 Universidad Rey Juan Carlos

## Tema 2: Modelos Matemáticos

*Susana Borromeo  
Juan Antonio Hernández Tamames  
Curso 2014-2015*

2014/2015 Control y Automatización

 Universidad Rey Juan Carlos

## Contenidos Control y Automatización

1. Conceptos básicos.
2. Modelado matemático de sistemas Físicos. Linealización .  
Función de Transferencia
3. Análisis de sistemas en el dominio del Tiempo
4. Análisis de los sistemas en el dominio de la Frecuencia
5. Sistemas de Control. Análisis dinámico y Frecuencial
6. Acciones básicas de control: Reguladores PD, Pi, PDI.
7. Autómatas Programables. buses de campo

2014/2015 Control y Automatización

Universidad  
Rey Juan Carlos

3

# Índice

- 01 Introducción
- 02 Modelos Matemáticos
- 03 Linealización
- 04 Función de transferencia

2014/2015 Control y Automatización

Universidad  
Rey Juan Carlos

## Introducción

4

- Teoría clásica de control: Análisis diseño mediante métodos de cálculo basados en la Transformada de la Laplace y la respuesta del sistema (dominio de la frecuencia)

*Sistemas lineales en bucle cerrado, de parámetros concentrados, estacionarios, deterministas y continuos.*

- Teoría moderna de control: Variables de estado, , álgebra matricial, dominio del tiempo

2014/2015 Control y Automatización


 Universidad Rey Juan Carlos


## Fundamentos matemáticos

- Sistemas de Control Automático. Benjamín C. KUO. Séptima Edición. Pearson

1. Variable compleja
2. Ecuaciones diferenciales
3. Transformada de Laplace
4. Descomposición en Fracciones simples
5. Álgebra de matrices
6. Ecuaciones de estado
7. Transformada z.



2014/2015 Control y Automatización


 Universidad Rey Juan Carlos

## Fundamentos matemáticos

- Sistemas de Control Automático. Benjamín C. KUO. Séptima Edición. Pearson

1. Variable compleja
 
$$s = \sigma + j\omega$$


$$G(s) = \text{Re } G(s) + j \text{Im } G(s)$$

$$H(\omega) = \frac{a + jb}{c + jd}$$

$$|H(\omega)| = \frac{|a + jb|}{|c + jd|} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}}$$

$$\text{fase}(H(\omega)) = \text{fase}(a + jb) - \text{fase}(c + jd) = \text{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) - \text{arctg}\left(\frac{d}{c}\right)$$

2014/2015 Control y Automatización


 Universidad Rey Juan Carlos

## Fundamentos matemáticos

2. Ecuaciones diferenciales: ecuaciones que involucran derivadas dependientes con respecto a una variable independiente

- Lineales : ejemplo RLC
- No lineales


Ecuación no lineal:

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Ecuación linealizada:

$$f(x_1, \dots, x_n) - [f(x_1, \dots, x_n)]_0 = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} \right]_0 (x_1 - x_{1_0}) + \dots + \left[ \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]_0 (x_n - x_{n_0})$$

2014/2015 Control y Automatización


 Universidad Rey Juan Carlos

## Fundamentos matemáticos

3. Transformada de Laplace:

Mediante el uso de la transformada de Laplace, es posible convertir muchas funciones comunes, tales como las funciones senoidales, las funciones senoidales amortiguadas y las funciones exponenciales, en funciones algebraicas de una **variable s compleja**.

- La propiedad de **diferenciación en el tiempo** nos convierte las ecuaciones diferenciales en polinomios en el dominio s
- La **integral de convolución** (respuesta de un sistema ante una señal) de dos señales en el tiempo se transforma en un **producto de señales** en el dominio s

Transformada de Laplace


$$s = \sigma + j\omega$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad F(s), s \in C$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)e^{st} ds$$


