

[simplyjarod.com](http://simplyjarod.com)

# TDSÑ

Apuntes de  
clase

Apuntes y exámenes ETSIT UPM



Si alguna vez estos  
apuntes te sirvieron  
de ayuda, piensa que  
tus apuntes pueden  
ayudar a muchas  
otras personas.

Comparte tus apuntes  
en [simplyjarod.com](https://www.simplyjarod.com)

# TEMA 1

## REPASO SEÑALES Y SISTEMAS EN TIEMPO DISCRETO

Nota: Cuantificación no tiene problemas (habría que comprobar el libro).  $\Rightarrow$  Tema 2

Nota: Convoluciones en tiempo discreto se ven más adelante del temario.

15

15

15

15

15

Handwritten text on a grid background, consisting of approximately 15 columns of vertical lines and horizontal tick marks, resembling a ledger or data table. The text is too faint to be transcribed accurately.

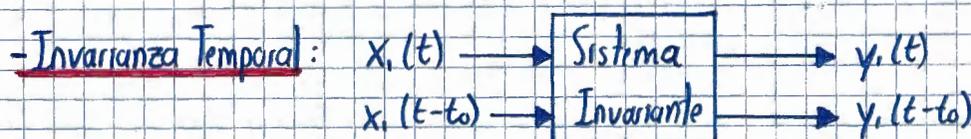
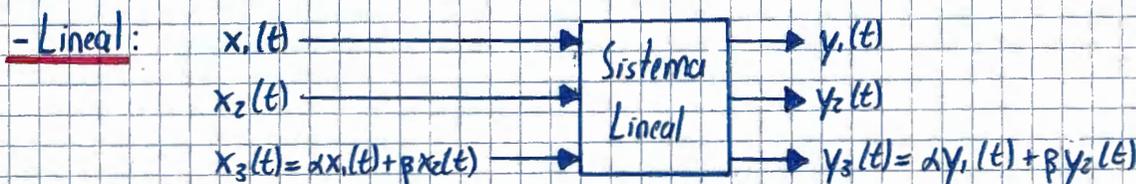
•  $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \quad \forall z \neq 1 \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad \text{si } |z| < 1$

•  $\sum_{k=1}^{\infty} z^k = \frac{z(1-z^n)}{1-z} \quad \forall z \neq 1 \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} z^k = \frac{z}{1-z} \quad \text{si } |z| < 1$

•  $\sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$

•  $\cos(t) = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}$

Propiedades de los sistemas



SSIT/STLN Para resolución de ejercicios prácticos: Septiembre 2001 Problema 1 {Cambios de variable en la demostración de invarianza}  
 Septiembre 2002 Problema 1

- Causalidad:  $x_1(t) \longrightarrow \text{Sistema Causal} \longrightarrow y_1(t) = \int_{-\infty}^t x(z) dz$

En otras palabras, un sistema causal es aquel que su salida <sup>-∞</sup> NO depende de instantes futuros o en otras palabras SÓLO depende de los valores presentes y pasados

- Sin memoria: Cuando la salida en cualquier instante de tiempo depende sólo del valor de la entrada en ese mismo instante.

- Estable: Si para cualquier entrada acotada en amplitud la salida está acotada.

Convolución de señales  $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k] \cdot h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$

Problemas a repasar:

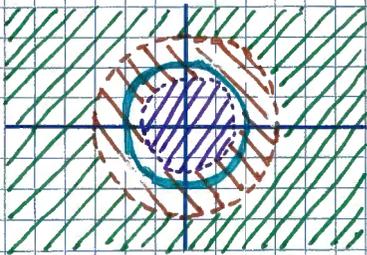
- Problema 2.3 (Oppenheim)
- Ejercicio de clase 4 (Carpeta SSIT)
- Septiembre 2000 Problema 1 (SSIT/STLN) → Para sistemas NO-LTI

Transformada de Fourier  $X(e^{j\omega}) = F\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{j\omega n}$

IMPORTANTE: la transformada de Fourier en tiempo discreto de una señal es una función PERIÓDICA de PERIODO  $2\pi$ . [TABLAS TRANSFORMADAS]

Problemas a repasar: Junio 2003 Problema 3 } Carpeta STLN/SSIT  
 Septiembre 1999 Problema 2 }

• Transformada Z:  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}$ . La transformada de Fourier en tiempo discreto no es más que una particularización de la transformada Z cuando  $z = e^{j\omega}$  (circunferencia unidad). [VER TRANSFORMADAS]



Circunferencia Unidad  $z = e^{j\omega}$  &  $|z| = 1$

ROC1: Anticausal y no estable

ROC2: No Causal y Estable

ROC3: Causal y no estable

• Estabilidad { - No-estable: NO contiene a  $z = e^{j\omega}$   
 - Estable: contiene a  $z = e^{j\omega}$

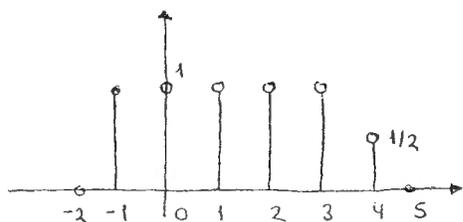
• Causalidad { - Anticausal: La ROC contiene el origen  
 - No-causal: coronas intermedias  
 - Causal: ROC más alejada.

Problemas a repasar: Problema 3.11 (Oppenheim) → transformadas Z causales (definición)  
 Problema 3.42 (Oppenheim) → Sistema realimentado  
 Septiembre 2009 Problema 1 → Problema que no parte del reposo inicial  
 Septiembre 2007 Problema 3 } Carpeta SSIT/STLN  
 Enero 2012 Problema 2 }

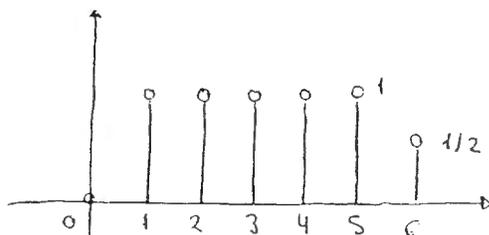
• Procesos estocásticos: [MIRAR TEORÍA] & 3 problemas resueltos.

# Tema Repaso

Ejercicio 2.29.  $\approx 2021$



a)  $x[n-2]$



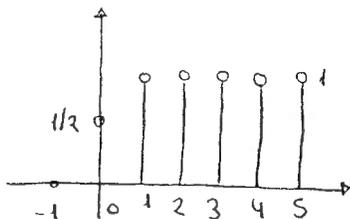
b)  $y[n] = x[4-n]$

$n=0 \Rightarrow y[0] = x[4]$

$n=1 \Rightarrow y[1] = x[3]$

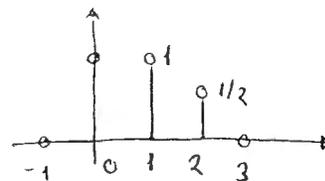
$n=2 \Rightarrow y[2] = x[2]$

$n=-1 \Rightarrow y[-1] = x[5]$



c1)  $y[n] = x[2n]$  (compresión)

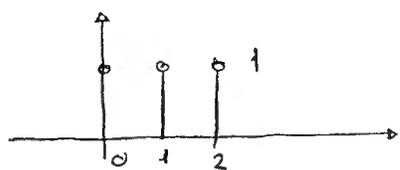
(nos quedamos con las muestras pares)



c2)  $y[n] = x[2n-1]$

$n=0 \Rightarrow y[0] = x[-1]$  ;  $n=1 \Rightarrow y[1] = x[1]$

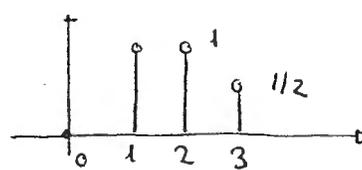
$n=2 \Rightarrow y[2] = x[3]$



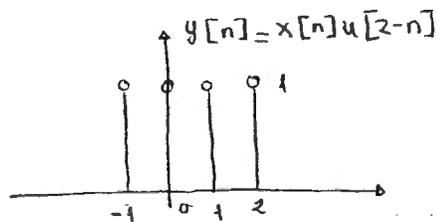
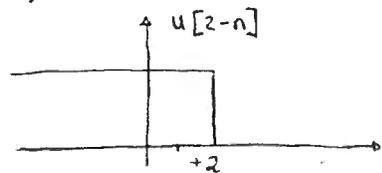
c3)  $y[n] = x[2n-2]$

$n=0 \Rightarrow y[0] = x[-2]$  ;  $n=1 \Rightarrow y[1] = x[0]$

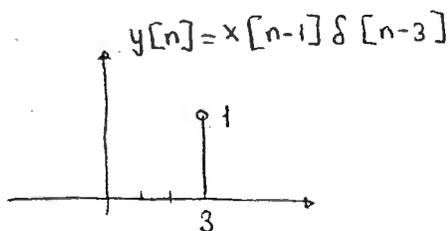
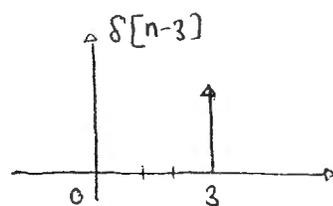
$n=2 \Rightarrow y[2] = x[2]$



d)  $x[n]u[2-n]$



e)  $x[n-1]\delta[n-3]$



$$T\{x[n]\} = (\cos \pi n) x[n] \quad (1)$$

$$T\{x[n]\} = x[n^2] \quad (2)$$

$$T\{x[n]\} = x[n] \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \quad (3)$$

$$T\{x[n]\} = \sum_{k=n-1}^{\infty} x[k] \quad (4)$$

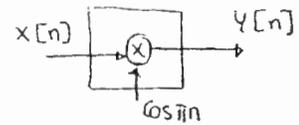
Dados los sistemas anteriores indicar:

- Memorias - Lineales

- Invariantes - Causales

- Estables

① Tenemos dos sistemas multiplicándose  $\approx$  Demodulador:



• Memoria: ¿Es dinámico? ¿sus muestras dependen de muestras anteriores? No  $\rightarrow$  Sistema sin memoria.

← Simultánea  $\Rightarrow$  solo depende del instante actual (ni futuros ni pasados)

• Estabilidad: BIBO: si tengo una señal de entrada limitada  $\Rightarrow$  la salida debe ser limitada.

(en amplitud)

Introducimos una señal escalón y observamos salida:

Tendré +1 ó -1 pero no valores  $\infty \rightarrow$  Es estable.

• Linealidad:

$$\begin{matrix} x_1[n] & \xrightarrow{T\{\cdot\}} & y_1[n] \\ x_2[n] & \xrightarrow{T\{\cdot\}} & y_2[n] \end{matrix}$$

$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{T\{\cdot\}} y_3[n] = ay_1[n] + by_2[n]$$

$\rightarrow$  Propiedad linealidad.

$$y_1[n] = (\cos \pi n) x_1[n]$$

$$y_2[n] = (\cos \pi n) x_2[n]$$

$$y_3[n] = (\cos \pi n) x_3[n] = (\cos \pi n) (ax_1[n] + bx_2[n]) = \underbrace{a(\cos \pi n) x_1[n]}_{ay_1[n]} + \underbrace{b(\cos \pi n) x_2[n]}_{by_2[n]} \quad \& \text{ Sí es lineal}$$

Por lo tanto es lineal.

• Invarianza:

$$x[n] \xrightarrow{T\{\cdot\}} y[n]$$

$$x_1[n] = x[n - n_0] \xrightarrow{T\{\cdot\}} y_1[n]$$

$$\text{Es invariante si: } y_1[n] = y[n - n_0]$$

$\rightarrow$  Propiedad invarianza.

$$y_1[n] = (\cos \pi n) x_1[n] = (\cos \pi n) x[n - n_0]$$

$$y[n - n_0] = (\cos \pi (n - n_0)) x[n - n_0]$$

$\neq$

$\Rightarrow$  No es invariante

"Los moduladores no son invariantes"

• Causalidad:

Será causal si su salida no depende de instantes futuros  $\Rightarrow$  será causal.

② • Memoria: depende de muestras futuras  $\Rightarrow$  sistema con memoria.

• Causalidad: observamos que su salida depende únicamente de su muestra actual o muestras futuras  $\Rightarrow$  No causal.

• Estabilidad: traslado muestras de entrada a la salida.  $\Rightarrow$  Si a la entrada tengo muestras que no llegan a  $\infty$  a su salida también  $\Rightarrow$  Estable.

• Linealidad:  $\left. \begin{matrix} y_1[n] = x_1[n^2] \\ y_2[n] = x_2[n^2] \end{matrix} \right\} y_3[n] = x_3[n^2] = ax_1[n^2] + bx_2[n^2] = ay_1[n] + by_2[n]$   
Sí es lineal.

• Invarianza:  $y_1[n] = x_1[n^2] = x[n^2 - n_0] \neq y[n - n_0] = x[(n - n_0)^2] \Rightarrow$  No es invariante

③ • Memoria / causalidad / estabilidad  $\Rightarrow$  Igual que ①.

• Linealidad.

$$y_1[n] = x_1[n] \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

$$y_2[n] = x_2[n] \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

$$y_3[n] = x_3[n] \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = (ax_1[n] + bx_2[n]) \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = ax_1[n] \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] + bx_2[n] \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = y_1[n] + y_2[n] \Rightarrow \text{Es lineal.}$$

• Invarianza.

$$y_1[n] = x_1[n] \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = x[n-n_0] \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

$$y[n-n_0] = x[n-n_0] \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-n_0-k] \neq \rightarrow \text{No es invariante.}$$

④ Acumulador ahistórico.

• Memoria: sumo desde  $n-1$  hasta  $\infty \Rightarrow$  con memoria.

• Causalidad: como aparecen muestras futuras  $\rightarrow$  No es causal.

• Con una señal limitada obtengo salidas  $\infty \rightarrow$  No estable.

• Linealidad:

$$y_1[n] = \sum_{k=n-1}^{\infty} x_1[k]$$

$$y_2[n] = \sum_{k=n-1}^{\infty} x_2[k]$$

$$y_3[n] = \sum_{k=n-1}^{\infty} x_3[k] = \sum_{k=n-1}^{\infty} (ax_1[k] + bx_2[k]) = \sum_{k=n-1}^{\infty} ax_1[k] + \sum_{k=n-1}^{\infty} bx_2[k] =$$

$$= a \sum_{k=n-1}^{\infty} x_1[k] + b \sum_{k=n-1}^{\infty} x_2[k] = ay_1[n] + by_2[n] \Rightarrow \text{lineal.}$$

• Invarianza.

$$y_1[n] = \sum_{k=n-1}^{\infty} x_1[k] = \sum_{k=n-1}^{\infty} x[k]$$

$$y[n-n_0] = \sum_{k=n-n_0-1}^{\infty} x[k] \neq \Rightarrow \text{No es invariante.}$$

Nota: ¿Cómo demostrar si un sistema es lineal e invariante a la vez?

Si es LTI  $\Rightarrow y[n] = x[n] * h[n]$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

Si en lugar de  $e^{j\omega}$  depende de otro valor

(desplazamiento, retardo, etc  $\Rightarrow$  No es LTI)

Por ejemplo: un modulador es un desplazamiento en el tiempo  $\Rightarrow$  No es LTI

1

2

3

4

# STLN

## Tó. 1. Introducción

→ la cosa de ser determinada magnitud con respecto a un determinado parámetro

1. En tiempo continuo; el parámetro toma valores en continuo.
2. En tiempo discreto; el parámetro toma valores solo en instantes discretos.

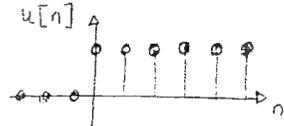
### \* Señales básicas:

#### ① Escalón unidad

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

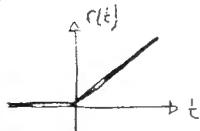


$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



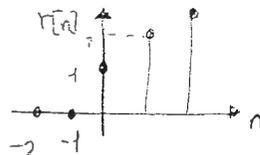
#### ③ Rampa

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} r(t) &= t u(t) \\ u(t) &= dr(t)/dt \end{aligned}$$

$$r[n] = (n+1)u[n]$$



$$\begin{aligned} u[n] &= r[n] - r[n-1] \\ r[n] &= \sum_{k=-\infty}^n u[k] \end{aligned}$$

#### ② Impulso unidad

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

señal de Dirac

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

Propiedad:

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(0)\delta(t) dt = x(0)$$

En tiempo discreto

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$$

Propiedad:

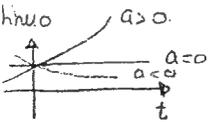
$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n] = x[0]$$

#### ④ Exponencial compleja. $x(t) = ce^{at}$ $a, c \in \mathbb{C}$

• En tiempo continuo

a)  $c, a \in \mathbb{R}$



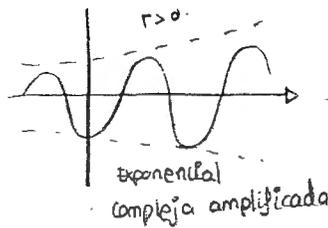
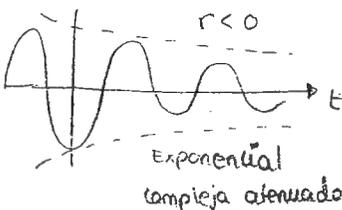
$$c = |c|e^{j\phi_c} \quad a = j\omega \quad \left\{ \begin{aligned} x(t) &= |c|e^{j(\omega t + \phi_c)} = |c|e^{j\omega t} e^{j\phi_c} \\ &= |c|e^{j\omega t} \end{aligned} \right.$$

$$\omega T = 2k\pi \rightarrow T = \frac{2k\pi}{\omega} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

permanencia para que sea periódica.

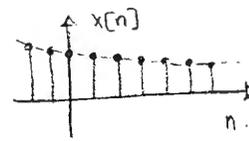
$$c = |c|e^{j\phi_c} \quad a = r + j\omega \quad \left\{ \begin{aligned} x(t) &= |c|e^{j\phi_c} e^{(r+j\omega)t} = |c|e^{rt} e^{j(\omega t + \phi_c)} \end{aligned} \right.$$

No periódica.



• En tiempo discreto.  $x[n] = ce^{an}$   $a, c \in \mathbb{C}$

a)  $c, a \in \mathbb{R}$

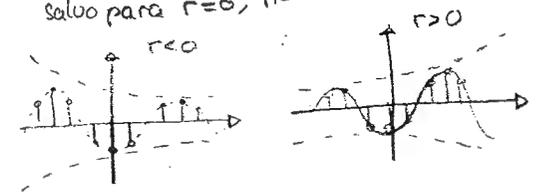


$$c = |c|e^{j\phi_c} \quad a = j\omega \quad \left\{ \begin{aligned} x[n] &= |c|e^{j(\omega n + \phi_c)} \\ &= |c|e^{j\omega n} e^{j\phi_c} \end{aligned} \right.$$

esta exponencial no tiene porque ser periódica en n.

$$c = |c|e^{j\phi_c} \quad a = r + j\omega \quad \left\{ \begin{aligned} x[n] &= |c|e^{rn} e^{j(\omega n + \phi_c)} \end{aligned} \right.$$

salvo para  $r=0$ , no será periódica



### \* Operaciones básicas

a) Aritméticas:

$$z(t) = x(t) \pm y(t)$$

$$z[n] = x[n] \pm y[n]$$

b) Cambio de nivel.

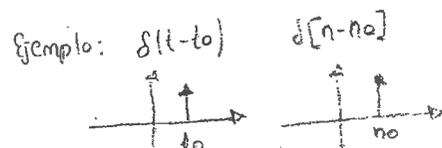
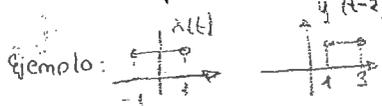
$$y(t) = Ax(t) \quad \begin{cases} |A| > 1 & \text{amplificación} \\ |A| < 1 & \text{reducción} \end{cases}$$

c) Transformación de la variable independiente.

① Desplazamiento.

$$y(t) = x(t - t_0)$$

$$y[n] = x[n - n_0]$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t-t_0) dt = x(t_0)$$

$$x[n] \delta[n-n_0] = x[n_0] \delta[n-n_0]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta[n-n_0] = x[n_0]$$

$|a| < 1 \rightarrow$  La señal se extingue.  
 $|a| > 1 \rightarrow$  La señal se amplifica.

sentido si  $a$  es un n.º exacto

- ④ Combinación. (Combinación de las 3 operaciones anteriores.)  
 1.º Aplicamos desplazamientos  
 2.º Inversión o escalado.

Características y parámetros

→ Valor medio:

$$\bar{x} = \langle x \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]$$

$$\bar{x} = \langle x \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

→ Valor de pico:

Valor máximo de la señal:  $x_p = \max |x(t)|$   
 se puede alcanzar en varios puntos.

→ Potencia/Energía

$P(t) = |x(t)|^2$  (Pot. instantánea)  
 $P[n] = |x[n]|^2$

$E_{t_1, t_2} = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$ ;  $E_{n_1, n_2} = \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$

$P_{t_1, t_2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$  (Pot. media en un intervalo)

$P_{n_1, n_2} = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$

$E_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$

$P_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$  (Energía y potencia media)

$E_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$

$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$

→ Periodicidad

$x(t) = x(t+T) = x(t \pm kT)$ ,  $T \equiv$  período fundamental

$x[n] = x[n+N] = x[n \pm kN]$ ,  $\omega_0 \equiv$  frecuencia fundamental =  $\frac{2\pi}{T}$

→ Simetría.

- $x(t) = x^*(-t) \rightarrow$  señal compleja conjugada o hermitica.
- $x(t) = -x^*(-t) \rightarrow$  Señal compleja antisimétrica conjugada o antihermítica.

Señal real:  $x(t) = x(-t) \rightarrow$  Par  
 $x(t) = -x(-t) \rightarrow$  Impar

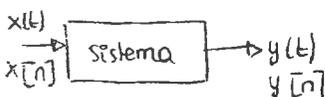
Propiedad:  $x(t) = x_p(t) + x_i(t)$

$x_p(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$

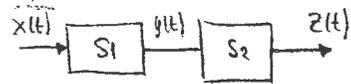
$x_i(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]$

$x(t)$

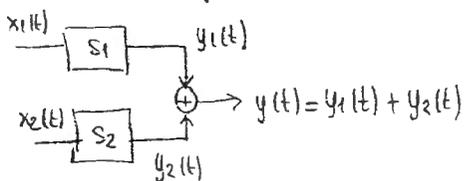
Concepto de sistema.



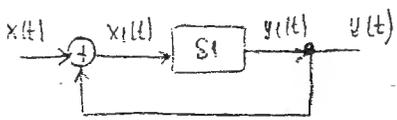
① Interconexión en serie.



