Capítulo 3

Fuerzas aplicadas a un sólido rígido

3.1. Introducción. Sólido rígido

En el capítulo anterior estudiamos la estática de sistemas físicos que, por las características del problema estudiado, podíamos considerar como una única partícula. Sin embargo, ese punto de vista no es siempre posible. Para estudiar la dinámica de ciertos sistemas hay que tener en cuenta su tamaño, geometría y estructura interna, así como el hecho de que las fuerzas puedan actuar sobre puntos diferentes. Nosotros describiremos los sistemas mecánicos como un conjunto de partículas. Para muchos problemas de arquitectura e ingeniería no es necesario un modelo tan general, basta con el modelo de sólido rígido.

sólido rígido

Un *sólido rígido* es un sistema de puntos materiales en el que la distancia entre dos cualesquiera de ellos no cambia ante la acción de un sistema de fuerzas (fig. 3.1). Es decir, un sólido rígido *no se puede deformar*.

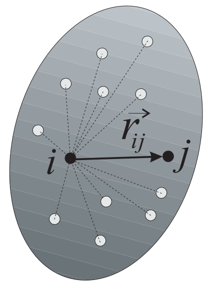


FIGURA 3.1: N puntos materiales forman un sólido rígido si cumplen la *condición de rigidez*: $|\vec{r}_{ij}| = \text{cte}\ \forall\, i, j = 1, 2, \ldots, N$, donde $\vec{r}_{ij}$ es el vector con origen en el punto material i y extremo en el punto material j.

Los sistemas físicos reales no son rígidos, se deforman bajo la acción de fuerzas. Sin embargo, el modelo de sólido rígido es aplicable cuando estas deformaciones son pequeñas comparadas con las dimensiones del sistema mecánico. Del estudio de las deformaciones se ocupa la resistencia de materiales.

Dado que un sólido rígido es un sistema de puntos materiales, las fuerzas que actúan sobre un sólido rígido pueden dividirse en:

- *Fuerzas interiores*, que son aquéllas que se ejercen entre sí las partículas que forman el sólido rígido y mantienen constantes las distancias entre ellas.

- *Fuerzas exteriores*, que son las que ejercen otros cuerpos sobre el sólido rígido considerado.

Las fuerzas exteriores son las únicas relevantes en el estudio del equilibrio y movimiento del sólido rígido.

En este capítulo y en los capítulos 4 y 5 nos ocuparemos únicamente de fuerzas *exteriores* que actúan *sobre sólidos rígidos*.

3.2. Principio de transmisibilidad

El *principio de transmisibilidad* afirma que las condiciones de equilibrio o movimiento de un sólido rígido se mantendrán inalteradas si una fuerza $\vec{F}$ que actúa en un punto dado del sólido rígido se sustituye por una fuerza $\vec{F}'$ de igual módulo, dirección y sentido, pero que actúa en un punto diferente, *siempre que las dos fuerzas tengan la misma recta de acción* (fig. 3.2). En ese caso, las dos fuerzas $\vec{F}$ y $\vec{F}'$ producen el mismo efecto mecánico (traslación, rotación) sobre el sólido rígido, y se dice que son *mecánicamente equivalentes*. Este principio tiene una base experimental. No puede ser deducido de ninguna de las propiedades establecidas en este texto[1].

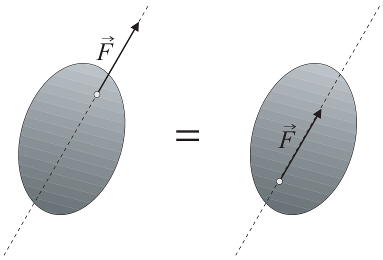


FIGURA 3.2: Si el cuerpo es un sólido rígido, dos fuerzas de igual módulo, dirección y sentido que estén aplicadas sobre sendos puntos de la misma recta de acción provocan el mismo efecto mecánico (principio de transmisibilidad).

Nótese que dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, con el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido no son, en general, mecánicamente equivalentes, ya que sus rectas de acción no tienen por qué ser coincidentes.

Nuestro estudio de la estática del sólido rígido se basará en cuatro principios:

- La regla del paralelogramo para la suma de fuerzas.
- El principio de transmisibilidad.
- La primera ley de Newton.
- La tercera ley de Newton.

En el capítulo 2 indicábamos que las fuerzas aplicadas sobre una partícula podían representarse mediante vectores. Estos vectores tenían un punto de aplicación bien definido —la propia partícula— y eran, por tanto, *vectores ligados*.

El principio de transmisibilidad nos dice que en el caso de fuerzas aplicadas a un sólido rígido, el punto de aplicación de la fuerza no importa, siempre que pertenezca a la recta de acción de la fuerza. Por tanto, las fuerzas aplicadas sobre un sólido rígido se representarán mediante *vectores deslizantes*.

En este capítulo y en los capítulos 4 y 5, cada vez que hablemos de una fuerza $\vec{F}$ nos estaremos refiriendo a una fuerza aplicada a un sólido rígido y, por tanto, descrita mediante un vector deslizante. No obstante, las operaciones y relaciones matemáticas entre vectores que se emplearán en el texto deben entenderse como operaciones y relaciones entre vectores libres, por lo que $\vec{F}$ representará *en estos casos* un vector libre con el módulo, dirección y sentido de la fuerza. Así, la expresión $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$ se interpretará como igualdad en módulo, dirección y sentido de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, pero no como coincidencia de sus rectas de acción. Si además las fuerzas tienen idéntica recta de acción, dicha igualdad se expresará como $\vec{F}_1 \equiv \vec{F}_2$.

3.3. Sistemas equivalentes de fuerzas

sistema de fuerzas

Se llama *sistema de fuerzas* a un conjunto de fuerzas que actúa sobre un sistema mecánico.

sistemas mecánicamente equivalentes

Dos *sistemas mecánicamente equivalentes* son aquéllos que producen el mismo efecto mecánico si se aplican sobre un mismo sólido rígido.

[1]Pero sí del estudio de la dinámica del sólido rígido.

