Ejercicios (Números reales)

1.1. Decir si cada una de las siguientes expresiones es cierta o falsa:

a) $\sum_{j=1}^{30} j^4 = \sum_{j=0}^{30} j^4$, b) $\sum_{j=0}^{100} 2 = 200$, c) $\sum_{j=1}^{20}(2+j^2) = 2 + \sum_{j=1}^{20} j^2$,

d) $\sum_{k=1}^{100} k^2 = \Big(\sum_{k=1}^{100} k\Big)^2$

1.2. Expresar con notación de sumatorio:

a) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{10\cdot 11}$,

b) $1 + 40 + 900 + 16\,000 + 250\,000 + 3\,600\,000$,

c) $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4$, d) $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$,

e) $a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5$, f) $a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5$.

1.3. Sabiendo que $\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$, hallar la suma de $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)}$.

1.4. Hallar las sumas siguientes ($n \in \mathbb{N}$):

a) $\sum_{j=1}^{n}(2j-1)$. (Usar la igualdad $j^2 - (j-1)^2 = 2j - 1$, $j \in \mathbb{N}$.)

b) $\sum_{j=1}^{n} j$. (Apoyarse en a).)

1.5. Algunas de estas afirmaciones sobre los números naturales n y p son ciertas y otras falsas. Decidir de qué tipo es cada una de ellas y justificar la respuesta.

a) n^2 es par si, y solo si, n es par.

b) $(n+p)^2$ es par si, y solo si, $(n-p)^2$ es par.

c) Si np es impar, entonces $n + p$ es par.

d) Si $n^2 + np + p^2$ es par, entonces np es par.

e) Si $n^2 + np + p^2$ es par, entonces n y p son pares.

1.6. Probar que

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Escribir el segundo miembro con notación de sumatorio. Esta expresión recibe el nombre de *Fórmula* o *Identidad Ciclotómica*.

1.7. Deducir de la Identidad Ciclotómica la suma de $\sum_{j=0}^{n} x^j$, $x \neq 1$. Hacer operaciones en la expresión $(1-x)\sum_{j=1}^{n} jx^j$ para deducir la suma de $\sum_{j=1}^{n} jx^j$, $x \neq 1$. Análogamente en $(1-x)\sum_{j=1}^{n} j^2x^j$ para deducir la suma de $\sum_{j=1}^{n} j^2x^j$, $x \neq 1$.

1.8. Demostrar por inducción las propiedades siguientes ($n \in \mathbb{N}$):

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k+4}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(3n+7)}{2(n+1)(n+2)}$,

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{n}$, f) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$,

g) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} ar^{j-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \quad (r \neq 1)$.

1.9. Deducir de las ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ 1-4 &= -(1+2), \\ 1-4+9 &= 1+2+3, \\ 1-4+9-16 &= -(1+2+3+4), \end{aligned}$$

una fórmula general sencilla que incluya las anteriores como casos particulares, y demostrarla mediante el Principio de Inducción Matemática.

1.10. Dado un número $n \in \mathbb{N}$, se define su *factorial* como

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1,$$

y también se define $0! = 1$. Dados dos números $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $m \geqslant n$, se define el coeficiente binómico "m sobre n" como

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Probar las siguientes propiedades:

a) $\displaystyle\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1, \qquad \binom{m}{1} = \binom{m}{m-1} = m$,

b) $\displaystyle\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$,

c) $\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$.

1.11. Probar la fórmula del *Binomio de Newton*: para cada $x, y \in \mathbb{R}$ y cada $n \in \mathbb{N}$,

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \tbinom{n}{j} x^j y^{n-j}.$$

Deducir de ella que:

a) $1 + n + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + 1 = 2^n$,

b) $1 - n + \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n = 0$.

1.12. Demostrar que $7^{2n+1} - 48^n - 7$ ($n \in \mathbb{N}$) es divisible por 48.

1.13. Demostrar que $2^{2n} + 15n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$) es múltiplo de 9.

1.14 (Desigualdad de Bernouilli)**.**

a) Probar que para todo $x > -1$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

b) Demostrar también que si $n \geqslant 2$ y $x \neq 0$ la desigualdad anterior es estricta.

1.15. Probar las siguientes desigualdades para $n \in \mathbb{N}$:

a) $n! > 2^{n-1} \quad (n \geqslant 3)$,

b) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$,

c) $\sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}} < \sqrt{n} + 1$.

1.16. ¿Para qué naturales n es cierto que

$$\frac{1}{n!} > \frac{8^n}{(2n)!}?$$

Probarlo por inducción.

1.17. Encontrar y demostrar por inducción una fórmula explícita para a_n si $a_1 = 1$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$,

a) $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{(n+1)(2n+1)}$, b) $a_{n+1} = \dfrac{3a_n}{(2n+2)(2n+3)}$,

c) $a_{n+1} = \dfrac{2n+1}{n+1} \cdot a_n$, d) $a_{n+1} = \Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^n a_n$.