② Interconexión en paralelo.



③ Interconexión con realimentación.



• Sistema lineal: (Linealidad)

$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$

$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$

$a x_1(t) + b x_2(t) \rightarrow a y_1(t) + b y_2(t)$

• Invariancia temporal.

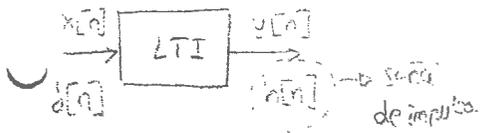
$x(t) \rightarrow y(t)$

$x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$

# T.2. Sistemas LTI

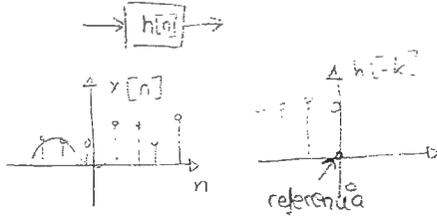
## Diseño de un sistema LTI en tiempo discreto

En un sistema LTI, para calcular la respuesta de salida a partir de una entrada es suficiente conocer la señal de impulso. La señal de impulso caracteriza completamente un sistema.



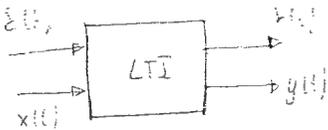
### \* Convolución en tiempo discreto.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] h[n-k]$$



veamos donde se solapan ambas señales

### 2) Caracterización de sistemas LTI en t. continuo.



$$x(t) * h(t) = y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

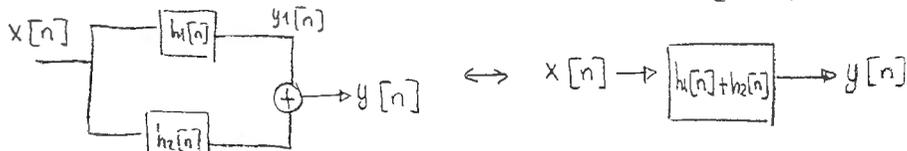
Convolución en tiempo continuo

### 3) Propiedades de la convolución. (son las mismas para t. discreto y t. continuo)

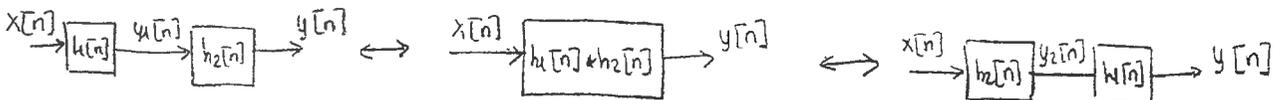
• **Comutativa:**  $y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$



• **Distributiva** (de la convolución respecto de la suma):  $x[n] * [h_1[n] + h_2[n]] = (x[n] * h_1[n]) + (x[n] * h_2[n])$



• **Asociativa:**  $y[n] = x_1[n] * (x_2[n] * x_3[n]) = (x_1[n] * x_2[n]) * x_3[n] = (x_1[n] * x_3[n]) * x_2[n]$



• **Elemento neutro:**  $x[n] = \delta[n] * x[n]$

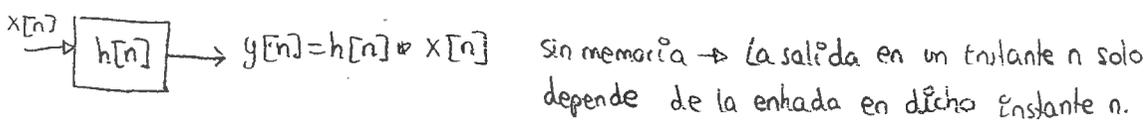
• **Desplazamiento:**  $y(t) = x(t-t_0)$  equivale a convolucionar con la función  $\delta(t)$ .

$$y(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0) = y(t)$$

$$x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]$$

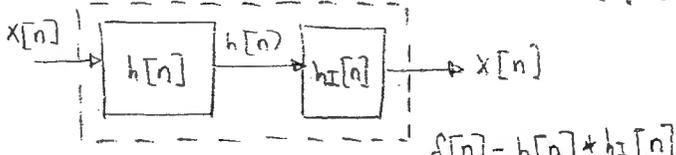
### 4) Propiedades adicionales.

• **Memoria:** se dice que un sistema es sin memoria cuando la salida en un instante dado sólo depende de la entrada en ese mismo instante.



Para que un LTI sea sin memoria:  $h(t) = k\delta(t)$

• **Inverso:** un sistema es invertible si existe para él un sistema inverso.



$$\begin{cases} h[n] = 0 & n < 0 \\ h(t) = 0 & t < 0 \end{cases}$$

Causal

$$\begin{cases} h[n] = 0 & n > 0 \\ h(t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

Anticausal

• Estabilidad. Para entradas acotadas en amplitud, las salidas están acotadas en amplitud

$$|x[n]| < B < \infty \rightarrow \boxed{S} \rightarrow |y[n]| < C < \infty \rightarrow \text{Estable BIBO}$$

Para sistemas LTI:

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]| < B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

### T.3. Transformada de Fourier en T. continuo.

\* Exponencial compleja y sistemas LTI.

$$\boxed{H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_0 k t} \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jk\omega_0) a_k e^{j\omega_0 k t}$$

• si x(t) es real:

$$\boxed{x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k)}$$

$$\boxed{x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(k\omega_0 t) - C_k \sin(k\omega_0 t)}$$

\* Desarrollo en serie Fourier: señales periódicas.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$a_k$  = coeficientes de Fourier

$$\boxed{a_k = a_{-k}^* = a_k^* = a_k}$$

relación de los coeficientes si x(t) es real.

En general: (x(t) compleja)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ a_n \int_0^T dt = a_n T & k = n \end{cases}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt}$$

Expresión general de los coeficientes de Fourier.

!!! Importante !!!

Condiciones que debe cumplir la señal.

- 1) si x(t) es de energía finita  $\Rightarrow \exists$  el desarrollo en serie de Fourier:  $\int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt < \infty$
- 2) condiciones de Dirichlet:
  - a) señal absolutamente integrable en un período:  $\int_{\langle T \rangle} |x(t)| dt < \infty$
  - b) señal con solo número finito de discontinuidades en un período.
  - c) solo un número finito de máximos y mínimos en un período.

\* Señales periódicas y sist. LTI

en la entrada  $\rightarrow$  coef. de Fourier  $a_k$ .

A la salida  $\rightarrow b_k = a_k h(jk\omega_0)$

\* Fórmula mod. de Euler.

$$\boxed{\Sigma(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt} \quad \boxed{a_k = \frac{\Sigma(jk\omega_0)}{T}} \quad \boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Sigma(j\omega) e^{j\omega t} d\omega}$$

Transformada de Fourier inversa.

$\Sigma(j\omega) \rightarrow \Sigma_R(j\omega) + j \Sigma_I(j\omega)$  (Parte real e imaginaria)  
 $\rightarrow |\Sigma(j\omega)| e^{j\phi_\Sigma(j\omega)}$  (Módulo y fase)

\* Transformada de Fourier de señales periódicas.

Dada una señal periódica, su transformada de Fourier será:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \leftrightarrow \Sigma(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)}$$

Siendo  $a_k = \frac{\Sigma_I(jk\omega_0)}{T_0}$

Por lo tanto podemos sustituir valor de  $a_k$  obteniendo:

$$\boxed{\Sigma(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T_0} \Sigma_I(jk\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0)}$$

\* Propiedades de la T.F.

① Linealidad.

$$\boxed{x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \leftrightarrow \Sigma_3(j\omega) = a \Sigma_1(j\omega) + b \Sigma_2(j\omega)}$$

② Desplazamiento temporal.

$$\boxed{x(t - t_0) \leftrightarrow \Sigma(j\omega) e^{-j\omega t_0}}$$

Nota: El desplazamiento no afecta al módulo pero sí a la fase.

$$|Y(j\omega)| = |\Sigma(j\omega)| \quad \phi_Y(j\omega) = \phi_\Sigma(j\omega) - \omega t_0$$

③ Desplazamiento en frecuencia

$$\boxed{x(t) e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow \Sigma(j(\omega - \omega_0))}$$

④ Simetría.  $\boxed{x(t) \leftrightarrow \Sigma(j\omega) \Rightarrow x^*(t) \leftrightarrow \Sigma^*(-j\omega)}$

$$\begin{aligned} \text{Re}\{\Sigma(j\omega)\} &= \text{Re}\{\Sigma(-j\omega)\} && \text{Parte real par en } \omega. \\ \text{Im}\{\Sigma(j\omega)\} &= -\text{Im}\{\Sigma(-j\omega)\} && \text{Parte imaginaria impar en } \omega. \end{aligned}$$

⑤ Diferenciación en el tiempo.

$$\boxed{\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n \Sigma(j\omega)}$$

$$\begin{aligned} |\Sigma(j\omega)| &= |\Sigma(-j\omega)| \\ \phi_{\Sigma(-j\omega)} &= -\phi_{\Sigma(j\omega)} \end{aligned}$$

⑥ Escalado en el tiempo y en la frecuencia.

$$\boxed{x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} \Sigma(j\frac{\omega}{a})}$$

Si comprimimos en el tiempo expandimos en el dominio de la frecuencia y viceversa.

⑦ Dualidad.

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow \Sigma(j\omega) \\ \Sigma(jt) &\leftrightarrow 2\pi x(-\omega) \end{aligned}$$

Linea transformada de Fourier  $\rightarrow$  Transformada dual

⑧ Diferenciación en el dominio de la frecuencia.

$$\boxed{-jt x(t) \leftrightarrow \frac{d\Sigma(j\omega)}{d\omega}}$$

⑨ Parseval.

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow \Sigma(j\omega) \\ \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Sigma(j\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

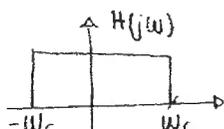
⑩ Convolución de la T.F.

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

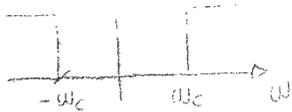
$$\boxed{Y(j\omega) = \Sigma(j\omega) H(j\omega)}$$

⑪ Filtros ideales selectivos en frecuencia.

• Filtro paso bajo ideal (lowpass).

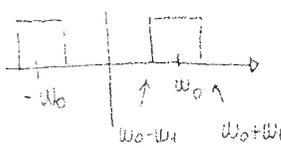


Deja pasar frecuencias bajas eliminando las frecuencias altas.

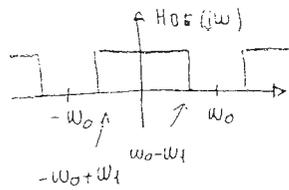


$$H_{PA}(j\omega) = 1 - H_{PB}(j\omega)$$

$$h_{PA}(t) = \delta(t) - \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$$



Filtro banda eliminada



$$H_{PB}(j\omega) = H_{PB}(j(\omega - \omega_0)) + H_{PB}(j(\omega + \omega_0))$$

$$h_{PB}(t) = \frac{2 \sin(\omega_1 t)}{\pi t} \cos(\omega_0 t)$$

$$H_{BE}(j\omega) = 1 - H_{PB}(j\omega)$$

$$H_{BE}(j\omega) = H_{PB}(j\omega) + H_{PA}(j\omega)$$

$$h_{BE}(t) = \delta(t) - h_{PB}(t)$$

$$h_{BE}(t) = h_{PB}(t) + h_{PA}(t)$$

(10) Multiplicación o modulación.

$$Z(t) = x(t)y(t) \leftrightarrow Z(j\omega) = \frac{1}{2\pi} (\Sigma(j\omega) * \Psi(j\omega))$$

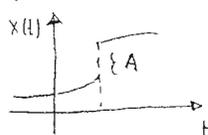
Importancia en señales tipo coseno  $\rightarrow y(t) = \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \Psi(j\omega) = \pi \delta(\omega + \omega_0) + \pi \delta(\omega - \omega_0)$

$$z(t) = x(t) \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow Z(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [\Sigma(j\omega) * (\pi \delta(\omega + \omega_0) + \pi \delta(\omega - \omega_0))] = \frac{1}{2} \Sigma(j(\omega + \omega_0)) + \frac{1}{2} \Sigma(j(\omega - \omega_0))$$

(11) Integración.

$$x(t) \leftrightarrow \Sigma(j\omega) \quad \left[ y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau \leftrightarrow \Psi(j\omega) = \begin{cases} \frac{\Sigma(j\omega)}{j\omega} & \omega \neq 0 \\ \pi \Sigma(j\omega) \delta(\omega) & \omega = 0 \end{cases} \right]$$

Nota



$$x(t) = y(t) + A\delta(t-t_0)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt} + A\delta(t-t_0)$$

\* Transformada de Laplace.

$$\Sigma(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

La transformada de Laplace converge en los puntos donde se cumple:

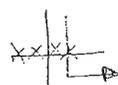
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$$

Propiedades de la R. Convergencia.

- Tiene forma de bandas paralelas al eje  $\omega$ .
- La región de convergencia no tiene polos.
- si  $x(t)$  es de duración finita ( $\neq 0$ ) y abs. integrable entonces r.c. = plano s completo.
- si está limitado por la izquierda  $\leftarrow$
- si está limitado por la derecha  $\rightarrow$
- $\left| \left| \right| \right|$  Banda alrededor de  $\sigma_0$ .
- La R.C. o es una banda limitada por polos o se extiende hasta el infinito.
- si  $x(t)$  está limitado por la izquierda, entonces la región de convergencia será la que se encuentre a la derecha del polo situado + a la derecha y viceversa.

Propiedades de la Transf. de Laplace.

- Linealidad:  $x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$   
 $X_3(s) = aX_1(s) + bX_2(s)$
- Diferenciación:  $\frac{d^{(n)} x(t)}{dt^n} \leftrightarrow S^n X(s)$
- Convulsión:  $y(t) = x_1(t) * h(t)$   
 $y(s) = X(s) H(s)$
- Diferenciación en s:  $x(t) \leftrightarrow X(s)$   
 $-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds}$



Transformada de Laplace



$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Expresión general:

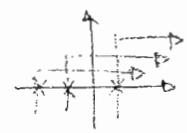
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^L b_k s^k}{\sum_{k=0}^M a_k s^k}$$

Nota:  
grado numerador =  
grado denominador.  
Si no dividimos

Propiedades de la T.L. y sus influencias en la R.C.

① Causalidad

• Si el LTI es causal, la región de convergencia de la h(s) será a la derecha del polo más a la derecha



• Si es anticausal hacia la izquierda.

② Estabilidad

si  $\sigma=0 \in \text{ROC} \Rightarrow$  sistema estable  $\Rightarrow$  Eje  $j\omega \in$  a la ROC  $\Rightarrow$  tendrá T.F.  
Por lo tanto los polos deberán tener parte real negativa

T.4. Transformada de Fourier en t. discreto.

\* D.S.F. de señales periódicas.

$$X[n+N] = X[n] = X[n \pm kN]$$

$$\phi_k[n] = e^{jk \left( \frac{2\pi}{N} \right) n}$$

señal en t. discreto para calcular desarrollo

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk \left( \frac{2\pi}{N} \right) n}$$

En general:

$$X[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{jk \left( \frac{2\pi}{N} \right) n} \quad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} X[n] e^{-jk \left( \frac{2\pi}{N} \right) n}$$

DSF

En t. discreto ax periódicos

$$X[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} \sum_{l \in \langle N \rangle} a_k e^{jk \left( \frac{2\pi}{N} \right) n}$$

\* Señales periódicas y sistemas LTI.

$$X[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{jk \left( \frac{2\pi}{N} \right) n} \leftrightarrow Z[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} b_k e^{jk \left( \frac{2\pi}{N} \right) n}$$

Donde:  $b_k = a_k H(e^{jk \left( \frac{2\pi}{N} \right)})$

\* Transformada de Fourier de señales en t. discreto.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Pareja de transformadas de Fourier.

\* Transformada de Fourier de señales periódicas.

$$X[n] = e^{j\omega n} \leftrightarrow \Sigma(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$

Ejemplo:  $x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{jk \left( \frac{2\pi}{N} \right) n}$

$$\Sigma(e^{j\omega}) = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - k \frac{2\pi}{N} - 2\pi l)$$

$$\Sigma(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right)$$

$\rightarrow$  Expresión que emplearemos.

\* Propiedades de la T.F.

① Periodicidad. (No ocurre en t. continuo)

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega + 2k\pi)})$$

② Linealidad.

$$x_1[n] \leftrightarrow \Sigma_1(e^{j\omega}) \quad \{ \Rightarrow x_3[n] = a x_1[n] + b x_2[n]$$

5) Simetría  $x_1[n] \leftrightarrow \sum_1^*(e^{j\omega})$

si  $x_1[n] = x_1^*[n] \leftrightarrow \sum_1(e^{j\omega}) = \sum_1^*(e^{j\omega})$

Simetría conjugada.

$\text{Re}\{\sum(e^{j\omega})\}$  Par      $|\sum(e^{j\omega})|$  Par  
 $\text{Im}\{\sum(e^{j\omega})\}$  Impar      $\angle \sum(e^{j\omega})$  Impar

• si la señal es real y par  $\rightarrow$  su transf. real y par.  
 • si la señal es real e impar  $\rightarrow$  Transf. imaginaria pura e impar.

6) Diferencia y acumulación

a)  $y[n] = x[n] - x[n-1]$  (equivalente a derivar)

$\Downarrow$

$\sum(e^{j\omega}) - \sum(e^{j\omega})e^{-j\omega} = (1 - e^{-j\omega})\sum(e^{j\omega})$

b)  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$  (equivalente a la integral)

$\Downarrow$

$\sum(e^{j\omega}) = \frac{\sum(e^{j\omega})}{(1 - e^{-j\omega})} + \pi \sum(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$

7) Inversión temporal

$x[n] \leftrightarrow \sum(e^{j\omega}) \quad ; \quad x[-n] \leftrightarrow \sum(e^{-j\omega})$

8) "Expansión temporal"

La expansión en el tiempo hace que su transformado se comprima

$x_1(k)(e^{j\omega}) = \sum(e^{j\omega k})$

9) Diferenciar en frecuencia.

$-jn x[n] \leftrightarrow \frac{d\sum(e^{j\omega})}{d\omega}$

10) relación Parseval

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} |\sum(e^{j\omega})|^2 d\omega$

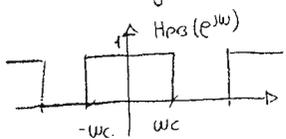
11) Convulsión.

$y[n] = x_1[n] * x_2[n]$

$\sum(e^{j\omega}) = \sum_1(e^{j\omega}) \sum_2(e^{j\omega})$

Filtros.

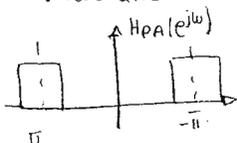
\* Paso bajo.



$h_{pb}[n] = \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{\pi n}$

Igual que en t, pero en el caso periódico.

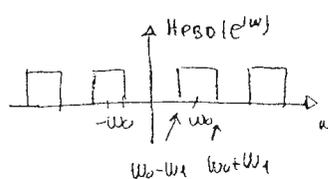
\* Paso alto



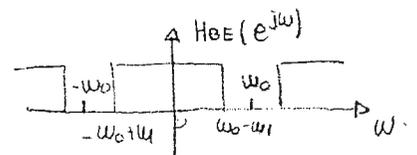
$H_{pa}(e^{j\omega}) = 1 - H_{pb}(e^{j\omega})$

$h_{pa}[n] = \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{\pi n} (-1)^n$

\* Filto paso banda



\* Filto banda eliminado.



12) Multiplicación:

$y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n] \leftrightarrow$

$\sum(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} \sum_1(e^{j\alpha}) \sum_2(e^{j(\omega-\alpha)}) d\alpha$

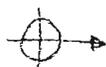
Convulsión circular.

Igual que la convencional pero en un intervalo  $2\pi$ .

\* Transformada z.

$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$

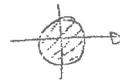
Propiedades región de convergencia

- La región de convergencia son anillos concéntricos en el origen 
- La región de convergencia no tiene polos.
- si  $x[n]$  infinita,  $x[n] = 0$   $n < M$ ,  $n > M_2$ , entonces la región de convergencia es el plano z completo a excepción de  $z=0$  ó  $z=\infty$ .

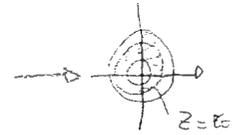
• Limitada por la izquierda  $\exists r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ ,  $r_1 < r_2$ , entonces:  $|z| > r_2$  tiene potencia an



• Limitada por la derecha y limitada  $\exists r_0 \in \mathbb{R}$ , entonces: todos los  $|z| < r_0 \in \mathbb{R}$



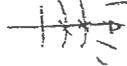
• Si  $x[n]$  bilateral y  $|z|=r_0 \in \mathbb{R}$  a ROC  $\Rightarrow$  sera' aquella que incluya al anillo  $|z|=r_0$



• La región de convergencia está limitada por polos o se extiende a  $\infty$



• Si  $x[n]$  limitada por izquierda,  $x[n]=0 \ n < n_1$ , entonces ROC hacia exterior polo más externo. Si además  $x[n]$  es causal incluye el  $\infty$



• Si  $x[n]$  limitada por la derecha,  $x[n]=0 \ n > n_2$ , entonces ROC hacia interior polo más interno. Si además  $x[n]$  anticausal incluye el 0



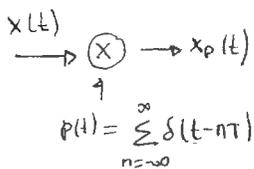
\* Análisis LTI definidos por ecuaciones diferenciales

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

Región de convergencia de los datos

### T.5. Muestreo

\* Muestreo ideal. Teorema Nyquist.



$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t-nT)$$

$$\Sigma_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Sigma(j(\omega - k \frac{2\pi}{T}))$$

$\omega_s \rightarrow T = \text{Período muestreo.}$

Teorema muestreo o Nyquist.

Sea  $x(t)$  una señal limitada en banda tal que  $\Sigma(j\omega) = 0$  para  $|\omega| > \omega_H$ ,  $x(t)$  queda determinada unívocamente mediante sus muestros tomados con período  $T$  ( $T = \frac{2\pi}{\omega_s}$ ) siempre que  $\omega_s > 2\omega_H$ .

\* Otros tipos de muestreo.

