CONJUNTOS: DEFINICIÓN Y CARDINAL DE UN CONJUNTO

Definición: Un conjunto es una colección bien definida de objetos en la que el orden es irrelevante. Dichos objetos pueden ser reales o conceptuales y se llaman **elementos o miembros del conjunto**.

Por su estructura, dentro de un conjunto no se admiten repeticiones: todos sus miembros deben ser distintos.

Una manera de describir un conjunto es **por extensión** y consiste en enumerar sus elementos entre llaves

Ejemplo: A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Este mismo conjunto también podría haber sido descrito **por comprensión**, es decir, mediante una propiedad que lo caracterice:

Ejemplo: $A = \{a \,/\, 1 \leq a \leq 9$ y a es un número natural$\}$

*A es el conjunto formado por los elementos a tales que (**/**) 1 menor o igual que a y a menor o igual que 9, y a es un número natural.*

Esta manera de definir un conjunto es especialmente útil cuando es imposible enumerar todos los elementos del conjunto porque su número de elementos es elevado o infinito.

Un caso especial es el conjunto que no tiene ningún elemento. Se le llama **conjunto vacío** y se denota por el símbolo **ø**.

Notación

Si x es un elemento del conjunto X se escribirá: $x \in X$ (y se lee: x pertenece a X)

Si y no es un elemento del conjunto X se escribirá: $y \notin X$ (y se lee: y no pertenece a X)

Definición: Cardinal de un conjunto X es el número de elementos (distintos) del conjunto A y se representa por **|X|**.

Ejemplos

1.- En los ejemplos anteriores: $|A| = 9$, $|ø| = 0$

2.- En el caso de conjuntos infinitos como el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$:

$$|\mathbb{N}| = \infty$$

CUANTIFICADORES

Son símbolos que se utilizan para especificar el alcance de una afirmación:

$\forall$	$\exists$	$\exists!$
Para todo	*Existe*	*Existe un único*

Ejemplo

Tomando el conjunto A definido anteriormente serán ciertas las siguientes afirmaciones:

$$\forall\, x \in A,\ x^2 \leq 90$$

Para todo x perteneciente al conjunto A, $x^2 \leq 90$

$$\exists\, x \in A \,/\, x \geq 5$$

Existe algún (al menos un) x perteneciente al conjunto A tal que $x \geq 5$

$$\exists\, x \in A \,/\, x^3 = 27$$

Existe algún (al menos un) x perteneciente al conjunto A tal que $x^3 = 27$

$$\exists!\, x \in A \,/\, x^3 = 27$$

Existe un único x perteneciente al conjunto A tal que $x^3 = 27$

Es importante notar que en el último caso ($\exists!$) sólo puede haber un elemento en A que verifique la condición, mientras que en los dos casos anteriores ($\exists$) es posible, aunque no necesario, que haya varios elementos que la verifiquen.

Negación lógica

Considerando x un elemento de X y siendo p(x) una proposición referida a dicho elemento, el símbolo de **negación lógica** $\rceil$ actúa sobre los cuantificadores de la siguiente manera:

$$\rceil(\forall\, x \in X,\, p(x)) \;\Leftrightarrow\; \exists\, x \in X \,/\, \rceil p(x)$$

$$\rceil(\exists\, x \in X \,/\, p(x)) \;\Leftrightarrow\; \forall\, x \in X,\, \rceil p(x)$$

El símbolo $\Leftrightarrow$ se lee *si y sólo si* o *es equivalente a*, y quiere decir que las dos afirmaciones que se encuentran a ambos lados tienen el mismo valor de verdad, es decir, que ambas son verdaderas o ambas falsas.

