10. Series de potencias

Análisis de Variable Real

2014–2015

Resumen

Se verá en este tema un tipo especial de serie de funciones: las series de potencias. Veremos que estas tienen unas propiedades muy particulares, que las hacen particularmente agradables. Incidiremos especialmente en el concepto de radio de convergencia.

Índice

1. Convergencia de las series de potencias

¿Qué es una serie de potencias?

Definición 10.1.

(I) Recibe el nombre de *serie de potencias* toda serie de funciones de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$.

(II) El número real a_n se denomina *coeficiente* n*-ésimo* de la serie de potencias.

(III) El número c se llama *centro* de la serie de potencias.

Si los coeficientes a_0, a_1, $\ldots$, a_{m-1} son nulos, la serie suele escribirse $\sum_{n=m}^{\infty} a_n(x-c)^n$.

En cierto modo, se trata de una especie de polinomio con infinitos términos. Veremos, de hecho, que las funciones definidas como suma de una serie de potencias comparten muchas propiedades con los polinomios.

¿Para qué valores de x converge una serie de potencias? Obviamente, es segura la convergencia para $x = c$, con suma a_0, y puede suceder que este sea el único punto en el que la seria converja. Fuera de este caso extremo, la situación es bastante satisfactoria, por lo sencilla. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos.

- (Serie geométrica) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

  Como ya sabemos esta serie de potencias converge (absolutamente) si, y solo si, $x \in (-1,1)$, con suma $1/(1-x)$.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

  El Criterio del Cociente 8.25 dice que la serie converge absolutamente si $|x| < 1$ y no converge si $|x| > 1$. En efecto,

  $$\operatorname*{lím}_n \frac{|x^{n+1}/(n+1)|}{|x^n/n|} = |x| \operatorname*{lím}_n \frac{n}{n+1} = |x|.$$

  Si $x = -1$, la serie es la armónica alternada, que sabemos que converge (aunque no absolutamente). Si $x = 1$ la serie es la armónica, que diverge. Así pues, el campo de convergencia de esta serie de potencias es el intervalo $[-1,1)$.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

  De nuevo el Criterio del Cociente 8.25 nos dice que la serie converge absolutamente si $|x| < 1$ y no converge si $|x| > 1$. Las cuentas son:

  $$\lim_n \frac{|x^{n+1}/(n+1)^2|}{|x^n/n^2|} = |x| \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = |x|.$$

  En este caso, tanto si $x = 1$ como si $x = -1$, la serie converge, así que el campo de convergencia es el intervalo $[-1, 1]$.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n}$.

  Utilizamos otra vez el Criterio del Cociente 8.25. Obtenemos

  $$\lim_n \frac{|(-1)^{n+1} x^{2n+2}/(n+1)|}{|(-1)^n x^{2n}/n|} = x^2 \lim_n \frac{n}{n+1} = x^2.$$

  Así pues, la serie converge absolutamente cuando $x^2 < 1$ (es decir, $|x| < 1$) y no converge cuando $x^2 > 1$ (o sea, cuando $|x| > 1$). Si $x = -1$, la serie converge (condicionalmente), pues es la armónica alternada. Si $x = 1$, es la serie armónica, así que diverge. El campo de convergencia es, pues, el intervalo $[-1, 1)$.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

  Usamos una vez más el Criterio del Cociente 8.25.

  $$\lim_n \frac{|x^{n+1}/(n+1)!|}{|x^n/n!|} = \lim_n \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

  Por tanto, esta serie converge absolutamente para cualquier $x \in \mathbb{R}$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$.

  Criterio del Cociente 8.25, otra vez. Si $x \neq 0$,

  $$\lim_n \frac{|(n+1)! x^{n+1}|}{|n! x^n|} = |x| \lim_n (n+1) = \infty > 1.$$

  Por tanto, esta serie de potencias converge solo para $x = 0$.

Radio e intervalo de convergencia

En todos los ejemplos anteriores, el campo de convergencia siempre ha sido un intervalo centrado en el centro de la serie de potencias (unas veces abierto, otras cerrado, otras semiabierto). Vamos a ver a continuación que ese es siempre el caso.

Definición 10.2. Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, su *radio de convergencia* es el número (posiblemente infinito) $R = 1/\rho$, donde

$$\rho = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|},$$

donde se aceptarán los convenios $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$.

Si $R > 0$, el intervalo $(c - R, c + R)$ se llama *intervalo de convergencia* de la serie de potencias.

Recordemos que cuando existe $\lim_n |a_{n+1}|/|a_n|$ tiene que coincidir con $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$. Esto tiene como consecuencia un método alternativo para calcular el radio de convergencia.