1) Canchén de pulsos

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(t-nT)$$

A) Muestreo natural.  $x_{pn} = x(t) * p(t)$

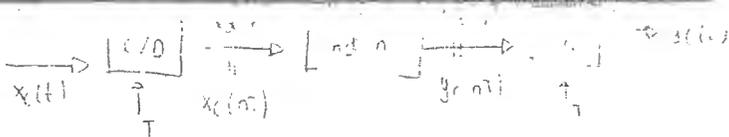
$$x_{pn}(t) = x(t) * \left[ r(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \right]$$

$$\Sigma_{pn}(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(jk\omega_s) \Sigma(j(\omega - k\omega_s))$$

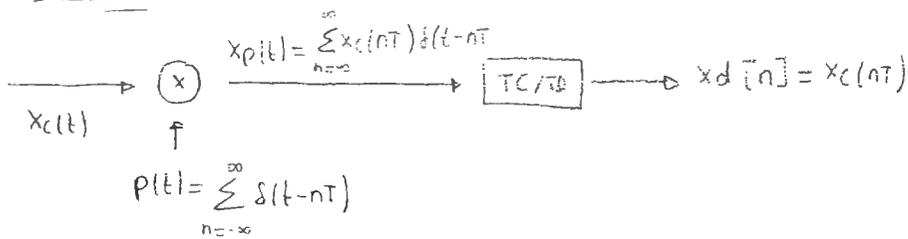
B) Muestreo instantáneo.  $x_{pi} = x(t) * p(t)$

$$x_{pi}(t) = r(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t-nT) = r(t) * [x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)]$$

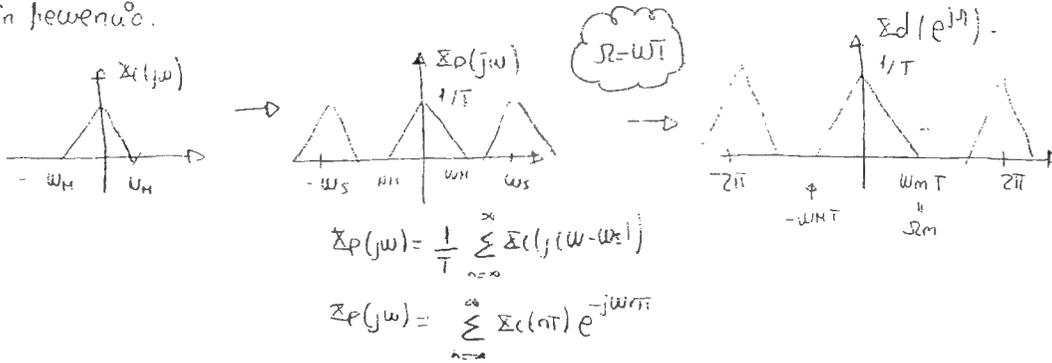
$$\Sigma_{pi}(j\omega) = \frac{1}{T} R(j\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Sigma(j(\omega - k\omega_s)) //$$



• Bloque C/D

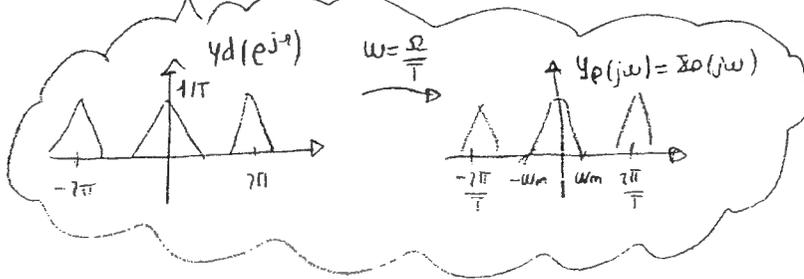
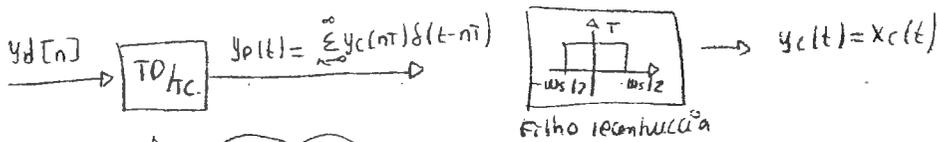


En frecuencia.



• Bloque D/C Asumimos  $h_d[n]$  la identidad.

Entonces  $\sum d(e^{j\Omega}) = y_d(e^{j\Omega})$   
 $y_d[n] = \sum d[n] = y_c(nT) = x_c(nT)$



Si colocásemos el filtro  $h_d[n]$

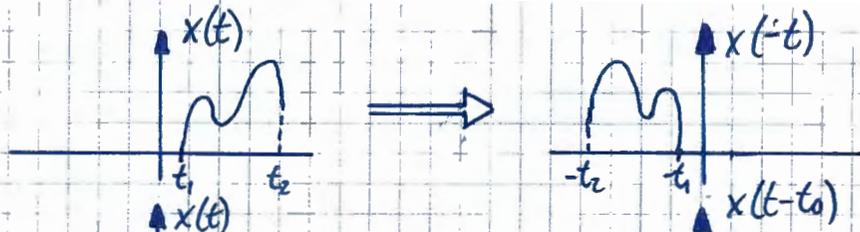
$$H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\omega T}) & \text{en } |\omega| < \omega_s/2 \\ 0 & \text{afuera} \end{cases}$$

↕

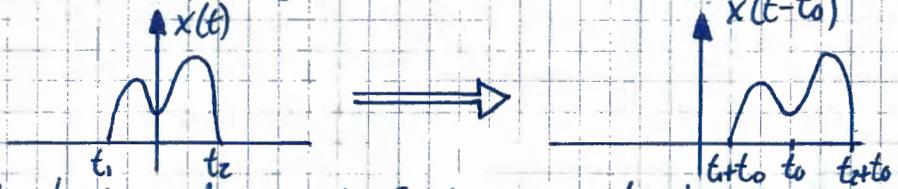
$$H_d(e^{j\Omega}) = H_c(j\frac{\Omega}{T})$$

periódico en  $\Omega$   
 de  $T = 2\pi$   
 $|\Omega| < \pi$

• Señal invertida:



• Señal desplazada:



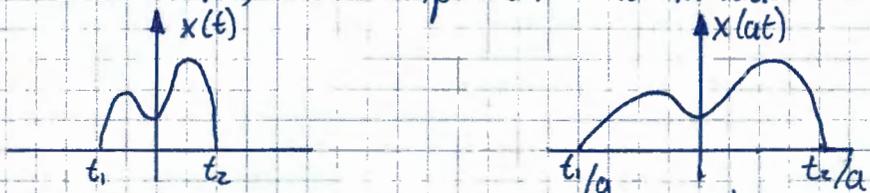
Una señal desplazada tendrá centro en  $t_0$ . Si  $t_0 < 0$  se desplazará a la izquierda siendo  $x(t+t_0)$ . Si  $t_0 > 0$  se desplazará a la derecha siendo  $x(t-t_0)$

• Señal comprimida:



$|a| > 1$  y  $a > 0$ . Es decir  $x(at)$  es una compresión a la mitad.

• Señal expandida:

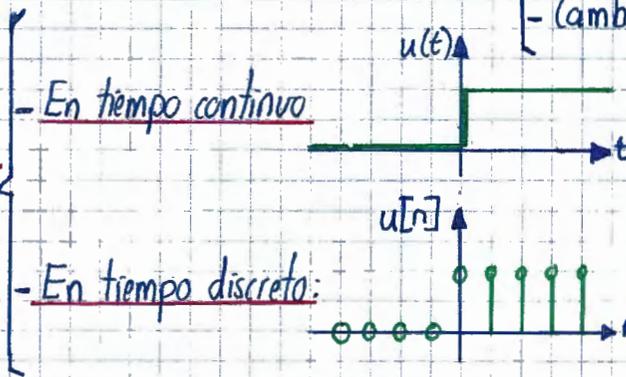


$|a| < 1$  y  $a > 0$ . Es decir  $x(t/a)$  es una expansión del doble.

• Caso general:  $x(t) \rightarrow x(-a(t-t_0/a))$ 

- Desplazamiento  $t_0/a$
- Reflejamos  $x(-(t-t_0/a))$
- Cambio de escala  $x(-a(t-t_0/a))$

• Función escalón unidad



$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$

• Convolución

Tiempo continuo:  $z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(z) \cdot y(t-z) dz$

Tiempo discreto:  $z[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot y[n-k]$

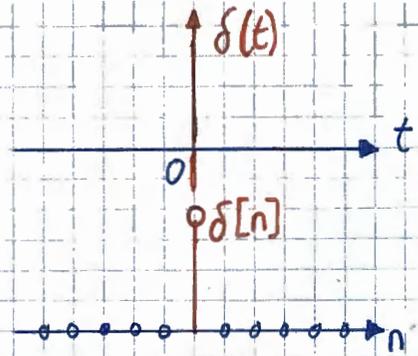
Nota: En tiempo continuo, la convolución de dos señales dura la suma de las duraciones de las señales convolucionadas.

Nota: Al convolucionar dos pulsos rectangulares de la misma anchura (sea cual sea la altura) el resultado es un triángulo del doble de anchura.



• Función impulso unidad

- En tiempo continuo, Delta de Dirac:



- En tiempo discreto, Delta de Kronecker:

• Propiedades:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \parallel \quad \int_C \delta(z) dz = u(z) \Big|_C^{\infty}$$

$$x(t) \cdot \delta(t-t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0) \delta(t) dt = x(t_0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = x(t_0)$$

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \iff \int \delta(t) dt = u(t)$$

$$\delta(t/T) = T \cdot \delta(t)$$

Características y parámetros de las señales. Potencia y energía	Tiempo continuo	Tiempo discreto
Valor medio	$\overline{x(t)} = \langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$	$\overline{x[n]} = \langle x[n] \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]$
Potencia instantánea	$p(t) =  x(t) ^2$	$p[n] =  x[n] ^2$
Energía Total de la señal	$E_{\infty} = E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T  x(t) ^2 dt$	$E_{\infty} = E = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N  x[n] ^2$
Potencia media de la señal	$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T  x(t) ^2 dt$	$P_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N  x[n] ^2$

• Propiedades convolución:

• Cambio de signo:  $x(t) * y(-t) = z(-t)$

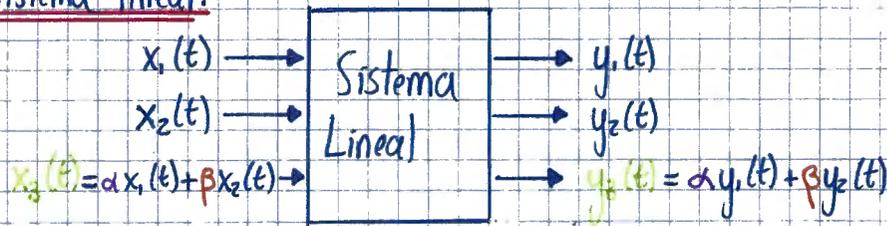
• Simétricas: par \* par = par ; par \* impar = impar ; impar \* impar = impar

• Desplazamientos:  $x(t-t_0) * y(t+t_1) = z(t-t_0+t_1)$

• Producto por una constante:  $(a \cdot x(t)) * y(t) = x(t) * (a \cdot y(t)) = a (x(t) * y(t))$

• Derivada:  $x'(t) * y(t) = x(t) * y'(t)$

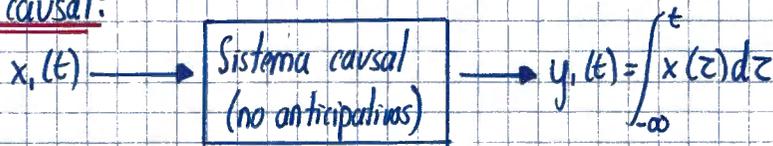
• Sistema lineal:



• Sistema invariante:



• Sistema causal:

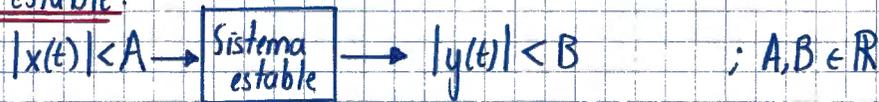


• Sistema sin memoria:



Si un sistema es sin memoria  $\implies$  Es un sistema causal.

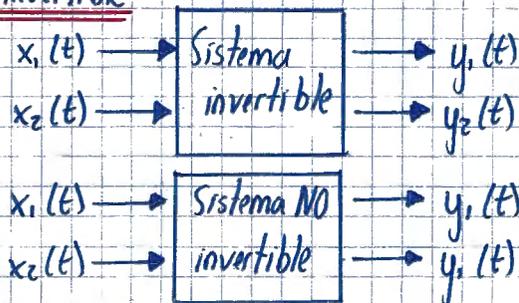
• Sistema estable:



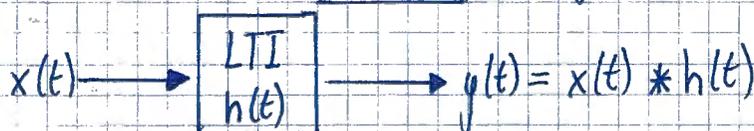
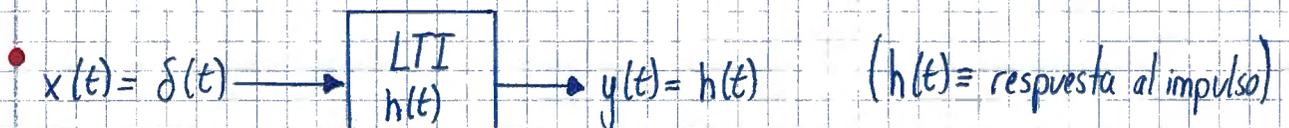
$\forall x(t)$  acotada  $\implies y(t)$  acotada  $\implies$  Sistema estable

$\exists x(t)$  acotada  $\implies y(t)$  no-acotada  $\implies$  Sistema inestable.

• Sistema invertible



• Un sistema es LTI  $\iff$  Sistema lineal y Sistema Invariante



$$\bullet \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \quad \forall z \neq 1 \quad \longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad |z| < 1$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n z^k = \frac{z(1-z^n)}{1-z} \quad \forall z \neq 1 \quad \longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} z^k = \frac{z}{1-z} \quad |z| < 1$$

$$\bullet \sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$$

$$\bullet \cos(t) = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}$$

# PROBLEMAS LIBRO

Tratamiento de Señales en Tiempo Discreto — Alan V. Oppenheim (2ª Edición)

## Problemas Tema 1

**Problema 2.1:** Para cada uno de los sistemas siguientes determine si son (1) estables, (2) causales, (3) lineales, (4) invariantes con el tiempo y (5) sin memoria.

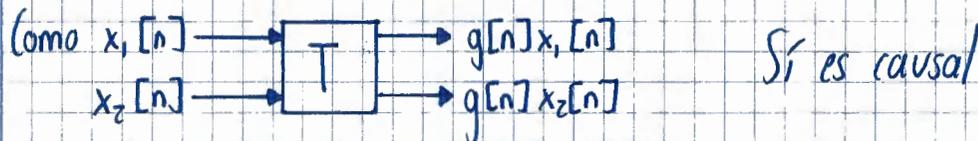
a)  $T(x[n]) = g[n] \cdot x[n]$  con  $g[n]$  dada.



(1) Estable:  $|x[n]| < B_x$  ( $x[n]$  está acotada)  $\Rightarrow |y[n]| < B_y$

NO es estable, a no ser que  $g[n]$  esté acotada. Ya que si  $g[n] = n$  la señal de salida NO estaría acotada.

(2) Causal:  $x_1[n] = x_2[n]$ ,  $n < n_0 \Rightarrow y_1[n] = y_2[n]$ ,  $n < n_0$



(3) Lineal:

```
graph LR; A1[a1 * x[n]] --> T[T]; A2[a2 * x[n]] --> T; T --> Y1[a1 * g[n] * x[n]]; T --> Y2[a2 * g[n] * x[n]]
```

Sí es lineal

$a_1 x[n] + a_2 x[n] \rightarrow a_1 g[n] x[n] + a_2 g[n] x[n] = a_1 y[n] + a_2 y[n]$

(4) Invarianza Temporal:

```
graph LR; X[x[n]] --> T[T]; X1[x1[n] = x[n - n0]] --> T; T --> Y[y[n] = g[n] * x[n]]; T --> Y1[y1[n] = g[n] * x1[n] = g[n] * x[n - n0]]
```

Pero en realidad a la salida se obtiene:  $y[n - n_0] = g[n - n_0] \cdot x[n - n_0]$

NO es invariante con el tiempo

(5) Memoria: Sí es sin memoria ya que NO depende de instantes anteriores o futuros.

**Problema 2.3:** Evaluando directamente la suma de convolución, determine la respuesta al escalón ( $x[n] = u[n]$ ) de un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta al impulso es:  $h[n] = a^{-n} u[-n]$   $0 < a < 1$  commutativa

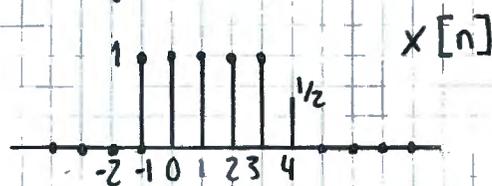
$$x[n] = u[n] \xrightarrow{h[n]} y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k] \cdot h[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[n-k] a^{-k} \cdot u[-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^{-k} \cdot u[n-k] = \begin{cases} (n < 0) = \sum_{k=-\infty}^n a^{-k} = \frac{a^{-n} \cdot a^{-1} - a^{00}}{a^{-1} - 1} \\ (n \geq 0) = \sum_{k=-\infty}^n a^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y[n] = \begin{cases} \frac{a^{-n}}{1-a} & \text{si } n < 0 \\ \frac{1}{1-a} & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

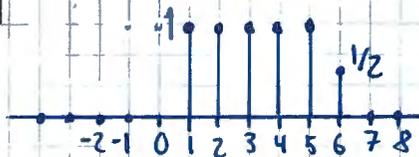
**Problema 2.29:** da figura P.2.29-1 muestra una señal en tiempo discreto

Figura P.2.29-1



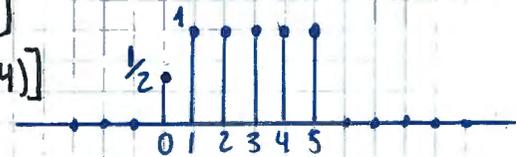
Dibuje y etiquete cuidadosamente las siguientes señales.

a)  $x[n-2]$



b)  $x[4-n]$

$x[-(n-4)]$



c)  $x[2n]$

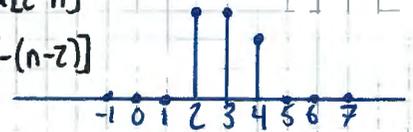
Compresión x2



Al comprimir luego se aplica diezmado

d)  $x[n] \cdot u[2-n]$

$x[n] \cdot u[-(n-2)]$



e)  $x[n-1] \delta[n-3]$



**Problema 2-30:** Determine si los siguientes sistemas son (1) lineales, (2) causales, (3) estables y (4) invariantes.

a)  $T(x[n]) = (\cos \pi n) \cdot x[n]$

(1) Lineal:  $a(\cos \pi n) \cdot x_1[n] + b(\cos \pi n) \cdot x_2[n] \oplus a \cos(\pi n) \cdot x_1[n] + b \cos(\pi n) \cdot x_2[n]$   
 $\cos(\pi n) \cdot [ax_1[n] + bx_2[n]]$   
 $ay_1[n] + by_2[n]$  LINEAL

Siendo:  $y_1[n] = \cos(\pi n) x_1[n]$   
 $y_2[n] = \cos(\pi n) x_2[n]$

(2) Causal: Como  $y[n]$  no depende de instantes futuros es causal

(3) Estables: Si  $x[n]$  está acotada  $\implies y[n]$  acotada.

(4) Invarianza Temporal:  $x[n-n_0] \longrightarrow y[n-n_0] = \cos(\pi(n-n_0)) \cdot x[n-n_0]$   
 Mientras que para ser invariante debería ser  $y[n-n_0] = \cos(\pi n) \cdot x[n-n_0]$   
 NO invariante en el tiempo

b)  $T(x[n]) = x[n^2]$

(1) Lineal:  $ax_1[n] + bx_2[n] \longrightarrow ax_1[n^2] + bx_2[n^2] = ay_1[n] + by_2[n]$   
 Si es lineal

(2) Causal: Como  $y[n]$  depende de instantes futuros NO es causal.

(3) Estables: Si  $x[n]$  esta acotada en amplitud,  $x[n^2]$  estará acotada, por tanto Si sera estable. No confundir  $(x[n])^2$  que no es estable.

(4) Invarianza Temporal  $x[n-n_0] = x[(n-n_0)^2] = x[n^2 - 2nn_0 + n_0^2]$   
 En realidad debería ser:  $y[n-n_0] = y[n-n_0] = y[n^2 - n_0]$

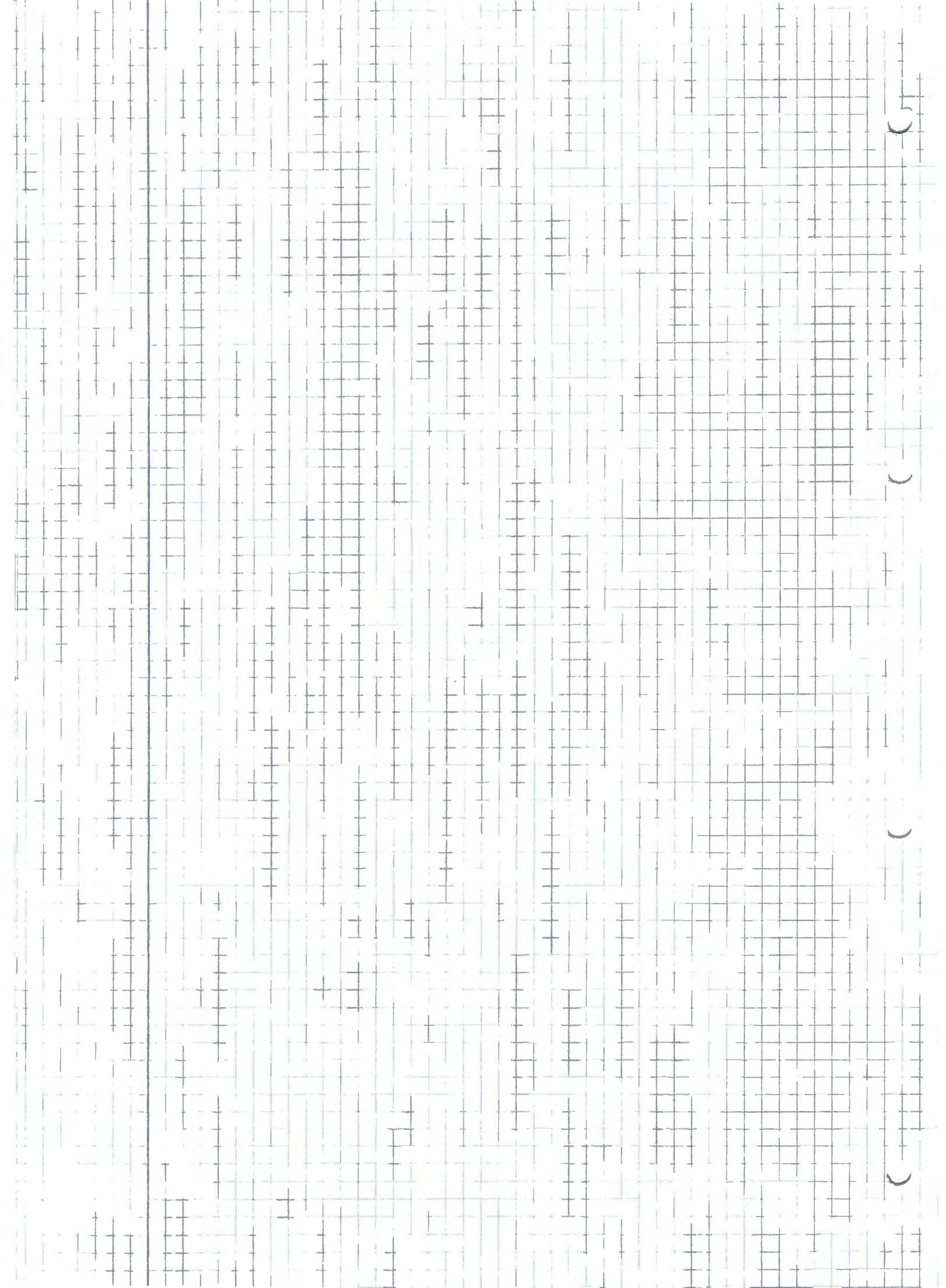
c)  $T(x[n]) = x[n] \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$

(1) Lineal:  $ax_1[n] \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] + bx_2[n] \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$  Si es lineal

(2) Causal: Si es causal puesto que la salida NO depende de instantes futuros.