1.18. Supongamos que $x_0 > 0$ y $x_n = 1 - e^{-x_{n-1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostrar que $0 < x_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.19. Supongamos qu e$R > 0$, $x_0 > 0$ y que

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{R}{x_n} + x_n\Big), \qquad \text{si } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_n > x_{n+1} > \sqrt{R}$ y

$$x_n - \sqrt{R} \leqslant \frac{1}{2^n} \cdot \frac{(x_0 - \sqrt{R})^2}{x_0}.$$

1.20. Sean $x, y > 0$ y para cada $k, n \in \mathbb{N}$, sea

$$\alpha_{k,n} = \sum_{j=0}^{n} j^k \tbinom{n}{j} x^j y^{n-j}.$$

a) Probar, mediante la fórmula del Binomio de Newton, que

$$\alpha_{1,n} = nx(x+y)^{n-1}.$$

b) Hallar $\alpha_{2,n}$. *Sugerencia:* calcular antes

$$\beta_{2,n} = \sum_{j=0}^{n} j(j-1) \tbinom{n}{j} x^j y^{n-j}.$$

c) Obtener un procedimiento para calcular $\alpha_{k,n}$ para cualesquiera $k, n \in \mathbb{N}$.

1.21. Probar por inducción que

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \cdots + \operatorname{sen}(2n-1)x = \frac{1 - \cos 2nx}{2 \operatorname{sen} x}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

1.22. Sean $a_1 = a_2 = 5$ y

$$a_{n+1} = a_n + 6a_{n-1}, \qquad n \geqslant 2.$$

Mostar por inducción que $a_n = 3^n - (-2)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.23. Sean $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $a_3 = -14$, y

$$a_{n+1} = 9a_n - 23a_{n-1} + 15a_{n-2}, \qquad , n \geqslant 3.$$

Mostrar por inducción que $a_n = 3^{n-1} - 5^{n-1} + 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.24. Los *números de Fibonacci* f_1, f_2, f_3, ... se definen por $f_1 = f_2 = 1$ y

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Demostrar por inducción que

$$f_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(La anterior es conocida como *Fórmula de Binet*.)

1.25 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz)**.** Probar que si $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots,$ $y_n \in \mathbb{R}$, entonces

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\Big).$$

Deducir que, si $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, entonces $|ac + bd| \leqslant 1$.

1.26. Sea P_n la propiedad $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(2n+1)^2}{8}$.

a) Probar que si P_n es cierta, entonces P_{n+1} es cierta.

b) Discutir la afirmación: *se deduce por inducción que P_n es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.*

1.27. Decidir para qué números naturales n es cierta la desigualdad $2^n > n^2$. Demostrarlo por inducción.

1.28. Comparar n^{n+1} y $(n+1)^n$ para $n \in \mathbb{N}$, y enunciar y demostrar qué desigualdad se verifica entre ambos números.

1.29. Probar que para todo número natural n es $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

1.30. Demostrar que el cardinal del conjunto de las partes de un conjunto que tiene n elementos es 2^n.

1.31. Hallar las soluciones de las desigualdades siguientes:

a) $2x^2+9x+6 \geqslant x+2$, b) $x+\dfrac{1}{x}<1$, c) $\dfrac{x}{x+5}<0$,

d) $\dfrac{3x^2-1}{1+x^2}>0$, e) $\dfrac{2x-1}{3x+2}\leqslant 1$, f) $\dfrac{2x^2+9x+6}{x+2}\geqslant 1$,

g) $\dfrac{x^2-4x+4}{1+x^3}>0$, h) $\dfrac{x-1}{3x+4}\leqslant\dfrac{3x+2}{x}$.

1.32. Escribir las siguientes fórmulas con expresiones equivalentes que no impliquen valores absolutos:

a) $a+b+|a-b|$, b) $a+b-|a-b|$,

c) $a+b+2c+|a-b|+\big|a+b-2c+|a-b|\big|$,

d) $a+b+2c-|a-b|\big|a+b-2c-|a-b|\big|$.

1.33. Resolver las ecuaciones:

a) $|x^2-5x+6|=-(x^2-5x+6)$, b) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|=\dfrac{x-1}{x+1}$,

c) $|(x^2+4x+9)+(2x-3)|=|x^2+4x+9|+|2x-3|$,

d) $|x-1||x+1|=0$, e) $|x-1||x+2|=3$.

1.34. Resolver las siguientes desigualdades:

a) $|2x+3|-1<|x|$, b) $|x(x-4)|<|x-4|-|x|$,

c) $|2-|x||=2+|x|$, d) $|x-1|+|x+1|<1$,

e) $|x-5|<|x+1|$, f) $|3x-5|<3$,

g) $|x^2-1|<1$, h) $|x^2-x+1|>1$,

i) $1<|x-\frac{1}{2}|<2$, j) $x-|x|>2$,

k) $|x^2-x|+x>1$, l) $\big|x+|x-1|\big|<2$,

m) $\dfrac{1}{1+|x-1|}<|x-2|$, n) $-1\leqslant\dfrac{|x^3-1|}{x-1}\leqslant 2$.