Convergencia  $a < \sigma < b$

2014/2015 Control y Automatización


Universidad Rey Juan Carlos
Fundamentos matemáticos

$f(t)$	$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$	Nombre	Descripción
$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t=0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$	1	Linealidad	$\mathcal{L}\{a f(t) + b g(t)\} = a F(s) + b G(s)$
$u_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$	$1/s$	Derivación en $t$	$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{i=1}^n [f^{(i-1)}(t)]_0 s^{n-i}$
$r_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$	$1/s^2$	Integración en $t$	$\mathcal{L}\left[\int f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\left[\int f(t) dt\right]_0}{s}$
$t^n \cdot u_0(t)$	$n! / s^{n+1}$	Desplazamiento en $t$	$\mathcal{L}\{f(t-\tau) u_0(t-\tau)\} = e^{-s\tau} F(s)$
$e^{at} \cdot u_0(t)$	$\frac{1}{(s+a)}$	Derivación en $s$	$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{dF(s)}{ds}\right] = -t f(t)$
$\text{sen } \omega t \cdot u_0(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	Convolución	$Z(s) = X(s) Y(s) \Leftrightarrow z(t) = \int_0^t x(\tau) y(t-\tau) d\tau$
$\text{cos } \omega t \cdot u_0(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	Teorema del valor inicial	$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$
$e^{at} \cdot \text{cos } \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	Teorema del valor final	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s), \text{ si } \exists$

2014/2015
Control y Automatización


Universidad Rey Juan Carlos
Fundamentos matemáticos

### 4. Descomposición en Fracciones simples

Raíces reales simples:

$$\frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s+a_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s+a_i}$$


Raíces reales múltiples:

$$\frac{N(s)}{(s+a)^p} = \sum_{i=1}^p \frac{A_i}{(s+a)^i}$$

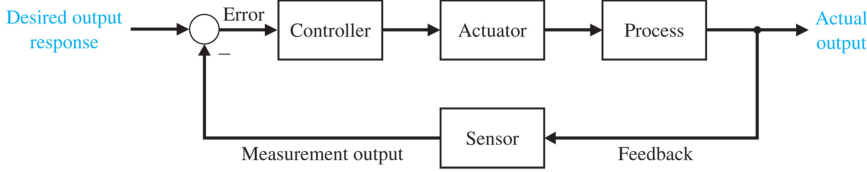
Raíces complejas simples:

$$\frac{N(s)}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{A}{s+\alpha+j\beta} + \frac{B}{s+\alpha-j\beta} = \frac{Ps+Q}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$$

2014/2015
Control y Automatización



Universidad Rey Juan Carlos
11

## Introducción



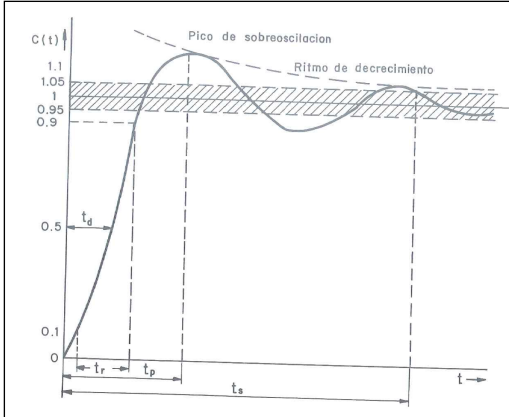
- Criterios de diseño:
  - Estabilidad
  - Error en régimen permanente
  - Respuesta transitoria: Sobreoscilación máxima, Velocidad inicial de la respuesta ( $t_r$ ,  $t_p$ ,  $t_d$ , tiempo necesario para alcanzar su valor en régimen permanente  $t_s$ )

2014/2015
Control y Automatización

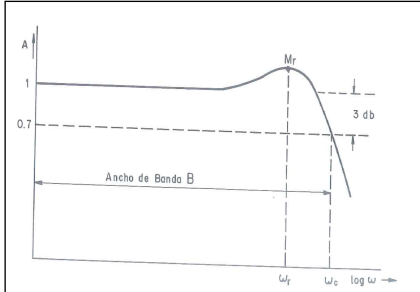

Universidad Rey Juan Carlos
12

## Introducción

- Respuesta transitoria: Sobreoscilación máxima, Velocidad inicial de la respuesta ( $t_r$ ,  $t_p$ ,  $t_d$ , tiempo necesario para alcanzar su valor en régimen permanente  $t_s$ )



Respuesta normalizada de un sistema de regulación ante una entrada escalón



Curva de ganancia en el dominio de la frecuencia

2014/2015
Control y Automatización

Universidad Rey Juan Carlos

## Introducción

13

```
graph TD; A[Modelos Matemáticos] --> B[Linealización]; B --> C[Transforma de Laplace];
```

2014/2015 Control y Automatización

Universidad Rey Juan Carlos


## Modelado

14

### Modelado

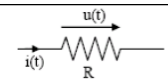
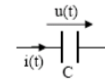
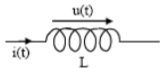
Para seguir adelante con el diseño del sistema de control se necesita en primer lugar entender el proceso. Típicamente, el conocimiento del proceso se cristaliza en la forma de un **modelo matemático**.