(3) Estable: Si  $x[n]$  está acotada su salida estará acotada  $\longrightarrow$  Si es estable.

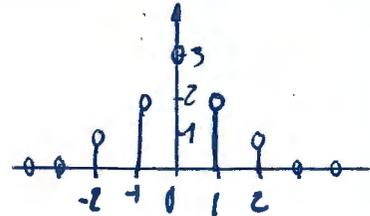
(4) Invariante Temporal:  $x[n-n_0] \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-n_0-k] \neq x[n-n_0] \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$   
 NO Invariante



Ejercicio 3

Dada la señal en tiempo discreto:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = -2 \\ 2, & n = -1 \\ 3, & n = 0 \\ 2, & n = +1 \\ 1, & n = +2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

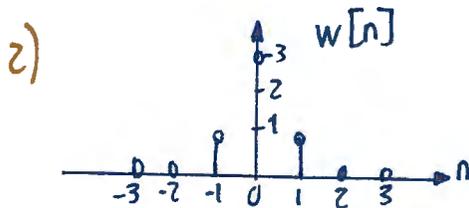
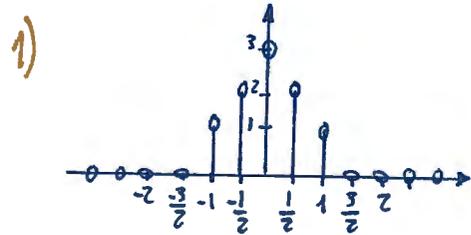


Este ejercicio sirve para aprender las particularidades de las transformaciones de variable independiente en las señales de tiempo discreto

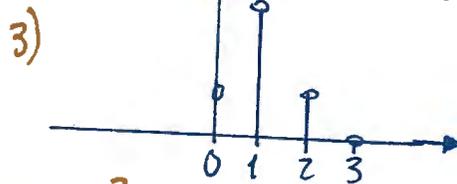
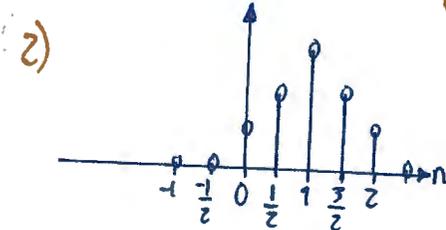
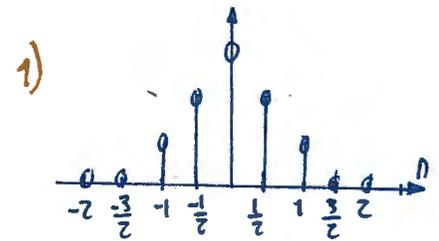
- a) Calcular y dibujar  $w[n] = x[2n]$
- b) Calcular y dibujar  $y[n] = \begin{cases} x[n/2], & n = 2 \\ 0, & n \neq 2 \end{cases}$
- c) Calcular y dibujar  $v[n] = x[2n-2]$
- d) Calcular y dibujar  $z[n] = x[3n+1]$

Regla general: Se hace todo igual en tiempo continuo pero al FINAL del proceso se eliminan los muestros en valores de n que no sean enteros.

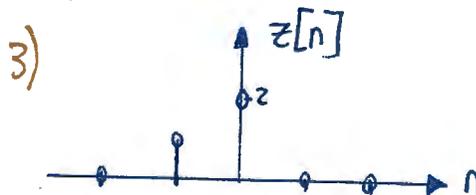
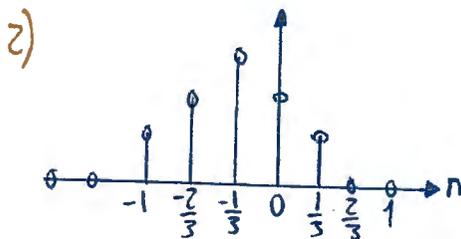
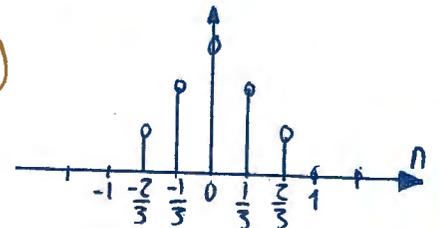
a)  $w[n] = x[2n]$  1) Comprimo x2  
2) Elimino muestros (diezmado)



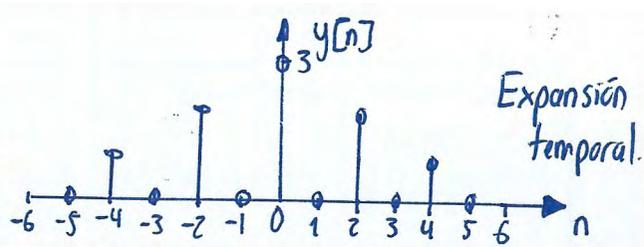
c)  $v[n] = x[2n-2] = x[2(n-1)]$  1) Comprimo x2  
2) Desplazo 1 hacia la derecha  
3) Diezmado



d)  $z[n] = x[3n+1] = x[3(n+1/3)]$  1) Comprimo x3  
2) Desplazo 1/3 hacia la izq. 1)  
3) Diezmado



$$b) y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & n = 2^{\circ} (\text{PAR}) \\ 0 & n \neq 2 (\text{IMPAR}) \end{cases}$$



$$y(t) = x\left(\frac{t}{2}\right) = x\left(\frac{1}{2}t\right)$$

Ejercicio 4

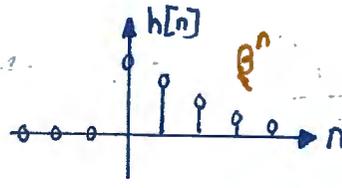
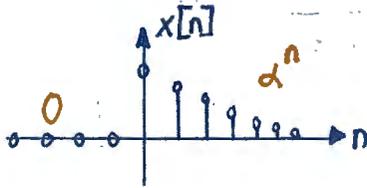
Realizar la convolución de las señales en tiempo discreto:

$$x[n] = \alpha^n u[n] \quad 0 < \alpha < 1$$

$$h[n] = \beta^n u[n] \quad 0 < \beta < 1$$

- a) Considerando que  $\alpha \neq \beta$ .
- b) Considerando que  $\alpha = \beta$ .

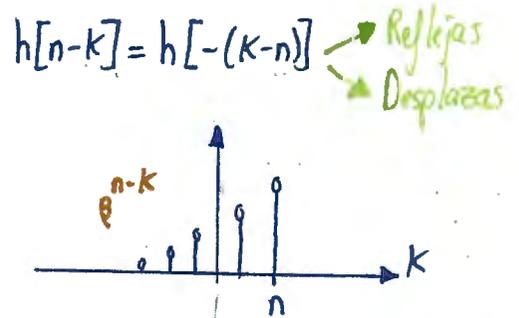
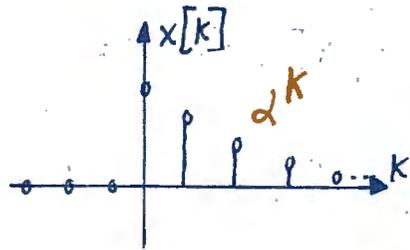
a)



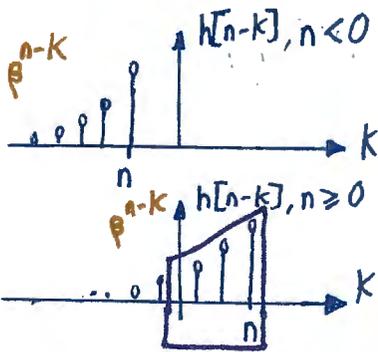
Nota: en tiempo continuo  $x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(z)h(t-z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} h(z)x(t-z) dz$

en tiempo discreto  $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x[k]}_{\text{fijo}} \underbrace{h[n-k]}_{\text{movil}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{h[k]}_{\text{fijo}} \underbrace{x[n-k]}_{\text{movil}}$

Usamos método gráfico:



lo movemos desde  $n \rightarrow -\infty$  hasta  $n \rightarrow +\infty$



Caso  $n < 0$ :  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = 0$

Caso  $n \geq 0$ :  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^n \alpha^k \beta^{n-k}$   
 $= \sum_{k=0}^n \alpha^k \beta^n \beta^{-k} = \beta^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k = \beta^n \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\alpha}{\beta}}$

En resumen:

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \beta^n \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\alpha}{\beta}} & n \geq 0 \end{cases} = \beta^n \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\alpha}{\beta}} u[n]$$

Chuleta:

$$\bullet \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, \forall z \neq 1 \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \begin{cases} \frac{1}{1-z}, & |z| < 1 \\ \text{Diverge}, & |z| \geq 1 \end{cases}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n z^k = \frac{z(1-z^n)}{1-z}, \forall z \neq 1 \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} z^k = \begin{cases} \frac{z}{1-z}, & |z| < 1 \\ \text{Diverge}, & |z| \geq 1 \end{cases}$$

b)  $\alpha = \beta$  Opción 1: sustituir en la expresión general:

$$y[n] \Big|_{\alpha=\beta} = \beta^n \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} u[n] \Big|_{\alpha=\beta} = \alpha^n \frac{1 - 1^{n+1}}{1-1} u[n] = \frac{0}{0} \text{ IND}$$

da expresión general no vale en este caso

Opción 2: recalculamos; caso  $n \geq 0$ :  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] =$

$$= \sum_{k=0}^n \alpha^k \cdot \beta^{n-k} \Big|_{\alpha=\beta} = \sum_{k=0}^n \alpha^k \alpha^{n-k} = \sum_{k=0}^n \alpha^n = \alpha^n \cdot \sum_{k=0}^n 1 = \alpha^n (n+1)$$

En resumen:

$$\underline{y[n]} = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \alpha^n (n+1) & n \geq 0 \end{cases} = \underline{\alpha^n (n+1) u[n]}$$

1. Para caracterizar un sistema, aplicamos a su entrada las siguientes señales, obteniéndose respectivamente como salida:

$$x_1[n] = \delta[n] \rightarrow y_1[n] = 0$$

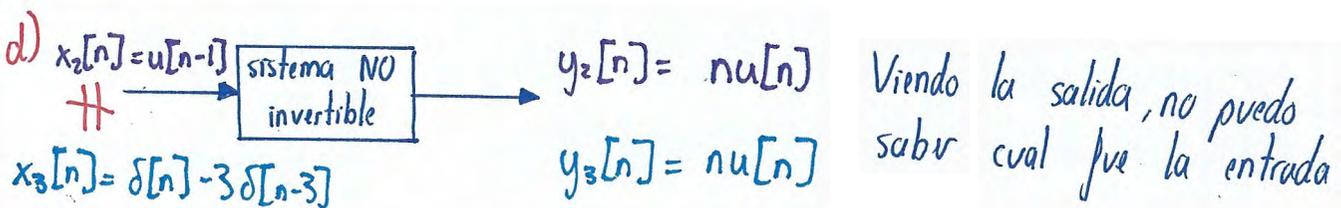
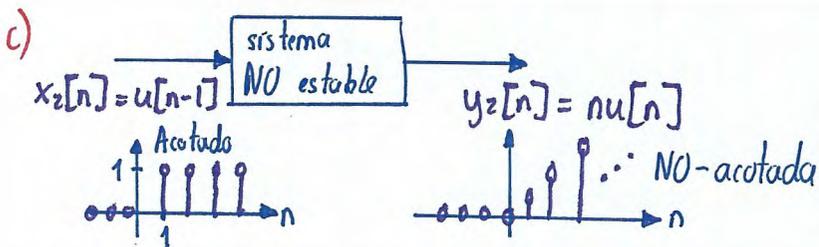
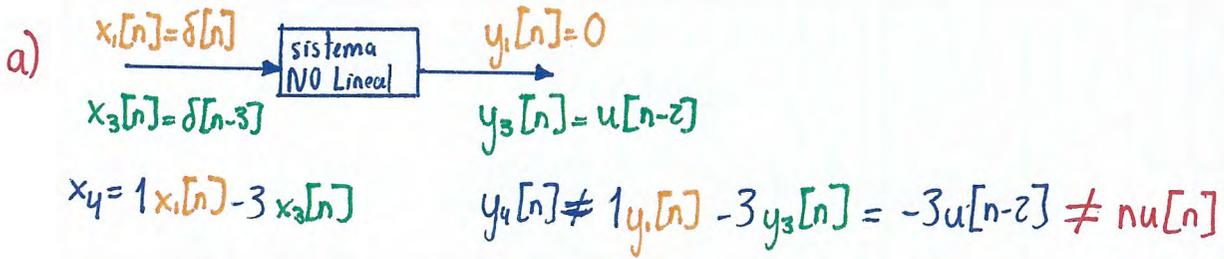
$$x_2[n] = u[n-1] \rightarrow y_2[n] = nu[n]$$

$$x_3[n] = \delta[n-3] \rightarrow y_3[n] = u[n-2]$$

$$x_4[n] = \delta[n] - 3\delta[n-3] \rightarrow y_4[n] = nu[n]$$

Justifique razonadamente que el sistema no cumple las siguientes propiedades:

- a) Linealidad
- b) Invariabilidad temporal
- c) Estabilidad
- d) Invertibilidad



)

)

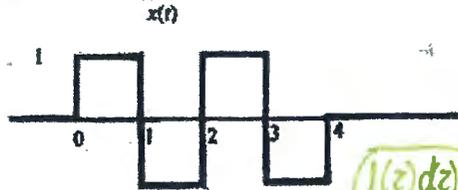
)

)

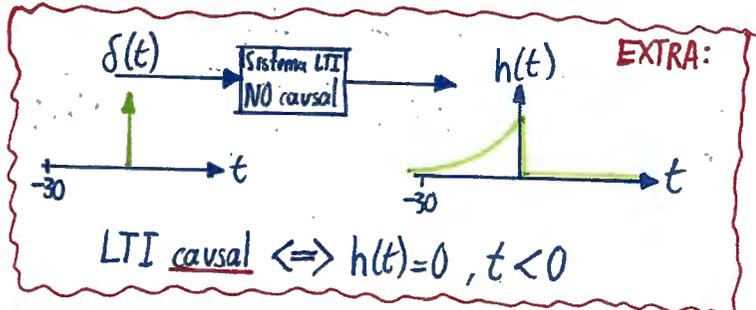
1. Sea un sistema lineal e invariante cuya relación entrada  $x(t)$ , y salida  $y(t)$  viene dada por la siguiente expresión:

$$y(t) = \int_t^{\infty} x(\tau) e^{t-\tau} d\tau$$

- a) Calcule la respuesta al impulso  $h(t)$ .
- b) Calcule la respuesta al escalón unidad  $s(t)$ .
- c) Calcule la salida  $y(t)$  cuando la entrada  $x(t)$  se representa en la figura siguiente. La solución debe darse exclusivamente en función de la respuesta al escalón  $s(t)$ . (Nota: no es necesario sustituir y se puede hacer aún sin conocer la expresión concreta de  $s(t)$ ).



a)  $\delta(t) \xrightarrow{\text{LTI}} h(t) = \int_t^{\infty} \delta(z) e^{t-z} dz = \int_t^{\infty} \delta(z) e^{t-0} dz = e^t \int_t^{\infty} \delta(z) dz = e^t [u(z)]_t^{\infty} = e^t [u(\infty) - u(t)] = e^t [1 - u(t)] = e^t \cdot u(-t)$



EXTRA: ¿Estable? LTI estable  $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$  (converge)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^t u(-t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^t u(-t) dt = \int_{-\infty}^0 e^t \cdot 1 dt = e^t \Big|_{-\infty}^0 = e^0 - e^{-\infty} = 1 < \infty \text{ ESTABLE}$$

¿Memoria? LTI sin memoria  $\Leftrightarrow h(t) = k\delta(t)$  X  
EXTRA: Sistema con memoria

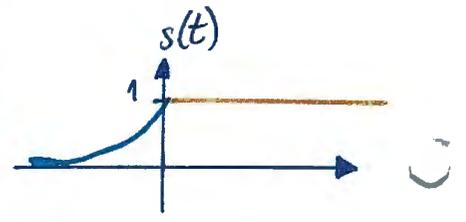
EXTRA 2:  $h(t) = e^t \int_t^{\infty} \delta(z) dz = e^t \begin{cases} 1, & t < 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases} = e^t \cdot u(-t)$

b)  $u(t) \xrightarrow{\text{LTI NO Causal } h(t)} s(t)$  Opción 1:  $s(t) = u(t) * h(t)$  (¡¡¡OJO!! Esto sólo sirve si es LTI)  
Hacer en casa...

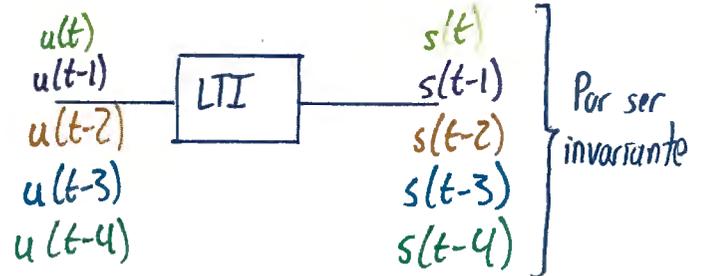
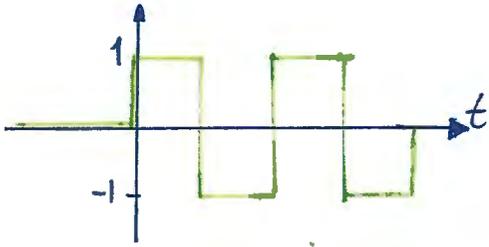
Opción 2: usando la definición del sistema (esto vale SIEMPRE).

$$s(t) = \int_t^{\infty} u(z) e^{t-z} dz = \int_t^{\infty} u(z) (e^t) e^{-z} dz = e^t \int_t^{\infty} u(z) e^{-z} dz = e^t \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-z} dz = -e^{-z} \Big|_0^{\infty} = -(e^{-\infty} - e^0) = 1 & t < 0 \\ \int_t^{\infty} e^{-z} dz = -e^{-z} \Big|_t^{\infty} = -(e^{-\infty} - e^{-t}) = e^{-t} & t > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^t \cdot 1, & t < 0 \\ e^t \cdot e^{-t}, & t > 0 \end{cases} = \begin{cases} e^t, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} = \boxed{e^t \cdot u(t)} + \boxed{u(t)}$$



c)  $x(t) = u(t) - 2u(t-1) + 2u(t-2) - 2u(t-3) + u(t-4)$



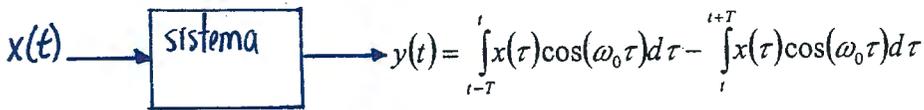
$$x(t) = 1 u(t) - 2u(t-1) + 2u(t-2) - 2u(t-3) + 1 u(t-4)$$



$$\underline{\underline{y(t) = 1 s(t) - 2s(t-1) + 2s(t-2) - 2s(t-3) + 1s(t-4)}}$$

POR SER LINEAL

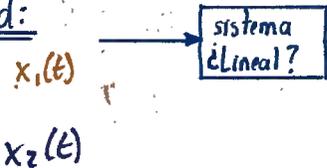
1. Sea el siguiente sistema definido por su relación entrada-salida:



con  $T > 0$ , y siendo  $\omega_0$  una constante arbitraria.