Ejemplos

Volviendo al ejemplo del conjunto A definido anteriormente:

$$\rceil(\forall\, x \in A,\, x = 4) \;\Leftrightarrow\; \exists\, x \in A \,/\, \rceil(x = 4) \Leftrightarrow\; \exists\, x \in A \,/\, x \neq 4$$

(No (todo x de A es igual a 4)) equivale a (existe algún x de A tal que no (x = 4)) equivale a (existe algún x de A tal que $x \neq 4$)

En este caso las tres afirmaciones son ciertas (la tercera se obtiene expresando la negación de la igualdad mediante el símbolo $\neq$)

$$\rceil(\exists\, x \in A \,/\, x > 5) \;\Leftrightarrow\; \forall\, x \in A,\, \rceil(x > 5) \Leftrightarrow\; \forall\, x \in A,\, x \leq 5$$

(No (existe x de A tal que x > 5)) equivale a (todo x de A cumple que no (x>5) equivale a (todo x de A cumple que $x \leq 5$)

En este otro caso las tres afirmaciones son falsas (la tercera se obtiene expresando la negación del mayor estricto, que es menor o igual).

Definición

Inclusión de conjuntos: se dice que el conjunto X está **incluido o contenido** en el conjunto Y si todo elemento del conjunto X también es un elemento del conjunto Y y se escribe $X \subset Y$. También se dice que **X** es un **subconjunto** de **Y**

$$X \subset Y \;\text{ si }\; \forall\, x \in X \Rightarrow x \in Y$$

X está contenido en Y si todo x perteneciente a X verifica que x pertenece a Y

Ejemplo

Si se considera el conjunto A de los ejemplos anteriores y el conjunto B = {1, 3, 5, 7, 9} entonces $B \subset A$.

Definición

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. Cuando se trata de conjuntos definidos por comprensión, para comprobar la igualdad se comprueba la doble inclusión: $X = Y \Leftrightarrow X \subset Y$ e $Y \subset X$

Ejemplo

Sean A = {n natural / n $\leq$ 9} y B = {n natural / n tiene sólo una cifra}

$A \subset B$ ya que todos los naturales menores o iguales que 9 tienen sólo una cifra.

$B \subset A$ ya que los naturales de una cifra son todos menores o iguales que 9.

Por tanto A = B.

En este caso, como el número de elementos de estos conjuntos es pequeño, también se podría haber comprobado la igualdad expresando ambos conjuntos por extensión y comprobando que tienen los mismos elementos:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},\ B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \Rightarrow A = B.$$

OPERACIONES DE CONJUNTOS: UNIÓN E INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

Definiciones

La unión de dos conjuntos X e Y es el conjunto formado por los elementos que están en X, en Y o en ambos a la vez. Se denota por $X \cup Y$

La intersección de dos conjuntos X e Y es el conjunto formado por los elementos que están en ambos conjuntos a la vez. Se denota por $X \cap Y$

$$X \cup Y = \{x \,/\, x \in X \text{ ó } x \in Y\}$$

$$X \cap Y = \{x \,/\, x \in X \text{ y } x \in Y\}$$

Ejemplo

Dados los conjuntos: A = {1, 2, 3, 4, 5} y B = {2, 4, 6, 8}:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\} \quad \text{y} \quad A \cap B = \{2, 4\}$$

Los elementos de un conjunto pueden ser objetos de cualquier tipo, por lo que también pueden ser, a su vez, conjuntos, como en la siguiente definición.

Definición

Dado un conjunto X, **el conjunto de las partes de X**, denotado por, $\mathcal{P}$**(X)** es el conjunto formado por todos los subconjuntos de X.

$$\mathcal{P}(X) = \{Y \text{ conjunto} \,/\, Y \subset X\}$$

Cuando se trabaja con $\mathcal{P}(X)$ o con algunos de los subconjuntos de X, al conjunto X se le suele llamar **conjunto universal**.