2014/2015 Control y Automatización

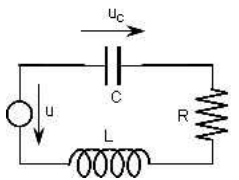


**Modelado: sistemas eléctricos**

15

<b>Resistencia</b> 	$u(t) = R \cdot i(t)$	u: tensión i: intensidad R: resistencia
<b>Condensador</b> 	$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$	u: tensión i: intensidad C: capacidad
<b>Bobina</b> 	$u(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$	u: tensión i: intensidad L: inductancia


**Ejemplo:**



$$\left. \begin{aligned} u_c(t) + R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} &= u(t) \\ C \frac{du_c(t)}{dt} &= i(t) \end{aligned} \right\}$$

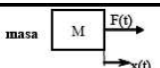
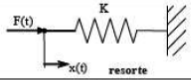
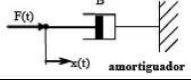
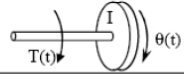
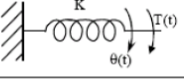
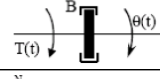
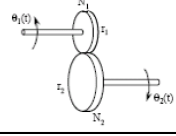
$$R \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + u_c(t) = u(t)$$

2014/2015
Control y Automatización



**Modelado: sistemas mecánicos**

16

SISTEMAS MECÁNICOS TRASLACION	<b>masa</b> 	$F(t) = M \frac{d^2}{dt^2} x(t)$	F: fuerza M: masa x: desplazamiento
		$F(t) = K \cdot x(t)$	F: fuerza K: constante del muelle x: desplazamiento
		$F(t) = B \frac{d}{dt} x(t)$	F: fuerza B: coeficiente de fricción viscosa x: desplazamiento
SISTEMAS MECÁNICOS ROTACION	<b>Momento de inercia</b> 	$T(t) = I \frac{d^2}{dt^2} \theta(t)$	T: par I: momento de inercia theta: desplazamiento angular
	<b>Rigidez</b> 	$T(t) = K \cdot \theta(t)$	T: par K: constante del muelle theta: desplazamiento angular
	<b>Rozamiento viscoso</b> 	$T(t) = B \frac{d}{dt} \theta(t)$	T: par B: coeficiente de fricción viscosa theta: desplazamiento angular
SISTEMAS MECÁNICOS ENGRANAJES		$\frac{T_1(t)}{T_2(t)} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\theta_2(t)}{\theta_1(t)}$ $r_1 \theta_1 = r_2 \theta_2$	T: par N: número de dientes theta: desplazamiento angular r: radio



Universidad Rey Juan Carlos **Modelado: sistemas mecánicos** 17

**SISTEMAS MECÁNICOS TRASLACION**

	$F(t) = M \frac{d^2}{dt^2} x(t)$	F: fuerza M: masa x: desplazamiento
	$F(t) = K \cdot x(t)$	F: fuerza K: constante del muelle x: desplazamiento
	$F(t) = B \frac{d}{dt} x(t)$	F: fuerza B: coeficiente de fricción viscosa x: desplazamiento

Sin fricción

(a)

(b)

$$u(t) = K \cdot x(t) + f \frac{dx(t)}{dt} + M \frac{dx^2(t)}{dt^2}$$

2014/2015 Control y Automatización

Universidad Rey Juan Carlos **Modelado: sistemas electromecánicos** 18

**Motor CC controlado por campo excitación**

$$\begin{cases} u(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + u_m(t) \\ u_m(t) = K_b w(t) \\ P_m(t) = K_p i(t) \\ J \dot{w}(t) = P_m(t) - Bw(t) \end{cases}$$


