ÁLGEBRA LINEAL (SOLUCIONES)
Matemáticas e Informática

Apellidos.. **Nombre**...................... **Nº Matrícula**..........

Ejercicio 1: (25 ptos)

a) Resolver el siguiente sistema aplicando factorización LU: $\begin{cases} 2x+3y+5z=-6 \\ 5y-z=10 \\ 4x+6y-7z=5 \end{cases}$, teniendo en cuenta que L tiene que ser una matriz triangular inferior invertible y U una forma reducida o escalonada de la matriz de partida con unos en los pivotes.

Tomo $A=\begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & 5 \\ \boxed{0} & 5 & -1 \\ \boxed{4} & 6 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -17 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \boxed{5} & -1 \\ 0 & \boxed{0} & -17 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 & \boxed{-17} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$ y

$L=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -17 \end{pmatrix}$. Por tanto, A=LU y el sistema nos queda $LU\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ y este sistema se puede resolver resolviendo los sistemas siguientes: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Así, en el primer sistema obtenemos x'=-3, y' = 2, z'= -1, metiendo esta solución como término independiente en el segundo sistema obtenemos: $x=-\frac{16}{5},\ y=\frac{9}{5},\ z=-1$.

b) Probar si los siguientes conjuntos A = {(0,0,0,0), (1,0,0,1)} y B = {(0,0,0,0), (1,0,0,1), (1,0,0,0)} son subespacios vectoriales de $\mathbb{Z}_2^4$.

Como L(A) = A entonces A es s.v. de $\mathbb{Z}_2^4$. Como L(B) = {(0,0,0,0), (1,0,0,1), (1,0,0,0), (0,0,0,1)} ≠ B entonces B NO es s.v. de $\mathbb{Z}_2^4$.

c) Sea C el código lineal de longitud 7, es decir, el s.v. de $\mathbb{Z}_2^7$, dado por las siguientes ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} x_1+x_3+x_5+x_7=0 \\ x_4+x_5+x_6+x_7=0 \\ x_2+x_3+x_6+x_7=0 \end{cases}$$

¿Cuál es la dimensión de C? ¿Cuántas palabras tiene C? Razona si C es un código lineal capaz de corregir un error.

$\dim(C)=7-rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=4$, número de palabras de C = 2^4. La matriz de paridad de C, dada por las ecuaciones implícitas de C, $H(C)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene todas sus columnas distintas y distintas de la columna de ceros, por tanto, este código puede corregir un error.

Observaciones:

- **Tiempo: 3horas.**
- No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.

d) Para cada valor de $a \in \mathbb{R}$ obtener, en los casos que sea posible, las ecuaciones implícitas del subespacio vectorial $S_a = L\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4a\\1\end{pmatrix}\right\}$ y, en el caso en que no haya ecuaciones implícitas decir que subespacio es S_a.

Para obtener las ecs. implícitas del s.v. S_a eliminamos los parámetros de las ecs. paramétricas de S_a:

$$\text{Ecs. Par. } S_a = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}0\\1\\a\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\4a\\1\end{pmatrix}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & x\\ a & 1 & 4a & y\\ 1 & a & 1 & z\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & x\\ 0 & 1 & 4a & y-ax\\ 0 & a & 1 & z-x\end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & x\\ 0 & 1 & 4a & y-ax\\ 0 & 0 & 1-4a^2 & z-x-a(y-ax)\end{array}\right)$$

Hay ecuaciones implícitas sólo si $1-4a^2 = 0$, es decir si $a = \frac{1}{2}$ o $a = -\frac{1}{2}$.

Para $\boxed{a = \frac{1}{2}} \Rightarrow z - x - \frac{1}{2}(y - \frac{1}{2}x) = 0 \Rightarrow \boxed{3x + 2y - 4z = 0}$

Para $\boxed{a = -\frac{1}{2}} \Rightarrow z - x + \frac{1}{2}(y + \frac{1}{2}x) = 0 \Rightarrow \boxed{3x - 2y - 4z = 0}$

Para todo $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq \pm\frac{1}{2}$ no hay ecuaciones implícitas y se tiene que $S_a = \mathbb{R}^3$

e) Dada la matriz A= $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ obtener J la forma canónica de Jordan de A y las matrices P y P^{-1} tal que $P^{-1}AP=J$.

