

Ejercicios (Series de potencias)

10.1. Determinar el intervalo de convergencia de las series de potencias

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n!}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} \right)^2 x^n, & \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n, & \text{c)} \sum_{n=0}^{\infty} n(\sqrt[n]{2} - 1)x^n, \\
 \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\log n/n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot x^n, & \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n, & \text{f)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n, \\
 \text{g)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n4^n} x^n, & \text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 4^n} x^n, & \text{i)} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} x^n, & \text{j)} \sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}, \\
 \text{k)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sqrt{n}} x^n, & \text{l)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} x^{2n+1}, & \text{m)} \sum_{n=0}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n} \right)^n, & \text{n)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log n}{n} x^n, \\
 \text{ñ)} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tan \frac{a}{2^n}.
 \end{array}$$

10.2. Desarrollar en series de potencias de x las siguientes funciones, indicando en qué intervalos son válidos los desarrollos:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} \frac{2x^2 - 3}{(x-1)^2}, & \text{b)} \frac{x}{9+x^2}, & \text{c)} \frac{1}{4-x^4}, & \text{d)} \log(1+x-2x^2), \\
 \text{e)} \log \frac{1+x}{1-x}, & \text{f)} \log(x + \sqrt{1+x^2}), & \text{g)} \sqrt[3]{8+x}, & \\
 \text{h)} (1+e^x)^3, & \text{i)} (1+x)e^{-x}, & \text{j)} \cos^2 x, & \text{k)} \cos x \sin^2 x, \\
 \text{l)} \sin^2 2x, & \text{m)} \log \frac{a+bx}{a-bx}, \quad a, b > 0, & \text{n)} \log(1-2x), & \\
 \text{ñ)} \sqrt{1+x^3}, & \text{o)} \frac{x}{a^2 - b^2 x^2}, \quad a, b > 0, & \text{p)} (x^2 + 1)e^{2x}, & \\
 \text{q)} \sin x - x \cos x, & \text{r)} \frac{1}{x-1} + x^2 \sin x, & & \\
 \text{s)} \int_0^x e^{-z^2} dz, & \text{t)} \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}. & &
 \end{array}$$

10.3. Sea $f(x) = \int_0^x \sqrt{8-t^3} dt$, para $x \in (-\infty, 2]$. Desarrollar f en serie de potencias de x (centrada en 0). Hallar el radio y el intervalo de convergencia del desarrollo. Hallar $f^{(7)}(0)$ y $f^{(11)}(0)$.

10.4. Desarrollar en series de potencias de $x - x_0$ las siguientes funciones, indicando en qué intervalos son válidos los desarrollos:

- a) $(a + bx)^{-1}$, $x_0 = 1$, $a, b > 0$, b) $\sin \frac{3x}{2}$, $x_0 = \pi$,
 c) $\sqrt{1+x}$, $x_0 = 3$, d) $\log 2x - \frac{1}{x-1}$, $x_0 = 2$.

10.5. Desarrollar en serie de potencias de x la función

$$f(x) = \int_0^x \frac{t \, dt}{(3-t)(t+2)}, \quad -2 < x < 3,$$

y determinar el radio y el intervalo de convergencia de la serie.

10.6. Determinar el campo de convergencia y la suma de las series:

- a) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n-1}}{4n}$, b) $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \frac{x^4}{4 \cdot 5} + \dots$

10.7. Hallar el campo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$ y probar que su suma es

$$\frac{1}{4} \log \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \arctan x.$$

10.8. Encontrar la única serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con radio de convergencia no nulo que cumple $f'' + f = 0$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$. Identificar esta función.

10.9. Hallar el radio y el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n(3n-1)}$ y sumarla en el intervalo abierto. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(3n-1)}$.

10.10. Hallar el radio y el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n(3n+1)}$ y sumarla en el intervalo abierto. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(3n+1)}$.

10.11. Hallar el intervalo de convergencia de la serie de potencias $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n(n-1)}{n^2+n} x^{n+1}$. Probar que $f(x) = (x-1) \log(1-2x) - 2x$ en ese intervalo.