EJERCICIOS TEMA 1.3

RELACIONES DE ORDEN

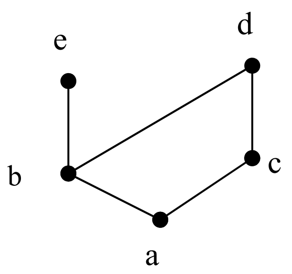
1.32. Hallar dos elementos incomparables en los siguientes conjuntos ordenados:
a) $(P(\{1,2,3\}), \subseteq)$ b) $(\mathbf{Z}, |)$ c) $(\{1,3,5,7,9\}, |)$

1.33. Hallar, si existen, los elementos maximales, minimales, máximo y mínimo para los siguientes conjuntos ordenados: $(P(X),\subset)$; $((0,1),\geq)$; $(\mathbf{N},|)$; $(\mathbf{N} - \{1\},|)$.

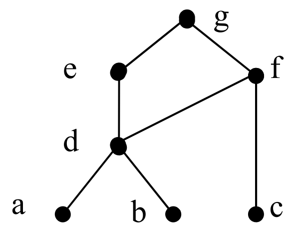
1.34. Hallar los elementos notables de los subconjuntos señalados:
a) En $(D_{60}, |)$, $A=\{2,5,6,10,12,30\}$ y $B=\{2,3,6,10,15,30\}$
b) En $(D_{48}, |)$, $A=\{2,4,6,12\}$ y $B=\{3,6,8,16\}$
c) En $(D_{40}, |)$, $A=\{4,5,10\}$ y $B=\{2,4,8,20\}$

1.35. Describe todos los pares ordenados en cada uno de los órdenes parciales representados en los siguientes diagramas de Hasse

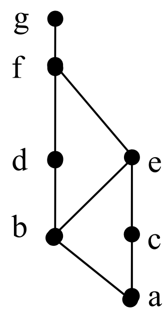
(1)



(2)

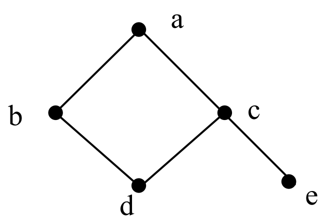


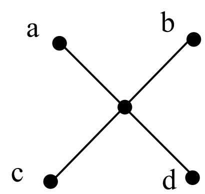
(3)

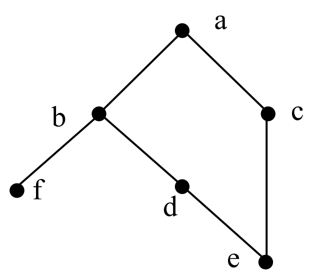


Halla los minimales, maximales, mínimo y máximo (si existen) de cada uno de los anteriores conjuntos ordenados.

1.36. Hallar los elementos maximales, minimales, máximo y mínimo (si los hay) para los siguientes conjuntos con el orden definido por el diagrama de Hasse:



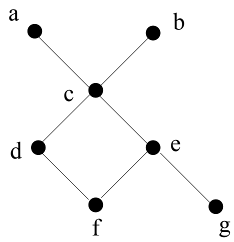




1.37. En cada uno de los casos siguientes, dígase si el conjunto X tiene o no una cota inferior, y si tiene alguna hállese su ínfimo si existe:
$X = \{x\in\mathbf{Z} \mid x^2\leq 16\}$ $T = \{x\in\mathbf{Z} \mid x=2y \text{ para algún } y\in\mathbf{Z}\}$
$U = \{x\in\mathbf{Z} \mid x^2\leq 100x\}$

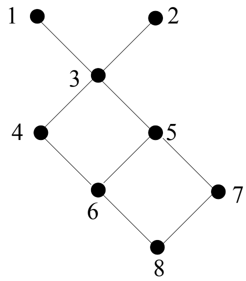
1.38. Hallar cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo del conjunto B (si los hay) en cada uno de los siguientes casos:

a)



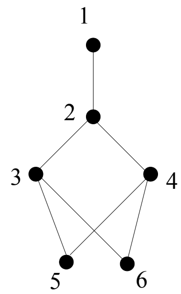
B={c,d,e}

b)



B={4,5,6}

c)



B={2,3,4}

1.39. Se consideran el conjunto parcialmente ordenado A=({3,5,9,15,27,35,45}, |) y el subconjunto B={9,15, 35}. Se pide
 (a) Hallar los elementos extremales, si existen, de A
 (b) Hallar las cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo de B, si existen.