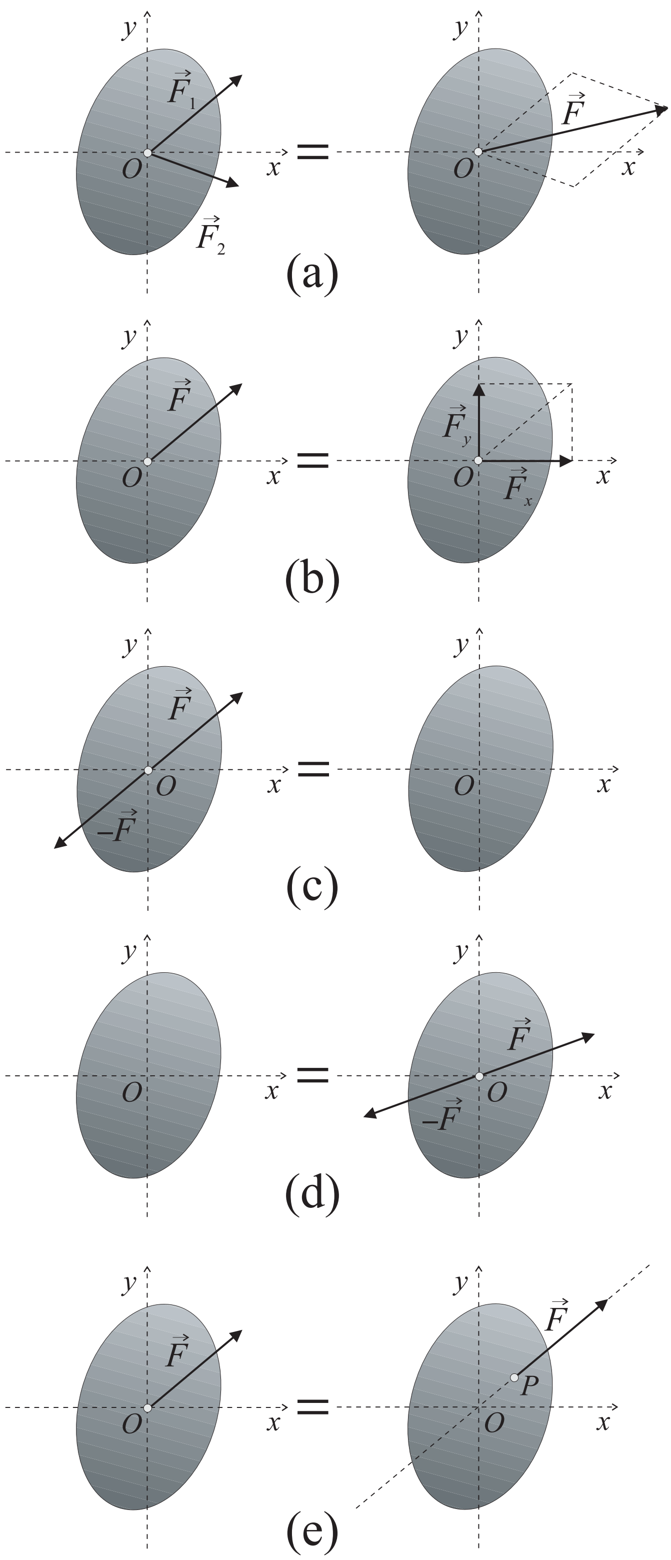


FIGURA 3.3: Operaciones que transforman un sistema de fuerzas que actúa sobre un sólido rígido en otro mecánicamente equivalente.

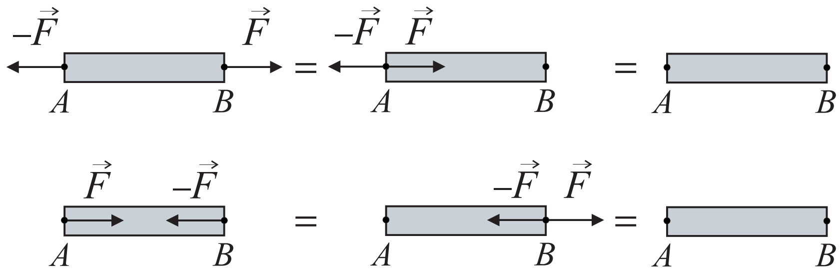


FIGURA 3.4: Dos sistemas de fuerzas mecánicamente equivalentes.

Un sistema de fuerzas que actúa sobre un sólido rígido puede transformarse en otro mecánicamente equivalente mediante una o varias de las operaciones elementales siguientes:

(a) Sustituir dos fuerzas que actúan sobre la misma partícula por su suma vectorial (ver fig. 3.3 a).

(b) Descomponer una fuerza en dos componentes aplicadas en la misma partícula (ver fig. 3.3 b).

(c) Anular fuerzas iguales y opuestas que actúan sobre la misma partícula (ver fig. 3.3 c).

(d) Aplicar a una partícula dos fuerzas iguales y opuestas (ver fig. 3.3 d).

(e) Deslizar una fuerza a lo largo de su recta de acción (ver fig. 3.3 e).

El hecho de que las operaciones (a)–(d) transformen un sistema en otro mecánicamente equivalente se justifica a partir de la regla del paralelogramo. El hecho de que la operación (e) transforme un sistema en otro equivalente se justifica por el principio de transmisibilidad.

El principio de transmisibilidad y el concepto de sistemas mecánicamente equivalentes tienen limitaciones debidas al hecho de que el sólido rígido es únicamente un *modelo* ideal; los sólidos reales no son perfectamente rígidos. Por ejemplo, desde el punto de vista de la mecánica del sólido rígido, los dos sistemas de fuerzas de la fig. 3.4 izda. son mecánicamente equivalentes, como se ve aplicando sucesivamente las operaciones (e) (fig. 3.4 centro) y (c) (fig. 3.4 dcha.). Sin embargo, las fuerzas interiores son distintas y, si el sólido no es perfectamente rígido, las deformaciones que provocarían los dos sistemas serían distintas. La barra de la fig. 3.4 izda. arriba está sometida a *tracción* y, si no es absolutamente rígida, se alargará ligeramente; la barra de la fig. 3.4 izda. abajo está sometida a *compresión* y, si no es absolutamente rígida, se acortará ligeramente.

3.4. Momento de una fuerza en un punto

Sean $\vec{F}$ una fuerza aplicada sobre un sólido rígido, A un punto *cualquiera* de la recta de acción de $\vec{F}$ y O un punto arbitrario en el espacio.

momento de $\vec{f}$

El *momento de $\vec{F}$ en O* es el producto vectorial de $\vec{OA}$ y $\vec{F}$ (ver fig. 3.5):

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OA} \times \vec{F}. \tag{3.1}$$

$\vec{M}_O(\vec{F})$ es un vector ligado al punto O. El punto O se llama *punto de reducción* (en la sec. 3.8 se justificará esta denominación).

En el SI el momento de una fuerza se expresa en newton-metro (N m).

Nótese que el momento de $\vec{F}$ en O, $\vec{M}_O(\vec{F})$, es perpendicular tanto a $\vec{OA}$ como a $\vec{F}$ y, por tanto, perpendicular al plano definido por O y la línea de acción de $\vec{F}$ (ver fig. 3.5). El módulo de $\vec{M}_O(\vec{F})$,

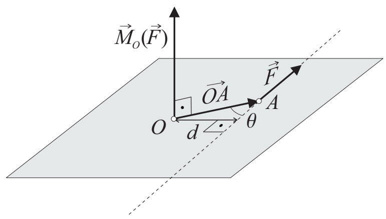


FIGURA 3.5: El momento de $\vec{F}$ en O, $\vec{M}_O(\vec{F})$, es perpendicular al plano que determinan $\vec{OA}$ y $\vec{F}$. La distancia entre O y la recta de acción de $\vec{F}$ es $d = |\vec{M}_O(\vec{F})|/|\vec{F}|$.

$$
\begin{aligned}
|\vec{M}_O(\vec{F})| &= |\vec{F}|\,|\vec{OA}| \operatorname{sen}\theta \\
&= |\vec{F}|\,d,
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

donde d es la distancia entre O y la línea de acción de $\vec{F}$. El módulo de $\vec{M}_O(\vec{F})$ mide la tendencia de la fuerza $\vec{F}$ a imprimir al sólido rígido una rotación alrededor de un eje que pasa por O y es perpendicular al plano que contiene a la fuerza $\vec{F}$ y al punto O.

> $\vec{M}_O(\vec{F})$ *es independiente de qué punto de la recta de acción de* $\vec{F}$ *se elija para su cálculo.*

En efecto, consideremos otro punto B de la recta de acción de $\vec{F}$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
\vec{OB} \times \vec{F} &= \left(\vec{OA} + \vec{AB}\right) \times \vec{F} \\
&= \vec{OA} \times \vec{F} + \vec{AB} \times \vec{F} \\
&= \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{0} = \vec{M}_O(\vec{F}),
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

puesto que $\vec{AB}$ y $\vec{F}$ tienen la misma dirección.