Ejemplo

Si se considera B = {2, 4, 6, 8}, entonces

$$\mathcal{P}(B)=\{\emptyset,\{2\},\{4\},\{6\},\{8\},\{2,4\},\{2,6\},\{2,8\},\{4,6\},\{4,8\},\{6,8\},\{2,4,6\},\{2,4,8\},\{2,6,8\},\{4,6,8\},B\}$$

Se puede comprobar que, en este caso, $|\mathcal{P}(B)| = 16 = 2^4 = 2^{|B|}$ y, en general, se demuestra que: $\mathbf{|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}}$

Definición

Complementario de un conjunto Y. Si X es el conjunto universal e $Y \subset X$, se define el complementario de Y como el conjunto de los elementos de X que no pertenecen a Y. Se denota por Y^C.

$$Y^C = \{x \in X / x \notin Y\}$$

Ejemplo

Si consideramos como conjunto universal E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, entonces, tomando el conjunto B del ejemplo anterior, $A \subset E$, $B \subset E$ y:

$$B^C = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\} \quad A^C = \{0, 6, 7, 8, 9\}$$

Definición

Otras operaciones entre conjuntos son la **diferencia (A – B)** y la **diferencia simétrica (A∆B)** de conjuntos:

$$A - B = A \cap B^C$$

$$(A \,\Delta\, B) = (A - B) \cup (B - A)$$

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES DE CONJUNTOS

Idempotente: $A \cup A = A$ $\quad A \cap A = A \quad \forall A \in \mathscr{P}(X)$

Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$ $\quad A \cap B = B \cap A \quad \forall A, B \in \mathscr{P}(X)$

Asociativa

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C \quad \forall A, B, C \in \mathscr{P}(X)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C \quad \forall A, B, C \in \mathscr{P}(X)$

Elemento vacío (mínimo ó elemento neutro de la $\cup$ y elemento de absorción de la $\cap$)

$A \cup \varnothing = A \quad A \cap \varnothing = \varnothing \quad \forall A \in \mathscr{P}(X)$

Elemento universal (máximo ó elemento neutro de la $\cap$ y elemento de absorción de la $\cup$)

$A \cup X = X \quad A \cap X = A \quad \forall A \in \mathscr{P}(X)$

Distributivas

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \ \forall A, B, C \in P(X)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \ \forall A, B, C \in P(X)$

Propiedades del complementario

$A \cup A^C = X \quad A \cap A^C = \varnothing \quad \forall A \in P(X)$

$(A^C)^C = A \quad \forall A \in P(X)$

Leyes de De Morgan

$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \quad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C \quad \forall A, B \in P(X)$

Propiedad de absorción

$A \cup (A \cap B) = A \quad A \cap (A \cup B) = A \quad \forall A, B \in P(X)$

PRODUCTO CARTESIANO

Definición

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B, **AxB**, es el conjunto de **pares ordenados** de la forma (a, b) donde a es un elemento del conjunto A y b es un elemento del conjunto B.

$$AxB = \{(a, b) / a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Ejemplo

Si A = {x, y, z} y B = {1, 2, 3, 4}

AxB = {(x,1), (x,2), (x,3), (x,4), (y,1), (y,2), (y,3), (y,4), (z,1), (z,2), (z,3), (z,4)}

Dos pares ordenados son iguales cuando el primer elemento del primer par coincide con el primer elemento del segundo par y el segundo elemento del primer par coincide con el segundo elemento del segundo par:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ y } b = d$$

Por tanto, $(a, b) \neq (b, a)$ salvo que $a = b$.

RELACIONES

DEFINICIÓN DE RELACIÓN. DOMINIO E IMAGEN.

Una relación binaria R de un conjunto A en un conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano AxB

Es decir, se trata de un conjunto de pares ordenados (a,b) donde el primer elemento del par es un elemento del conjunto A y el segundo es un elemento del conjunto B.

$$R = \{(a,b) \,/\, a \text{ está relacionado con } b\} \subset \{(a,b) \,/\, a \in A \text{ y } b \in B\} = AxB$$

Si el par $(a,b) \in R$ se dice que **a está relacionado con b** y también se escribe **a R b**

Si el par $(a,b) \notin R$ se dice que **a no está relacionado con b** y también se escribe **a $\not R$ b**

Dominio de R es el subconjunto de A formado por los elementos que están relacionados con algún elemento de B.