1.35. Estudiar para qué números reales se cumple:

a) $\dfrac{|x|+1}{x} < 1$ y $\dfrac{-2|x|+1}{x} < 1$, b) $\big|2x - |2x-1|\big| = -5x$.

1.36. Si $0 < x < y$ son dos números reales, probar que

$$\frac{2xy}{x+y} < \sqrt{xy} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{a^2+b^2 2}.$$

1.37 (Desigualdad de las Medias)**.** Probar por inducción que si $a_1, a_2, \dots, a_n$ son números reales positivos tales que $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, entonces

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant n.$$

Deducir de aquí que si $x_1, x_2, \dots, x_n$ son números reales no negativos cualesquiera, entonces

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},$$

es decir, su media aritmética es siempre mayor o igual que su media geométrica.

1.38. Sea $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que si $|x| \leqslant \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x = 0$. ¿Qué números reales x cumplen que $x \leqslant \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$?

1.39. Sea p un número racional no nulo y x un irracional. Probar que $p + x$ y px son irracionales

1.40. Mostrar que $\sqrt{p}$ es irracional si p es primo.

1.41. Probar que $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ y $1 - \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ son irracionales algebraicos.

1.42. Calcular el supremo y el ínfimo, si existen, de los siguientes conjuntos, indicando si son máximo o mínimo respectivamente:

a) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, b) $\{\frac{2n+1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, c) $\{n \pm \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
d) $\{x \in \mathbb{Q} \mid |x| < \sqrt{2}\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid \frac{1}{x-5} > 7\}$, e) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
f) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, g) $\{-\frac{1}{n} + [1+(-1)^n]n \mid n \in \mathbb{N}\}$, h) $\{\frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$,
i) $\{2, 2{,}2, 2{,}22, 2{,}222, \dots\}$,
j) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} \mid n^2x^2 - n(3n-1)x + (2n^2-3n-2) = 0\}$,
k) $\{(-1)^n \frac{n^2+1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, l) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 9\}$, m) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leqslant 7\}$,
n) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 1 < 0\}$, ñ) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0,\ x^2 + x - 1 < 0\}$,

o) $\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 \geqslant 0 \}$, p) $\{ x \in \mathbb{R} \mid |2x + 1| < 5 \}$,
q) $\{ x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + 1)^{-1} > \frac{1}{2} \}$, r) $\{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leqslant 7 \}$,
s) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, t) $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, u) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}]$.

1.43. Sea A un conjunto, $s = \sup A$ y $\varepsilon > 0$. ¿Se puede asegurar que existe algún $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a < s$? En caso afirmativo, demostrarlo. En caso negativo, dar un contraejemplo y modificar las desigualdades anteriores para que sea cierto.

1.44. Sean A y B dos conjuntos no vacíos, acotados, de números reales.

a) Demostrar que si $A \subset B$, entonces

$$\sup A \leqslant \sup B, \qquad \text{ínf} A \geqslant \text{ínf} B.$$

b) Probar que si $x \leqslant y$ para todos los $x \in A$, $y \in B$, entonces

$$\begin{aligned} \sup A \leqslant y & \quad \text{para todo } y \in B, \\ x \leqslant \text{ínf} B & \quad \text{para todo } x \in A, \end{aligned}$$

y por lo tanto $\sup A \leqslant \text{ínf} B$.

c) Demostrar que si $\sup A < \text{ínf} B$, entonces $a < b$ para todos los $a \in A$, $b \in B$. Justificar si es cierto el recíproco.

1.45.

a) Sean A y B dos conjuntos acotados de números reales. Definimos el conjunto

$$A + B = \{ x + y \mid x \in A, \ y \in B \}.$$

Demostrar que

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \qquad \text{ínf}(A + B) = \text{ínf} A + \text{ínf} B.$$

b) Sean $A = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \} \subset \mathbb{R}$, $B = \{ y_1, y_2, \ldots, y_n \} \subset \mathbb{R}$, y consideremos el conjunto

$$C = \{ x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n \}.$$

Demostrar que

$$\sup C \leqslant \sup A + \sup B, \qquad \text{ínf} C \geqslant \text{ínf} A + \text{ínf} B.$$

Dar algún ejemplo que muestre que las desigualdades pueden ser estrictas.

1.46. Sean A y B dos conjuntos acotados de números reales. Definimos el conjunto

$$A - B = \{\, x - y \mid x \in A,\ y \in B \,\}.$$

Demostrar que

$$\sup(A - B) = \sup A - \text{ínf}\, B, \qquad \text{ínf}(A - B) = \text{ínf}\, A - \sup B.$$

1.47 (Teorema de Dedekind)**.** Sean S y T dos conjuntos no vacíos tales que todo número real está en S o en T y tales que si $s \in S$ y $t \in T$ entonces $s < t$. Probar que existe un único número real β tal que todo número real menor que β está en S y todo número real mayor que β está en T. (Una descomposición de los reales en dos conjuntos con estas propiedades se denomina una *cortadura de Dedekind*.