> *El momento de una fuerza* $\vec{F}$ *en dos puntos* O *y* P *diferentes es, en general, distinto.*

En efecto,

$$
\begin{aligned}
\vec{M}_P(\vec{F}) &= \vec{PA} \times \vec{F} \\
&= \left(\vec{PO} + \vec{OA}\right) \times \vec{F} \\
&= \vec{PO} \times \vec{F} + \vec{OA} \times \vec{F} \\
&= \vec{PO} \times \vec{F} + \vec{M}_O(\vec{F}).
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

$\vec{M}_P(\vec{F})$ puede coincidir con $\vec{M}_O(\vec{F})$ si $\vec{PO}$ es paralelo a $\vec{F}$.

Nótese que *el momento de una fuerza* $\vec{F}$ *en un punto* O *determina, junto con sus componentes, la recta de acción de la fuerza.* En efecto, conocidas las componentes de $\vec{F}$ y $\vec{M}_O(\vec{F})$, y el punto O, podemos hallar la recta de acción de $\vec{F}$ de la siguiente manera: Por un lado, sabemos que $\vec{F}$ está en el plano perpendicular a $\vec{M}_O(\vec{F})$ que pasa por O. Además sabemos que la distancia entre la recta de acción y O debe ser igual a $|\vec{M}_O(\vec{F})|/|\vec{F}|$. La dirección de la recta de acción debe ser la de $\vec{F}$. Pero hay dos rectas con estas características, una a cada lado de O; el sentido de $\vec{M}_O(\vec{F})$ determina cuál de las dos rectas es la correcta (ver fig. 3.6).

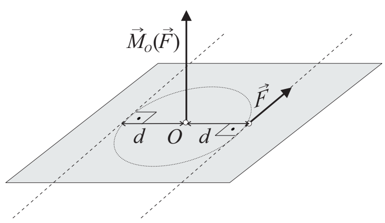


FIGURA 3.6: En el plano perpendicular a $\vec{M}_O(\vec{F})$ que pasa por O hay dos rectas con la dirección de $\vec{F}$ a una distancia d de O.

Como el momento de una fuerza en un punto determina, junto con la propia fuerza, la recta de acción de esta última, el principio de transmisibilidad se puede reformular de la manera siguiente: *dos fuerzas* $\vec{F}$ *y* $\vec{F}'$ *aplicadas sobre* *un sólido rígido son mecánicamente equivalentes ($\vec{F} \equiv \vec{F}'$) si tienen el mismo módulo, la misma dirección, el mismo sentido y el mismo momento en un punto O.* Esto lo expresaremos escribiendo:

$$\vec{F} = \vec{F}', \tag{3.5}$$
$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}'). \tag{3.6}$$

> *Si dos fuerzas $\vec{F}$ y $\vec{F}'$ cumplen $\vec{F} = \vec{F}'$ y $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}')$ para un punto O, también cumplirán que $\vec{M}_P(\vec{F}) = \vec{M}_P(\vec{F}')$ para cualquier otro punto P. Es decir, el que dos fuerzas sean mecánicamente equivalentes es independiente del punto de reducción elegido para comprobarlo.*

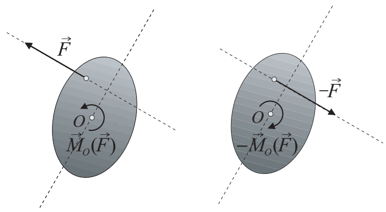


FIGURA 3.7: Si la fuerza $\vec{F}$ cambia sólo de sentido, su momento en O también cambia de sentido.

En efecto,

$$\begin{aligned}\vec{M}_P(\vec{F}) &= \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{PO} \times \vec{F} \\ &= \vec{M}_O(\vec{F}') + \vec{PO} \times \vec{F}' \\ &= \vec{M}_P(\vec{F}').\end{aligned} \tag{3.7}$$

En el caso de un sólido rígido plano sobre el que sólo actúa una fuerza $\vec{F}$ contenida en ese plano, el momento de $\vec{F}$ en un punto O del plano es un vector $\vec{M}_O$ perpendicular al plano (fig. 3.7). Si el sentido de ese vector es hacia fuera del plano, el vector se representa mediante una flecha orientada antihorariamente, es decir, contraria al movimiento de las agujas del reloj (fig. 3.7 izda.). Si el sentido es hacia dentro del plano, el vector se representa mediante una flecha orientada horariamente, según las agujas del reloj (fig. 3.7 dcha.). Además, estas flechas indican cómo tendería a girar el sólido rígido bajo la acción de $\vec{F}$ y supuesto fijo el punto O.

3.5. Resultante y momento de un sistema de fuerzas

3.5.1. Definiciones

Consideremos un sistema formado por N fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_N$, que actúan sobre un sólido rígido, en los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_N$, respectivamente.

resultante

Se llama *resultante*, $\vec{R}$, del sistema de fuerzas a las suma (vectorial) de las fuerzas que forman el sistema:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i. \tag{3.8}$$

La resultante es un *vector libre*. Los efectos de traslación de un sólido rígido vienen determinados por la resultante del sistema de fuerzas.

momento del sistema en un punto

Se llama *momento del sistema en un punto O*, $\vec{M}_O$, a la suma (vectorial) de los momentos en O de todas las fuerzas:

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_O(\vec{F}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N} (\vec{OA}_i \times \vec{F}_i).\end{aligned} \tag{3.9}$$

El momento en O es un vector ligado a O. Los efectos de rotación de un sólido rígido vienen determinados por los momentos del sistema de fuerzas.

3.5.2. Teorema del centro de reducción

En general, el momento de un sistema de fuerzas es distinto en cada punto. Cuando se conoce la resultante y el momento en un punto, el momento en cualquier otro punto puede obtenerse mediante el siguiente resultado llamado *teorema del centro de reducción*:

> *El momento de un sistema de fuerzas en un punto P es igual al momento del sistema en otro punto O, más el producto vectorial del vector $\vec{PO}$ por la resultante $\vec{R}$ del sistema. Este producto vectorial puede interpretarse como el momento en P de una fuerza $\vec{F}_{\text{tot}}$ con las mismas componentes que $\vec{R}$ aplicada en O:*

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O + \vec{PO} \times \vec{R}. \tag{3.10}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\vec{M}_P &= \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_P(\vec{F}_i) \\
&= \sum_{i=1}^{N} (\vec{PA}_i \times \vec{F}_i) \\
&= \sum_{i=1}^{N} [(\vec{PO} + \vec{OA}_i) \times \vec{F}_i] \\
&= \sum_{i=1}^{N} (\vec{PO} \times \vec{F}_i + \vec{OA}_i \times \vec{F}_i) \\
&= \sum_{i=1}^{N} (\vec{PO} \times \vec{F}_i) + \sum_{i=1}^{N} (\vec{OA}_i \times \vec{F}_i) \\
&= \vec{PO} \times \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i + \vec{M}_O \\
&= \vec{PO} \times \vec{R} + \vec{M}_O.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

El teorema del centro de reducción permite demostrar los siguientes resultados:

> *Cualquier sistema de resultante nula tiene el mismo momento en todos los puntos del espacio.*

En efecto, usando el teorema del centro de reducción,

$$\begin{aligned}
\vec{M}_P &= \vec{M}_O + \vec{PO} \times \vec{R} \\
&= \vec{M}_O.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

> *El lugar geométrico de los puntos en los que el* vector *momento tiene las mismas componentes es una recta con la misma dirección que la resultante del sistema (si ésta es no nula, pues si es nula estamos en las condiciones del resultado anterior).*

En efecto, sean O y P dos puntos distintos tales que $\vec{M}_O = \vec{M}_P$. Entonces, usando (3.10), $\vec{PO} \times \vec{R} = \vec{0}$. Suponiendo que $\vec{R} \neq \vec{0}$, y dado que $\vec{PO} \neq \vec{0}$, la conclusión es que $\vec{PO}$ es paralelo a $\vec{R}$.