- Estudie la linealidad e invarianza temporal del sistema.
- Calcule  $h(t)$ , la respuesta del sistema al impulso  $\delta(t)$ .
- Calcule  $h_{t_0}(t)$ , la respuesta del sistema al impulso  $\delta(t-t_0)$ .
- Sea  $H(j\omega)$  la transformada de Fourier de  $h(t)$  y  $X(j\omega)$  la transformada de Fourier de una entrada arbitraria  $x(t)$ . ¿Podría calcular la salida del sistema  $y(t)$  como la transformada inversa de Fourier de  $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$ ? Justifique su respuesta.

a) Linealidad:



$$y_1(t) = \int_{t-T}^t x_1(z) \cos(\omega_0 z) dz - \int_t^{t+T} x_1(z) \cos(\omega_0 z) dz$$

$$y_2(t) = \int_{t-T}^t x_2(z) \cos(\omega_0 z) dz - \int_t^{t+T} x_2(z) \cos(\omega_0 z) dz$$

$$x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$$

$$y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)?$$

$$x_3(z) = \alpha x_1(z) + \beta x_2(z)$$

$$x_3(z) = \alpha x_1(z) + \beta x_2(z)$$

do que en realidad se obtiene es:

$$y_3(t) = \int_{t-T}^t x_3(z) \cos(\omega_0 z) dz - \int_t^{t+T} x_3(z) \cos(\omega_0 z) dz = \int_{t-T}^t [\alpha x_1(z) + \beta x_2(z)] \cos(\omega_0 z) dz - \int_t^{t+T} [\alpha x_1(z) + \beta x_2(z)] \cos(\omega_0 z) dz$$

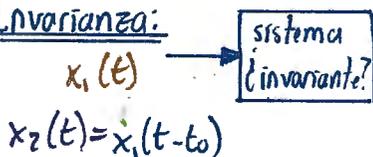
$$= \alpha \left[ \int_{t-T}^t x_1(z) \cos(\omega_0 z) dz - \int_t^{t+T} x_1(z) \cos(\omega_0 z) dz \right] + \beta \left[ \int_{t-T}^t x_2(z) \cos(\omega_0 z) dz - \int_t^{t+T} x_2(z) \cos(\omega_0 z) dz \right]$$

$y_1(t)$

$$y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \quad \text{LINEAL}$$

$y_2(t)$

Invarianza:



$$y_1(t) = \int_{t-T}^t x_1(z) \cos(\omega_0 z) dz - \int_t^{t+T} x_1(z) \cos(\omega_0 z) dz$$

$$y_2(t) = y_1(t-t_0) = \int_{t-t_0-T}^{t-t_0} x_1(z) \cos(\omega_0 z) dz - \int_{t-t_0}^{t-t_0+T} x_1(z) \cos(\omega_0 z) dz?$$

lo que en realidad se obtiene:

$$x_2(t) = x_1(t - t_0)$$

$$x_2(z) = x_1(z - t_0)$$

$$y_2(t) = \int_{t-T}^t x_2(z) \cos(\omega_0 z) dz - \int_t^{t+T} x_2(z) \cos(\omega_0 z) dz = \int_{t-T}^t x_1(z - t_0) \cos(\omega_0 z) dz - \int_t^{t+T} x_1(z - t_0) \cos(\omega_0 z) dz$$

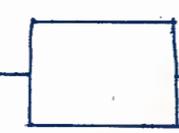
cambio:  $s = z - t_0 \rightarrow z = s + t_0 \rightarrow dz = ds$   
 $z = t - T \rightarrow s = (t - T) - t_0$   
 $z = t \rightarrow s = t - t_0$   
 $z = t + T \rightarrow s = (t + T) - t_0$

$$= \int_{t-t_0-T}^{t-t_0} x_1(s) \cos(\omega_0(s+t_0)) ds - \int_{t-t_0}^{t-t_0+T} x_1(s) \cos(\omega_0(s+t_0)) ds =$$

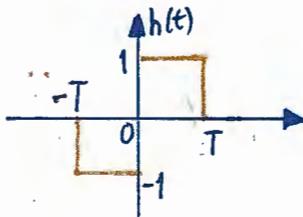
s variable muda  
s → z

$$= \int_{t-t_0-T}^{t-t_0} x_1(z) \cos(\omega_0(z+t_0)) dz - \int_{t-t_0}^{t-t_0+T} x_1(z) \cos(\omega_0(z+t_0)) dz \neq y_1(t-t_0) \Rightarrow \text{NO es invariante}$$

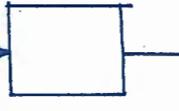
$$f(z) \cdot \delta(z - z_0) = f(z_0) \delta(z - z_0), z_0 =$$

b)  $\delta(t)$    $h(t) = \int_{t-T}^t \delta(z) \cos(\omega_0 z) dz - \int_t^{t+T} \delta(z) \cos(\omega_0 z) dz = \int_{t-T}^t \delta(z) \cos(\omega_0 t) dz - \int_t^{t+T} \delta(z) \cos(\omega_0 t) dz$

$$= \int_{t-T}^t \delta(z) dz - \int_t^{t+T} \delta(z) dz = u(z) \Big|_{t-T}^t - u(z) \Big|_t^{t+T} = u(t) - u(t-T) - u(t+T) + u(t) = -u(t+T) + 2u(t) - u(t-T)$$



$$\Rightarrow h(t) = -u(t+T) + 2u(t) - u(t-T)$$

c)  $\delta(t)$    $h(t)$  **NO: El sistema NO es invariable**

$$x(t) = \delta(t - t_0)$$

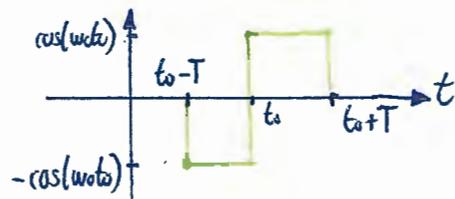
$$x(z) = \delta(z - t_0)$$

$$h_{t_0}(t) = \int_{t-T}^t x(z) \cos(\omega_0 z) dz - \int_t^{t+T} x(z) \cos(\omega_0 z) dz = \int_{t-T}^t \delta(z - t_0) \cos(\omega_0 z) dz - \int_t^{t+T} \delta(z - t_0) \cos(\omega_0 z) dz$$

$$= \int_{t-T}^t \delta(z - t_0) \cos(\omega_0 t_0) dz - \int_t^{t+T} \delta(z - t_0) \cos(\omega_0 t_0) dz = \cos(\omega_0 t_0) \left[ \int_{t-T}^t \delta(z - t_0) dz - \int_t^{t+T} \delta(z - t_0) dz \right]$$

$$= \cos(\omega_0 t_0) \left[ u(z - t_0) \Big|_{t-T}^t - u(z - t_0) \Big|_t^{t+T} \right] = \cos(\omega_0 t_0) \left[ u(t - t_0) - u(t - T - t_0) - u(t + T - t_0) + u(t - t_0) \right]$$

$$= \cos(\omega_0 t_0) \left[ -u(t - t_0 + T) + 2u(t - t_0) - u(t - t_0 - T) \right]$$



1. Considere un sistema en tiempo continuo (SISTEMA 1) caracterizado por la relación:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau) d\tau$$

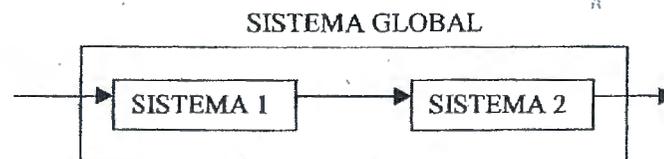
donde  $x(t)$  es la señal de entrada e  $y(t)$  la señal de salida. Se pide

- (a) Demuestre que dicho sistema es lineal, **no** invariante en el tiempo y **no** estable en sentido BIBO (Bounded Input-Bounded Output). Determine si el sistema es causal o no causal.  
 (b) Dada la entrada:

$$x(t) = u(t) + u(t-1) + \sin(t)u(t)$$

determine la correspondiente salida  $y(t)$ . Sobre el resultado obtenido, verifique las propiedades demostradas en el apartado (a).

- (c) Suponga que el sistema dado se pone en serie con un sistema LTI, de respuesta al impulso  $h(t) = e^{-at}u(t)$ , con  $a > 0$  y real, que denominaremos SISTEMA 2, como indica la figura:



Calcule la salida del sistema global cuando la entrada es  $\delta(t)$  y cuando la entrada es  $\delta(t-1)$ . Comente los resultados.

a) Linealidad:

$y_1(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_1(z) dz$   
 $y_2(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_2(z) dz$

$x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$        $y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) ?$

do que saldría en realidad es:

$$y_3(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_3(z) dz = \int_{-\infty}^{2t} [\alpha x_1(z) + \beta x_2(z)] dz = \alpha \int_{-\infty}^{2t} x_1(z) dz + \beta \int_{-\infty}^{2t} x_2(z) dz = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \Rightarrow \underline{\underline{LINEAL}}$$

Invarianza:

$y_1(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_1(z) dz$   
 $y_2(t) = y_1(t-t_0) = \int_{-\infty}^{2(t-t_0)} x_1(z) dz ?$

do que en realitat es:

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{zt} x_2(z) dz = \int_{-\infty}^{zt} x_1(z-t_0) dz = \int_{-\infty}^{zt-t_0} x_1(s) ds =$$

Cambio:  $s = z - t_0 \rightarrow z = s + t_0 \rightarrow dz = ds$   
 $z = -\infty \rightarrow s = -\infty - t_0 = -\infty$   
 $z = zt \rightarrow s = zt - t_0$

$s$  variable muda  
 $s \rightarrow z$

$x_1(t) = x_1(t-t_0)$   
 $x_2(z) = x_2(z-t_0)$

$$\int_{-\infty}^{zt-t_0} x_1(z) dz \neq y_1(t-t_0) \Rightarrow \text{NO ES INVARIANTE}$$

**Estabilidad:**

$x(t) = u(t)$  (Acotado)  $\rightarrow$   $y(t) = s(t) = \int_{-\infty}^{zt} u(z) dz$  (NO acotado)

$z = zt < 0$      $z = zt > 0$

$$= \begin{cases} 0, & zt < 0 \\ \int_0^{zt} 1 dz = zt, & zt > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ zt, & t > 0 \end{cases}$$

El sistema no es estable porque he demostrado que existe  $x(t)$  acotada  $| y(t)$  no está acotada.

**Causalidad:**

$x(t) \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{zt} x(z) dz$

NO CAUSAL porque necesita valores de la señal de entrada en instantes "futuros". En este caso en el intervalo  $(t_0, z_0]$

**El sistema es con memoria**

b)  $x_1(t) = u(t)$   
 $x_2(t) = u(t-1)$   
 $x_3(t) = \text{sen}(t)u(t)$

$y_1(t) \neq y_1(t-1)$  (no es invariante)

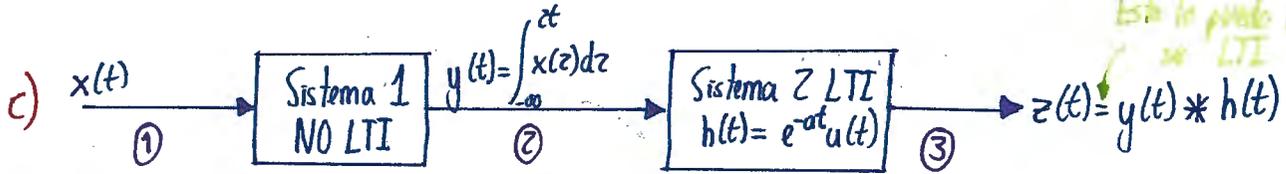
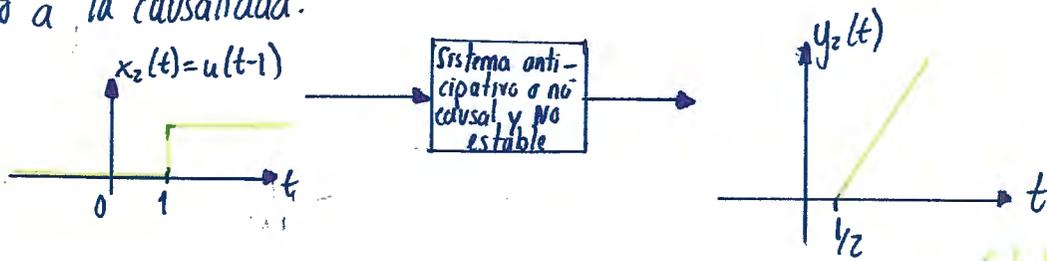
**Calculo de  $y_1(t)$ :** hecho en a)  
 $y_1(t) = zt u(t)$

**Calculo de  $y_2(t)$ :**  $y_2(t) = \int_{-\infty}^{zt} u(z-1) dz = \begin{cases} 0, & \text{si } zt < 1 \\ \int_{zt-1}^{zt} 1 dz = zt - 1, & \text{si } zt > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < 1/2 \\ zt - 1, & t > 1/2 \end{cases} = (zt - 1) \cdot u(t - 1/2)$

**Calculo de  $y_3(t)$ :**  $y_3(t) = \int_{-\infty}^{zt} \text{sen}(z) u(z) dz = \begin{cases} 0, & \text{si } zt < 0 \\ \int_0^{zt} \text{sen}(z) dz = -\cos z \Big|_0^{zt} = 1 - \cos zt, & \text{si } zt > 0 \end{cases} = [1 - \cos(zt)] \cdot u(t)$

Aplicando linealidad:  $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \rightarrow y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) = zt u(t) + (zt - 1) u(t - 1/2) + [1 - \cos(zt)] u(t)$

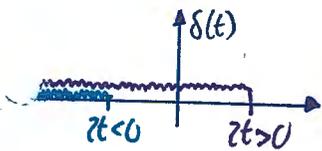
En cuanto a la causalidad:



Esto lo puede hacer por LTI

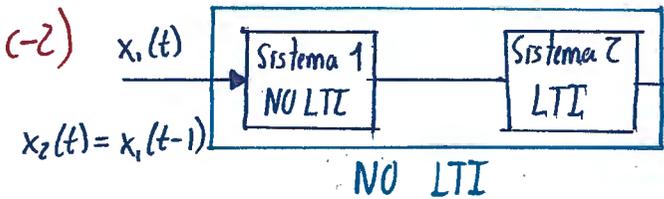
c-1) ①  $x_1(t) = \delta(t)$

②  $y_1(t) = \int_{-\infty}^{zt} \delta(z) dz = \begin{cases} 0 & \text{si } zt < 0 \\ 1 & \text{si } zt > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases} = u(t)$



hecho en algún libro

③  $z_1(t) = y_1(t) * h(t) = u(t) * e^{-at} u(t) = \dots = \frac{1}{a} [1 - e^{-at}] u(t)$



$z_2(t) \neq z_1(t-1)$  porque el sistema global NO es invariante.

**NOTA:** Al combinar sistemas LTI con otros que no lo son, el sistema global resultante, por lo general, NO será LTI (aunque puede haber excepciones).

①  $x_2(t) = \delta(t-1)$

②  $y_2(t) = \int_{-\infty}^{zt} x_2(z) dz = \int_{-\infty}^{zt} \delta(z-1) dz = u(z-1) \Big|_{-\infty}^{zt} = u(zt-1) - u(-\infty) = u(zt-1) = \begin{cases} 1, & \text{si } zt-1 > 0 \\ 0, & \text{si } zt-1 < 0 \end{cases} =$

$\begin{cases} 1 & \text{si } t > 1/2 \\ 0 & \text{si } t < 1/2 \end{cases} = u(t-1/2)$

③  $z_2(t) = y_2(t) * h(t) = u(t-1/2) * e^{-at} u(t) = \delta(t-1/2) * u(t) * e^{-at} u(t) = z_1(t-1/2) =$

$z_1(t)$

$z_2(t) = \frac{1}{a} [1 - e^{-a(t-1/2)}] u(t-1/2)$

)

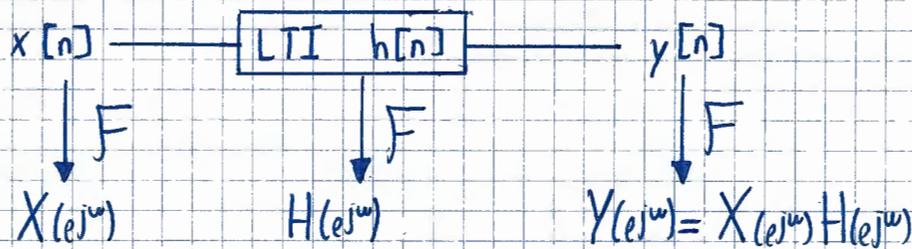
)

)

)

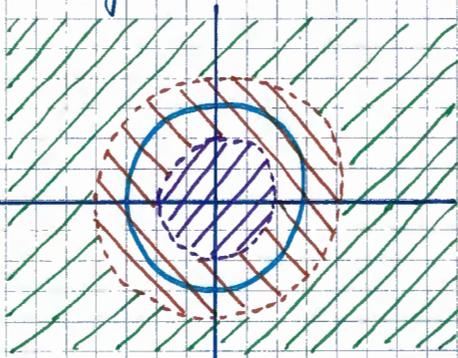
# Transformada Fourier en Tiempo Discreto

- Transformada de Fourier  $x[n]$ :  $F\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n}$
- la transformada de Fourier en tiempo discreto de una señal es una función periódica de periodo  $2\pi$ .
- Transformada Inversa de Fourier:  $F^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} d\omega$
- Transformada de Fourier en Sistemas LTI:



- Transformada Z bilateral:  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}$

la transformada de Fourier en tiempo discreto no es más que una particularización de la transformada Z cuando  $z = e^{j\omega}$  (circunferencia radio unidad).



Circunferencia unidad  $z = e^{j\omega} \Leftrightarrow |z| = 1$

ROC 1: Anticausal, no estable

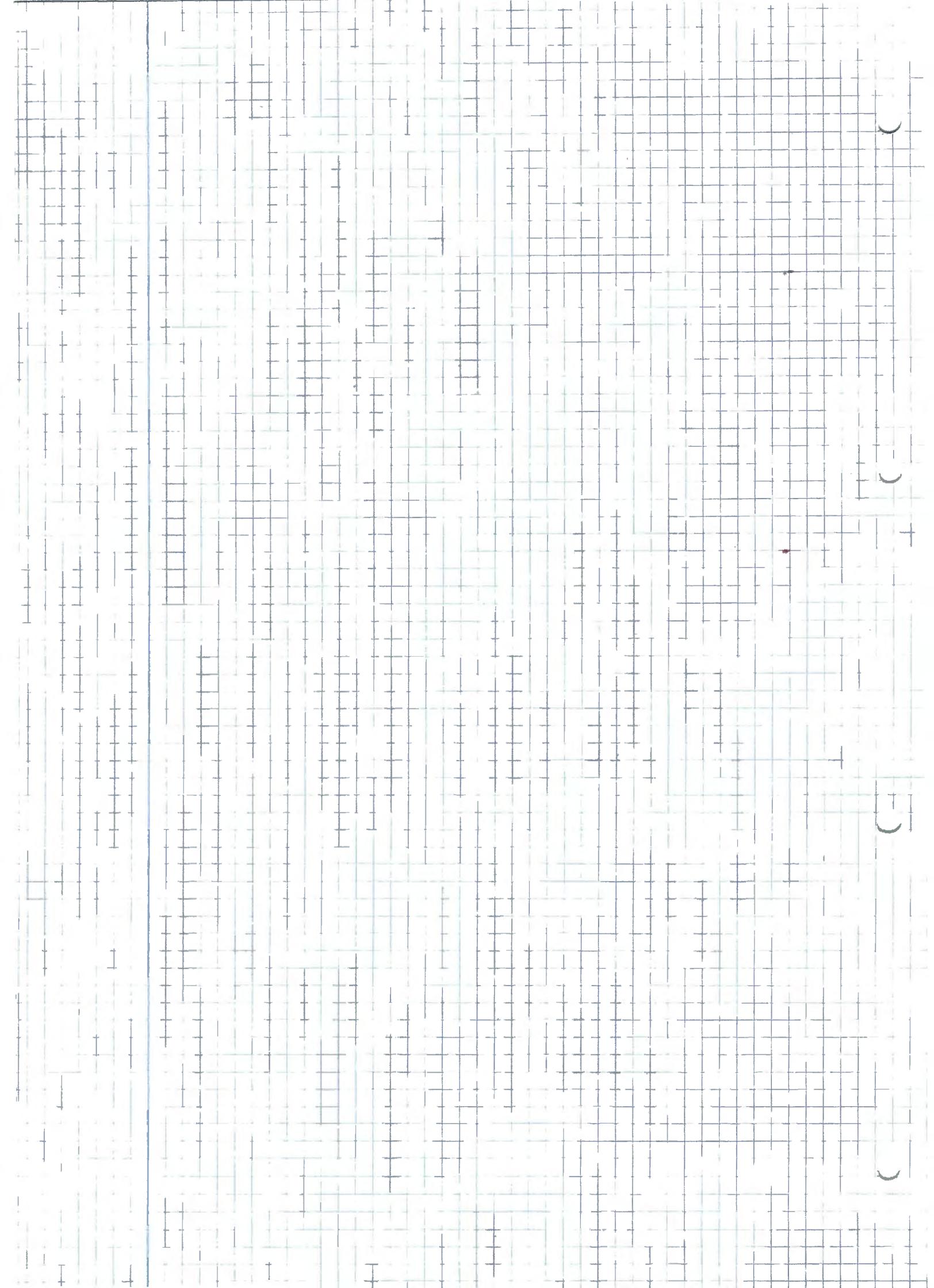
ROC 2: No causal, estable

ROC 3: Causal, no estable

- Estabilidad:
  - No-estable: NO contiene a  $z = e^{j\omega}$
  - Estable: Contiene a  $z = e^{j\omega}$
- Causalidad:
  - Anticausal: la circunferencia contiene al origen de coordenadas
  - No-causal: Son circunferencias intermedias (coronas)
  - Causal: la circunferencia/región más alejada (última región)

- Transformada Z inversa:  $x[n] = \frac{1}{2\pi} \oint X(z) z^{n-1} dz$

[ VER TABLA TRANSFORMADAS ]



# PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Señal	Transformada de Fourier
$x[n]$	$X(e^{j\omega})$ periódica con periodo $2\pi$
$y[n]$	$Y(e^{j\omega})$ periódica con periodo $2\pi$
$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$ (Teorema superposición o linealidad)
$x[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$ (Teorema del retardo)
$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ $X^*(e^{j\omega})$ si $x[n]$ real
$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{si } n \text{ es múltiplo de } k \\ 0, & \text{si } n \text{ no es múltiplo de } k \end{cases}$	$X(e^{jk\omega})$
$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega})$
$x[n] y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta$ $\frac{1}{2\pi} [X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega})]$
$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-j\omega}) X(e^{j\omega})$
$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$
$nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
$x[n]$ real $\rightarrow$ su transformada es simétrica conjugada.	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ $\Re\{X(e^{j\omega})\} = \Re\{X(e^{-j\omega})\}$ Parte real par $\Im\{X(e^{j\omega})\} = -\Im\{X(e^{-j\omega})\}$ Parte imaginaria impar $ X(e^{j\omega})  =  X(e^{-j\omega}) $ Módulo par $\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$ Fase impar.
$x_e[n] = Ev\{x[n]\} = \frac{x[n] + x[-n]}{2}$ $[x[n] \text{ real}]$	$\Re\{X(e^{j\omega})\}$
$x_o[n] = Od\{x[n]\} = \frac{x[n] - x[-n]}{2}$ $[x[n] \text{ real}]$	$j\Im\{X(e^{j\omega})\}$
Relación de Parseval para señales aperiódicas	
$\rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty}  x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi}  X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$	

• Si  $x[n]$  es par, es posible descomponerlo en una secuencia par y otra impar.