**Table 2.4 Typical Constants for a Fractional Horsepower DC Motor**

Motor constant $K_m$	$50 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}/\text{A}$
Rotor inertia $J_m$	$1 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2/\text{rad}$
Field time constant $\tau_f$	1 ms
Rotor time constant $\tau$	100 ms
Maximum output power	$1/4 \text{ hp}, 187 \text{ W}$

(a) Diagrama cableado (b) esquema

**Figure 2.19** Diagrama de bloques de un motor de CC controlado por campo

2014/2015 Control y Automatización



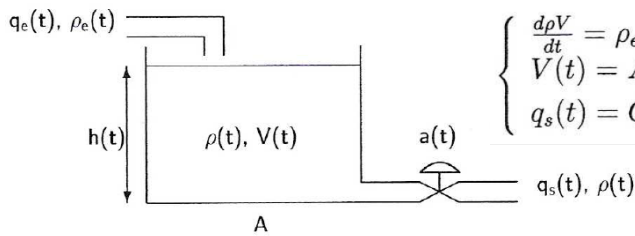
Universidad Rey Juan Carlos

## Modelado

19

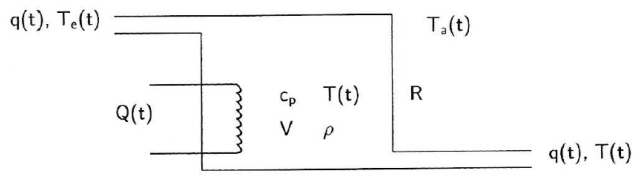
---

### Sistemas Hidráulicos



$$\begin{cases} \frac{d\rho V}{dt} = \rho_e(t)q_e(t) - \rho(t)q_s(t) \\ V(t) = Ah(t) \\ q_s(t) = Ca(t)\sqrt{2gh(t)} \end{cases}$$


### Sistemas Térmicos



$$\rho V c_p \frac{dT}{dt} = \rho c_p q(t)[T_e(t) - T(t)] + Q(t) - \frac{T(t) - T_a(t)}{R}$$

2014/2015

Control y Automatización



Universidad Rey Juan Carlos

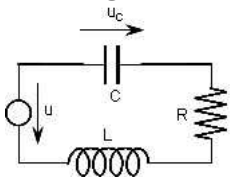
## Principio de analogía

20

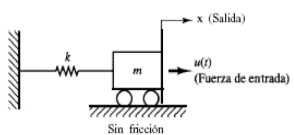
---

Dos sistemas físicos que sean análogos pueden ser representados por el mismo modelo matemático.

Analogía **circuítos eléctricos**: Fácilmente reproducibles en laboratorio



$$R \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + LC \frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + u_c(t) = u(t)$$



$$u(t) = K \cdot x(t) + f \frac{dx(t)}{dt} + M \frac{dx^2(t)}{dt^2}$$

2014/2015

Control y Automatización

Universidad  
Rey Juan Carlos

Principio de analogía

21

Dos sistemas físicos que sean análogos pueden ser representados por el mismo modelo matemático.

Analogía **circuítos eléctricos**: Fácilmente reproducibles en laboratorio

$$LC \frac{du_c^2(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u(t)$$

$$M \frac{dx^2(t)}{dt^2} + f \frac{dx(t)}{dt} + K \cdot x(t) = u(t)$$

$$a \frac{dy^2(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + c \cdot y(t) = u(t)$$