Proposición 10.3. *Supongamos que existe*

$$\rho = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Entonces el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *es* $R = 1/\rho$*, con los convenios* $1/0 = \infty$ *y* $1/\infty = 0$.

No hay que confundir el intervalo de convergencia de la serie de potencias con su campo de convergencia. Como veremos a continuación, el campo de convergencia de una serie de potencias es siempre un intervalo con extremos $c - R$ y $c + R$, pero no necesariamente abierto. El intervalo de convergencia, en cambio, es siempre un intervalo abierto.

Comportamiento de la serie de potencias en el intervalo de convergencia

Teorema 10.4 (de Cauchy-Hadamard)**.** *Dada una serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$*, con radio de convergencia* R*, se tiene:*

(I) *Si* $|x - c| < R$*, la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *converge absolutamente.*

(II) *Si* $|x - c| > R$*, la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *no converge.*

(III) *Si* $0 < r < R$*, la serie converge uniformemente en* $[c - r, c + r]$.

Demostración. (I) y (II). Apliquemos el Criterio de la Raíz a nuestra serie de potencias. Obtenemos

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n(x-c)^n|} = |x-c| \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = |x-c|\rho = \frac{|x-c|}{R}.$$

Por tanto, la serie converge absolutamente si $|x-c| < R$ y no converge si $|x-c| > R$.

(III). Sea $M_n = |a_n|r^n$. Obviamente, si $x \in [c-r, c+r]$, se tiene

$$|a_n(x-c)^n| \leqslant |a_n|r^n) = M_n.$$

Por otra parte, si hacemos $x = c+r$, se tiene que $|x-c| = r < R$ y, por (I), la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|r^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-c)^n|$$

converge. El Criterio M de Weierstrass concluye ahora que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ converge uniformemente en $[c-r, c+r]$. □

Obsérvese que en el Teorema de Cauchy-Hadamard 10.4 nada se dice de lo que ocurre en los puntos $c-R$ y $c+R$. En estos puntos se pueden dar todo tipo de situaciones, como ya hemos visto.

Ejemplos.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$

  Tenemos que $a_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así que

  $$\rho = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = 1,$$

  de donde el radio de convergencia es $R = 1/1 = 1$. Por tanto, el intervalo de convergencia es $(-1, 1)$ (que en este caso coincide con el campo de convergencia).

  También se podía haber realizado el cómputo de ρ de la forma siguiente:

  $$\rho = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \frac{1}{1} = 1.$$

  Este mismo ejemplo nos sirve para ilustrar otra cuestión acerca del Teorema de Cauchy-Hadamard 10.4. Ya hemos visto anteriormente que

  $$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

mientras que las sumas parciales son de la forma

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Por definición de f, está claro que (s_n) converge puntualmente a f en $(-1, 1)$. Por otro lado,

$$|f(x) - s_n(x)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{k=1}^{n} x^k\right| = \left|\frac{1}{1-x} - \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{1 - x}.$$

Como $\text{lím}_{x \to 1^-} |x|^{n+1}/(1 - x) = \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar un $x_n \in (-1, 1)$ tal que

$$|f(x_n) - s_n(x_n)| = \frac{|x_n|^{n+1}}{1 - x_n} > 1.$$

Por el Criterio Secuencial de Convergencia Uniforme 9.10, esto implica que la serie de potencias que estamos estudiando no converge uniformemente en $(-1, 1)$.

Es decir, aunque el Teorema de Cauchy-Hadamard 10.4 asegura la convergencia uniforme en un trozo $[c-r, c+r]$ arbitrariamente grande del intervalo de convergencia $(c - R, c + R)$, no necesariamente se tiene este mismo tipo de convergencia en todo el intervalo.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$

  En este caso $a_n = 1/n$. Tenemos así que

  $$\rho = \text{lím sup}_n \sqrt[n]{|a_n|} = \text{lím}_n \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

  y también en este caso se tiene $R = 1/1 = 1$. El intervalo de convergencia vuelve a ser $(-1, 1)$. Sin embargo, el campo de convergencia es en este caso el intervalo $[-1, 1)$, que no coincide con el intervalo de convergencia.

  Un cálculo alternativo sería

  $$\rho = \text{lím}_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \text{lím}_n \frac{1/(n + 1)}{1/n} = \text{lím}_n \frac{n}{n + 1} = 1.$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$

Ahora, $a_n = 1/n^2$. Tenemos

$$\rho = \operatorname*{lím\,sup}_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1.$$

Así pues, el radio de convergencia es $R = 1$, con lo que el intervalo de convergencia es $(-1, 1)$, aunque el campo de convergencia es $[-1, 1]$.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n}$.