$$DomR = \{a \in A \,/\, \exists\, b \in B \text{ con } (a,b) \in R\}$$

Imagen o rango de R es el subconjunto de B formado por los elementos que cumplen que algún elemento de A está relacionado con ellos.

$$ImR = \{b \in B \,/\, \exists\, a \in A \text{ con } (a,b) \in R\}$$

Cuando A = B se dice que R es una **relación en A**

Ejemplos

1. En los conjuntos A = {ciudades del mundo} B = {países del mundo} se puede definir la relación de A en B: aRb si la ciudad a está en el país b. Así:

   Madrid R España, Florencia R Italia, Barcelona $\not R$ Francia, etc.

2. En el conjunto C={2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} se define la relación aRb si a|b (*a divide a b*), es decir, si b es múltiplo de a.

   R = {(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (3,3), (3,6), (4,4), (4,8), (5,5), (6,6), (7,7), (8,8)}

3. Si A = {x, y, z} y B = {1, 2, 3, 4} se define la relación S de A en B:

   S = {(x,1), (x,3), (y,3), (y,4), (z,1), (z,4)}

OPERACIONES CON RELACIONES: UNIÓN, INTERSECCIÓN, COMPOSICIÓN E INVERSA

Unión e intersección

Dadas R y S dos relaciones de A en B:

R ⋃ S es una relación de A en B definida por:

$$R \cup S = \{(a,b) \in AxB \,/\, (a,b) \in R \text{ o } (a,b) \in S\}$$

R ⋂ S es una relación de A en B definida por:

$$R \cap S = \{(a,b) \in AxB \,/\, (a,b) \in R \text{ y } (a,b) \in S\}$$

Relación inversa

Si R es una relación de A en B,

R^{-1} es una relación de B en A definida por:

$$R^{-1} = \{(b,a) \in BxA \ / \ (a,b) \in R\}$$

EJEMPLO: Si A = {x, y, z}, B = {1, 2, 3, 4} y R = {(x,1), (x,3), (y,3), (y,4), (z,1), (z,4)}

$$R^{-1} = \{(1,x), (3,x), (3,y), (4,y), (1,z), (4,z)\}$$

Composición de relaciones

Si R es una relación de A en B y S es una relación de B en C:

$S \circ R$ es una relación de A en C definida por:

$$S \circ R = \{(a,c) \in AxC \ / \ \exists\, b \in B \text{ con } (a,b) \in R \text{ y } (b,c) \in S\}$$

R compuesto con S es el conjunto de pares (a,c) tales que existe un b que verifica que aRb y bSc

Ejemplos

Si A={x, y, z}, B={1, 2, 3, 4}, C={α, β, γ}, R={(x,1), (x,3), (y,3), (y,4), (z,1), (z,4)} y S={(1,β), (2,α), (2,γ), (3,γ)}, entonces: $S \circ R$ = {(x,β), (x,γ), (y,γ), (z,β)}

REPRESENTACIÓN DE RELACIONES: MATRIZ Y DIGRAFO

Además de representar las relaciones mediante una propiedad que las caracterice o mediante un conjunto de pares ordenados, hay otras dos maneras de representar las relaciones especialmente interesantes: la matriz, por su utilidad computacional, y el digrafo, por sus cualidades visuales e intuitivas.

Definición

La **matriz $M_R = (m_{i,j})$ de una relación R de A en B** se construye de la siguiente forma: se etiquetan las filas con los elementos de A = {a_1, … , a_n} en un cierto orden arbitrario y las columnas con los elementos de B = {b_1, … , b_p} también en un cierto orden, será, por tanto una matriz n×p. Un elemento cualquiera de la matriz $m_{i,j}$ se define:

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \, R \, b_j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Este tipo de matrices, formadas por ceros y unos reciben el nombre de **matrices booleanas**.

Ejemplos

Se define la relación R en el conjunto C = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}: a R b si a|b (a divide a b), es decir, si b es múltiplo de a.