En las siguientes secciones vamos a estudiar dos sistemas de fuerzas sencillos: los sistemas de fuerzas concurrentes y los pares de fuerzas.

3.6. Sistemas de fuerzas concurrentes. Teorema de Varignon

fuerzas concurrentes

Un sistema de fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_N$ es un sistema de *fuerzas concurrentes* si todas las fuerzas están aplicadas en el mismo punto A o sus rectas de acción se cortan en un mismo punto A (ver fig. 3.8).

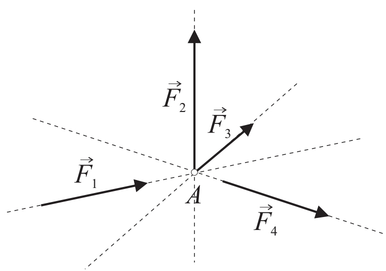


FIGURA 3.8: Sistema de 4 fuerzas concurrentes en el punto A.

Obsérvese que, utilizando las operaciones elementales (e) y (a) que permiten transformar un sistema en otro equivalente (ver la sec. 3.3), es fácil comprobar que cualquier sistema de fuerzas concurrentes es mecánicamente equivalente a otro formado por una única fuerza, $\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{R}$, aplicada sobre una recta de acción que pasa por el punto de concurrencia.

Un resultado aplicable a los sistemas de fuerzas concurrentes es el *teorema de Varignon*:

> *Si $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_N$ es un sistema de fuerzas* concurrentes *en A, el momento del sistema en el punto O, $\vec{M}_O$, es igual al momento en O de $\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{R}$ aplicada en A, es decir*
> $$\vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{R}. \tag{3.13}$$

En efecto, aplicando el teorema del centro de reducción,

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \vec{M}_A + \vec{OA} \times \vec{R} \\ &= \vec{OA} \times \vec{R}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

puesto que A es el punto de concurrencia y por tanto $\vec{M}_A = \vec{0}$, al ser $\vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{0}$ para todo i.

3.7. Pares de fuerzas

3.7.1. Momento de un par

par

Se llama *par* al sistema formado por dos fuerzas que tienen el mismo módulo, la misma dirección, sentido opuesto y rectas de acción paralelas (ver fig. 3.9).

La resultante de un par es el vector nulo. Por tanto, un par *no producirá traslación* del sólido rígido.

Sin embargo, el momento de un par en un punto O no es, como vamos a ver, el vector nulo. Un par hará que el sólido rígido *tienda a girar*.

Para calcular el momento en O de un par debemos sumar los momentos en O de las dos fuerzas que forman el par:

$$\vec{OA}_1 \times \vec{F} + \vec{OA}_2 \times (-\vec{F}) = (\vec{OA}_1 - \vec{OA}_2) \times \vec{F}, \tag{3.15}$$

siendo A_1 un punto cualquiera de la recta de acción de $\vec{F}$ y A_2 un punto cualquiera de la recta de acción de $-\vec{F}$. Llamando $\overrightarrow{A_2A_1} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2}$, la suma de los momentos de las fuerzas del par o *momento del par* es

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{A_2A_1} \times \vec{F}, \tag{3.16}$$

y su módulo vale

$$\begin{aligned} |\vec{M}_O| &= |\vec{F}|\,|\overrightarrow{A_2A_1}|\,\operatorname{sen}\theta \\ &= |\vec{F}|\,d. \end{aligned} \tag{3.17}$$

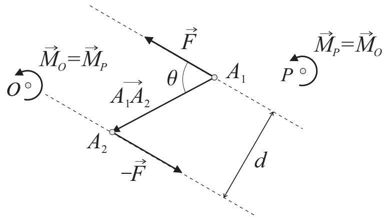


FIGURA 3.9: Par de fuerzas formado por las fuerzas $\vec{F}$ y $-\vec{F}$. El sentido del momento del par es hacia fuera del plano, si las fuerzas tienden a imprimir un giro antihorario, como en este ejemplo, y hacia dentro, si tienden a imprimir un giro horario.

La dirección de $\vec{M}_O$ es perpendicular a los vectores $\vec{F}$ y $\overrightarrow{A_2A_1}$ o, dicho de otro modo, perpendicular al plano que contiene a las fuerzas $\vec{F}$ y $-\vec{F}$.

En principio, cabría pensar que el momento en O de un par es un vector ligado al punto O (i.e., no tiene ningún sentido colocado en cualquier otro punto). Sin embargo, nótese que la expresión (3.16) *no depende de la posición de O. El momento de un par es independiente del punto de reducción que elijamos.* Por tanto, podemos considerar que el momento de un par es un *vector libre*. Así pues, podemos escribir: $\vec{M}_{\text{par}}$ en lugar de $\vec{M}_O$. Este resultado no es sorprendente, pues ya vimos en el apartado 3.5.2 que cualquier sistema de resultante nula tiene el mismo momento en todos los puntos del espacio.

En resumen, el momento de un par es un vector:

- Perpendicular al plano definido por las dos fuerzas.
- De módulo $|\vec{F}|\,d$, donde d es la distancia entre las rectas de acción de las fuerzas.
- De sentido determinado por la regla de la mano derecha (ver fig. 3.9).
- Que puede considerarse un vector libre, puesto que es igual en todos los puntos del espacio.

3.7.2. Pares mecánicamente equivalentes. Suma de pares

Dos pares son *mecánicamente equivalentes* si provocan el mismo efecto mecánico.

Puede demostrarse, mediante las operaciones descritas en la sec. 3.3, que *dos pares son mecánicamente equivalentes si tienen el mismo momento.*

EJEMPLO: El par formado por la fuerza $\vec{F} = (0, 1, 0)$ N aplicada en el punto $A(2, 0, 0)$ m y la fuerza $-\vec{F}$ aplicada en el punto $B(-2, 0, 0)$ m es mecánicamente equivalente al par formado por la fuerza $\vec{F'} = (-4, 0, 0)$ N aplicada en el punto $C(1, 1, 0)$ m y la fuerza $-\vec{F'}$ aplicada en el origen de coordenadas. En ambos casos el momento del par es $(0, 0, 4)$ N m.

Esta propiedad que acabamos de enunciar es muy importante para comprender la mecánica del sólido rígido. *Lo único que caracteriza el efecto mecánico de un par es su momento.* Luego existen infinitos pares que provocarían un mismo efecto mecánico sobre un sólido rígido dado. Los módulos y direcciones de las fuerzas que constituyen estos pares pueden ser muy distintos y pueden estar

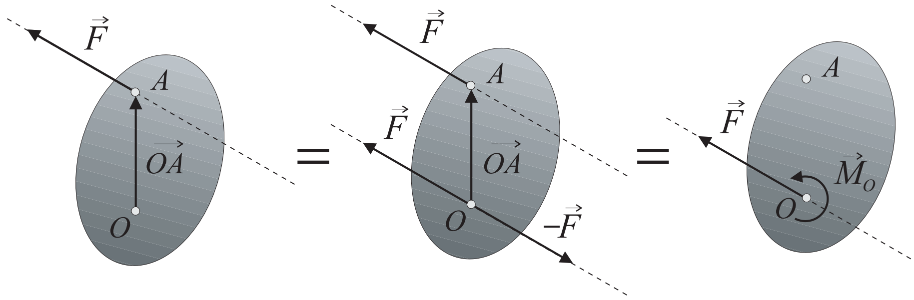


FIGURA 3.10: Descomposición de una fuerza aplicada en A en una fuerza aplicada en O y un par.

aplicadas en puntos muy diferentes del sólido, con tal de que ambas fuerzas estén contenidas en un plano perpendicular al momento del par, la distancia entre sus líneas de acción sea el cociente entre el módulo del momento y el de las fuerzas y sus sentidos sean tales de originar el sentido correcto del momento dado.

