3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

Se trata de estudiar la propagación de las ondas en la materia.

$\Downarrow$

Hay que resolver las ecuaciones de Maxwell acopladas a la materia

$\Downarrow$

describir el movimiento de ~ 10^{28} átomos/m^3.

Dos grandes tipos de aproximaciones:

- Medios *ópticamente* poco densos (o diluidos). La distancia entre las partículas es mayor que λ. Ejemplo: el medio interestelar.
- Medios *ópticamente* densos. Ejemplo: un gas, el aire.

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

1. Medios ópticamente poco densos.

•Aproximación de partículas independiente. Sólo interaccionarán con el campo incidente.

•Se determina la evolución de cada carga, independientemente, con respecto al campo incidente.

•Hay que buscar la ecuación del movimiento de las cargas y de ahí deducir los campos reemitidos: *esparcimiento* de la onda incidente.

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

2. Medios ópticamente densos.

A estos medios los vamos a caracterizar por medio de un parámetro: el *índice de refracción*.

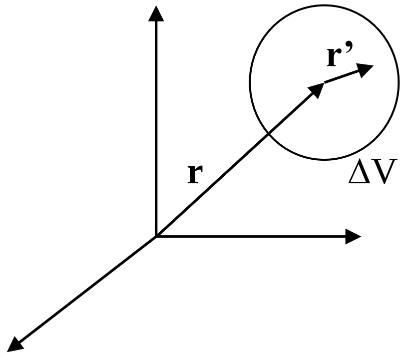
Hay que llegar a las llamadas ecuaciones de Maxwell macroscópicas o en la materia (ecMm).

- Vamos a considerar un volumen $\Delta V \ll \lambda^3$. Campo en ese volumen es prácticamente constante.

- Se prescinde del carácter discreto de la materia: se introducen promedios de las magnitudes implicadas, **E**, **B**, ρ y **j**.

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

Volumen esférico ΔV con coordenadas de centro dadas por el vector **r**, y con (**r** + **r’**) dentro del volumen.



Llamamos campo macroscópico al promedio del campo microscópico en este volumen:

$$\vec{E}_{mac}(\vec{r},t) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} \vec{E}_{mic}(\vec{r}+\vec{r}\,',t)\,d^3r'$$

$$\vec{E}_{mac} \equiv \left\langle \vec{E}_{mic} \right\rangle$$

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

$$\left\langle \frac{\partial \vec{E}_{mic}}{\partial x} \right\rangle = \frac{1}{\partial x}\left\langle \vec{E}_{mic} \right\rangle = \frac{\partial \vec{E}_{mac}}{\partial x}$$

$$\left\langle \frac{\partial \vec{E}_{mic}}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{\partial t}\left\langle \vec{E}_{mic} \right\rangle = \frac{\partial \vec{E}_{mac}}{\partial t}$$

$\Rightarrow$ Si promediamos a ambos lados de las ec. Maxwell:

$$\left\langle \varepsilon_0 \nabla \vec{E}_{mic} \right\rangle = \left\langle \rho \right\rangle$$

$$\left\langle \nabla \vec{B}_{mic} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \nabla \wedge \vec{E}_{mic} + \frac{\partial \vec{B}_{mic}}{\partial t} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \vec{B}_{mic} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_{mic}}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \vec{j} \right\rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{j} \right\rangle = 0$$

$\Rightarrow$

$$\varepsilon_0 \nabla \vec{E}_{mac} = \left\langle \rho \right\rangle$$

$$\nabla \vec{B}_{mac} = 0$$

$$\nabla \wedge \vec{E}_{mac} + \frac{\partial \vec{B}_{mac}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \vec{B}_{mac} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_{mac}}{\partial t} = \left\langle \vec{j} \right\rangle$$

$$\frac{\partial \left\langle \rho \right\rangle}{\partial t} + \nabla \left\langle \vec{j} \right\rangle = 0$$

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

Hay dos tipos de cargas ligadas y libres:

1) El promedio de la densidad de carga:

$$\langle \rho \rangle = \langle \rho_{lib} \rangle + \langle \rho_{lig} \rangle$$

$$\langle \rho_{lig} \rangle = -\nabla \cdot \vec{P}$$

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} q_j \vec{r}_j$$

donde se relaciona a $\langle \rho_{lig} \rangle$ con una magnitud medible, **P** el vector polarización (momento dipolar por unidad de volumen).

2) El promedio de la densidad de corriente:

$$\langle \vec{j} \rangle = \langle \vec{j}_{lib} \rangle + \langle \vec{j}_{lig} \rangle$$

$$\langle \vec{j}_{lig} \rangle = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \wedge \vec{M}$$

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

$$\vec{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} \frac{1}{2} q_j \dot{\vec{r}}_j \wedge \vec{r}_j$$

donde se relaciona a ⟨$\mathbf{j}_{\mathrm{lig}}$⟩ con la magnitud medible **M**, el vector *magnetización* (magnetización por unidad de volumen).

$$\varepsilon_0 \nabla \vec{E}_{mac} = \langle \rho_{lib} \rangle - \nabla \vec{P}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \vec{B}_{mac} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_{mac}}{\partial t} = \langle \vec{j}_{lib} \rangle + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \wedge \vec{M}$$

Reescribimos $\mathbf{E}_{\mathrm{mac}} \equiv \mathbf{E}$ y $\mathbf{B}_{\mathrm{mac}} \equiv \mathbf{B}$.

