergente (h) Divergente

17. Estudia la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ para los diferentes valores de p.

La serie converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

18. Determina, mediante los criterios de comparación, si la serie converge o diverge.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^4+9n^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{1+\sqrt{n}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4/3}}{5n^2+n-1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\operatorname{sen}^2 n}{1+n^2}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-1/2}}{2+\operatorname{sen}^2 n}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{5^n+2}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+4)}$

(a) Convergente (b) Convergente (c) Divergente (d) Divergente
(e) Convergente (f) Divergente (g) Convergente (h) Divergente

19. Determina, mediante los criterios del cociente o la raíz, si la serie converge o diverge.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n!}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{50}e^{-n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \ln n}{2^n}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^3}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n-1}}{n^n}$ (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{ne}{2n+3}\right)^n$ (k) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{\ln n}\right)^n$ (l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{5}{2n+3}\right)^{n^2}$

(a) Convergente (b) Convergente (c) Divergente (d) Convergente
(e) Convergente (f) Divergente (g) Divergente (h) Los criterios no deciden
(i) Convergente (j) Divergente (k) Divergente (l) Convergente

20. Determina, usando el criterio adecuado, si la serie converge o diverge.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-3n}{2n^3+3n^2+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}}{n^3}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+3n^2}{3^n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}7}{n+1}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\sqrt[3]{n+1}}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{n-1}}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{3^n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2}{2n+4n^2}\right)^n$ (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+4^n}$ (k) $\displaystyle\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{3}{5}+\frac{4}{6}+\cdots$ (l) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ (n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^{n-2}}{3^n}$ (ñ) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$ (o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^3}$

(a) Divergente (b) Convergente (c) Divergente (d) Convergente
(e) Convergente (f) Convergente (g) Convergente (h) Convergente
(i) Divergente (j) Convergente (k) Divergente (l) Divergente
(m) Convergente (n) Divergente (ñ) Convergente (o) Divergente

21. Determina si las siguientes series alternadas convergen o divergen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n}{3^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n+1}{3n+1}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}e^{-n}$

(a) Convergente (b) Convergente (c) Divergente (d) Convergente

22. Encuentra n para que s_n aproxime a la suma de la serie s con un error menor que 10^{-3}:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^4}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{k}{4^k}$

(a) $n=5$ (b) $n=6$

23. Determina si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi)}{n^3}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5^n}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(n^2+1)\ln n}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

(a) Condic. conv. (b) Divergente (c) Absol. conv. (d) Condic. conv.

(e) Condic. conv. (f) Absol. conv. (g) Condic. conv. (h) Condic. conv.

24. La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge para $x=-3$ y diverge para $x=4$. Justifica si convergen o divergen las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n 5^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2c_n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-\frac{3}{2})^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 6^n$

(a) Divergente (b) Convergente (c) Convergente (d) Divergente

25. Encuentra el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$ (h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+n^2}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n}$ (j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (x+5)^n$ (k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{2n+1}}{n^2+4}$ (l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n (x-1)^{2n}}{(2n+1)!}$

(a) $1,\ [-1,1)$ (b) $\infty,\ (-\infty,\infty)$ (c) $\frac{1}{5},\ [-\frac{1}{5},\frac{1}{5}]$ (d) $1,\ [-1,1]$

(e) $1,\ (-1,1]$ (f) $\infty,\ (-\infty,\infty)$ (g) $\infty,\ (-\infty,\infty)$ (h) $1,\ [-1,1]$

(i) $1,\ (-2,0]$ (j) $\frac{4}{3},\ (-\frac{19}{3},-\frac{11}{3})$ (k) $1,\ [-2,0]$ (l) $\infty,\ (-\infty,\infty)$

26. Encuentra la representación mediante serie de potencias de las siguientes funciones y determina su intervalo de convergencia:

(a) $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ (b) $f(x)=\dfrac{1}{x^4+16}$ (c) $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ (d) $f(x)=\ln(1-x)$

(a) $\displaystyle\frac{x}{1-x} = x+x^2+x^3+x^4+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} x^n,\ (-1,1).$

(b) $\displaystyle\frac{1}{x^4+16} = \frac{1}{16}\frac{1}{1-(-x^4/16)} = \frac{1}{16}(1-\frac{x^4}{16}+\frac{x^8}{16^2}-\frac{x^{12}}{16^3}+\cdots) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{16^{n+1}},\ (-2,2).$

(c) $\displaystyle\frac{1+x^2}{1-x^2} = (1+x^2)\frac{1}{1-x^2} = (1+x^2)(1+x^2+x^4+x^6+\cdots) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} 2x^{2n},\ (-1,1).$

(d) $\displaystyle\ln(1-x) = -\int\frac{1}{1-x}dx = -\int(1+x+x^2+x^3+\cdots)dx = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\ (-1,1).$

27. Evalúa la integral indefinida como serie de potencias

$$\text{(a)} \quad \int \frac{x}{1+x^5}dx \qquad \text{(b)} \quad \int \operatorname{atan}(x^2)dx$$

(a)
$$\begin{aligned} \int \frac{x}{1+x^5}dx &= \int x\frac{1}{1-(-x^5)}dx = \int (x - x^6 + x^{11} + x^{16} + \cdots)dx \\ &= C + \frac{x^2}{2} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^{12}}{12} - \frac{x^{17}}{17} + \cdots = C + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2+5n}}{2+5n} \end{aligned}.$$

(b)
$$\begin{aligned} \int \operatorname{atan}(x^2)dx &= \int (x^2 - \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} - \frac{x^{14}}{7} + \cdots)dx \\ &= C + \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3\cdot 7} + \frac{x^{11}}{5\cdot 11} - \frac{x^{15}}{7\cdot 15} + \cdots = C + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{3+4n}}{(1+2n)(3+4n)} \end{aligned}.$$