La *suma* o *composición de dos pares* de momentos $\vec{M}_1$ y $\vec{M}_2$ es otro par cuyo momento, $\vec{M}$ es la suma vectorial de sus momentos:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2. \tag{3.18}$$

Esta suma tiene sentido puesto que $\vec{M}_1$ y $\vec{M}_2$ son vectores libres.

3.8. Reducción de sistemas de fuerzas

3.8.1. Descomposición de una fuerza en una fuerza en un punto arbitrario O y un par

Cualquier fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre un sólido rígido puede ser trasladada a un punto arbitrario O, sin más que añadir un par cuyo momento sea igual al momento de $\vec{F}$ en O (fig. 3.10).

Supongamos un sólido rígido sobre el que actúa una fuerza $\vec{F}$ aplicada en el punto A (fig. 3.10 izda.). En otro punto O se pueden aplicar dos fuerzas, $\vec{F}$ y $-\vec{F}$, sin modificar el efecto de la fuerza inicial sobre el sólido (fig. 3.10 centro). Como resultado de esta transformación, se tiene una fuerza $\vec{F}$ aplicada en O, más un par formado por las otras dos fuerzas ($\vec{F}$ aplicada en A y $-\vec{F}$ aplicada en O) cuyo momento es $\vec{M}_{\text{par}} = \vec{M}_O = \vec{O}A \times \vec{F}$ (fig. 3.10 dcha.).

Es decir, *un sistema formado por una única fuerza siempre se puede sustituir por un sistema mecánicamente equivalente formado por una fuerza colocada sobre un punto arbitrario, más un par de momento adecuado.* Un sistema de este tipo se llama *sistema fuerza-par*. En esta descomposición el momento del par es perpendicular a la fuerza.

3.8.2. Reducción de un sistema de fuerzas a una fuerza en un punto O y un par

Muchos cuerpos en arquitectura e ingeniería se pueden modelar mediante sólidos rígidos. En general, sobre cada sólido rígido estará actuando un gran número de fuerzas. Por ello, es extremadamente útil ser capaces de convertir un sistema de muchas fuerzas en otro lo más sencillo posible.

Reducir un sistema de fuerzas es hallar otro sistema mecánicamente equivalente más sencillo.

> *Todo sistema de fuerzas sobre un sólido rígido puede reducirse a una fuerza con las mismas componentes que la resultante del sistema, aplicada en un punto arbitrario O, que llamaremos centro de reducción, y un par de fuerzas cuyo momento sea el momento en O del sistema (fig. 3.11).*

En efecto, hemos visto que cualquier fuerza se puede descomponer en una fuerza aplicada en un punto y un par (fig. 3.10). Dado un sistema de N fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_N$, que actúan sobre un sólido rígido, en los puntos A_1, A_2, ..., A_N, podemos descomponer las N fuerzas que forman el sistema en otras N fuerzas, todas ellas aplicadas en O, y en N pares (de momentos los momentos en O de las respectivas fuerzas). La suma de las N fuerzas aplicadas en O es una fuerza $\vec{F}_{\text{tot}}$ aplicada en O,

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{tot}} &= \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \\ &= \vec{R}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Los N pares se pueden sumar y esta suma coincide con el momento en O del sistema,

$$\begin{aligned} \vec{M}_{\text{par}} &= \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{\text{par}\,i} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \vec{OA}_i \times \vec{F}_i \\ &= \vec{M}_O. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Nótese que, en general, aun cuando el momento de cada fuerza es un vector perpendicular a dicha fuerza, $\vec{M}_O$ no es perpendicular a $\vec{R}$.

En resumen, en el caso más general posible, *cualquier sistema de fuerzas que actúe sobre un sólido rígido se puede reducir a una fuerza y un par.* Como veremos más adelante, ciertos sistemas de fuerzas se pueden incluso reducir más.

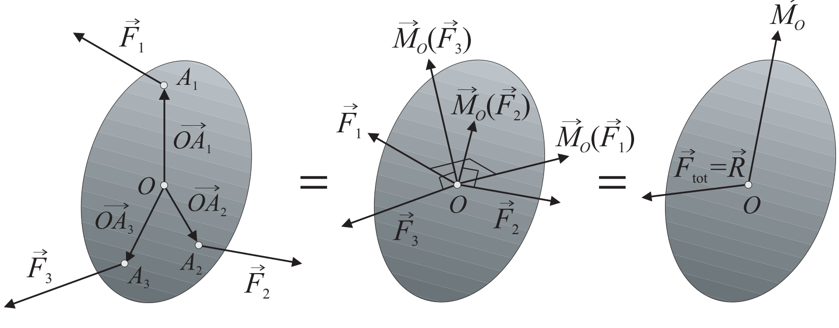


FIGURA 3.11: Reducción del sistema de fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ a una fuerza deslizante $\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{R}$ aplicada en O y un par de momento $\vec{M}_O$.

3.8.3. Equivalencia mecánica de dos sistemas de fuerzas

Dos sistemas de fuerzas sobre un sólido rígido son mecánicamente equivalentes si pueden reducirse al mismo sistema fuerza-par en un punto dado O. Es decir, dos sistemas de fuerzas son mecánicamente equivalentes si, y sólo si, las resultantes son iguales y los momentos del sistema en un punto dado O son iguales. Si ambas condiciones se cumplen para un punto O, entonces también se cumplirán para cualquier otro punto P.

En efecto, si $\vec{R}$ y $\vec{M}_O$ son la resultante y el momento en O de un sistema y $\vec{R}'$ y $\vec{M}'_O$ la resultante y el momento en O de un sistema equivalente (es decir, $\vec{R} = \vec{R}'$ y $\vec{M}_O = \vec{M}'_O$), usando el teorema del centro de reducción, el momento del primer sistema en el punto P

$$\begin{aligned} \vec{M}_P &= \vec{M}_O + \vec{PO} \times \vec{R} \\ &= \vec{M}'_O + \vec{PO} \times \vec{R}' \\ &= \vec{M}'_P, \end{aligned} \tag{3.21}$$

siendo $\vec{M}'_P$ el momento del segundo sistema en P.

Recuérdese que el que un sistema sea mecánicamente equivalente a otro implica que puede pasarse de uno a otro mediante una o varias operaciones de las operaciones elementales descritas en la sec. 3.3.