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

Se definen los vectores **D**, *desplazamiento eléctrico*, y **H**, *campo magnético*:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

Las ecuaciones de Maxwell quedan :

$$\left.\begin{aligned} &\nabla \vec{D} = \langle \rho_{lib} \rangle \\ &\nabla \vec{B} = 0 \\ &\nabla \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ &\nabla \wedge \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \langle \vec{j}_{lib} \rangle \end{aligned}\right\}$$

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

La ecuación de continuidad se cumple tanto para la parte ligada como para la libre:

$$\frac{\partial\langle\rho_{lig}\rangle}{\partial t}+\nabla\langle\vec{j}_{lig}\rangle=0$$

$$\frac{\partial\langle\rho_{lib}\rangle}{\partial t}+\nabla\langle\vec{j}_{lib}\rangle=0$$

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

Ecuaciones para ondas armónicas

Los campos que inducen la perturbación en las cargas son ondas armónicas: inducen unos vectores polarización, **P**, y magnetización, **M**.

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

$$\vec{P}(\vec{r},t)=\chi_e(\vec{r},\omega)\varepsilon_0\vec{E}_0(\vec{r},t)$$

$$\vec{M}(\vec{r},t)=\chi_m(\vec{r},\omega)H_0(\vec{r},t)$$

con χ_e y χ_m las *susceptibilidades eléctrica y magnética*.

La densidad de corriente libre es:

$$\left\langle \vec{j}_{lib} \right\rangle = \frac{1}{\Delta V}\sum_{j\in\Delta V} q_j \dot{\vec{r}}_j$$

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

Y como **r** es proporcional a **E,** la velocidad es proporcional a ω**E**:

$$\left\langle \vec{j}_{lib} \right\rangle = \sigma(\vec{r},\omega)\vec{E}(\vec{r},t)$$

donde σ es la *conductividad*.

Aplicando la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \left\langle \rho_{lib} \right\rangle}{\partial t} = -\nabla(\sigma \vec{E}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t}) \quad \Rightarrow \quad \left\langle \rho_{lib} \right\rangle = \nabla(\frac{-i}{\omega} \sigma \vec{E})$$

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

$$\left.\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \chi_m \vec{H} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \end{aligned}$$

Se definen ε, la *permitividad dieléctrica* del material y μ, la *permeabilidad magnética* de forma que:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

En general χ_e, χ_m, σ, ε y μ serán funciones con valores complejos, dependencia en ω, podrían ser tensores.

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

Con todo esto las ecuaciones de Maxwell macroscópicas quedan:

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla(\varepsilon_{gen}\vec{E}(\vec{r}))=0\\
&\nabla(\mu\vec{H}(\vec{r}))=0\\
&\nabla\wedge\vec{E}(\vec{r})-i\omega\mu\vec{H}(\vec{r})=0\\
&\nabla\wedge\vec{H}(\vec{r})+i\omega\varepsilon_{gen}\vec{E}(\vec{r})=0
\end{aligned}\right\}$$

$$\varepsilon_{gen}=\varepsilon+\frac{i}{\omega}\sigma$$

El problema se reduce a especificar dos funciones, ε_{gen} y μ.

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

La energía transportada por la onda es:

$$W = \frac{1}{2}\int_V (\varepsilon\vec{E}^2 + \mu\vec{H}^2)dV$$

Variación de la energía:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\int_V \vec{j}_{lib}\vec{E}dV - \oint_S (\vec{E}\wedge\vec{H})dS$$

Vector de Poynting

$$\vec{S} \equiv \vec{E}\wedge\vec{H}$$

Promedio Temporal

$$\left\langle\vec{S}\right\rangle = \frac{1}{2}\Re\left(\vec{E}\wedge\vec{H}^*\right)$$

Para ondas armónicas planas

$$\left\langle\vec{S}\right\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left|\vec{E}_0\right|^2\vec{u}_k$$

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

Clasificación de los medios

Se clasifican los medios en función de cómo sean ε_{gen} y μ.

1. *Conductor* ($\sigma \neq 0$) y *dieléctrico* ($\sigma = 0$, sin cargas libres).
2. *Isótropo* (ε_{gen} es un escalar) y *anisótropo* (ε_{gen} es un tensor).
3. *Inhomogéneo* (ε_{gen} es función de la posición en el medio) y *homogéneo* (ε_{gen} no depende de la posición).
4. *Dispersivo* (ε_{gen} es función de la frecuencia) y *no dispersivo* (ε_{gen} no depende de la frecuencia).
5. *Transparente* (ε_{gen} es real) y *absorbente* (ε_{gen} es complejo)
6. *No magnético* ($\mu \approx \mu_0$) y *magnético* ($\mu \neq \mu_0$) .