28. Encuentra el polinomio de Mclaurin de 4º grado de las funciones:

(a) $f(x) = e^{-2x}$ (b) $f(x) = \operatorname{tg} x$ (c) $f(x) = e^x \cos x$

(d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$ (e) $f(x) = \sqrt{1+x}$ (f) $f(x) = \ln(3+2x)$

(a) $1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4$ (b) $x + \frac{1}{3}x^3$ (c) $1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4$

(d) $-1 + x - 3x^2 + x^3$ (e) $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4$ (f) $\ln 3 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2 + \frac{8}{81}x^3 - \frac{4}{81}x^4$

29. Encuentra el polinomio de Taylor de grado 3 con centro en $x = a$ de las funciones:

(a) $f(x) = e^x;\ a = 1$ (b) $f(x) = \sqrt{x};\ a = 4$ (c) $f(x) = \ln x;\ a = 1$ (d) $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x);\ a = -\frac{1}{3}$

(a) $e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e}{6}(x-1)^3$ (b) $2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3$

(c) $(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$ (d) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}\pi^2}{4}\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{\pi^3}{12}\left(x + \frac{1}{3}\right)^3$

30. Encuentra la serie de Mclaurin de las funciones:

(a) $f(x) = e^{-x}$ (b) $f(x) = e^{ax}$ (c) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ (d) $f(x) = \ln(1-x)$

(a) $1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n!}$ (b) $1 + \frac{ax}{1!} + \frac{a^2x^2}{2!} + \frac{a^3x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n x^n}{n!}$

(c) $1 - \frac{x^2}{2^2\cdot 2!} + \frac{x^4}{2^4\cdot 4!} - \frac{x^6}{2^6\cdot 6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(2n)!}$ (d) $-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

31. Encuentra la serie de Taylor con centro en $x = a$ de las funciones:

(a) $f(x) = \frac{1}{x};\ a = -1$ (b) $f(x) = \ln x;\ a = 1$ (c) $f(x) = e^x;\ a = 2$ (d) $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x);\ a = \frac{1}{2}$

(a) $-\sum_{n=0}^{\infty}(x+1)^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^2}{n!}(x-2)^n$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n)!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^{2n}$

32. Para las siguientes funciones

   a) Escribe la fórmula del resto $R_n(x)$ para los valores dados de a y n.

   b) Encuentra el máximo intervalo abierto en el que la fórmula del resto es válida.

(a) $f(x) = e^{2x};\ a = 0;\ n = 5$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x+1};\ a = 0;\ n = 4$ (c) $f(x) = xe^{x};\ a = 0;\ n = 3$

(d) $f(x) = \operatorname{atan} x;\ a = 0;\ n = 2$ (e) $f(x) = \sqrt{x};\ a = 4;\ n = 3$ (f) $f(x) = \operatorname{sen} x;\ a = \dfrac{\pi}{6};\ n = 4$

(a) $\dfrac{2^6 e^{2c}}{6!}x^6;\ (-\infty, \infty)$ (b) $-\dfrac{x^5}{(c+1)^6};\ (-1, \infty)$ (c) $\dfrac{(4+c)e^c}{4!}x^4;\ (-\infty, \infty)$

(d) $-\dfrac{1-3c^2}{3(1+c^2)^3}x^3;\ (-\infty, \infty)$ (e) $-\dfrac{5}{128c^{7/2}}(x-4)^4;\ (0, \infty)$ (f) $\dfrac{\cos c}{5!}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)^5;\ (-\infty, \infty)$

33. Prueba que la serie de Maclaurin de $f(x) = \cos x$ converge a $\cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   $|R_n(x)| \leq \dfrac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \dfrac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

34. Prueba que la serie de Taylor de $f(x) = e^x$ con centro en $a = 1$ converge a e^x para todo $x \in \mathbb{R}$.

   $|R_n(x)| \leq \dfrac{e^c}{(n+1)!}|x-1|^{n+1} \leq \text{máx}\{e^x, e\}\dfrac{|x-1|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

35. Prueba que la serie de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$ con centro en $a = \dfrac{\pi}{4}$ converge a $\operatorname{sen} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   $|R_n(x)| \leq \dfrac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}\left|x - \dfrac{\pi}{4}\right|^{n+1} \leq \dfrac{1}{(n+1)!}\left|x - \dfrac{\pi}{4}\right|^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

36. Utiliza el polinomio de Taylor apropiado, del menor orden n posible, para calcular valores aproximados de los números que se indican con error menor que ϵ dado en cada caso.

   Sugerencia: acota el término del resto de la fórmula de Taylor, cuando sea necesario, para determinar el número n de términos de la suma parcial.

   a) El valor del número e con $\epsilon = 0{,}02$ (Nota: $f(x) = \mathrm{e}^x$ y tenemos que aproximar $f(1)$).

   b) $\operatorname{sen}(0{,}5)$ con $\epsilon = 0{,}001$.

   c) $\ln(0{,}8)$ con $\epsilon = 0{,}001$ (Nota: utiliza la función $\ln(1-x)$ y $x = 0{,}2$).

   a) $\mathrm{e} \approx 2{,}71666\ldots \approx 2{,}717$ (polinómio de grado 5)

   b) $\operatorname{sen}(0{,}5) \approx 0{,}4791666\ldots \approx 0{,}4792$ (polinomio de grado 3)

   c) $\ln(0{,}8) \approx -0{,}222666\ldots \approx -0{,}2227$ (polinomio de grado 3)