3.10. Centro de gravedad y centro de masa

3.10.1. Centro de gravedad

El *centro de gravedad* de un sistema de partículas materiales es el centro del sistema de fuerzas formado por los pesos de las partículas.

centro de gravedad

Consideremos el sistema formado por N partículas de pesos $m_1\,\vec{g}_1$, $m_2\,\vec{g}_2$, ..., $m_N\,\vec{g}_N$ colocadas en los puntos P_1, P_2, ..., P_N ($\vec{g}_i$ es la aceleración de la gravedad en el punto P_i). Suponiendo que todas las $\vec{g}_i$ son paralelas, $\vec{g}_i = -g_i\,\vec{k}$, aplicando la definición (3.36), el vector posición del centro de gravedad vendrá dado por:

$$\vec{OG} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\, g_i\, \vec{OP}_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\, g_i}, \tag{3.41}$$

cuyas componentes cartesianas son:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, g_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i\, g_i}, \tag{3.42}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, g_i\, y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i\, g_i}, \tag{3.43}$$

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, g_i\, z_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i\, g_i}, \tag{3.44}$$

siendo (x_i, y_i, z_i) las componentes cartesianas de $\vec{OP}_i$.

3.10.2. Centro de masa

centro de masa

El *centro de masa* de un sistema de partículas materiales de masas m_1, m_2, …, m_N colocadas en los puntos P_1, P_2, …, P_N, es el punto G que viene dado por:

$$\vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, \vec{OP}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \tag{3.45}$$

cuyas componentes cartesianas son:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \tag{3.46}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \tag{3.47}$$

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, z_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}. \tag{3.48}$$

El centro de gravedad (3.41), supuesta la aceleración de la gravedad constante, *coincide* con el centro de masa de dicho sistema de partículas. Esta condición se cumple, con muy buena aproximación, para los cuerpos que se manejan habitualmente en Arquitectura Técnica.

Para calcular el centro de masa de cuerpos continuos (y no sólo para conjuntos de puntos materiales aislados) basta sustituir los sumatorios en (3.46)–(3.48), respectivamente, por integrales. Así, las coordenadas del centro de masa serían:

$$\bar{x} = \frac{\int\limits_M x\,dm}{\int\limits_M dm}, \tag{3.49}$$

$$\bar{y} = \frac{\int\limits_M y\,dm}{\int\limits_M dm}, \tag{3.50}$$

$$\bar{z} = \frac{\int\limits_M z\,dm}{\int\limits_M dm}, \tag{3.51}$$

donde dm es $\rho\,dV$ en una distribución volumétrica de masa, $\sigma\,dS$ en una distribución superficial de masa, $\lambda\,dl$ en una distribución lineal de masa. Las cantidades ρ, σ, λ son, respectivamente, las *densidades volumétrica*, *superficial* y *lineal* de la correspondiente distribución de masa. Si la densidad de masa es constante diremos que el cuerpo es *homogéneo*. Para cuerpos homogéneos, las densidades que aparecen en (3.49)–(3.51) se cancelan y el centro de masa se convierte en una característica puramente geométrica del cuerpo y recibe el nombre de *centroide*.

En el caso de que nuestro sistema de puntos materiales sea un sólido rígido (y por tanto las fuerzas aplicadas, en este caso los pesos, se comporten como vectores deslizantes), el centro de masa (o el centro de gravedad) es el punto en el que se puede aplicar el vector peso total para que sea equivalente al sistema de vectores peso con la particularidad de que su posición no depende de la dirección de los vectores peso (por tanto, *no depende de la orientación del cuerpo con respecto a la superficie terrestre*), ni del sistema de referencia elegido (aunque sus coordenadas serán distintas en sistemas de referencias distintos).

La posición del centro de masa puede no coincidir con ningún punto material del sistema. Por ejemplo, en el sistema formado por cuatro masas iguales dispuestas en los vértices de un cuadrado, el centro de masa está en el centro del cuadrado.

El centro de masa puede ser un punto exterior al sistema. Por ejemplo, en un sólido rígido plano homogéneo con forma de L el centro de masa puede no estar en ningún punto del sólido.

3.10.3. Centro de masa de cuerpos compuestos

Sea un sistema de N puntos materiales de masas m_i cuyos vectores posición son $\vec{OP}_i$. Dividamos mentalmente el sistema en dos partes, la formada por los S primeros puntos y la formada por los restantes $N - S$ puntos. Es fácil ver que

$$\sum_{i=1}^{N} m_i = \sum_{i=1}^{S} m_i + \sum_{i=S+1}^{N} m_i. \tag{3.52}$$

Además, empleando (3.45), podemos escribir

$$\vec{OG}\sum_{i=1}^{N} m_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{OP}_i$$

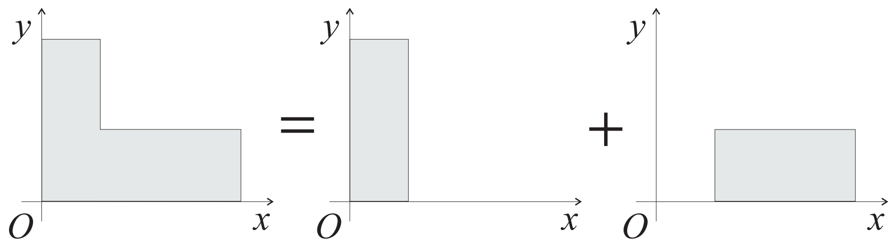


FIGURA 3.14: Para calcular el centro de masa de la figura de la izquierda se puede proceder dividiendo en las dos porciones de la derecha y aplicando la ec. (3.57).

$$= \sum_{i=1}^{S} m_i \vec{OP}_i + \sum_{i=S+1}^{N} m_i \vec{OP}_i. \tag{3.53}$$

Ahora bien, los S primeros puntos forman un subsistema cuyo centro de masa G_1 está definido por:

$$\vec{OG}_1 \sum_{i=1}^{S} m_i = \sum_{i=1}^{S} m_i \vec{OP}_i. \tag{3.54}$$

De la misma manera, los restantes $N - S$ puntos forman otro subsistema cuyo centro de masa G_2 está definido por:

$$\vec{OG}_2 \sum_{i=S+1}^{N} m_i = \sum_{i=S+1}^{N} m_i \vec{OP}_i. \tag{3.55}$$

Llamando

$$\begin{aligned} M_1 &= \sum_{i=1}^{S} m_i, \\ M_2 &= \sum_{i=S+1}^{N} m_i, \end{aligned} \tag{3.56}$$

podemos reescribir (3.53) como

$$\vec{OG} = \frac{M_1 \vec{OG}_1 + M_2 \vec{OG}_2}{M_1 + M_2}. \tag{3.57}$$

Esta propiedad es muy útil para el cálculo de centros de masa de sistemas compuestos a partir de otros cuyo centro de masa sea sencillo de calcular. También es útil para el cálculo del centro de masa de sistemas que se puedan expresar como resta de sistemas sencillos.

En el apéndice C se presentan los centros de masa de algunas líneas y superficies planas homogéneas.

Capítulo 4

Estática del sólido rígido

4.1. Introducción

La estática del sólido rígido es un tema central dentro del programa de la asignatura de *Fundamentos Físicos de la Arquitectura Técnica*. Empezaremos recordando qué conceptos de los que vamos a manejar han sido introducidos en capítulos anteriores.

En el capítulo 2 admitíamos que las fuerzas se comportan como *vectores*. Enunciábamos las *leyes de Newton* y las *condiciones de equilibrio de un punto material libre*. Introducíamos el concepto de *ligadura* y el *principio de liberación*, que nos facilitaba el estudio del equilibrio de sistemas de puntos materiales sometidos a ligaduras. También allí aparecían por vez primera los conceptos de *configuración* y *grados de libertad* de un sistema mecánico.