Se define la relación S de A en B donde A={x, y, z} y B={1, 2, 3, 4}: S={(x,1),(x,3),(y,3),(y,4),(z,1),(z,4)}

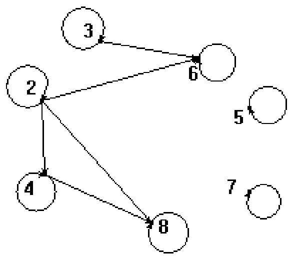
Las matrices de las relaciones R y S serán:

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M_s = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Definición

El digrafo se define únicamente para las relaciones en A (A = B). Para construirlo se dibujan puntos o **vértices** etiquetados con los elementos de A. A continuación se traza una flecha o **arista dirigida** con origen en a y extremo en b para cada par (a,b) $\in$ R. Si el par es de la forma (a,a) se forma un **bucle**.

Ejemplo: El digrafo de la relación R del ejemplo anterior será:



PROPIEDADES DE UNA RELACIÓN EN UN CONJUNTO

En las siguientes propiedades A es un conjunto y R una relación en A

Reflexiva: a R a $\forall$ a $\in$ A

Simétrica: si a R b $\Rightarrow$ b R a

Transitiva: si $\left.\begin{array}{l} a\,R\,b \\ b\,R\,c \end{array}\right\} \Rightarrow a\,R\,c$

Antisimétrica: si $\left.\begin{array}{l} a\,R\,b \\ b\,R\,a \end{array}\right\} \Rightarrow a = b$

Ejemplos

1. La relación en el conjunto $\mathbb{N}$: a S b si a|b, tiene las propiedades:

   Reflexiva: a|a $\forall$ a $\in$ C

   Transitiva: si a|b (b es múltiplo de a) y b|c (c es múltiplo de b), entonces c es múltiplo de a y, por tanto, a|c.

   Antisimétrica: si a|b (b es múltiplo de a) y b|a (a es múltiplo de b) estas dos condiciones sólo se pueden dar cuando a = b, por ser a y b números naturales.

   No es simétrica ya que 2|4 pero $4 \nmid 2$ (4 no divide a 2).

2. En el conjunto A = {alumnos de primero} definimos la relación a R b si a ha nacido el mismo mes que b. Esta relación cumple las propiedades:

   Reflexiva: Todo alumno ha nacido el mismo mes que él mismo.

   Simétrica: Si el alumno a ha nacido el mismo mes que b, entonces b ha nacido el mismo mes que a.

   Transitiva: Si el alumno a ha nacido el mismo mes que b y b ha nacido el mismo mes que c, entonces a ha nacido el mismo mes que c.

RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Definición: **R es una relación de equivalencia** en el conjunto A si verifica las propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplos

1. La relación R presentada en el ejemplo anterior: "ha nacido el mismo mes que…" es una relación de equivalencia ya que cumple las propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva.
2. Dado X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, en $\mathscr{P}(X)$ se define la relación S de la siguiente manera:

$$A\ S\ B \quad \Leftrightarrow \quad |A| = |B|$$

   Es fácil ver que S cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Es, por tanto, una relación de equivalencia.
3. Imaginemos una caja llena de bolas de diferentes colores: blancas, rojas, verdes, azules, amarillas, etc. Las bolas son, además, de diferentes tamaños y tienen otras características diferenciadoras. En ese conjunto C de bolas se establece la relación T "tener el mismo color que…" Es fácil ver que es una relación de equivalencia porque cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

CLASES DE EQUIVALENCIA

En los ejemplos anteriores se puede ver que al definir la relación aparecen las expresiones *igual* o *el mismo*. Esto no es casual. Cualquier relación de equivalencia es, en esencia, una relación de igualdad en algún aspecto. En cada una de estas relaciones, los elementos relacionados comparten alguna propiedad y, al fijarnos exclusivamente en ella, el resultado es una clasificación. En el primer ejemplo agrupamos a los alumnos en función del mes en el que han nacido. En el segundo, clasificamos los conjuntos según el número de elementos que tienen. En el tercero nos fijamos únicamente en el color para clasificar las bolas.

