MATEMÁTICAS EMPRESARIALES I
Cálculo de derivadas

1) Calcular al derivada (respecto de x) de las siguientes funciones

a) $\sqrt{x}e^{x^2\sqrt{a}} + 3\ln\left(\frac{a}{x} - b^2\right).$

b) $a^2e^{\sqrt{xa}} + 3\cos\left(2x^2b^3 - \sqrt{a}\right).$

c) $x^2e^{b\sqrt{ax}} + 5\ln\left(5x^4\sqrt[3]{b} - a^2\right).$

d) $\dfrac{\cos(x^3\sqrt{a} - b^3)}{\left(b\sqrt{x} + a\right)^3}$

e) $3\dfrac{\ln\left(a^2x^2 - b^2\right)}{\sqrt{b}}$

f) $a^2xe^{\sqrt{xa} + xb^3 + \sqrt{ab}}$

Soluciones:

a) $\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{x^2\sqrt{a}} + \sqrt{x}e^{x^2\sqrt{a}}2x\sqrt{a} + 3\frac{-a}{\left(\frac{a}{x} - b^2\right)x^2}.$

b) $a^2e^{\sqrt{xa}}\frac{a}{2\sqrt{xa}} - 3\,\mathrm{sen}\left(2x^2b^3 - \sqrt{a}\right)4xb^3.$

c) $2xe^{b\sqrt{ax}} + x^2e^{b\sqrt{ax}}\frac{ba}{2\sqrt{ax}} + \frac{100x^3\sqrt[3]{b}}{5x^4\sqrt[3]{b} - a^2}.$

d) $\dfrac{-3x^2\sqrt{a}\,\mathrm{sen}(x^3\sqrt{a} - b^3)\left(b\sqrt{x} + a\right)^3 - \cos(x^3\sqrt{a} - b^3)3\left(b\sqrt{x} + a\right)^2\frac{b}{2\sqrt{x}}}{\left(b\sqrt{x} + a\right)^6}.$ e) $\dfrac{6a^2x}{\sqrt{b}(a^2x^2 - b^2)}.$

f) $a^2e^{\sqrt{xa} + xb^3 + \sqrt{ab}} + a^2xe^{\sqrt{xa} + xb^3 + \sqrt{ab}}\left(\frac{a}{2\sqrt{xa}} + b^3\right).$

2) Calcular las derivadas respecto de x, y, z de las siguientes funciones:

(a) $x^2e^{y^2 + z^3}$, (b) $\mathrm{sen}(y^2\sqrt{x} - 1) + e^{x\sqrt{z}}$, (c) $\dfrac{x^y}{\sqrt{z}}$,

(d) $\dfrac{xe^{xyz}}{y}$ (e) $e^{\sqrt{z - x^2}} + \ln(x + y^2)$, (f) $\dfrac{1 + \mathrm{sen}(bxy^2)}{\sqrt{z^3}}$

(g) $\sqrt{z}e^{y^2 - x} + \ln(x\sqrt{y} - 3)$, (h) $e^{\sqrt{x}/y^2} + x\ln z$, (i) $\dfrac{e^{y^2 - x}}{x^2 + z + 1}$

Soluciones:

a) $2xe^{y^2 + z^3}, 2x^2ye^{y^2 + z^3}, 3x^2z^2e^{y^2 + z^3}.$

b) $\sqrt{z}e^{x\sqrt{z}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}y^2\cos\left(\sqrt{x}y^2 - 1\right), 2\sqrt{x}y\cos\left(\sqrt{x}y^2 - 1\right), \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{z}}e^{x\sqrt{z}}$

c) $x^{y-1}\frac{y}{\sqrt{z}}, \frac{x^y}{\sqrt{z}}\ln x, -\frac{x^y}{2\sqrt{z^3}}$ d) $\frac{1}{y}e^{xyz} + xze^{xyz}, \frac{x^2yze^{xyz} - xe^{xyz}}{y^2}, x^2e^{xyz}.$

e) $-\frac{xe^{\sqrt{z - x^2}}}{\sqrt{z - x^2}} + \frac{1}{y^2 + x}, \frac{2y}{y^2 + x}, \frac{e^{\sqrt{z - x^2}}}{2\sqrt{z - x^2}}.$

f) $\frac{by^2\cos\left(bxy^2\right)}{\sqrt{z^3}}, \frac{2bxy\cos\left(bxy^2\right)}{\sqrt{z^3}}, -\frac{3z^2\,\mathrm{sen}\left(bxy^2\right) + 1}{2\sqrt{z^9}}.$

g) $\frac{\sqrt{y}}{x\sqrt{y} - 3} - \sqrt{z}e^{y^2 - x}, 2y\sqrt{z}e^{y^2 - x} + \frac{x}{2\sqrt{y}\left(x\sqrt{y} - 3\right)}, \frac{1}{2\sqrt{z}}e^{y^2 - x}.$

h) $\frac{1}{2\sqrt{x}y^2}e^{\frac{\sqrt{x}}{y^2}} + \ln z, -2\frac{\sqrt{x}}{y^3}e^{\frac{\sqrt{x}}{y^2}}, \frac{x}{z}.$ i) $-\frac{e^{y^2 - x}\left(x^2 + 2x + z + 1\right)}{\left(x^2 + z + 1\right)^2}, \frac{2ye^{y^2 - x}}{x^2 + z + 1}, -\frac{e^{y^2 - x}}{\left(x^2 + z + 1\right)^2}.$