  Fijémonos en que

  $$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ impar o } 0, \\ \frac{(-1)^{n/2}}{n/2}, & n \text{ par distinto de } 0. \end{cases}$$

  Por tanto,

  $$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0, & n \text{ impar o } 0, \\ \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n}}, & n \text{ par distinto de } 0. \end{cases}$$

  Esta sucesión tiene solo dos límites subsecuenciales, que son 0 y 1. Se sigue que

  $$\rho = \operatorname{lím\,sup} \sqrt[n]{|a_n|} = 1,$$

  de aquí que el radio de convergencia es $R = 1$ y el intervalo de convergencia vuelve a ser $(-1, 1)$. El campo de convergencia es $[-1, 1]$.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

  Aquí, $a_n = 1/n!$. Tenemos que

  $$\rho = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_n \frac{1}{n+1} = 0.$$

  Se ve así que el radio de convergencia es $R = 1/0 = \infty$, de donde el intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$.

  Se tiene ahora

  $$\rho = \lim_n \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_n (n+1) = \infty,$$

  así que $R = 1/\infty = 0$. El intervalo de convergencia es $(0, 0) = \varnothing$. El campo de convergencia es $\{0\}$.

2. Funciones desarrollables en serie de potencias

Representación en serie de potencias

Tienen muchísima importancia las funciones que se pueden definir como una serie de potencias.

Definición 10.5. Sea I un intervalo y supongamos que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ converge en I. Definamos una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n.$$

Decimos entonces que la serie de potencias *representa a la función* f en el intervalo I y que es el *desarrollo en serie de potencias* centrado en c de la función f. En estas condiciones, se dice también que f es *desarrollable en serie de potencias en* I.

Derivada de una función desarrollable en serie de potencias

A continuación, veremos que una serie desarrollable en serie de potencias es siempre derivable, y además su derivada es también desarrollable en serie de potencias, ya que se obtiene derivando la serie original término a término. Antes un resultado técnico.

Lema 10.6. *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia R. Entonces la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}$ tiene también radio de convergencia R.*

Demostración. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}$ converge donde lo hace $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^n$, que es la misma serie multiplicada por $x-c$. Por tanto estas dos series tienen el mismo radio de convergencia.

Como

$$\operatorname*{lím\,sup}_n \sqrt[n]{|a_n|} = \rho = \frac{1}{R},$$

se tiene que el radio de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^n$ es $1/\rho'$, donde

$$\rho' = \operatorname*{lím\,sup}_n \sqrt[n]{n|a_n|} = \operatorname*{lím}_n \sqrt[n]{n} \cdot \operatorname*{lím\,sup}_n \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R}.$$

Esto nos indica que el radio de convergencia de esta serie de potencias es también R. $\square$

Teorema 10.7. *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia* $R > 0$ *y sea* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, *para* $x \in (c-R, c+R)$. *Entonces la función* f *es derivable, y para cada* $x \in (c-R, c+R)$ *se tiene*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}.$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n(x) = a_n(x-c)^n$. Sea $d \in (c-R, c+R)$ y elijamos r, $0 < r < R$ tal que $d \in (c-r, c+r)$. La serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}$ tiene también radio de convergencia R por el Lema 10.6. En consecuencia, por el Teorema de Cauchy-Hadamard 10.4, la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}$ converge uniformemente en $[c-r, c+r]$. Además, es evidente que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ converge. Se sigue de aquí que la función $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ es derivable en $(c-R, c+r)$ y se puede derivar término a término. Por tanto,

$$f'(d) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(d) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(d-c)^{n-1}. \qquad \square$$

Derivadas n-ésimas

El Teorema 10.7 tiene la siguiente importante consecuencia:

Corolario 10.8. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia* $R > 0$ *y sea* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *si* $x \in (c-R, c+R)$. *Entonces,* f *tiene derivadas de todos los órdenes en* $(c-R, c+R)$ *y*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-c)^{n-k}.$$

En consecuencia, $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$.

Ejemplos.

- $$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, \qquad \text{si } |x| < 1.$$

  Partimos de un desarrollo en serie de potencias que ya conocemos, a saber,

  $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad \text{si } |x| < 1.$$

  La función $1/(1-x)^2$ es la derivada de $1/(1-x)$, así que por el Teorema 10.7, la serie de potencias de $1/(1-x)^2$ se obtiene derivando término a término la de $1/(1-x)$ y además tiene el mismo radio de convergencia. Por tanto, en efecto, se tiene

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \qquad \text{si } |x| < 1.$$

- $$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n, \qquad \text{si } |x| < 1.$$

  La derivada k-ésima de la función $1/(1-x)$ es $k!/(1-x)^{n+1}$. Empleando el Corolario 10.8, obtenemos la fórmula anunciada.