$$x[n] = x_{\text{par}}[n] + x_{\text{impar}}[n]$$

• Si  $x[n]$  es una secuencia compleja,  $x[n] = x_{\text{RE}}[n] + j x_{\text{IM}}[n]$

$$x_{\text{RE}}[n] \rightarrow X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \text{ simétrica conjugada}$$

$$x_{\text{IM}}[n] \rightarrow X(e^{j\omega}) = -X^*(e^{-j\omega}) \text{ Antisimétrica conjugada.}$$

# PROPIEDADES DE LAS SERIES DE FOURIER

Señales periódicas	Coeficientes de las series de Fourier
$\left. \begin{matrix} x[n] \\ y[n] \end{matrix} \right\}$ periódicas de periodo $N$ y frec. fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	$a_k$ Periódica de periodo $N$ $b_k$ Periódica de periodo $N$
$Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
$x[n - n_0]$	$a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n_0}$
$e^{jM(\frac{2\pi}{N})n} x[n]$	$a_{k-M}$
$x^*[n]$	$a_{-k}^*$
$x[-n]$	$a_{-k}$
$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m] & n \text{ múltiplo de } m \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$ Periódica de periodo $mN$	$\frac{1}{m} a_k$ Periódica de periodo $mN$
$\sum_{r=(N)} x[r]y[n-r]$	$Na_k b_k$
$x[n]y[n]$	$\sum_{l=(N)} a_l b_{k-l}$
$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-j(2\pi/N)}) a_k$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]$ (valor finito y periódico si $a_0 = 0$ )	$\left( \frac{1}{1 - e^{-j(2\pi/N)}} \right) a_k$
$x[n]$ real	$a_k = a_{-k}^*$ $\Re\{a_k\} = \Re\{a_{-k}\}$ $\Im\{a_k\} = -\Im\{a_{-k}\}$ $ a_k  =  a_{-k} $ $\angle a_k = -\angle a_{-k}$
$x_e[n] = Ev\{x[n]\} = \frac{x[n] + x[-n]}{2}$ $\{x[n] \text{ real}\}$	$\Re\{a_k\}$
$x_o[n] = Od\{x[n]\} = \frac{x[n] - x[-n]}{2}$ $\{x[n] \text{ real}\}$	$j\Im\{a_k\}$

Relación de Parseval para señales periódicas

$$\frac{1}{N} \sum_{n=(N)} |x[n]|^2 = \sum_{k=(N)} |a_k|^2$$

## TRANSFORMADAS DE FOURIER TIEMPO DISCRETO

Señal	Transformada de Fourier	Coeficientes de las series (si son periódicos)
$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k$
$\rightarrow e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \quad  \omega  < \pi$	a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1, & k = m, m \pm N, m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$ b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irracional $\Rightarrow$ la señal es no periódica
$\rightarrow \cos \omega_0 n$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)] = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0) \quad  \omega  < \pi$	a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1/2, & k = \pm m, \pm m \pm N, \pm m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$ b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irracional $\Rightarrow$ la señal es no periódica
$\text{sen } \omega_0 n$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)]$	a) $\omega_0 = \frac{2\pi r}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1/2j, & k = r, r \pm N, r \pm 2N, \dots \\ -1/2j, & k = -r, -r \pm N, -r \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$ b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irracional $\Rightarrow$ la señal es no periódica
$\rightarrow x[n] = 1$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi l) = 2\pi \delta(\omega) \quad  \omega  < \pi$	$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{en cualquier otro valor} \end{cases}$
Onda periódica cuadrada $x[n] = \begin{cases} 1, &  n  \leq N_1 \\ 0, & N_1 <  n  \leq \frac{N}{2} \end{cases}$ $x[n+N] = x[n]$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{\text{sen}\left[\frac{2\pi k}{N}\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\right]}{N \text{sen}\left[\frac{2\pi k}{2N}\right]}, \quad k \neq 0, \pm N, \dots$ $a_k = (2N_1 + 1)/N, \quad k = 0, \pm N, \dots$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{1}{N}$ para toda k
$\rightarrow a^n u[n], \quad  a  < 1$	$1/(1 - ae^{-j\omega})$	
$x[n] = \begin{cases} 1, &  n  \leq N_1 \\ 0, &  n  > N_1 \end{cases}$	$\frac{\text{sen}\left[\omega\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\right]}{\text{sen}(\omega/2)}$	
$\rightarrow \frac{\text{sen} Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$ $0 < W < \pi$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq  \omega  \leq W \\ 0, & W <  \omega  \leq \pi \end{cases}$ $X(e^{j\omega})$ periódica con periodo $2\pi$	
$\rightarrow \delta[n]$	1	
$\rightarrow u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k)$	
$\rightarrow \delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$	
$(n+1)a^n u[n], \quad  a  < 1$	$1/(1 - ae^{-j\omega})^2$	
$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n u[n], \quad  a  < 1$	$1/(1 - ae^{-j\omega})^r$	

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \delta[n-k] = u[n] - u[n-N] \xrightarrow{F} e^{-j\omega(N-1)} \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

U

U

U

U

# PARES BÁSICOS DE TRANSFORMADAS Z

Señal	Transformada	ROC
1. $\delta[n]$	1	Toda $z$
2. $u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z  > 1$
3. $-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z  < 1$
4. $\delta[n - m]$	$z^{-m}$	Para toda $z$ excepto 0 (si $m > 0$ ) o $\infty$ (si $m < 0$ )
5. $\alpha^n u[n]$	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$ z  >  \alpha $
6. $-\alpha^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$ z  <  \alpha $
7. $n\alpha^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$ z  >  \alpha $
8. $-n\alpha^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$ z  <  \alpha $
9. $[\cos \omega_0 n] u[n]$	$\frac{1 - [\cos \omega_0] z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0] z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
10. $[\sen \omega_0 n] u[n]$	$\frac{[\sen \omega_0] z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0] z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
11. $[r^n \cos \omega_0 n] u[n]$	$\frac{1 - [r \cos \omega_0] z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0] z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z  > r$
12. $[r^n \sen \omega_0 n] u[n]$	$\frac{[r \sen \omega_0] z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0] z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z  > r$
13. $a^{-n} \cdot u[-n]$	$\frac{1}{1 - az}$	$ z  < \frac{1}{ a }$
14. $-a^{-n} u[n-1]$	$\frac{1}{1 - az}$	$ z  > \frac{1}{ a }$

U

U

U

U

# PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z

Propiedad	Señal	Transformada z	ROC
	$x[n]$	$X(z)$	$R$
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	$R_1$
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	$R_2$
Linealidad	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	Al menos la intersección de $R_1$ y $R_2$
Desplazamiento en tiempo	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	$R$ , excepto para la posible adición o supresión del origen
Escalamiento en el dominio de z	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{-j\omega_0} z)$	$R$
	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$z_0 R$
	$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$	Versión escalada de $R$ (es decir, $ a R =$ conjunto de puntos $\{ a z\}$ para $z$ en $R$ )
Inversión en el tiempo	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	$R$ invertida (es decir, $R^{-1} =$ el conjunto de puntos $z^{-1}$ , donde $z$ está en $R$ )
Expansión en el tiempo	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[r], & n = rk \\ 0, & n \neq rk \end{cases}$ para algún entero $r$	$X(z^k)$	$R^{1/k}$ (es decir, el conjunto de puntos $z^{1/k}$ donde $z$ está en $R$ )
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	$R$
Convolución	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Al menos la intersección de $R_1$ y $R_2$
Primera diferencia	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	Al menos la intersección de $R$ y $ z  > 0$
Acumulación	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)$	Al menos la intersección de $R$ y $ z  > 1$
Diferenciación en el dominio de z	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$R$

Teorema del valor inicial  
 Si  $x[n] = 0$  para  $n < 0$ , entonces,  
 $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

1

2

3

4

# PROBLEMAS LIBRO

Tratamiento de Señales en Tiempo Discreto — Alan V. Oppenheim (3ª Edición)

## Problemas Tema 1

**Problema 2.11:** Considere un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta en frecuencia es:  $H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j2\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j4\omega}}$ ,  $-\pi < \omega \leq \pi$ . Determine la salida  $y[n]$  para todo  $n$  si la entrada  $x[n]$  para todo  $n$  es  $x[n] = \sin(\pi n/4)$ .

$x[n] = \sin(\pi n/4)$

$$x[n] = |H(\omega_0)| \cdot \sin(\pi n/4 + \phi(\omega_0))$$

$$\left| \frac{1 - e^{-j2\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j4\omega}} \right| = \left| \frac{1 - j}{\frac{1}{2}} \right| = 2\sqrt{2}$$

Hecho en clase de la escuela (a medias)

**Problema 3.9:** Un sistema LTI causal tiene como respuesta al impulso  $h[n]$ . Su transformada Z es:  $H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{4}z^{-1})}$ .

a) ¿Cuál es la región de convergencia de  $H(z)$ ? En el enunciado nos especifica que se trata de un sistema causal, dibujando su diagrama polos-ceros

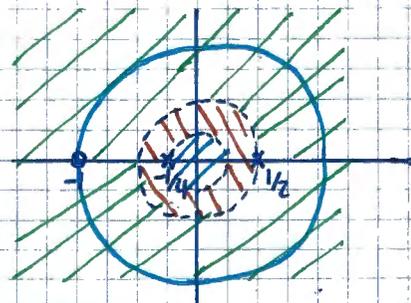
POLOS:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2}z^{-1} &= 0 \\ z - \frac{1}{2} &= 0 \\ z &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{4}z^{-1} &= 0 \\ z + \frac{1}{4} &= 0 \\ z &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

CEROS

$$\begin{aligned} 1 + z^{-1} &= 0 \\ z + 1 &= 0 \\ z &= -1 \end{aligned}$$



La ROC causal es  $|z| > \frac{1}{2}$

b) ¿Es estable el sistema? Justifique su respuesta? Como se aprecia en el diagrama y ya que la ROC del sistema es  $|z| > \frac{1}{2}$  y contiene a la circunferencia unidad, este sistema es estable.

c) Obtenga la transformada Z,  $X(z)$  de la entrada  $x[n]$  que produce la salida:

$$y[n] = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{4}{3} (z)^n u[-n-1]$$

Sabemos que  $X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)}$ . Necesitamos calcular  $Y(z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}}$

$$X(z) = \frac{\frac{-1 + z^{-1} + 4(1 + \frac{1}{4}z^{-1})}{(1 + \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})}}{\frac{(1 + \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}{(1 + z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}} = \frac{(1 + z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}{(1 + z^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

**Problema 3.11:** A continuación se presentan cuatro transformadas  $Z$ . Determine cuáles podrían ser la transformada de una secuencia causal. No calcule la transformada inversa. Puede obtener la respuesta por simple inspección. Explique claramente el razonamiento seguido en cada caso.

Sabemos que  $\lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = 0 \rightarrow$  NO causal  
 $\lim_{z \rightarrow \infty} H(z) \rightarrow \infty \rightarrow$  Puede ser causal

} En  $z$  negativas  $z^{-n}$

a)  $H(z) = \frac{(1-z^{-1})^2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})} \rightarrow$  Puede ser causal    b)  $H(z) = \frac{(z-1)^2}{(z-\frac{1}{2})} \rightarrow$  No puede

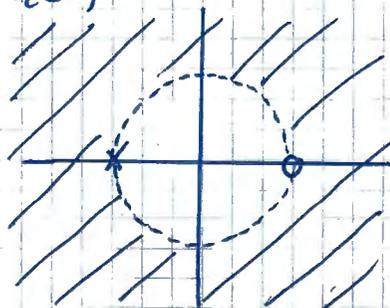
c)  $H(z) = \frac{(z-\frac{1}{4})^5}{(z-\frac{1}{2})^6} \rightarrow$  Puede ser causal    d)  $H(z) = \frac{(z-\frac{1}{4})^6}{(z-\frac{1}{2})^5} \rightarrow$  No puede

**Problema 3.7:** La entrada de un sistema causal e invariante con el tiempo es:  
 $x[n] = u[-n-1] + (\frac{1}{2})^n u[n]$  y la transformada  $Z$  de la salida es:  $Y(z) = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+z^{-1})}$

a) Determine  $H(z)$ , la transformada  $Z$  de la respuesta al impulso del sistema. Asegúrese de especificar su región de convergencia.

$X(z) = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$ ; Por tanto  $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+z^{-1})}}{\frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}} = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

POLOS:  $z = -1$   
 CEROS:  $z = 1$



ROC:  $|z| > 1$

b) ROC  $Y(z) = |z| > 1$  ya que  $ROC Y(z) \supset ROC X(z) \cap ROC H(z)$

c)  $y[n] = Z^{-1}\{Y(z)\}$

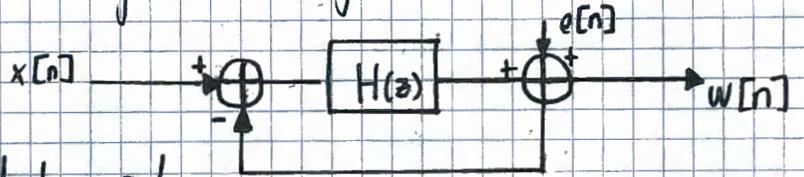
$\frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+z^{-1})} = \frac{A}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{B}{(1+z^{-1})} \rightarrow y(z) = \frac{-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{3}}{1+z^{-1}}$

$-\frac{1}{2}z^{-1} = A(1+z^{-1}) + B(1-\frac{1}{2}z^{-1})$

- $z = \frac{1}{2} \rightarrow A = -\frac{1}{3}$
- $z = 1 \rightarrow B = \frac{1}{3}$

$\downarrow Z^{-1}$   
 $y[n] = \frac{-1}{3} u[n] \cdot ((-\frac{1}{2})^n - (\frac{1}{2})^n)$

3.42) En la figura P.3.42,  $H(z)$  es la función de transferencia de un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal.

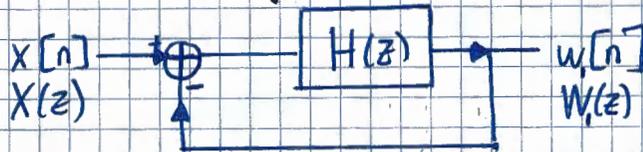


a) Utilizando la transformada Z de las señales que se muestran en la figura, obtenga una expresión de  $W(z)$  que tenga la forma:

$$W(z) = H_1(z)X(z) + H_2(z)E(z)$$

donde  $H_1(z)$  como  $H_2(z)$  se expresan en función de  $H(z)$ .

① Por un lado tenemos



$$H_1(z) = \frac{W_1(z)}{X(z)}$$

$$W_1(z) = [X(z) - W_1(z)] \cdot H(z)$$

$$W_1(z) = [X(z) - W_1(z)] \cdot H(z)$$

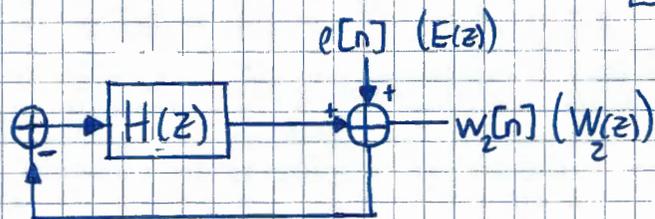
Como buscamos una expresión de la forma  $W_1(z) = X(z)H(z)$ :

$$H_1(z) = \frac{W_1(z)}{X(z)} = \frac{H(z)}{1 + H(z)}$$

Explicación:

- $w_1(z) = X_1(z)H(z) - w_1(z) \cdot H(z)$
- $w_1(z)(1 + H(z)) = X_1(z)H(z)$
- $w_1(z) = X_1(z) \frac{H(z)}{1 + H(z)}$

② Por otro lado tenemos:



$$H_2(z) = \frac{W_2(z)}{E(z)}$$

$$W_2(z) = E(z) - W_2(z)H(z)$$

$$W_2(z)[1 + H(z)] = E(z)$$

$$W_2(z) = E(z) \cdot \frac{1}{1 + H(z)}$$

Como buscamos algo de la forma  $W_2(z) = E(z) \cdot H_2(z)$ :

$$H_2(z) = \frac{1}{1 + H(z)}$$

Finalmente tenemos que:  $W(z) = X(z) \cdot \frac{H(z)}{1 + H(z)} + E(z) \cdot \frac{1}{1 + H(z)}$

b) Para el caso especial de  $H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}$  determine  $H_1(z)$  y  $H_2(z)$

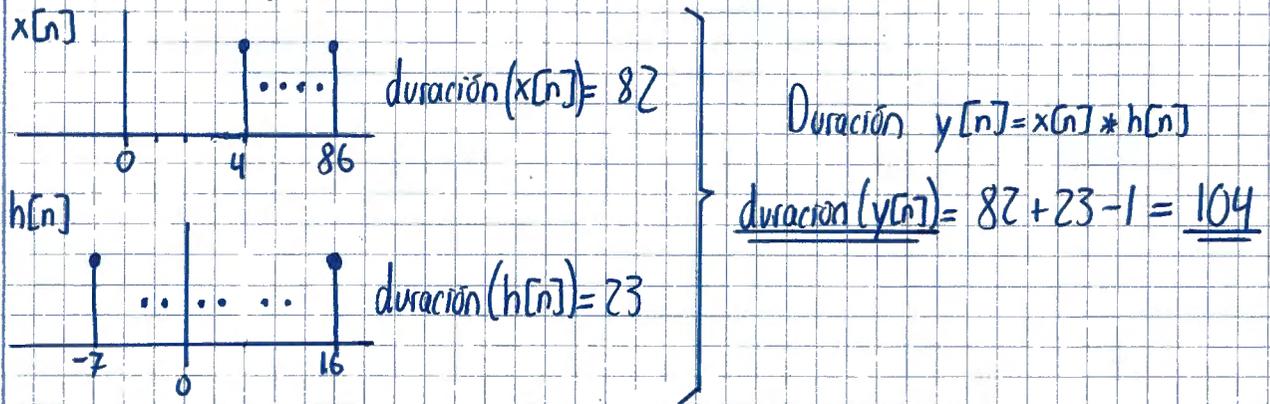
Para ese caso tenemos que:

$$\bullet H_1(z) = \frac{H(z)}{1+H(z)} = \frac{\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})}}{1 + \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}} = \frac{\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})}}{\frac{1-z^{-1}+z^{-1}}{(1-z^{-1})}} = z^{-1} \text{ (Retardo)}$$

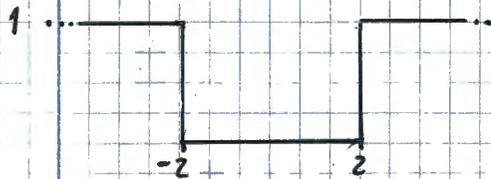
$$\bullet H_2(z) = \frac{1}{1+H(z)} = \frac{1}{1 + \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}} = \frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-1}} = 1 - z^{-1} \text{ (Paso alto)}$$

## Problemas Enunciados Crisser

E-1) Considere las secuencias  $x[n]$  y  $h[n]$  de duración finita. La primera muestra distinta de cero de  $x[n]$  está en  $n=4$  y su duración es de 82 muestras. La primera muestra distinta de cero de  $h[n]$  está en  $n=-7$  y su duración es de 23 muestras. (calcule la duración de la secuencia  $y[n]=x[n]*h[n]$ ).



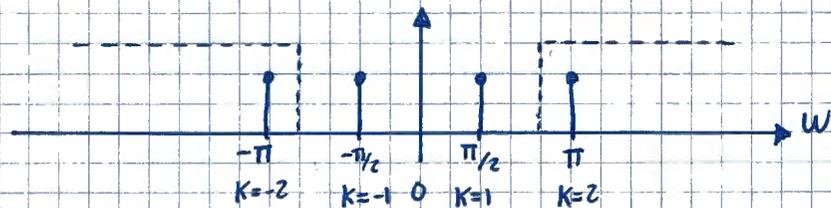
E-2) Considere un sistema LTI con respuesta en frecuencia  $H(\omega)$ , representada en la gráfica adjunta. La entrada al sistema es la secuencia  $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k]$ . (calcule la salida  $y[n]$ ).



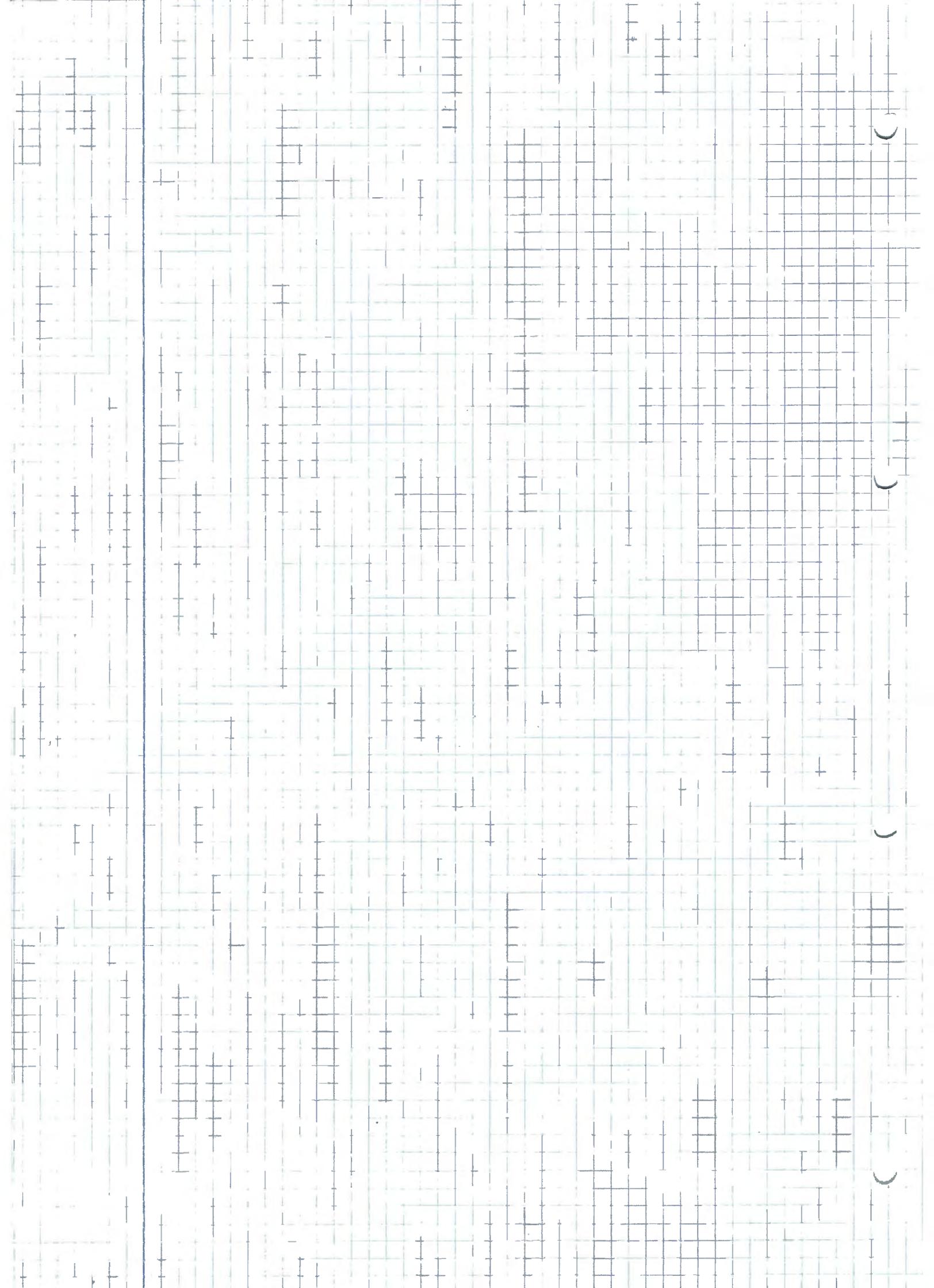
$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} = \frac{1}{4}$$

Por tanto  $X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \cdot \frac{1}{4} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{4}k\right) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}k\right)$

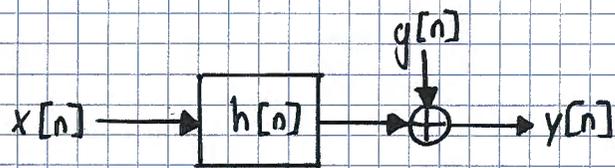


Por tanto la salida  $Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & 2 \leq |\omega| \leq 3 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$  Periodica  $2\pi$



# Septiembre 2009, Problema 1

1) Dado el siguiente diagrama:



a) Determinar si el sistema es lineal e invariante.