Observando cada uno de los grupos resultantes de los ejemplos anteriores, es fácil ver que todos sus integrantes están relacionados entre si en ambos sentidos y que ninguno de ellos está relacionado con integrantes de otros grupos. Cada uno de estos grupos resultantes será una **clase de equivalencia** de su respectiva relación. Ésta es la característica esencial de las relaciones de equivalencia: dar lugar a una clasificación del conjunto donde se definen, es decir, generar una **partición** de dicho conjunto.

Definición

Clase de equivalencia de un elemento a. Dada una relación de equivalencia R en un conjunto A y un elemento a $\in$ A, la clase de equivalencia de a (**[a]**) es el conjunto de elementos de A relacionados con a mediante R. El elemento a es el **representante de la clase**.

$$[a] = \{b \in A \ / \ b\ R\ a\}$$

Ejemplos

1. En el conjunto A = {alumnos de primero} con la relación R "haber nacido en el mismo mes", dado un alumno cualquiera a, su clase de equivalencia será:

   [a] = {alumnos de primero que han nacido el mismo mes que a}
2. En $\mathscr{P}(X)$ con la relación S:

   [{1,2}] = { {1,2}, {1,3}, …, {1,8}, {2,3}, {2,4}, …, {7,8}, {7,9}, {8,9} }

   La clase de {1,2} está formada por todos los subconjuntos de dos elementos de X.

3. En el conjunto C de bolas de colores con la relación T, si a es una bola roja:

   [a] = {bolas rojas de C}

PROPIEDADES CLASES DE EQUIVALENCIA Y PARTICIONES DE UN CONJUNTO

Propiedades

Las clases de equivalencia tienen cuatro propiedades esenciales:

- Si $b \in [a] \Rightarrow [b] = [a]$ (*si un elemento está en la clase de otro, sus respectivas clases coinciden*).
- $[a] \neq \varnothing \quad \forall a \in A$ (*ninguna clase es vacía, al menos tiene a su representante*).
- Si $b \notin [a] \Rightarrow [a] \cap [b] = \varnothing$ (*si un elemento no está en la clase de otro, entonces sus respectivas clases no tienen ningún elemento en común*).
- $\bigcup_{a \in A} [a] = A$ (*la unión de las clases de todos los elementos de A es A*)

Las tres últimas propiedades hacen de las clases de equivalencia una **partición** del conjunto A como se verá en la siguiente definición.

Definición

Una partición de un conjunto A es una colección $\pi = \{A_1, A_2, \dots A_n\}$ de subconjuntos de A ($A_i \subset A$) que verifican:

- $A_i \neq \varnothing \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- $A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$
- $\bigcup_{1 \le i \le n} A_i = A$

CONJUNTO COCIENTE

Si A es un conjunto y R una relación de equivalencia en A, R genera unas clases de equivalencia que forman una partición de A. Lo que hace R es focalizar la atención en una cierta característica de los elementos de A, agrupando sus elementos en función de esa característica y olvidando las demás características de dichos elementos. En el caso de las bolas de colores, la relación T focaliza la atención en el color de las bolas ignorando otras características de estas como puedan ser el tamaño, el material, etc. De esta manera divide el conjunto C en subconjuntos (clases de equivalencia) que pueden ser etiquetados con el color de sus bolas o representados por una cualquiera de sus integrantes. Este conjunto de clases recibe el nombre de **conjunto cociente**.

Definición

Conjunto cociente de A por R denotado por **A/R** es el conjunto de las clases de equivalencia de los elementos de A.

$$A/R = \{[a] \,/\, a \in A\}$$

Debe tenerse en cuenta que un conjunto no admite elementos repetidos, por lo que las clases que sean iguales aparecerán sólo una vez.