En el capítulo 3 definíamos *sólido rígido* como es un sistema de puntos materiales en el que la distancia entre dos cualesquiera de ellos no cambia ante la acción de un sistema de fuerzas. Veíamos que las fuerzas aplicadas a sólidos rígidos se comportan como *vectores deslizantes* (*principio de transmisibilidad*). Mostrábamos que cualquier sistema de fuerzas aplicadas *sobre un sólido rígido* siempre se puede reducir a una fuerza y un par.

4.2. Equilibrio del sólido rígido libre

4.2.1. Sólido rígido libre

sólido rígido libre

Un *sólido rígido libre* es aquél que no está sometido a ligaduras externas, es decir, vínculos que lo liguen a otros cuerpos. Debe notarse que entre las partículas del sólido rígido sí existen ligaduras (internas).

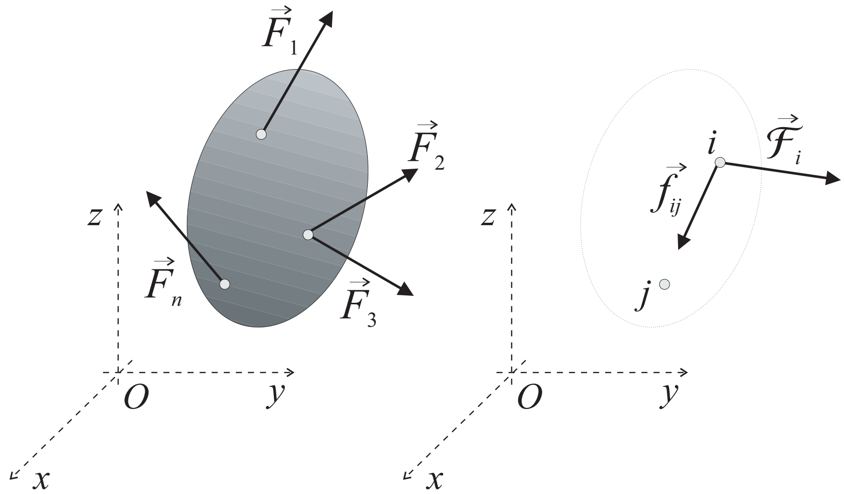


FIGURA 4.1: Sólido rígido inicialmente en reposo respecto a un sistema de referencia inercial y sobre el que actúa un conjunto de n fuerzas exteriores $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ (izda.). Algunas de las fuerzas que actúan sobre la partícula i del sólido rígido (dcha.).

4.2.2. Condiciones necesarias y suficientes de equilibrio

Iniciaremos el estudio de la estática del sólido rígido discutiendo las condiciones que deben satisfacerse para garantizar el equilibrio del sólido rígido libre en el espacio. En el capítulo 2 decíamos que *un punto material* se encuentra en equilibrio si su posición respecto a un sistema de referencia inercial elegido permanece invariable a lo largo del tiempo. Para que así fuese, mostramos que es necesario y suficiente con que:

- El punto material esté inicialmente en reposo respecto del sistema de referencia inercial elegido.
- La resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el punto material sea nula.

Basándonos en este hecho, introduciremos a continuación las condiciones que se requieren para mantener en equilibrio un sólido rígido.

Condiciones necesarias de equilibrio

Supongamos un sólido rígido que está inicialmente en reposo respecto a un sistema de referencia inercial y sobre el que actúa un conjunto de n fuerzas exteriores $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ (fig. 4.1 izda.). Consideremos las fuerzas que actúan sobre una cualquiera de las N partículas que forman ese sólido rígido, la partícula i. Sobre ésta actúan dos tipos de fuerzas (fig. 4.1 dcha.):

- Las *fuerzas externas*, que son aquéllas debidas a la presencia de campos externos (gravitatorio, eléctrico, magnético) o al contacto con cuerpos adyacentes o con otras partículas que no forman parte del sólido rígido. Llamaremos $\vec{\mathcal{F}}_i$ a la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre la partícula i.
- Las *fuerzas internas*, que son aquéllas que ejercen sobre una partícula del sólido rígido las restantes partículas que lo forman. En el caso de un sólido rígido las fuerzas internas son las que mantienen unidas y a distancia invariable las partículas del sólido rígido. Denotaremos por $\vec{f}_{ij}$

la fuerza que la j-ésima partícula ejerce sobre la i-ésima, y por $\vec{f}_i$ la resultante de todas las fuerzas internas sobre la partícula i,

$$\vec{f}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N} \vec{f}_{ij}. \tag{4.1}$$

Si la partícula i está en equilibrio, por la primera ley de Newton,

$$\vec{\mathcal{F}}_i + \vec{f}_i = \vec{0}. \tag{4.2}$$

Al aplicar la primera ley de Newton a las demás partículas obtendremos ecuaciones similares. Sumándolas todas ellas, obtendremos

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{\mathcal{F}}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i = \vec{0}. \tag{4.3}$$

Además, por la tercera ley de Newton sabemos que las fuerzas internas en el sólido rígido ocurren en pares de la misma magnitud y de sentidos opuestos, es decir, $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$. Por tanto la resultante de las fuerzas internas ha de ser el vector nulo,

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i = \vec{0}. \tag{4.4}$$

El sistema de fuerzas externas que actúan sobre el sólido rígido es equivalente al formado por las resultantes $\vec{\mathcal{F}}_i$ de las fuerzas externas que actúan sobre los N puntos materiales que forman el sólido rígido. Sin embargo, no es ésta la forma usual de describir un sistema de fuerzas externas cuando se estudia un problema real de Estática del sólido rígido. Lo habitual es considerar que el sólido es un único objeto extenso sobre el que actúa un conjunto de fuerzas externas, discretas y continuas (que reducimos a discretas), las $\vec{F}_j$ que introducíamos al principio, varias de las cuales podrían actuar sobre la misma partícula. Teniendo en cuenta que la suma extendida a todas las partículas de las fuerzas externas que se ejercen sobre cada una de ellas no es más que la suma de las n fuerzas externas que actúan sobre el sólido rígido,

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{\mathcal{F}}_i = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j. \tag{4.5}$$

Por tanto, usando además las ecs. (4.3) y (4.4), la primera condición que debe satisfacer un sólido rígido en equilibrio:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}, \tag{4.6}$$

es decir, que la suma de las fuerzas *externas* sea el vector nulo.

Otra condición necesaria para el equilibrio del sólido rígido es la que se deduce del siguiente razonamiento. Consideremos ahora los momentos de las fuerzas que actúan sobre la partícula i en un punto arbitrario O. Utilizando la ec. (4.2) y la propiedad distributiva del producto vectorial obtenemos:

$$\vec{r}_i \times \left(\vec{\mathcal{F}}_i + \vec{f}_i\right) = \vec{r}_i \times \vec{\mathcal{F}}_i + \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \vec{0}. \tag{4.7}$$

Podemos obtener ecuaciones análogas para las restantes partículas del sólido rígido. Sumándolas todas, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{\mathcal{F}}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \vec{0}. \tag{4.8}$$

El segundo término es nulo puesto que las fuerzas internas ocurren en pares *colineales*, iguales en módulo pero de sentidos opuestos, y el momento de cada uno de estos pares en el punto O es nulo. De ahí que utilizando la notación

$$\vec{M}_O(\vec{\mathcal{F}}_i) = \vec{r}_i \times \vec{\mathcal{F}}_i, \tag{4.9}$$

podemos escribir la ec. (4.8) como

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_O(\vec{\mathcal{F}}_i) = \vec{0}, \tag{4.10}$$

o, recordando que el sistema que forman las $\vec{\mathcal{F}}_j$ es equivalente al que forman las $\vec{F}_i$, como

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{0}, \tag{4.11}$$

es decir, que la suma de los momentos de las fuerzas externas sea el vector nulo.