Cálculo de límites

1) Calcular los siguientes límites de funciones:

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$ (2) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\operatorname{sen} x}$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x}{\ln(1+x^2)}$ (4) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+3x-3}{2x^3-2x^2-x+1}$

(5) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+4}{2x^3-5x^2-4x+12}$ (6) $\lim_{x\to 1}\frac{x^{10}-1}{3x^4-3x^3-2x^2+7x-5}$

(7) $\lim_{x\to 1}\frac{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}{x-1}$ (8) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x}\right)$

(9) $\lim_{x\to 0} xe^{1/x}$ (10) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}$

(11) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{e^{x^2}-1}$ (12) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}$

(13) $\lim_{x\to\infty} x(e^{1/x}-1)$ (14) $\lim_{x\to +\infty}\sqrt[x]{x}$

(15) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{-\frac{1}{x}}$ (16) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{x}$

(17) $\lim_{x\to 1}(x^2-1)^{x-1}$ (18) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}(3x^2)}}$

(19) $\lim_{x\to 0}(\cos(x^2))^{1/x^4}$ (20) $\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$

(21) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2}$ (22) $\lim_{x\to +\infty}(\ln x)^{1/x}$

(23) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+3x+2}{x^2+x}\right)^{3x+1}$ (24) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x^4-6x+7}{2x^4+x^2-4}\right)^{-x^2+1}$

(25) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+3x^3-2x^4}{x^3+3x^4}$ (26) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-\sqrt{x^3}}{3x^3+2x^2}$

(27) $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-\sqrt{x^3}}{3x^3+2x^2}$ (28) $\lim_{x\to\infty}\frac{(3\cdot 5^{x+5}+2\cdot 3^{2x-4})(\sqrt{x^2+3x^5}-2x^2)}{2\cdot 2^{x^2}+3\cdot 5^{2x+6}}$

Solución: (1) $-1/6$, (2) $1/2$, (3) 0, (4) 4, (5) $3/7$, (6) no existe el límite, (7) 1, (8) 0, (9) $\frac{5}{3}$, (10) 0, (11) 0, (12) $+\infty$, (13) 1, (14) 1, (15) 1, (16) 1, (17) 1, (18) $e^{-1/6}$, (19) $e^{-1/2}$, (20) e^2, (21) e, (22) 1, (23) e^6, (24) $\sqrt{e}$, (25) $-2/3$, (26) 0, (27) $-\infty$, (28) 0.

2) Ordenar las siguientes funciones en $+\infty$: $3^x, 2^{x^2}, 2^{\sqrt{x}}, 2^{x+5}, x^x, 2^{4x}, x2^x$.
Solución: $2^{\sqrt{x}} \ll 2^{x+5} \ll x2^x \ll 3^x \ll 2^{4x} \ll x^x \ll 2^{x^2}$.

3) Determinar, en función del parámetro a, el valor del límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + (a-1)x^3 + 4(a^2-1)x^4}{3x^3 + (a^2-1)x^4}$$

Solución: Para $a \neq -1$ y $a \neq 1$ el límite es 4. Para $a = -1$ el límite es $-2/3$, y para $a = 1$ el límite es 0.

4) Decimos que $f(x)$ y $g(x)$ son equivalentes en a (a puede ser $\pm\infty$) si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, y lo escribimos $f(x) \sim g(x)$.

a) Demostrar que si $f(x) \sim g(x)$, entonces $f(x)^p \sim g(x)^p$ para toda constante $p \in \mathbb{R}$.

b) Demostrar que si $f(x) \sim g(x)$, entonces $h(x)^{f(x)} \sim h(x)^{g(x)}$ para toda función $h(x) > 0$. Comprobar que para $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x$ se tiene $f(x) \sim g(x)$ en $a = +\infty$, pero $f(x)^x \nsim g(x)^x$

c) Comprobar que para $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x$ se tiene $f(x) \sim g(x)$ en $a = +\infty$, pero $e^{f(x)} \nsim e^{g(x)}$. ¿Qué condición tienen que cumplir $f(x)$ y $g(x)$ para que $e^{f(x)} \sim e^{g(x)}$?

d) Comprobar que para $f(x) = x^3+x^2$, $g(x) = x^3+x$ se tiene $f(x) \sim g(x)$ en $a = +\infty$, pero $f(x) - x^3 \nsim g(x) - x^3$

e) Comprobar que para $f(x) = 2^{1/x}$ y $g(x) = 3^{1/x}$, se tiene $f(x) \sim g(x)$ en $a = +\infty$, pero $\ln f(x) \nsim \ln g(x)$. Demostrar que si $f(x)$ y $g(x)$ son positivos cerca de a, $f(x) \sim g(x)$, existe $L = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ y es $+\infty$ o un número $\neq 1$, entonces $\ln f(x) \sim \ln g(x)$.

Solución: c) Si $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x)) = 0$, entonces $e^{f(x)} \sim e^{g(x)}$ en a.