Ejemplos

Con los conjuntos de los ejemplos anteriores

1. En $\mathscr{P}(X)$ con la relación S:

   $\mathscr{P}(X)/S$ = {[∅], [{1}], [{1,2}],[{1,2,3}], [{1,2,3,4}], [{1,2,3,4,5}], [{1,2,3,4,5,6}], [{1,2,3,4,5,6,7}], [{1,2,3,4,5,6,7,8}], [X]}
2. En C con la relación T   C/T = {{bolas blancas}, {b. rojas}, {b. azules}, …}

APLICACIONES

DEFINICIONES

- Una aplicación f de A en B, que notaremos $f: A \to B$, es una relación (binaria) entre dos conjuntos A y B en la que a cada elemento de A se le asocia un único elemento de B.

$$\forall a \in A \ \ \exists \text{ un único } b \in B \ \text{ tal que } \ a\, f\, b$$

$$(a, b) \in f \iff a\, f\, b \iff f(a) = b$$

- dominio de f = A, por ser f aplicación.
- rango o imagen de $f = \{ b \in B \ / \ \exists\, a \in A \text{ con } f(a) = b \} \subseteq B$.

  rango de f = $im\ f$ = $f(A)$

- La imagen recíproca o contraimagen de un elemento $b \in B$ es:

$$f^{-1}(b) = \{ a \in A \ / \ f(a) = b \} \subseteq A$$

Entonces $\forall\, b \in B$ se tiene que $f^{-1}(b) = \begin{cases} \phi, & \text{si } b \text{ no es imagen de ningún } a \in A \\ \{a\}, & \text{si } b \text{ es imagen de un único } a \in A \\ C \subseteq A, & \text{si } b \text{ es imagen de más de un } a \in A \end{cases}$

- Sea $f: A \to B$ una aplicación
  - f es inyectiva si y sólo si $\forall\, a, a' \in A$, $a \neq a'$ se tiene que $f(a) \neq f(a')$.
  - f es sobreyectiva si y sólo si $\forall\, b \in B$, $\exists\, a \in A$ tal que $f(a) = b$.
  - f es biyectiva si y sólo si $\forall\, b \in B$, $\exists$ un único $a \in A$ tal que $f(a)=b$ (i.e. f inyectiva y suprayectiva).

Observación: f es inyectiva si y sólo si $\forall\, a, a' \in A$ tal que $f(a) = f(a')$ se tiene $a = a'$, ya que [$\forall\, a, a' \in A$, $a \neq a'$ se tiene que $f(a) \neq f(a')$] es equivalente a [$\forall\, a, a' \in A$ tal que $f(a)=f(a')$ se tiene $a=a'$].

DEFINICIONES

- Sean $f: A \to B$, $g: B \to C$ dos aplicaciones. La composición de f y g es la aplicación $(g \circ f): A \to C$ tal que $(g \circ f)(a) = g(f(a))$, $\forall\, a \in A$.
- La aplicación identidad en un conjunto A es la aplicación

  $i_A : A \to A$ tal que $i_A(a) = a$, $\forall\, a \in A$.

- La aplicación inversa de una aplicación $f: A \to B$ es la aplicación

  $g: B \to A$ tal que $g \circ f = i_A$ y $f \circ g = i_B$

Proposición

La aplicación $f: A \to B$ tiene inversa si y sólo si f es biyectiva.

EJEMPLOS: Sea A={a,b,c,d}. Las siguientes relaciones NO son aplicaciones:

R_1={(a,b), (b,c), (c,b), (b,d), (d,d)} ya que b está relacionado con dos elementos (c y d)

R_2={(a,c), (b,a), (d,d)} ya que c no está relacionado con ningún elemento (no tiene imagen)

Y las siguientes relaciones si son aplicaciones:

R_3={(a,b), (b,c), (c,d), (d,a)} es aplicación biyectiva

R_4={(a,a), (b,c), (c,a), (d,d)} es aplicación No inyectiva (a y c tienen la misma imagen) y No suprayectiva (b no es imagen de ninguno)