Condiciones suficientes de equilibrio

Hasta ahora, *todo lo que hemos dicho es aplicable no sólo a un sólido rígido sino también a un sistema de puntos materiales que no formen un sólido rígido.* Es decir, las ecs. (4.6) y (4.11) son condiciones *necesarias* para el equilibrio, no sólo de un sólido rígido, sino también para el de cualquier sistema de puntos materiales. Ahora vamos a demostrar que las ecs. (4.6) y (4.11) son condiciones *suficientes* para garantizar el equilibrio del sólido rígido (pero no de un sistema arbitrario de puntos materiales).

Por reducción al absurdo. Supongamos que se verifican las ecs. (4.6) y (4.11) y que el sólido rígido está inicialmente en reposo pero *no* en equilibrio. Aceptemos además que para conseguir que un sólido rígido que no está en equilibrio pase a estar en equilibrio basta con aplicar una fuerza $\vec{F}'$ y un momento $\vec{M}'$ adicionales. Obsérvese que esta suposición *no es válida en general para un sistema de puntos que no sea un sólido rígido*, ya que entonces las fuerzas aplicadas no se pueden representar por vectores *deslizantes* (sino por vectores *ligados*). Por el mismo razonamiento seguido antes, en el equilibrio se debe cumplir que:

$$\vec{F}' + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}, \tag{4.12}$$

$$\vec{M}' + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{0}. \tag{4.13}$$

Pero si se han de cumplir estas dos ecuaciones y se cumplían las ecs. (4.6) y (4.11), ello quiere decir que:

$$\vec{F}' = \vec{0}, \tag{4.14}$$

$$\vec{M}' = \vec{0}. \tag{4.15}$$

Por tanto, si el sistema de fuerzas que habría que añadir es nulo, es que las condiciones (4.6) y (4.11), por sí solas, garantizaban el equilibrio.

Resumen

Un sólido rígido libre estará en equilibrio siempre y cuando:

- Todas las partículas del sólido estén inicialmente en reposo respecto del sistema de referencia inercial.
- La resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el sólido rígido sea nula.
- La suma de los momentos de todas las fuerzas externas en un punto sea nula.

Las ecs. (4.6) y (4.11) son dos ecuaciones vectoriales que podemos escribir como 6 ecuaciones escalares. Por ejemplo, usando coordenadas cartesianas:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0, \tag{4.16}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{yi} = 0, \tag{4.17}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{zi} = 0, \tag{4.18}$$

donde F_{xi} es la componente según la dirección x de la fuerza externa $\vec{F}_i$, etc., y

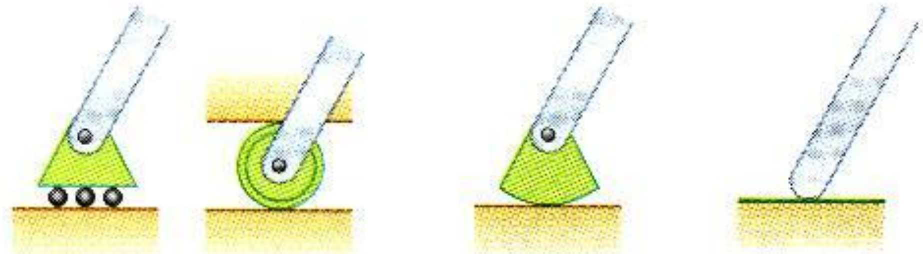
$$\sum_{i=1}^{n} M_{Ox}(\vec{F}_i) = 0, \tag{4.19}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Oy}(\vec{F}_i) = 0, \tag{4.20}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Oz}(\vec{F}_i) = 0, \tag{4.21}$$

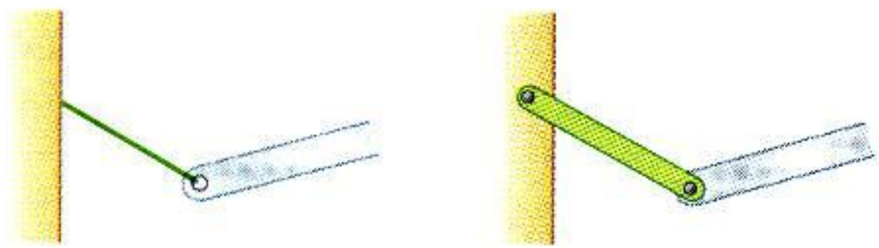
donde $M_{Ox}(\vec{F}_i)$ es la componente según la dirección x del momento de la fuerza externa $\vec{F}_i$ en el punto O, $\vec{M}_O(\vec{F}_i)$, etc. Las ecs. (4.16)–(4.18) garantizan que no se altera el equilibrio por movimientos de traslación, y las ecs. (4.19)–(4.21) que no lo hace por movimientos de rotación. Otras elecciones de coordenadas conducirían a expresiones diferentes para las ecuaciones de equilibrio.

Reacciones en Apoyos y Conexiones



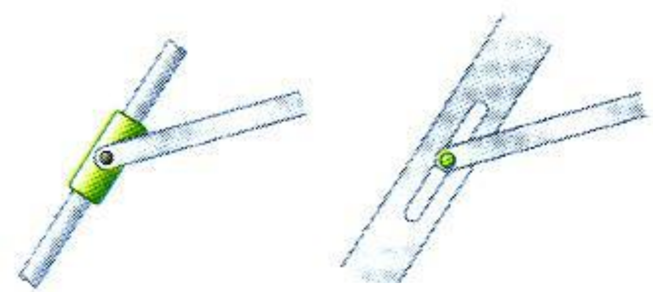
Rodamientos Patines Balancín Superficie sin fricción

Fuerza con línea de acción conocida



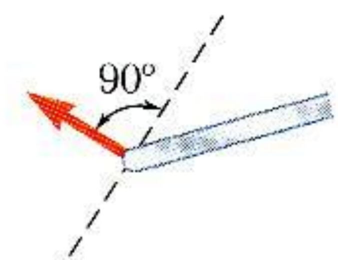
Cable corto Eslabon corto

Fuerza con línea de acción conocida



Collarín sobre una barra sin fricción

Perno o articulación que desliza en una ranura sin fricción

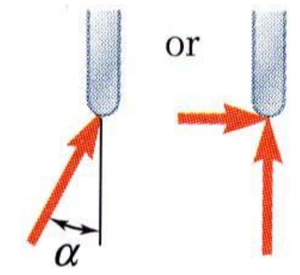


Fuerza con línea de acción conocida

Reacciones en Apoyos y Conexiones

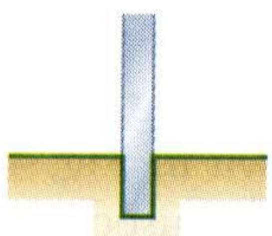
Articulación sin fricción, bisagra

Superficie rugosa

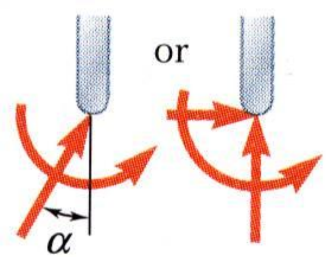


Fuerza de dirección desconocida

- Reacciones equivalen a un fuerza de dirección desconocida



Soporte fijo: Empotramiento, soldadura



Fuerza y momento

- Reacciones equivalen a una fuerza y a un momento o par.