Como $\sigma(A)=\{1, 1\}$ y $S_{\lambda=1} = L\{(1,1)\}$, tomamos $v_1=(1,1)$ y v_2 un autovector generalizado solución del sistema $\begin{pmatrix}2-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}x = \lambda + 1\\ y = \lambda\end{matrix}$. Por ejemplo, $v_2 = (1,0)$. Por tanto,

$$J = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2: (**10** ptos)

Se consideran los siguientes subespacios vectoriales de $\Re^4$:

S={(x,y,z,t) $\in \mathbb{R}^4$ / x+y-z=0, t=0} y T={(x,y,z,t) $\in \mathbb{R}^4$ / y+z=0, y-z=0}.

a) Obtener los subespacios vectoriales S+T y S$\cap$T. Razonar si S y T son subespacios suplementarios.

S={(x,y,z,t) $\in \mathbb{R}^4$ / x+y-z=0, t=0} = L{(1,0,1,0), (0,1,1,0)}

T={(x,y,z,t) $\in \mathbb{R}^4$ / y+z=0, y-z=0} = L{(1,0,0,0), (0,0,0,1)}

$$\begin{array}{l} B_S\left\{\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right. \\ B_T\left\{\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right.\end{array} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}S + T = \mathbb{R}^4\\ S \cap T = \{(0,0,0,0)\}\end{matrix} \Rightarrow \text{S y T son suplementarios.}$$

b) Expresar el vector (3, 2, 1, -1) $\in \mathbb{R}^4$ como suma de un vector de S y otro vector de T.

$$\begin{pmatrix}3\\2\\1\\-1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = -1\\ \beta = 2\\ \gamma = 4\\ \lambda = -1\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}3\\2\\1\\-1\end{pmatrix} = \underbrace{(-1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}}_{\in S} + \underbrace{4\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\in T} = \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix}}_{\in S} + \underbrace{\begin{pmatrix}4\\0\\0\\-1\end{pmatrix}}_{\in T}$$

Ejercicio 3: (**15** ptos)

Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal que verifica lo siguiente:

- (1,0,1) es un vector del núcleo de *f*.
- La imagen de (1,-1,2) es (-3,-2,3).
- El subespacio propio asociado a λ=-2 es $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ x+y-z=0 \\ 3x+2y-z=0 \end{cases}$

Se pide:

a) Hallar una base del subespacio propio asociado a λ=-2 y hallar la matriz de *f* respecto de la base canónica.

$$S_{\lambda=-2}: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{cases} x=-\alpha \\ y=2\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow B_{S_{\lambda=-2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} (1,0,1) \in \ker f \;\Rightarrow\; f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ (1,-2,-1) \in S_{\lambda=-2} \Rightarrow f\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 8 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{matrix}}_{(*)} \end{array}\right) \Rightarrow M_f(B_c^{\mathbb{R}^3}, B_c^{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(*) La **traspuesta** de esta matriz es la matriz de *f* respecto de la base canónica, aunque en este caso, como la matriz es simétrica no hace falta trasponerla.

b) Razonar si *f* es monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo.

f NO es monomorfismo ya que *kerf* ≠ {(0,0,0)}. Además, como *f* es un endomorfismo es equivalente ser monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo, luego, *f* No es epimorfismo ni isomorfismo ya que no es monomorfismo. También se puede comprobar que *f* no es epimorfismo aplicando la fórmula de las dimensiones,

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim kerf + \dim Imf$$

y como dim *kerf* = 1 entonces dim *Imf* = 2 ≠ 3 = $\dim \mathbb{R}^3$. Por tanto, *Imf* ≠ $\mathbb{R}^3$ y así, *f* NO epimorfismo.

c) Determinar la contraimagen de la recta $r = L\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$, es decir determinar $f^{-1}(r)$

$$f^{-1}(r) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in r\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&-1&0\\0&-4&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&-1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&-1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}x=\gamma+\alpha\\y=0\\z=\gamma\\\alpha=\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(r)=L\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Ejercicio 4: (**15** ptos)

En $\mathbb{R}^3$ se consideran la base canónica $B_c = \{ e_1, e_2, e_3 \}$ y el producto escalar $<,>$ definido por:

$\| e_1 \| = \| e_2 \| = 1$, $\| e_3 \| = \sqrt{2}$, ángulo (e_1, e_2) = ángulo $(e_2, e_3) = \dfrac{\pi}{2}$ y ángulo $(e_1, e_3) = \dfrac{3\pi}{4}$. Calcular:

a) La matriz de Gram en la base B_c.