1.40. Sea S={1,2,3,4}. Con respecto al orden lexicográfico basado en el orden usual "≤" :
 a) Encontrar todos los pares en S×S anteriores a (2,3).
 b) Encontrar todos los pares en S×S posteriores a (3,1).
 c) Dibujar el diagrama de Hasse de (S×S, $\leq_{Lex}$).
 d) Responder a las preguntas (a) y (b) para el orden producto en S×S

1.41. Determina el orden lexicográfico de las siguientes cadenas de bits: 001, 111, 010, 011, 000 y 100 basado en el orden 0 ≤ 1. Dibuja el diagrama de Hasse de estas cadenas, ahora con el orden producto.

1.42. En el conjunto A=(**R** – {0})×**R** se define la relación: (a,b)R(u,v) ⇔ b/a=v/u y a≤u
 (a) Demostrar que es una relación de orden, y estudiar si es un orden total.
 (b) Representar el conjunto de los puntos comparables con el elemento (1,1).

1.43. En (**N**,|) × (**N**,|) se considera el orden lexicográfico. Determinar, si existen, las cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo del conjunto: A= {(2,1), (3,4)}.

1.44. En $\mathbf{R}^2$ se considera la relación de orden producto (x,y)<(x',y') ⇔ {x≤x' e y≤y'}. Hallar los elementos maximales y minimales, supremo e ínfimo de $C = \{(x,y);\ x^2+y^2=1\}$.

1.45. Se considera en D_{48} × **N** el orden lexicográfico correspondiente a tomar el orden divisibilidad en el primer factor y el orden usual en el segundo factor. Sea S={(2,2), (2,3), (3,2), (6,3), (6,1), (4,2)}. Se pide hallar, si existen, las cotas superiores e inferiores, elementos maximales y minimales, máximo, mínimo, supremo e ínfimo de S.

1.46. En (D_{10},|) ×(D_{18},|) se considera el orden lexicográfico. Hallar las cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo, si existen, del subconjunto S = {(2,2), (2,3)}. Dibujar el diagrama de Hasse.
 Se define f: $D_{10}\times D_{18} \rightarrow D_{180}$ por f(a,b)=ab. ¿Es f inyectiva?, ¿es suprayectiva?

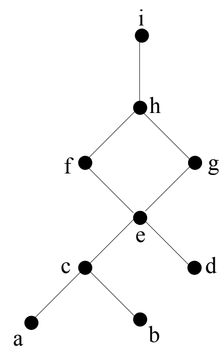
1.47. Se consideran los conjuntos ordenados (D_{15}, |), donde D_{15} es el conjunto de los divisores positivos de 15 con la relación de divisibilidad, y (A, $\leq_1$), donde A ={2, 4, 8, 64} con la relación $a \leq_1 b$ si $b = a^r$ para algún *r* entero positivo. Comprobar que la relación $\leq_1$

definida en A es una relación de orden. Definir el orden lexicográfico en $D_{15} \times A$. Hallar los elementos minimales, maximales, máximo y mínimo, si existen, con este orden.

1.48. Se consideran los conjuntos ordenados (D_{12}, |) y D_{42}, |). Dibujar los diagramas de Hasse de estos conjuntos ordenados. En $D_{12} \times D_{42}$ se considera el orden lexicográfico. Hallar los elementos característicos o notables del conjunto S={(3,3), (3,2), (6,1), (6,7)}

1.49. Se considera en el conjunto A= {2, 3, 4, 6, 12, 15, 24, 90, 180, 360} la relación de orden divisibilidad. Se pide:
(a) Obtener, si existen, las cotas inferiores, cotas superiores, ínfimo, supremo, mínimo, máximo, elementos minimales y maximales del subconjunto B= {2, 3, 4, 6, 12, 180}.
(b) Representar el diagrama de Hasse del conjunto ordenado (A, |)

1.50. Dado el orden parcial del siguiente diagrama de Hasse, obtener un orden total que lo contenga. ¿Cuántos pueden obtenerse?



1.51. Sea T= {a,b,c,d,e,f,g} la lista de tareas para realizar un trabajo, de las que se sabe que unas preceden inmediatamente a otras de la siguiente forma: f≤a, f≤d, e≤b, c≤f, e≤c, b≤f, e≤g, g≤f. Hallar el orden parcial. ¿Qué tareas pueden realizarse independientemente? ¿En qué orden realizaría las tareas una sola persona?

1.52. Sea F(N) la colección de todos los subconjuntos finitos de N. ¿Tiene (F(N),$\subset$) algún elemento maximal? ¿Tiene algún elemento minimal?

1.53. Sea E(N) la colección de todos los subconjuntos finitos de N que tienen un número par de elementos. En (E(N),$\subset$) se consideran los elementos A={1,2}, B={1,3}. Hallar cuatro cotas superiores para {A,B}. ¿Tiene {A,B} supremo en (E(N),$\subset$)?