
ÁLGEBRA LINEAL – 2º PARCIAL
Matemáticas e Informática

Apellidos..**Nombre**..................**Nº Matrícula**..........

Ejercicio 1: (**6** ptos.)

a) Demuestra que los polinomios característicos de A y A^t coinciden y que los subespacios propios de A y A^t asociados al autovalor λ tienen la misma dimensión.

b) Sea $\varphi:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $\varphi\left((x,y),(x',y')\right)=2xx'+3yx'+3xy'+2yy'$. Estudia qué axiomas del producto escalar cumple y cuáles no, dando un contraejemplo en los casos en que no se cumple.

c) Sea V un espacio euclídeo de dimensión n. Demuestra que si $A=\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_r\}\subset V$ es un conjunto ortogonal con todos los vectores no nulos, entonces *A* es linealmente independiente.

Ejercicio 2: (**8** ptos.)

En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual sean S, T subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ tales que $S\oplus T=\mathbb{R}^3$ y sea $f:\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por $f\left(\vec{v}\right)=\vec{s}$ donde $\vec{v}=\vec{s}+\vec{t},\ \vec{s}\in S$ y $\vec{t}\in T$

a) Calcula el núcleo y la imagen de *f* y razona si la aplicación es epimorfismo, monomorfismo y/o isomorfismo.

b) Razona cuáles son los autovalores y los subespacios propios de *f* .

c) Estudia si *f* es diagonalizable y/o ortogonalmente diagonalizable.

d) Si $S: x+y+2z=0$ y $T:\begin{cases}2x-z=0\\ x-y=0\end{cases}$, ¿qué representa *f* ?

Ejercicio 3: (**9** ptos.)

Sea $f:\ \mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ la aplicación lineal que verifica lo siguiente:

- (1,0,0,1) es un autovector asociado al autovalor λ=2
- Ker *f* =L{(0,1,0,1),(0,1,1,1)}
- *f* (1,0,1,2) = (2,0,0,4)

a) Halla la matriz de *f* respecto de la base canónica.

b) Razona si *f* es diagonalizable y si *f* es diagonalizable ortogonalmente. En caso de que la respuesta a cualquiera de las dos preguntas sea afirmativa, diagonaliza *f*.

Ejercicio 4: (**8** ptos.)

En $\mathbb{R}^2$ se consideran B_c = {e_1, e_2} y el producto escalar < , > definido por: $\|e_1\|=\sqrt{2}$, $\|e_2\|=\sqrt{3}$ y $\cos\left(\measuredangle\left(e_1,e_2\right)\right)=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Calcula:

a) La matriz de Gram en la base B_c.

b) Una base ortonormal para este producto escalar.

c) La aplicación proyección ortogonal sobre la recta *r*, $P_r^{\perp}(x,y)$, dando su matriz respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ siendo *r*=L{(1,-2)}.

Ejercicio 5: (**9** ptos.)

Sea $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual.

a) Obtén las coordenadas del vector $\vec{v}=\left(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{5}}{6}\right)$, respecto de la base ortonormal $B=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),(0,1,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\right\}$ y descompón el vector $\vec{v}$ como suma de un vector de $S=L\left\{(1,0,-1)\right\}$ y otro del subespacio $S^{\perp}=L\left\{(0,1,0),(1,0,1)\right\}$. ¿Cuál es el vector proyección ortogonal sobre $S^{\perp}$ de $\vec{v}$?

b) Construye el giro de ángulo $\frac{\pi}{3}$ alrededor del vector $\vec{u}=(1,0,-1)$.

c) Clasifica el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base canónica es $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ dando los ejes, planos, etc. que lo caracterizan.

Observaciones:

- Tiempo: 3horas.
- No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.

Ejercicio 1

a) $p_A(\lambda) = |A-\lambda I| = |(A-\lambda I)^t| = |A^t - \lambda I^t| = |A^t - \lambda I| = p_{A^t}(\lambda)$

Supongamos $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ y sea el s.p. de la matriz A asociado al autovalor λ ; $S_\lambda^A : (A-\lambda I)\bar{x} = \bar{0}$

Luego $\dim S_\lambda^A = n - rg(A-\lambda I) = n - rg((A-\lambda I)^t) =$

$= n - rg(A^t - \lambda I^t) = n - rg(A^t - \lambda I) = \dim S_\lambda^{A^t}$

ya que el s.p. de la matriz A^t asociado a λ es: $(A^t - \lambda I)\bar{x} = \bar{0}$

b) $\varphi((x,y),(x',y')) = (x,y)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

- φ es lineal en las dos variables
- φ es simétrica, por ser simétrica la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
- φ NO es definida positiva, $\varphi((1,-1),(1,-1)) = 2\cdot1\cdot1 + 3\cdot(1)(1) + 3\cdot(1)(-1) + 2(-1)(-$
  $= 4 - 6 = -2 < 0$

c) Ver apuntes de clase.

Ejercicio 2

$(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle_u)$, S y T s.v. suplementarios $(S \oplus T = \mathbb{R}^3)$ y

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(\bar{v}) = \bar{s}$ donde $\bar{v} = \bar{s} + \bar{t}$ con $\bar{s} \in S$ y $\bar{t} \in T$

a) $\mathrm{Ker} f = T$, $\mathrm{Im} f = S$. Si $T \neq \{\bar{0}\}$ (y por tanto, $S \neq \mathbb{R}^3$) f NO es monomorfismo, ni epimorfismo, ni isomorfismo. Si $T = \{\bar{0}\} \Rightarrow f = Id$ isomorf. y si $T = \mathbb{R}^3 \Rightarrow f = 0$.

b) Los autovalores de f son 1 con multiplicidad igual a $\dim S$ y 0 con multiplicidad igual a $\dim T$. Los subespacios propios de f son $S_{\lambda=1} = S$ y $S_{\lambda=0} = T$.

c) f siempre es diagonalizable y la base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de f se forma con una base de S y otra de T.

f es diagonalizable ortogonalmente si $S \perp T$.

d) Como el plano $S = L\{(1,-1,0), (0,2,-1)\}$ y la recta $T = L\{(1,1,2)\}$ son ortogonales, f es la proyección ortogonal sobre S.