• LINEAL:  $x_3[n] = a x_1[n] + b x_2[n] \longrightarrow y_3[n] = a y_1[n] + b y_2[n]$

Siendo:  $y_1[n] = x_1[n] * h[n] + g[n]$   
 $y_2[n] = x_2[n] * h[n] + g[n]$

Pero en verdad obtenemos  $a(x_1[n] * h[n]) + g[n] + b(x_2[n] * h[n]) + g[n]$  NO LINEAL

• INVARIANZA TEMPORAL:  $x[n] \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n] + g[n]$

$$y[n] = x[n] * h[n] + g[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h[n-k] + g[n]$$

$$y[n-n_0] = x[n-n_0] * h[n] + g[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k-n_0] h[n-k] + g[n]$$

NO INVARIANTE

b)  $y[n] = 0.3 y[n-1] + x[n] \xrightarrow{Z} Y(z) = 0.3 Y(z) \cdot z^{-1} + X(z)$   
 $y[-1] = 0.5 \qquad Y(z)[1 - 0.3z^{-1}] = X(z)$

Solo es valido si parte del reposo inicial (pero no)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0.3z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{X(z)}{1 - 0.3z^{-1}} + \frac{0.3 y[-1]}{1 - 0.3z^{-1}}$$

Reposo Inicial

$$y[n] = 0.3 y[n-1] + x[n]$$

$$Y(z) = 0.3 (Y(z) z^{-1})$$

y[-1] = 0.5 DATO

# Noviembre 2011 Parcial 1º Problema 1:

$$(d+1)y[n] - \alpha y[n-1] = x[n]$$

Sistema causal

$$n \geq 0$$

$$y[-1] = \beta$$

a) ¿h[n]?

Suponemos  $\beta = 0$

$$Y(z)(d+1) - Y(z)\alpha z^{-1} = X(z)$$

$$Y(z)[d+1 - \alpha z^{-1}] = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{d+1 - \alpha z^{-1}} = \frac{1/\alpha}{\frac{d+1}{\alpha} - z^{-1}} = \frac{1}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{\alpha+1} z^{-1}}$$

$$\underline{h[n]} = \mathcal{TZ}^{-1}\{H(z)\} = \frac{1}{\alpha+1} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^n \cdot u[n]$$

↑  
causal

b) ¿ $\alpha$  y  $\beta$  para que el sistema sea estable?

Para  $n=0 \rightarrow (d+1)y[0] - \alpha y[-1] = x[0]$

$$y[0] = \frac{\alpha}{d+1} \boxed{y[-1]} \rightarrow \beta$$

Por tanto tenemos que: 
$$Y(z) = \frac{X(z)}{(d+1) - \alpha z^{-1}} + \frac{\frac{\alpha}{d+1} \beta}{(d+1) - \alpha z^{-1}}$$

•  $(d+1) - \alpha z^{-1} = 0 \rightarrow (d+1)z - \alpha = 0 \rightarrow z = \frac{\alpha}{d+1}$

Más restrictivo

Para que sea estable:  $|z| = \left|\frac{\alpha}{d+1}\right| < 1 \rightarrow \alpha < d+1 \Leftrightarrow \alpha > 1$  y  $\boxed{\alpha > 0}$

c) Si  $x[n] = u[n]$ , (calcular  $Y_{zi}[n] \equiv$  Salida con  $x[n]=0$  y  $Y_{zs}[n] \equiv$  Salida con condiciones iniciales nulas.

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

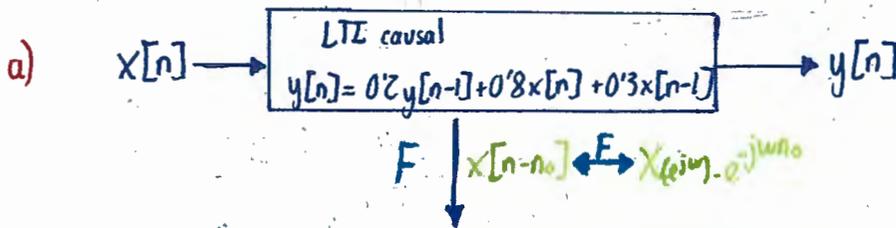
$$Y_{zi}[n] = \left(\frac{\alpha}{d+1}\right) y[-1] \left(\frac{\alpha}{d+1}\right)^n u[n]$$

$$\underline{Y_{zs}[n] = \frac{-\alpha}{d+1} \left(\frac{\alpha}{d+1}\right)^n u[n] + Y_{zi}[n]}$$

3. Un sistema LTI causal tiene su entrada  $x[n]$  relacionada con la salida  $y[n]$  mediante la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n] = 0,2y[n-1] + 0,8x[n] + 0,3x[n-1]$$

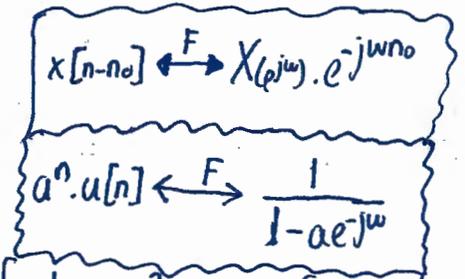
- Determine la respuesta en frecuencia del sistema,  $H(e^{j\omega})$
- Determine la respuesta al impulso del sistema.
- Demuestre que el sistema es estable.
- Si se introduce la señal  $x_1[n] = u[n-5] - u[n-27]$ , y la salida correspondiente es  $y_1[n]$ , calcule  $X_1(e^{j\omega})$  e  $Y_1(e^{j\omega})$ .



$$Y(e^{j\omega}) = 0,2 Y(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega} + 0,8 X(e^{j\omega}) + 0,3 X(e^{j\omega}) e^{-j\omega}$$

$$Y(e^{j\omega}) [1 - 0,2 e^{-j\omega}] = X(e^{j\omega}) [0,8 + 0,3 e^{-j\omega}]$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{0,8 + 0,3 e^{-j\omega}}{1 - 0,2 e^{-j\omega}}$$



b) Respuesta al impulso:  $h[n] = F^{-1} \left\{ \frac{0,8 + 0,3 e^{-j\omega}}{1 - 0,2 e^{-j\omega}} \right\} = 0,8 F^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - 0,2 e^{-j\omega}} \right\} + 0,3 F^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - 0,2 e^{-j\omega}} e^{j\omega} \right\}$

$$= \underline{0,8 (0,2)^n u[n] + 0,3 \cdot (0,2)^{n-1} u[n-1]}$$

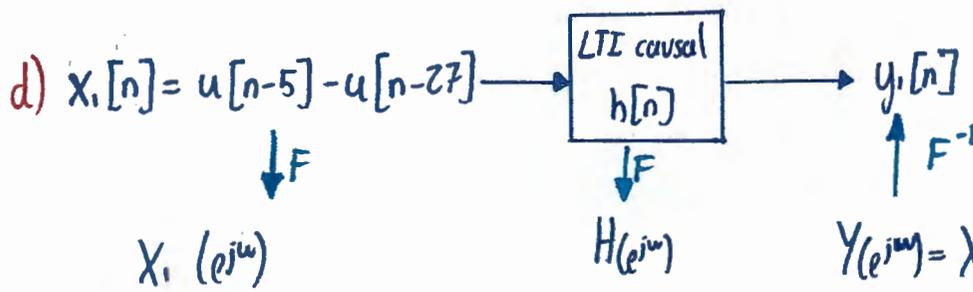
c) Sistema LTI estable  $\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |0,8 (0,2)^n u[n] + 0,3 (0,2)^{n-1} u[n-1]| = 0,8 \sum_{n=0}^{\infty} (0,2)^n u[n] + 0,3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (0,2)^{n-1} u[n-1] =$$

$$= 0,8 \sum_{n=0}^{\infty} (0,2)^n + 0,3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0,2)^n}{2,0} = 0,8 \sum_{n=0}^{\infty} (0,2)^n + \frac{0,3}{2,0} \sum_{n=1}^{\infty} (0,2)^n = 0,8 \frac{1}{2,0-1} + \frac{0,3}{2,0} \frac{0,2}{2,0-1}$$

$$= \underline{1,375} < \infty$$

Así que el sistema es estable



$x[n-n_0] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega n_0}$

$$X_1(e^{j\omega}) = F\{x_1[n]\} = F\{u[n-5] - u[n-27]\} = F\{u[n-5]\} - F\{u[n-27]\} = U(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega 5} - U(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega 27}$$

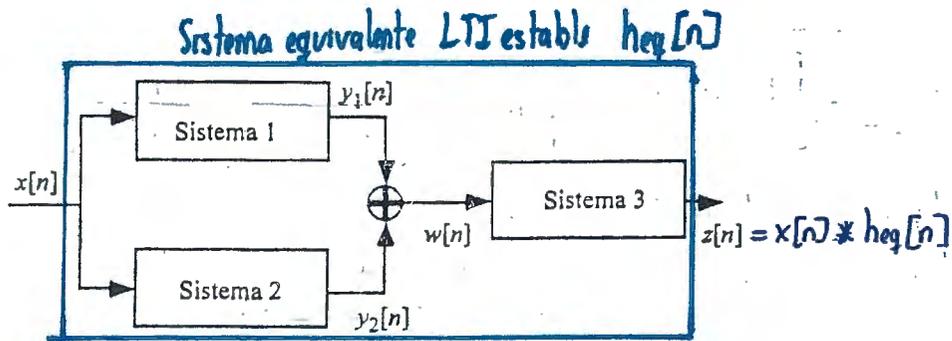
$$U(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega 27} = U(e^{j\omega}) [e^{-j\omega 5} - e^{-j\omega 27}] = \left[ \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - k2\pi) \right] [e^{-j\omega 5} - e^{-j\omega 27}] =$$

$$= \frac{e^{-j\omega 5} - e^{-j\omega 27}}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{-j\omega 5} - e^{-j\omega 27}) \delta(\omega - k2\pi) = \frac{e^{-j\omega 5} - e^{-j\omega 27}}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left( \overset{1}{e^{-j\omega 5}} - \overset{1}{e^{-j\omega 27}} \right)}_0 \delta(\omega - k2\pi)$$

$$\Rightarrow X_1(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega 5} - e^{-j\omega 27}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$Y_1(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega 5} - e^{-j\omega 27}}{1 - e^{-j\omega}} \cdot \frac{0.8 + 0.3e^{-j\omega}}{1 - 0.2e^{-j\omega}} = \frac{0.8e^{-j\omega 5} - 0.8e^{-j\omega 27} + 0.3e^{-j\omega 6} - 0.3e^{-j\omega 28}}{(1 - 0.2e^{-j\omega})(1 - e^{-j\omega})}$$

2. Suponga una conexión de sistemas LTI causales y estables tal como se muestra en la siguiente figura:



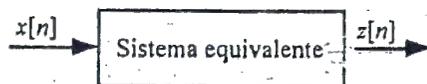
donde cada uno de los sistemas componentes viene caracterizado por su correspondiente ecuación en diferencias, dadas a continuación:

Sistema 1:  $y_1[n] + ay_1[n-1] = x[n]$

Sistema 2:  $y_2[n] + by_2[n-2] = x[n]$

Sistema 3:  $z[n] = w[n] + w[n-1]$

- a) Determine la expresión de la respuesta en frecuencia del sistema equivalente.
- b) Utilizando el resultado obtenido en el apartado a), calcule la ecuación en diferencias que caracteriza al sistema equivalente.



a)  $z[n] = w[n] * h_3[n] = (y_1[n] + y_2[n]) * h_3[n] = (x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]) * h_3[n] =$   
 $x[n] * \underbrace{(h_1[n] + h_2[n]) * h_3[n]}_{h_{eq}[n]} = x[n] * h_{eq}[n]$

$h_{eq}[n] = (h_1[n] + h_2[n]) * h_3[n] \xrightarrow{F} H_{eq}(e^{j\omega}) = F\{(h_1[n] + h_2[n]) * h_3[n]\} =$   
 $= [H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})] \cdot H_3(e^{j\omega})$

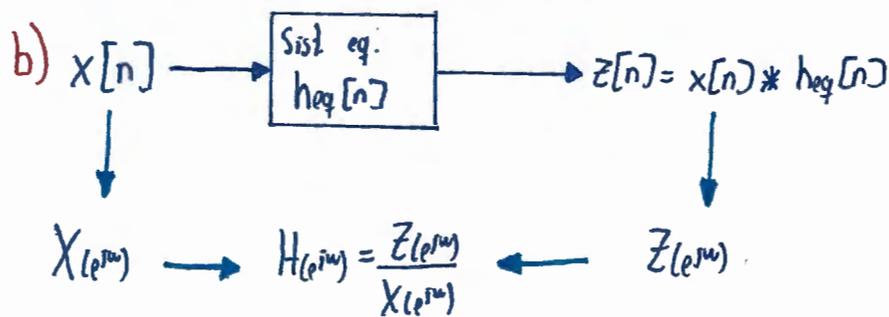
- Sistema 1:  $y_1[n] + ay_1[n-1] = x[n] \xrightarrow{F} Y_1(e^{j\omega}) + a Y_1(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega} = X(e^{j\omega})$   
 $\Rightarrow H_1(e^{j\omega}) = \frac{Y_1(e^{j\omega})}{X_1(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 + a e^{-j\omega}}$

- Sistema 2:  $y_2[n] + by_2[n-2] = x[n] \xrightarrow{F} Y_2(e^{j\omega}) + b Y_2(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega 2} = X(e^{j\omega})$   
 $H_2(e^{j\omega}) = \frac{Y_2(e^{j\omega})}{X_2(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 + b e^{-j\omega 2}}$

- Sistema 3:  $z[n] = w[n] + a w[n-1] \xleftrightarrow{F} Z(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega}) + a W(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega}$

$$\underline{\underline{H_3(e^{j\omega}) = \frac{Z(e^{j\omega})}{W(e^{j\omega})} = 1 + a e^{-j\omega}}}$$

Así que:  $\underline{\underline{H_{eq}(e^{j\omega})}} = [H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})] H_3(e^{j\omega}) = \left[ \frac{1}{1 + a e^{-j\omega}} + \frac{1}{1 + b e^{-j\omega z}} \right] (1 + a e^{-j\omega}) =$   
 $= \frac{1 + b e^{-j\omega z} + 1 + a e^{-j\omega}}{(1 + a e^{-j\omega})(1 + b e^{-j\omega z})} \cdot (1 + a e^{-j\omega}) = \underline{\underline{\frac{z + b e^{-j\omega z} + a e^{-j\omega}}{(1 + b e^{-j\omega z})}}}$



$$H_{eq}(e^{j\omega}) = \frac{Z(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{z + b e^{-j\omega z} + a e^{-j\omega}}{1 + b e^{-j\omega z}} \implies Z(e^{j\omega}) [1 + b e^{-j\omega z}] = X(e^{j\omega}) [z + b e^{-j\omega z} + a e^{-j\omega}]$$

$$\implies Z(e^{j\omega}) + b Z(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega z} = z X(e^{j\omega}) + b X(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega z} + a X(e^{j\omega}) e^{-j\omega}$$

$\downarrow F^{-1}$

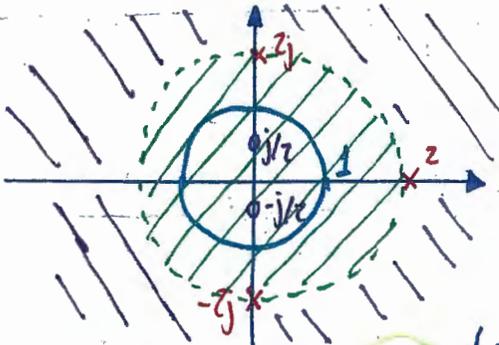
$$\underline{\underline{z[n] + b z[n-z] = z x[n] + b x[n-z] + a x[n-1]}}$$

Ejercicio 3

Considere un sistema de tiempo discreto lineal, invariante y causal descrito por los polos ( $z_{p1}=2, z_{p2}=j2, z_{p3}=-j2$ ), los ceros ( $z_{c1}=j/2, z_{c2}=-j/2$ ) y la unidad como constante multiplicativa de la función de transferencia:

- Calcule la función de transferencia del sistema.
- ¿Es estable el filtro? ¿Y su inverso? Razone la respuesta.
- Calcule la respuesta al impulso del sistema.

a) Diagrama de ceros y polos:



$$H(z) = \frac{(z - j/2)(z + j/2)}{(z - 2)(z - j2)(z + j2)} \cdot 1$$

$$= \frac{(z - j/2)z^{-1}(z + j/2)z^{-1}}{(z - 2)z^{-1}(z - j2)z^{-1}(z + j2)z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1}z^{-1}z^{-1}}{z^{-1}z^{-1}} =$$

$$= \frac{(1 - j/2z^{-1})(1 + j/2z^{-1})z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})(1 - j2z^{-1})(1 + j2z^{-1})}, |z| > 2 \text{ (porque es causal)}$$

Nos interesan terminos de la forma  $1 - az^{-1}$

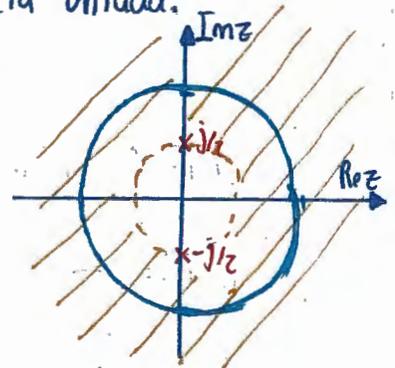
ROC 1:  $|z| < 2$ , Anticausal, estable

ROC 2:  $|z| > 2$ , causal, no estable

b) No es estable porque su ROC ( $|z| > 2$ ) no incluye la circunferencia unidad.

Sistema inverso:  $H_I(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{(1 - 2z^{-1})(1 - j2z^{-1})(1 + j2z^{-1})}{(1 - j/2z^{-1})(1 + j/2z^{-1})z^{-1}}$

$|z| > 1/2$  porque es la ROC con intersección no-nula con la ROC del sistema original ( $|z| > 2$ )



Así que el sistema inverso del causal sí es estable porque su ROC incluye la circunferencia unidad.

c) Haremos la inversa para ambos sistemas:

$$H(z) = \frac{z^{-1} (1^2 - \cancel{j^2} z^{-2})}{(1-zz^{-1})(1-\cancel{j} z^{-2})} = \frac{z^{-1} (1 + \cancel{j} z^{-2})}{(1-zz^{-1})(1+4z^{-2})} = \frac{1/4 z^{-3} + z^{-1}}{1+4z^{-2}-2z^{-1}-8z^{-3}}$$

$$\frac{\frac{1}{4} z^{-3} + z^{-1}}{1+4z^{-2}-2z^{-1}-8z^{-3}} = \frac{-\frac{1}{32} z^{-3} - \frac{1}{8} z^{-2} + \frac{1}{16} z^{-1} - \frac{1}{32}}{\frac{1}{8} z^{-2} + \frac{15}{16} z^{-1} + \frac{1}{32}}$$

Asique  $H(z) = -\frac{1}{32} + \frac{G(z)}{-8z^{-3} + 4z^{-2} - 2z^{-1} + 1}$

Descomponemos en fracciones simples  $G(z) = \frac{1/8 z^{-2} + 15/16 z^{-1} + 1/32}{(1-zz^{-1})(1-zjz^{-1})(1+jz^{-1})} = \frac{A}{1-zz^{-1}} + \frac{B}{1-zjz^{-1}} + \frac{C}{1+jz^{-1}}$

$$A = G(z)(1-zz^{-1}) \Big|_{z=z} = \dots = \frac{17}{64}$$

$$C = G(z)(1+jz^{-1}) \Big|_{z=-j} = \dots = \frac{-15}{64(1+j)}$$

$$B = G(z)(1-zjz^{-1}) \Big|_{z=j} = \dots = \frac{15}{64(1-j)}$$

$$H(z) = -\frac{1}{32} + \frac{A}{1-zz^{-1}} + \frac{B}{1-zjz^{-1}} + \frac{C}{1+jz^{-1}}$$

Respuesta al impulso del sistema anticausal (NO la piden):

$$h_i[n] = -\frac{1}{32} \underbrace{z^{-1} \{1\}}_{\delta[n]} + A \underbrace{z^{-1} \left\{ \frac{1}{1-zz^{-1}} \right\}}_{\substack{|z| < 1 \\ |z| > 1}} + B \underbrace{z^{-1} \left\{ \frac{1}{1-zjz^{-1}} \right\}}_{\substack{|z| < 1 \\ |z| > 1}} + C \underbrace{z^{-1} \left\{ \frac{1}{1+jz^{-1}} \right\}}_{\substack{|z| < 1 \\ |z| > 1}} =$$

$$= -\frac{1}{32} \delta[n] - A z^n u[-n-1] - B (zj)^n u[-n-1] - C (-zj)^n u[-n-1]$$

$$h_i[n] = -\frac{1}{32} \delta[n] - [A z^n + B (zj)^n + C (-zj)^n] \cdot u[-n-1]$$

Respuesta al impulso del sistema causal

$$h_c[n] = -\frac{1}{32} z^{-1} \{1\} + A \underbrace{z^{-1} \left\{ \frac{1}{1-zz^{-1}} \right\}}_{\substack{|z| < 1 \\ |z| > 1}} + B \underbrace{z^{-1} \left\{ \frac{1}{1-zjz^{-1}} \right\}}_{\substack{|z| < 1 \\ |z| > 1}} + C \underbrace{z^{-1} \left\{ \frac{1}{1+jz^{-1}} \right\}}_{\substack{|z| < 1 \\ |z| > 1}}$$

$$h_c[n] = -\frac{1}{32} \delta[n] + [A z^n + B (zj)^n + C (-zj)^n] \cdot u[n]$$

2. Dada una secuencia:  $x_1[n] = a^{-n}u[-n]$  siendo  $a$  un parámetro real arbitrario,

a) Calcule su transformada Z denotada como  $X(z)$  especificando su región de convergencia.

b) Calcule la expresión de una secuencia alternativa causal  $x_2[n]$  que tiene la misma expresión algebraica para la transformada Z que la del apartado a), ya denotada como  $X(z)$ , y especifique en este caso cuál es su región de convergencia.

c) Sea la siguiente función en el dominio Z  $Y(z) = \frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)}$ , donde se han considerado dos parámetros reales  $\alpha, \beta$  arbitrarios que cumplen  $|\beta| < 1$  y  $|\alpha| > 1$ . Calcule su transformada inversa  $y[n]$  correspondiente a la señal estable.