Sin fricción

Ejemplo 2.4

2014/2015
Control y Automatización

Universidad  
Rey Juan Carlos

Principio de analogía

22


**Tabla 2.2. Resumen de ecuaciones diferenciales que describen a elementos ideales**

Tipo de elemento	Elemento físico	Ecuación descriptiva	Energía $\mathcal{E}$ o potencia $\mathcal{P}$	Símbolo
Almacenamiento inductivo	Inductancia eléctrica	$v_{21} = L \frac{di}{dt}$	$\mathcal{E} = \frac{1}{2} Li^2$	
	Resorte traslacional	$v_{21} = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt}$	$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k}$	
	Resorte rotacional	$\omega_{21} = \frac{1}{k} \frac{dT}{dt}$	$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{T^2}{k}$	
	Inercia del fluido	$p_{21} = I \frac{dQ}{dt}$	$\mathcal{E} = \frac{1}{2} I Q^2$	
Almacenamiento capacitivo	Capacitancia eléctrica	$i = C \frac{dv_{21}}{dt}$	$\mathcal{E} = \frac{1}{2} Cv_{21}^2$	
	Masa trasnacional	$F = M \frac{dv_2}{dt}$	$\mathcal{E} = \frac{1}{2} Mv_2^2$	
	Masa rotacional	$T = J \frac{d\omega_2}{dt}$	$\mathcal{E} = \frac{1}{2} J\omega_2^2$	
	Capacitancia del fluido	$Q = C_f \frac{dp_{21}}{dt}$	$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C_f p_{21}^2$	
Disipadores de energía	Capacitancia térmica	$q = C_t \frac{d\mathcal{T}_2}{dt}$	$\mathcal{E} = C_t \mathcal{T}_2$	
	Resistencia eléctrica	$i = \frac{1}{R} v_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R} v_{21}^2$	
	Amortiguador traslacional	$F = b v_{21}$	$\mathcal{P} = b v_{21}^2$	
	Amortiguador rotacional	$T = b \omega_{21}$	$\mathcal{P} = b \omega_{21}^2$	
	Resistencia del fluido	$Q = \frac{1}{R_f} p_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R_f} p_{21}^2$	
Resistencia térmica	$q = \frac{1}{R_t} \mathcal{T}_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R_t} \mathcal{T}_{21}^2$		

- Almacenamiento inductivo:  $L$  = inductancia,  $1/k$  = rigidez recíproca de traslación o rotación,  $I$  = inercia del fluido.
- Almacenamiento capacitivo:  $C$  = capacitancia,  $M$  = masa,  $J$  = momento de inercia,  $C_f$  = capacitancia del fluido,  $C_t$  = capacitancia térmica.
- Disipadores de energía:  $R$  = resistencia,  $b$  = fricción viscosa,  $R_f$  = resistencia del fluido,  $R_t$  = resistencia térmica.

"Sistemas de Control Moderno". Richard C. Dorf, Pearson - Prentice Hall, 10ª edición.

2014/2015
Control y Automatización


 Universidad Rey Juan Carlos

# Introducción


23

Modelos Matemáticos

Linealización

Transforma de Laplace

2014/2015 Control y Automatización


 Universidad Rey Juan Carlos

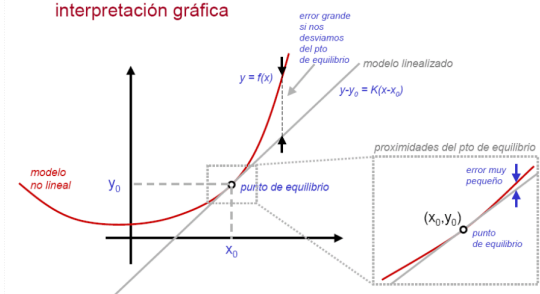
# Linealización

24

*Un sistema lineal satisface las propiedades de **superposición** y **homogeneidad***


- Se linealiza en torno a un punto de equilibrio.
- Las variaciones de las variables son nulas
- La ecuación de linealización no es única, depende del punto donde se haga la linealización
- Las variables de la ecuación linealizada representan incrementos respecto al punto de equilibrio

**interpretación gráfica**



"Análisis dinámico de sistemas". ISA. Universidad de Oviedo

2014/2015 Control y Automatización


25


## Introducción

Modelos Matemáticos

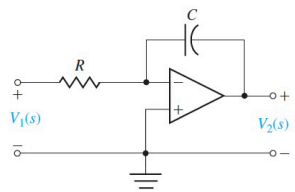
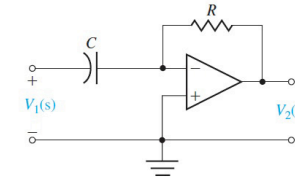
Linealización

Transforma de Laplace


2014/2015 Control y Automatización


26

## Transforma de Laplace

Element or System	G(s)
1. Integrating circuit, filter 	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = -\frac{1}{RCs}$
2. Differentiating circuit 	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = -RCs$

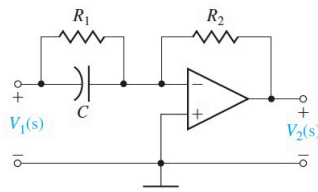
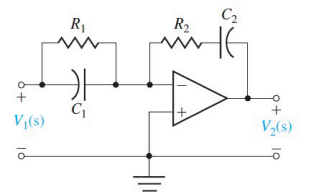
Copyright © 2011 Pearson Education, Inc. publishing as Prentice Hall  
 2014/2015 Control y Automatización