Ejercicio 3

$f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a.l. tal que

$f(1,0,0,1) = (2,0,0,2)$
$f(0,1,0,1) = (0,0,0,0)$
$f(0,1,1,1) = (0,0,0,0)$
$f(1,0,1,2) = (2,0,0,4)$

a) $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \to$

$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

$\Rightarrow M_f(\mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) Como $S_{\lambda=0} = \ker f = L\{(0,1,0,1), (0,1,1,1)\}$, $\dim S_{\lambda=0} = 2$ y como $f(1,0,0,1) = 2(1,0,0,1)$ y $f(1,0,0,0) = 2(1,0,0,0)$ se tiene que $S_{\lambda=2} = L\{(1,0,0,1), (1,0,0,0)\}$ con $\dim S_{\lambda=2} = 2$. Por tanto, f es diagonalizable, y como $S_{\lambda=0} \not\perp S_{\lambda=2}$, f no es diagonalizable ortogonalmente.

• Diagonalización de f: $B_{aut} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathbb{R}^4$ formada por autovectores de f. Luego:

$$M_f(B_{ant}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = MC(B_{ant}, B_c)\, M_f(B_c)\, MC(B_c, B_{ant})$$

$$P = MC(B_{ant}, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$. Cálculo de $P^{-1} = MC(B_c, B_{ant})$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4

$\mathbb{R}^2$, $B_c = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ tq $\|\bar{e}_1\| = \sqrt{2}$, $\|\bar{e}_2\| = \sqrt{3}$, $\cos(\sphericalangle(\bar{e}_1,\bar{e}_2)) = \sqrt{\frac{2}{3}}$

a) $\langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle = \|\bar{e}_1\|^2 = 2$

$\langle \bar{e}_2, \bar{e}_2 \rangle = \|\bar{e}_2\|^2 = 3$

$\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle = \|\bar{e}_1\|\|\bar{e}_2\| \cos(\sphericalangle(\bar{e}_1,\bar{e}_2)) = \sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = 2$

Por tanto, $G(B_c) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) Aplicamos el P.O.G.S a la base canónica B_c de $\mathbb{R}^2$

$\bar{e}_1' = \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\bar{e}_2' = \bar{e}_2 - \frac{\langle \bar{e}_1', \bar{e}_2 \rangle}{\langle \bar{e}_1', \bar{e}_1' \rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow B^{ORN} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\|(-1,1)\| = \sqrt{(-1,1)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{(0,1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{1} = 1$

c) $p_r^{\perp}(x,y) = \frac{\langle (x,y), (1,-2) \rangle}{\langle (1,-2), (1,-2) \rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3} (x+2y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\langle (x,y), (1,-2) \rangle = (x,y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (x,y)\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = -2x - 4y$

$\langle (1,-2), (1,-2) \rangle = (1,-2)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (1,-2)\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = 6$

Ejercicio 5

$(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_u)$

a) $\vec{v}_B = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}} \langle (\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{5}}{6}), (1,0,-1) \rangle, \langle (\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{5}}{6}), (0,1,0) \rangle,$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \langle (\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{5}}{6}), (1,0,1) \rangle \Big) =$

$$= \left(\frac{4-\sqrt{10}}{12}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{4+\sqrt{10}}{12} \right)$$

$$\vec{v} = \underbrace{\frac{4-\sqrt{10}}{12\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\substack{\cap \\ S}} + \underbrace{\left[\frac{\sqrt{3}}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4+\sqrt{10}}{12\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]}_{\substack{\cap \\ S^\perp}}$$

$$P_{S^\perp}(\bar{v}) = \left(\frac{4+\sqrt{10}}{12\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{4+\sqrt{10}}{12\sqrt{2}} \right)$$

b) $G_{\bar{u}}^{\pi/3}$. Tomo la siguiente base ortonormal de $\mathbb{R}^3$

$$B = \Big\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)}_{= \frac{1}{\|\bar{u}\|}\bar{u}}, \underbrace{(0,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)}_{\text{base ortonormal del plano ortogonal a } \bar{u}} \Big\}$$

que tiene la misma orientación que la base canónica.

$$\begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow$$

orientación positiva (misma orientación que la base canónica)

Por tanto, $M_{G_{\bar{u}}^{\pi/3}}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi/3 & -\operatorname{sen}\pi/3 \\ 0 & \operatorname{sen}\pi/3 & \cos\pi/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

tomando $P = MC(B, B_c) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ que es un cambio

de base ortonormal a base ortonormal ($\Rightarrow P^t = P^{-1}$)

$$M_{G_{\bar{u}}^{\pi/3}}(B_c) = P\, M_{G_{\bar{u}}^{\pi/3}}(B)\, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{6} & 1 \\ -\sqrt{6} & 2 & \sqrt{6} \\ -1 & \sqrt{6} & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow G_{\bar{u}}^{\pi/3}(x,y,z) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{6} & 1 \\ -\sqrt{6} & 2 & \sqrt{6} \\ -1 & \sqrt{6} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $|A| = 1$ y como A es una matriz ortogonal

A representa una aplicación ortogonal tipo giro, y como

traza $(A) = -1$, el endomorfismo es un Giro de 180° alrededor

del eje $r = S_{\lambda=1}$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x - z = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \Rightarrow r = L\{(1,0,1)\}$