$$\left.\begin{array}{l}\langle e_1,e_2\rangle=\|e_1\|\|e_2\|\cos\sphericalangle(e_1,e_2)=1\cdot1\cdot\cos\dfrac{\pi}{2}=0\\[2ex]\langle e_1,e_3\rangle=\|e_1\|\|e_3\|\cos\sphericalangle(e_1,e_3)=1\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\dfrac{3\pi}{4}=\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1\\[2ex]\langle e_2,e_3\rangle=\|e_2\|\|e_3\|\cos\sphericalangle(e_2,e_3)=1\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\dfrac{\pi}{2}=0\end{array}\right\}\Rightarrow G(B_c)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$$

b) Una base ortonormal de $(\Re^3, <,>)$.

$$\left.\begin{array}{l}u_1=e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad u_2=e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\\[3ex]u_3=e_3-\dfrac{\langle u_1,e_3\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1-\dfrac{\langle u_2,e_3\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle}u_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-\dfrac{-1}{1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-0\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\\[3ex]\|u_3\|=\sqrt{(1,0,1)\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\-1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}=\sqrt{(0,0,1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}=1\end{array}\right\}\Rightarrow B^{ORN}_{<>}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Ejercicio 5: (**25** ptos)

Sea en $\mathbb{R}^4$ el subespacio vectorial $S=L\{(1,0,-1,0),\ (1,1,1,1),\ (0,0,1,-1)\}$:

a) Obtener la matriz y las ecuaciones, respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$, del endomorfismo $P_{S^\perp}$ proyección ortogonal sobre $S^\perp$.

Para construir el endomorfismo proyección ortogonal sobre $S^\perp$ necesitamos una base ortogonal (u ortonormal) del s.v. $S^\perp$. Para obtener esta base construimos las ecuaciones implícitas de $S^\perp$ y resolviendo el sistema obtenemos una base de $S^\perp$:

$$\text{Ecs. implíc. } S^\perp:\begin{cases}\langle(x,y,z,t),(1,0,-1,0)\rangle=0\\\langle(x,y,z,t),(1,1,1,1)\rangle=0\\\langle(x,y,z,t),(0,0,1,-1)\rangle=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-z=0\\x+y+z+t=0\\z-t=0\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&0&0\\1&1&1&1&0\\0&0&1&-1&0\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&0&0\\0&1&2&1&0\\0&0&1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&0\\0&1&0&3&0\\0&0&1&-1&0\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}x=\alpha\\y=-3\alpha\\z=\alpha\\t=\alpha\end{cases}\Rightarrow B^{ORG}_{S^\perp}=\left\{\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Por tanto,

$$p_{S^\perp}(x,y,z,t)=\frac{\langle (x,y,z,t),(1,-3,1,1)\rangle}{\langle (1,-3,1,1),(1,-3,1,1)\rangle}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}x-3y+z+t\\-3(x-3y+z+t)\\x-3y+z+t\\x-3y+z+t\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}1&-3&1&1\\-3&9&-3&-3\\1&-3&1&1\\1&-3&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$$

Luego, $M_{p_{S^\perp}}(B_c^{\mathbb{R}^4},B_c^{\mathbb{R}^4})=\begin{pmatrix}1&-3&1&1\\-3&9&-3&-3\\1&-3&1&1\\1&-3&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \text{Ecs. } p_{S^\perp}:\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}1&-3&1&1\\-3&9&-3&-3\\1&-3&1&1\\1&-3&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$

b) Diagonalizar ortogonalmente $P_{S^\perp}$ obteniendo las matrices P y P^t tales que $P^tM_{P_{S^\perp}}(B_c,B_c)P$ sea una matriz diagonal.

Para diagonalizar ortogonalmente un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ necesitamos una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ formada por vectores propios del endomorfismo. En este caso, como el endomorfismo es una proyección ortogonal, sabemos que es diagonalizable ortogonalmente, y que los subespacios propios son el subespacio sobre el cual proyectamos (en este caso $S^\perp$), que es el subespacio propio asociado al autovalor 1, y el subespacio ortogonal al cual proyectamos (en este caso $\left(S^\perp\right)^\perp=S$), que es el subespacio propio asociado al autovalor 0. Luego,

$S_{\lambda=1}=S^\perp=L\{(1,-3,1,1)\}$ y $S_{\lambda=0}=S=L\{(1,0,\text{-}1,0),\ (1,1,1,1),\ (0,0,1,\text{-}1)\}$.