## Transforma de Laplace


27

**Table 2.5 Transfer Functions of Dynamic Elements and Networks**

Element or System	G(s)
<p>3. Differentiating circuit</p> 	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = -\frac{R_2(R_1Cs + 1)}{R_1}$
<p>4. Integrating filter</p> 	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = -\frac{(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1)}{R_1C_2s}$

(continued)

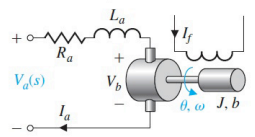
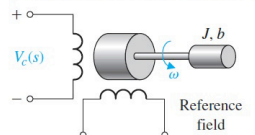
Copyright © 2011 Pearson Education, Inc. publishing as Prentice Hall  
2014/2015 Control y Automatización




## Transforma de Laplace

28

**Table 2.5 Transfer Functions of Dynamic Elements and Networks**

Element or System	G(s)
<p>6. DC motor, armature-controlled, rotational actuator</p> 	$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s[(R_a + L_a s)(Js + b) + K_b K_m]}$
<p>7. AC motor, two-phase control field, rotational actuator</p> 	$\frac{\theta(s)}{V_c(s)} = \frac{K_m}{s(\tau s + 1)}$ <p style="margin-left: 20px;"><math>\tau = J/(b - m)</math></p> <p style="margin-left: 20px;"><math>m = \text{slope of linearized torque-speed curve (normally negative)}</math></p>

Copyright © 2011 Pearson Education, Inc. publishing as Prentice Hall  
2014/2015 Control y Automatización



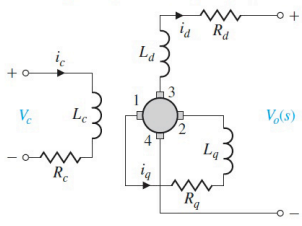
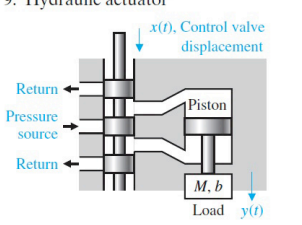
Universidad Rey Juan Carlos

## Transforma de Laplace


29

---

**Table 2.5 Transfer Functions of Dynamic Elements and Networks**

Element or System	G(s)
<p>8. Rotary Amplifier (Amplidyne)</p> 	$\frac{V_o(s)}{V_c(s)} = \frac{K/(R_c R_q)}{(s\tau_c + 1)(s\tau_q + 1)}$ $\tau_c = L_c/R_c, \quad \tau_q = L_q/R_q$ <p>for the unloaded case, <math>i_d \approx 0</math>, <math>\tau_c \approx \tau_q</math>,  <math>0.05 \text{ s} &lt; \tau_c &lt; 0.5 \text{ s}</math>  <math>V_q, V_{34} = V_d</math></p>
<p>9. Hydraulic actuator</p> 	$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s(Ms + B)}$ $K = \frac{Ak_x}{k_p}, \quad B = \left( b + \frac{A^2}{k_p} \right)$ $k_x = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right _{x_0}, \quad k_p = \left. \frac{\partial g}{\partial P} \right _{P_0}$ <p><math>g = g(x, P) = \text{flow}</math>  <math>A = \text{area of piston}</math></p> <p style="text-align: right;"><i>(continued)</i></p>

Copyright © 2011 Pearson Education, Inc. publishing as Prentice Hall  
 2014/2015 Control y Automatización



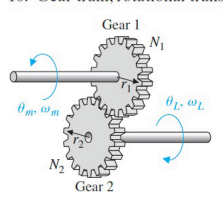
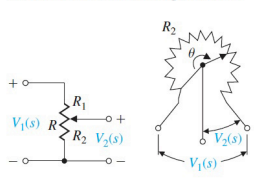
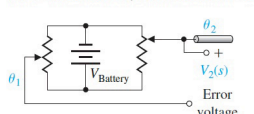
Universidad Rey Juan Carlos