Serie de Taylor

La obvia relación que tiene la última fórmula del Corolario 10.8 con el polinomio de Taylor sugiere la siguiente definición:

Definición 10.9. Sea f una función con infinitas derivadas en el punto c. Llamamos *serie de Taylor* de f centrada en c a la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Como clara consecuencia del Teorema 10.7, se tiene la unicidad del desarrollo en serie de potencias de una función.

Corolario 10.10. *Si una función f es desarrollable en serie de potencias en el punto c, el desarrollo de f en serie de potencias centrado en c es único, y es su serie de Taylor centrada en c.*

Primitiva de una función desarrollable en serie de potencias

Se sigue con facilidad del Teorema 10.7 que el mismo camino propuesto por él se puede recorrer también en el sentido contrario.

Teorema 10.11. *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$ y sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ para $x \in (c-R, c+R)$. Entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$ tiene radio de convergencia R, y si F es una primitiva de f en $(c-R, c+R)$, para cada $x \in (c-R, c+R)$ se verifica $F(x) = F(c) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$.*

Demostración. Como la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ es la derivada término a término de la $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$, el Lema 10.6 nos dice que ambas series de potencias tienen el mismo radio de convergencia. Definamos

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}, \qquad x \in (c-R, c+R).$$

Por el Teorema 10.7, se tiene que $G'(x) = f(x)$ en $(c-R, c+R)$, es decir, G es una primitiva de f en $(c-R, c+R)$ y, por tanto, existe una constante K tal que $F(x)-G(x) = K$ para todo $x \in (c-R, c+R)$. En particular, $K = F(c)-G(c) = F(c)$. Se sigue que $F(x) = F(c) + G(x)$. $\square$

Algunas series de potencias obtenidas mediante primitivas

Ejemplos.

- $\log(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$

  Como
  $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$
  siempre que $x \in (-1,1)$, tenemos también que
  $$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \tag{1}$$
  siempre que $-x \in (-1,1)$, o sea, cuando $x \in (-1,1)$.

  La función $\log(1+x)$ es una primitiva de la función $1/(1+x)$. Según el Teorema 10.11, podemos integrar la serie anterior término a término, y obtenemos
  $$\begin{aligned}\log(1+x) &= \log 1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\end{aligned}$$

- $\arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$

Utilizando de nuevo la ecuación 1, obtenemos que

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

siempre que $x^2 \in (-1, 1)$, o sea, cuando $x \in (-1, 1)$.

Como la arco tangente es una primitiva de la función $1/(1+x^2)$, integramos término a término, y obtenemos

$$\arctan x = \arctan 0 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

siempre que $x \in (-1, 1)$.

¿Infinitamente derivable implica desarrollable?

Está claro que toda función con derivadas de todos los órdenes en un punto c tiene una serie de Taylor centrada en ese punto. Puede dar la impresión que dicha función tiene que ser desarrollable en serie de potencias o, lo que es igual, debe ser igual a su serie de Taylor. Esto no es cierto en general, como se desprende del ejemplo que vemos a continuación.

Ejemplo.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Como ya se vio esta función tiene derivadas de todos los órdenes. Tiene también la particularidad de que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que su serie de Taylor tiene todos los coeficientes nulos y por tanto es ella misma nula. Eso quiere decir que

$$f(x) \neq 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

para todo $x \neq 0$. Por tanto, esta función no es desarrollable en serie de Taylor.

Teoremas de Bernstein

Los dos siguientes teoremas nos proporcionan dos condiciones necesarias de fácil comprobación que aseguran que una función es desarrollable en serie de potencias.

Teorema 10.12 (Primer Teorema de Bernstein)**.** *Sea f una función con derivadas de todos los órdenes en un intervalo $(c - R, c + R)$. Supongamos que existen un* *número real $B > 0$ tal que $|f^{(n)}(x)| \leqslant B^n$ para todo $x \in (c-R, c+R)$. Entonces, para todo $x \in (c-R, c+R)$ se verifica*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Teorema 10.13 (Segundo Teorema de Bernstein)**.** *Sea f una función con derivadas de todos los órdenes en un intervalo $(c-R, c+R)$. Supongamos que $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [c, c+R)$. Entonces, para todo $c \in [c, c+R)$ se verifica*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Ejemplos.

- $\operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$
- $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$
- $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$

El Lema de Abel

Si $x \in (-1, 1)$ hemos visto que

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Si hacemos $x = 1$, obtenemos la serie armónica alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, que converge por el Criterio de Leibniz. ¿Convergerá esta serie hacia $\log 2$? El siguiente teorema responde a esta pregunta afirmativamente.

Teorema 10.14 (Lema de Abel)**.** *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ es convergente. Entonces*

$$\lim_{x \to (c+R)^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$