Por tanto, para contruir la base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ formada por vectores propios de $P_{S^\perp}$ necesito una base ortogonal de S.

Para ello aplico G-S a una base de S:

$$\left.\begin{array}{l}u_1=(1,0,-1,0),\quad u_2=(1,1,1,1),\\ u_3=(0,0,1,-1)-\dfrac{\langle (1,0,-1,0),(0,0,1,-1)\rangle}{\langle (1,0,-1,0),(1,0,-1,0)\rangle}(1,0,-1,0)=\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2},-1\right)\to(1,0,1,-2)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow B^{ORN}_{autovect}=\left\{\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}u_1=(1,0,-1,0),\quad u_2=(1,1,1,1),\\ u_3=(0,0,1,-1)-\dfrac{\langle (1,0,-1,0),(0,0,1,-1)\rangle}{\langle (1,0,-1,0),(1,0,-1,0)\rangle}(1,0,-1,0)=\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2},-1\right)\to(1,0,1,-2)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^{ORN}_{autovect}=\left\{\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\1\end{pmatrix}}_{\in S^\perp=S_{\lambda=1}},\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix}}_{\in S=S_{\lambda=0}}\right\}\text{ y } P=MC(B^{ORN}_{autovect},B_c^{\mathbb{R}^4})=\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{-3}{2\sqrt{3}}&0&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{2\sqrt{3}}&0&\frac{1}{2}&\frac{-2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

Así, $P^tM_{P_{S^\perp}}(B_c,B_c)P=M_{P_{S^\perp}}(B^{ORN}_{autovect},B^{ORN}_{autovect})=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

c) Obtener las coordenadas del vector (-1, -1, 1,0) respecto de la base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ obtenida en el apartado b).

Coordenadas de (-1,-1,1,0) respecto de la base ortonormal $B^{ORN}_{autovect}$:

$$\left(\left\langle(-1,-1,1,0),\frac{1}{2\sqrt{3}}(1,-3,1,1)\right\rangle,\left\langle(-1,-1,1,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)\right\rangle,\left\langle(-1,-1,1,0),\frac{1}{2}(1,1,1,1)\right\rangle,\left\langle(-1,-1,1,0),\frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,1,-2)\right\rangle\right)_{B^{ORN}_{autovect}} =$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\sqrt{2},-\frac{1}{2},0\right)_{B^{ORN}_{autovect}}$$

Ejercicio 6: (**10** ptos)

Construir la matriz y las ecuaciones, respecto de la base canónica, del giro de ángulo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y dirección y sentido dados por el vector v = $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

Tomamos una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por el vector $\vec{v}$ normalizado y dos vectores del plano ortogonal a $\vec{v}$, y con la misma orientación que la base canónica.

$$B^{ORN}=\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\},\quad \left|\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&\sqrt{5}\end{pmatrix}\right|=1.$$ Por tanto,

$$\left.\begin{array}{l}
G^{\alpha}_{\vec{v}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix}\\
G^{\alpha}_{\vec{v}}\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix}=cos(\frac{\pi}{2})\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix}+sen(\frac{\pi}{2})\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\
G^{\alpha}_{\vec{v}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=-sen(\frac{\pi}{2})\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix}+cos(\frac{\pi}{2})\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}
\end{array}\right\}\Rightarrow M_{G^{\alpha}_{\vec{v}}}(B^{ORN},B^{ORN})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&cos(\frac{\pi}{2})&-sen(\frac{\pi}{2})\\0&sen(\frac{\pi}{2})&cos(\frac{\pi}{2})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Así, $$M_{G^{\alpha}_{\vec{v}}}(B_c,B_c)=C(B^{ORN},B_c)M_{G^{\alpha}_{\vec{v}}}(B^{ORN},B^{ORN})C(B_c,B^{ORN})=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{-2}{\sqrt{5}}&0\\\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{5}}&0\\\frac{-2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{-2}{\sqrt{5}}&0\\\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{5}}&0\\0&0&-1\\\frac{-2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{5}&\frac{4}{5}&\frac{-1}{\sqrt{5}}\\\frac{-2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}&0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{Ecs. Giro: }\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{5}&\frac{4}{5}&\frac{-1}{\sqrt{5}}\\\frac{-2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$