## Transforma de Laplace


30

---

**Table 2.5 Continued**

Element or System	G(s)
<p>10. Gear train, rotational transformer</p> 	$\text{Gear ratio} = n = \frac{N_1}{N_2}$ $N_2 \theta_L = N_1 \theta_m, \quad \theta_L = n \theta_m$ $\omega_L = n \omega_m$
<p>11. Potentiometer, voltage control</p> 	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R_2}{R} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ $\frac{R_2}{R} = \frac{\theta}{\theta_{\max}}$
<p>12. Potentiometer, error detector bridge</p> 	$V_2(s) = k_s(\theta_1(s) - \theta_2(s))$ $V_2(s) = k_s \theta_{\text{error}}(s)$ $k_s = \frac{V_{\text{Battery}}}{\theta_{\max}}$

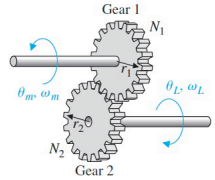
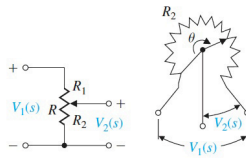
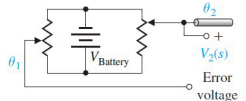
2014/




Universidad Rey Juan Carlos

## Transforma de Laplace

31

Element or System	G(s)
<p>10. Gear train, rotational transformer</p> 	$\text{Gear ratio} = n = \frac{N_1}{N_2}$ $N_2 \theta_L = N_1 \theta_m, \quad \theta_L = n \theta_m$ $\omega_L = n \omega_m$
<p>11. Potentiometer, voltage control</p> 	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R_2}{R} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ $\frac{R_2}{R} = \frac{\theta}{\theta_{\max}}$
<p>12. Potentiometer, error detector bridge</p> 	$V_2(s) = k_s(\theta_1(s) - \theta_2(s))$ $V_2(s) = k_s \theta_{\text{error}}(s)$ $k_s = \frac{V_{\text{Battery}}}{\theta_{\max}}$

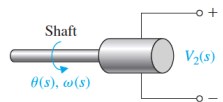

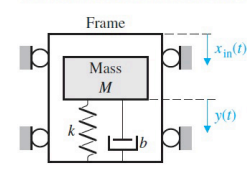
2014/



Universidad Rey Juan Carlos

## Transforma de Laplace

32

Table 2.5 Transfer Functions of Dynamic Elements and Networks	
Element or System	G(s)
<p>13. Tachometer, velocity sensor</p> 	$V_2(s) = K_t \omega(s) = K_t s \theta(s)$ $K_t = \text{constant}$
<p>14. DC amplifier</p> 	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{k_a}{s\tau + 1}$ <p><math>R_o</math> = output resistance  <math>C_o</math> = output capacitance  <math>\tau = R_o C_o, \tau \ll 1s</math>                      and is often negligible for controller amplifier</p>
<p>15. Accelerometer, acceleration sensor</p> 	$x_o(t) = y(t) - x_{in}(t),$ $\frac{X_o(s)}{X_{in}(s)} = \frac{-s^2}{s^2 + (b/M)s + k/M}$ <p>For low-frequency oscillations, where <math>\omega &lt; \omega_n</math>,</p> $\frac{X_o(j\omega)}{X_{in}(j\omega)} \approx \frac{\omega^2}{k/M}$

Copyright © 2011 Pearson Education, Inc. publishing as Prentice Hall

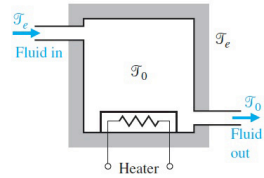


**Table 2.5 Transfer Functions of Dynamic Elements and Networks**

Element or System

G(s)

16. Thermal heating system



$$\frac{\mathcal{T}(s)}{q(s)} = \frac{1}{C_t s + (QS + 1/R_t)}, \text{ where}$$

$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 - \mathcal{T}_c =$  temperature difference due to thermal process

$C_t =$  thermal capacitance

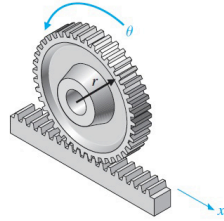
$Q =$  fluid flow rate = constant

$S =$  specific heat of water

$R_t =$  thermal resistance of insulation

$q(s) =$  transform of rate of heat flow of heating element

17. Rack and pinion



$$x = r\theta$$

converts radial motion to linear motion