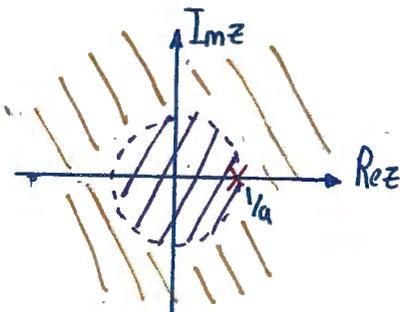
(2,5 puntos)

a)  $x_1[n] = a^{-n} \cdot u[-n]$

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{-n} \cdot u[-n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^0 a^{-n} \cdot z^{-n} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de índice} \\ K = -n \\ n = -\infty \rightarrow K = +\infty \\ n = 0 \rightarrow K = 0 \end{array} \right\} = \sum_{K=\infty}^0 a^K z^K =$$

$$\sum_{K=0}^{\infty} (az)^K = \frac{1}{1-az}, \quad |z| < \frac{1}{|a|}$$

Alternativa:



Puesto que  $x_1[n]$  es ilimitada hacia la izquierda en el tiempo, su ROC debe ser hacia dentro del polo

b) la alternativa causal ( $x_2[n]$ ) será aquella cuya ROC es  $|z| > 1/|a|$

$$X(z) = \frac{1}{1-az} = \frac{1}{1-az} \cdot \frac{z^{-1}}{z^{-1}} = \frac{z^{-1}/a}{z^{-1}-a} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{z^{-1}}{1-1/a z^{-1}}$$

$b^n \cdot u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-bz^{-1}}, |z| > |b|$   
 $x[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z)$

$$x_2[n] = Z^{-1} \left\{ -\frac{1}{a} \cdot \frac{z^{-1}}{1-1/a z^{-1}} \right\} = -\frac{1}{a} Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1-1/a z^{-1}} \cdot z^{-1} \right\} = -\frac{1}{a} \left( \frac{1}{a} \right)^{n-1} u[n-1] = -\frac{1}{a^n} u[n-1]$$

$|z| > \frac{1}{|a|}$   
 $|z| < \frac{1}{|a|}$

$x_2[n] = -a^{-n} u[n-1]$

Así que tenemos el siguiente par de transformadas Z:

$$\boxed{\begin{aligned} a^{-n} \cdot u[-n] &\xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az}, |z| < \frac{1}{|a|} \\ -a^{-n} \cdot u[n-1] &\xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az}, |z| > \frac{1}{|a|} \end{aligned}}$$

c)  $Y(z) = \frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)}, |\beta| < 1, |\alpha| > 1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$Y(z) = \frac{A}{1-\alpha z} + \frac{B}{1-\beta z}$$

$$A = Y(z) \cdot (1-\alpha z) \Big|_{z=1/\alpha} = \dots = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}$$

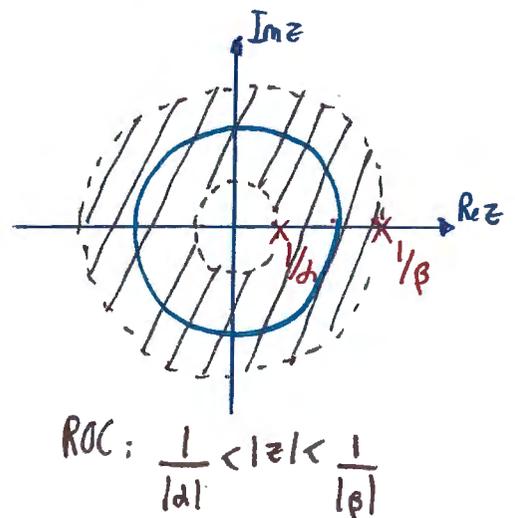
$$B = Y(z) \cdot (1-\beta z) \Big|_{z=1/\beta} = \dots = \frac{\beta}{\beta-\alpha}$$

$$Y(z) = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \cdot \frac{1}{1-\alpha z} + \frac{\beta}{\beta-\alpha} \cdot \frac{1}{1-\beta z}$$

$$y[n] = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} z^{-1} \left\{ \frac{1}{1-\alpha z} \right\} + \frac{\beta}{\beta-\alpha} z^{-1} \left\{ \frac{1}{1-\beta z} \right\} = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \left( -\alpha^{-n} u[n-1] \right) + \frac{\beta}{\beta-\alpha} \left( \beta^{-n} u[-n] \right)$$

$|z| < \frac{1}{|\alpha|}$ 
 $|z| < \frac{1}{|\beta|}$   
 $|z| > \frac{1}{|\alpha|}$ 
 $|z| > \frac{1}{|\beta|}$

$$\underline{\underline{y[n] = \frac{1}{\beta-\alpha} \left( \beta^{1-n} u[-n] + \alpha^{1-n} u[n-1] \right)}}$$



# Procesos Estocásticos

## • Procesos Estocásticos de 1° orden:

• Media ( $\mu_x$ ) =  $\mathcal{E}\{x[n]\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x[n] \underbrace{f_x(x[n])}_{\text{j.d.p.} \equiv \text{función de densidad de probabilidad}} dx$

• Varianza ( $\sigma_x^2[n]$ ) =  $\mathcal{E}\{[x[n] - \mu_x[n]]^2\}$

• Desviación estándar ( $\sigma_x$ ) =  $\mathcal{E}\{x[n] - \mu_x[n]\}$

## • Procesos Estocásticos de 2° orden:

• Correlación ( $R_{xx}[n, m]$ ) =  $\mathcal{E}\{x[n] \cdot x[n+m]\}$

• Densidad espectral de potencia ( $S_{xx}(e^{j\omega})$ ) = TF ( $R_{xx}$ )

• Potencia =  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \mathcal{E}\{x^2[n]\} = \mu_x^2 + \sigma_x^2$

• Correlación cruzada ( $R_{xy}[m]$ ) =  $R_{xx}[m] * h[m]$

• Autocorrelación ( $R_{yy}[m]$ ) =  $R_{xx}[m] * \underbrace{C_{hh}[m]}_{h[m] * h[-m] = C_{hh}[m] \text{ Función Correlación Determinista}}$

## Ejemplos:

1)  $x[n] \rightarrow \delta[n-1] \rightarrow y[n]$

DATOS:  $\mu_x$   
 $\sigma_x^2$   
 $R_{xx}[m]$   
 $S_{xx}(e^{j\omega})$

SOLUCIÓN:  $\mu_y = \mu_x$   
 $\sigma_y^2 = \sigma_x^2$   
 $R_{yy}[m] = R_{xx}[m]$   
 $S_{yy}(e^{j\omega}) = S_{xx}(e^{j\omega})$

Cualquier retardo  
NO  
hace variar estos  
parámetros.

2)  $x[n] \rightarrow \downarrow 2 \rightarrow y[n]$

DATOS:  $\mu_x$   
 $\sigma_x^2$   
 $R_{xx}[m]$   
 $S_{xx}(e^{j\omega})$

SOLUCIÓN:  $\mu_y = \mu_x$   
 $\sigma_y^2 = \sigma_x^2$   
 $R_{yy}[m] = R_{xx}[m]$   
 $S_{yy}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [S_{xx}(e^{j\omega/2}) + S_{xx}(e^{j\omega/2 - \pi})]$

Diezmado



DATOS:

$$\mu_x$$

$$\sigma_x^2$$

$$R_{xx}[m]$$

$$S_{xx}(e^{j\omega})$$

SOLUCIÓN:

$$R_{xy}[m]$$

$$S_{xy}[m]$$

$$\mu_y = \mu_x \cdot H(e^{j\omega})$$

$$\sigma_y^2$$

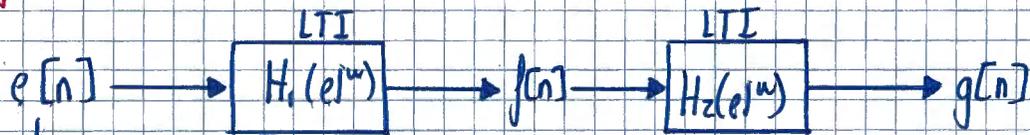
$$R_{yy}[m] = R_{xx}[m] * C_{hh}[m] = R_{xx}[m] * [h[m] * h[-m]]$$

$$S_{yy}(e^{j\omega}) = S_{xx}(e^{j\omega}) \cdot |H(e^{j\omega})|^2$$

$$R_{xy}[m] = R_{xx}[m] * h[m]$$

$$S_{xy}[m] = S_{xx}[m] \cdot H(e^{j\omega})$$

## Ejercicio: 2-91 (Libro)



↳ Ruido blanco de media nula y potencia  $\sigma_e$  :  $\mu_e = 0$   
 $\sigma_e^2 = \sigma_e^2$   
 $R_{ee}[m] = \sigma_e^2 \cdot \delta[m]$   
 $S_{ee}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2$

a)  $S_{gg}(e^{j\omega}) = S_{ee}(e^{j\omega}) \cdot |H_2(e^{j\omega})|^2$  ¿ $S_{gg}(e^{j\omega})$ ? Dibujarla  $-2\pi \leq \omega \leq 2\pi$

Como es LTI:  $f[n] = e[n] - e[n-1] = e[n] * (\delta[n] - \delta[n-1])$   
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{h[n]}$

Como  $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1] \rightarrow h[z] = 1 - z^{-1}$   
 $H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = 1 - e^{-j\omega}$

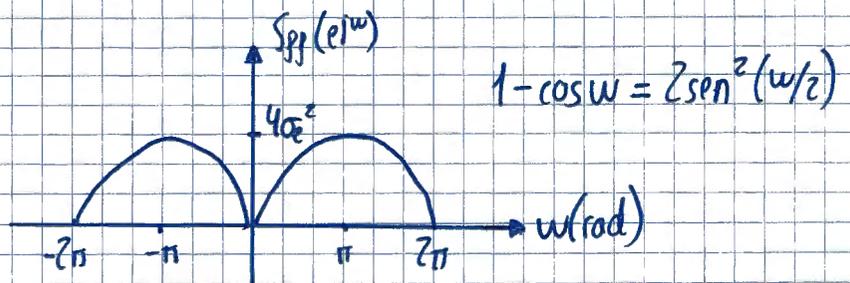
•  $|H(e^{j\omega})| = \sqrt{\text{Re}(H(e^{j\omega}))^2 + \text{Im}(H(e^{j\omega}))^2} = 1 - e^{-j\omega} = 1 - (\cos\omega - j\sin\omega) =$

$\underbrace{(1 - \cos\omega)}_{\text{Re}(H(e^{j\omega}))} + \underbrace{j\sin\omega}_{\text{Im}(H(e^{j\omega}))}$

Par tanto  $|H(e^{j\omega})|^2 = (1 - \cos\omega)^2 + (\sin\omega)^2 = 1 + \cos^2\omega - 2\cos\omega + \sin^2\omega = 2 - 2\cos\omega$

Finalmente:  $S_{gg}(e^{j\omega}) = S_{ee}(e^{j\omega}) \cdot 2(1 - \cos\omega) = \sigma_e^2 \cdot 2(1 - \cos\omega)$

$\text{sen}^2 \sigma = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\sigma)$



b)  $R_{pp}[m] = R_{ee}[m] * C_{hh}[m]$  ① =  $R_{ee}[m] * [h[m] * h[-m]]$

$R_{pp}[m] = \text{TF}^{-1}(S_{gg}(e^{j\omega}))$  ②  $\rightarrow$  Mucho más difícil

do resolvamos con ①:

$h[m] = \delta[m] - \delta[m-1]$

$h[-m] = \delta[-m] - \delta[-m+1]$

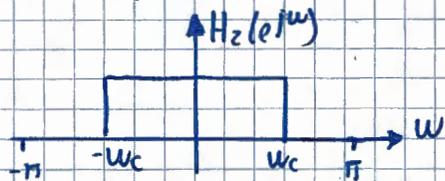
$C_{hh}[m] = h[m] * h[-m] = h[m] * [\delta[m] - \delta[m+1]]$   
 $= h[m+1] + h[m] = -\delta[m+1] + \delta[m+1-1] + \delta[m]$   
 $-\delta[m-1] = \underline{2\delta[m] - \delta[m+1] - \delta[m-1]}$

Finalmente:  $\text{Ree}[m] * (h_1[m] = \sigma_e^2 \delta[m] * [2\delta[m] - \delta[m-1] - \delta[m+1]] \Rightarrow$   

$$\underline{\underline{\text{Ree}[m] = \sigma_e^2 \cdot [2\delta[m] - \delta[m-1] - \delta[m+1]}}$$



$$H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad S_{gg}(e^{j\omega}) = S_{ff}(e^{j\omega}) \cdot H_2(e^{j\omega})$$



$$S_{ff}(e^{j\omega}) = 2\sigma_e^2 (1 - \cos \omega)$$

$$\underline{\underline{S_{gg} = \begin{cases} 2\sigma_e^2 (1 - \cos \omega) & ; |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & ; \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}}}$$

d) Potencia?

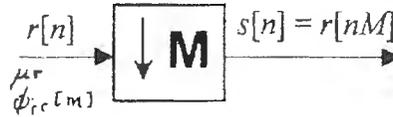
$$\underline{\underline{P}} = \sigma_g^2 + \cancel{N_g^2} \xrightarrow{O(\text{data})} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{gg}(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} 2\sigma_e^2 (1 - \cos \omega) d\omega =$$

$$\frac{\sigma_e^2}{\pi} [w + \sin w] \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{\sigma_e^2}{\pi} [w - (-w_c) + \sin w_c - \sin(-w_c)] =$$

$$\underline{\underline{= \frac{2\sigma_e^2}{\pi} [w_c + \sin w_c]}}$$

## Problema 2 5,5 puntos

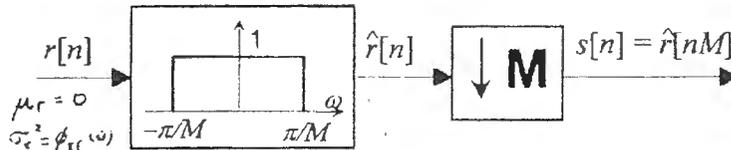
Considere un proceso estocástico estacionario  $r[n]$  con autocorrelación  $\phi_{rr}[m]$  y media  $m_r[n] = \mu_r$ , que pasa por un compresor de razón  $M$ , como en la figura, para producir la secuencia  $s[n] = r[nM]$ .



Determinar:

- 0,5 a) La media del proceso estocástico  $s[n]$ .
- 1 b) La potencia de la señal  $s[n]$  y su varianza  $\sigma_s^2$ . ¿Es mayor, menor o igual que  $\sigma_r^2$ , la varianza de  $r[n]$ ?
- 0,5 c) La autocorrelación  $\phi_{ss}[m]$  del proceso  $s[n]$ .

Considere ahora que la señal  $r[n]$  es un ruido blanco de media  $m_r[n] = 0$  y varianza  $\sigma_r^2$  que pasa por un filtro paso-bajo ideal con frecuencia de corte  $\omega_c = \pi/M$  y ganancia unidad antes de pasar por el compresor de razón  $M$ . Sea  $\hat{r}[n]$  la señal a la salida del fpb ideal y antes de entrar en el compresor. Determinar:



- 0,5 d) La varianza  $\sigma_{\hat{r}}^2$ .
- 1 e) La autocorrelación  $\phi_{\hat{r}\hat{r}}[m]$  del proceso  $\hat{r}[n]$ .
- 1 f) La varianza  $\sigma_s^2$  del proceso  $s[n]$ . ¿Es mayor, menor o igual que la de  $r[n]$ ?
- 1 g) La autocorrelación  $\phi_{ss}[m]$  del proceso  $s[n]$ .

**Nota:** Observe que el bloque del compresor no es un sistema LTI y por tanto, para este bloque, no puede aplicarse resultados conocidos de procesos estocásticos que atraviesen sistemas LTI. Todo resultado habrá de deducirlo explícitamente.

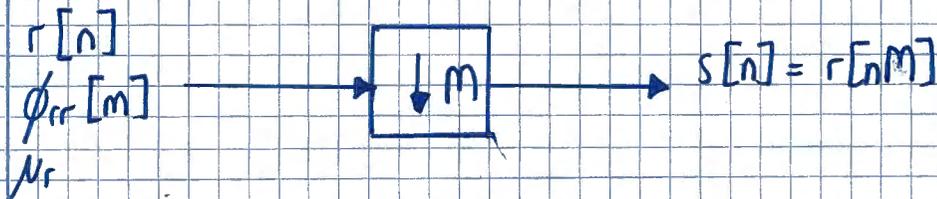
0

1

2

3

# Problema 2 Noviembre 2012



a)  $\mu_s = m_s[n] = \mathcal{E}\{s[n]\} = \mathcal{E}\{r[nM]\} = \mu_r$

↑ Equivalente a  $nM$ ;  $m$  variable independiente entera.

b) Potencia de  $s[n]$

$\sigma_s^2$       Potencia de  $s[n] = \sigma_s^2 + \mu_s^2 = \sigma_s^2 + \mu_r^2$

$P_{ss} = \text{Potencia} = \mathcal{E}\{s^2[n]\} = \mathcal{E}\{r^2[nM]\} = \mathcal{E}\{r^2[n]\} = P_{rr} = \sigma_r^2 + \mu_r^2$

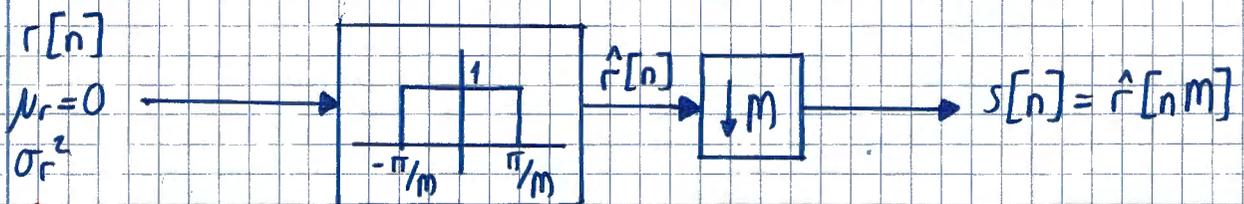
Por tanto:  $\sigma_s^2 = P_{ss} - \mu_r^2 = P_{rr} - \mu_r^2 = \sigma_r^2$

c)  $\phi_{ss}[m]$  autocorrelación de  $s[n]$

$\phi_{ss}[n] = \mathcal{E}\{s[n] \cdot s[n+m]\} = \mathcal{E}\{r[nM] \cdot r[(nM)+m]\} = \phi_{rr}[mM]$

$\Rightarrow \underline{\phi_{ss}[n] = \phi_{rr}[n]}$

$r[z] \cdot r[z+m]$   
 $\phi_{rr}(z) = \phi_{rr}[nM]$



d)  $\sigma_{\hat{r}}^2 = P_{\hat{r}\hat{r}} - \mu_{\hat{r}}^2$

Potencia =  $\sigma^2 + \mu^2$

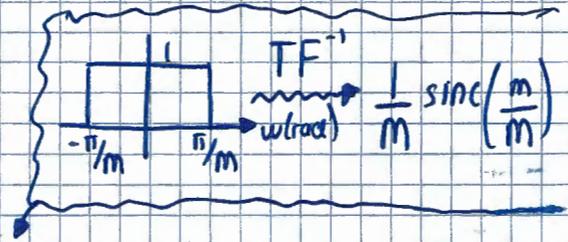
Potencia =  $P_{\hat{r}\hat{r}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{\hat{r}\hat{r}}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/m}^{\pi/m} 1 \cdot \sigma_r^2 d\omega =$

$P_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{ss}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{M} \cdot \sigma_r^2 = \underline{\underline{\sigma_r^2 / M}}$

$$e) \phi_{\hat{r}\hat{r}}^m[m] = \mathcal{E}\{\hat{r}[n] \cdot \hat{r}[n+m]\}$$

$$\phi_{\hat{r}\hat{r}}^m[m] = \phi_{rr}[m] * \underbrace{c_{hh}[m]}_{h[m] * h[-m]}$$

$$\phi_{\hat{r}\hat{r}}^m(\omega) = \underbrace{\phi_{rr}(\omega)}_{\sigma_r^2} \cdot \underbrace{H(e^{j\omega}) \cdot H^*(e^{j\omega})}_{|H(e^{j\omega})|^2}$$



$$\phi_{\hat{r}\hat{r}}^m[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/m}^{\pi/m} \sigma_r^2 \cdot e^{j\omega m} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sigma_r^2 \cdot \frac{2\pi}{m} \cdot \text{sinc}\left(\frac{m}{m}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\phi_{\hat{r}\hat{r}}^m[m] = \frac{\sigma_r^2}{m} \cdot \text{sinc}\left(\frac{m}{m}\right)}}$$

f)  $\sigma_s^2$  de  $s[n]$  Sabemos que  $\phi_{ss} = \sigma_s^2 + \mu_s^2$

$$\Rightarrow \sigma_s^2 = \phi_{ss} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{ss}(\omega) d\omega \quad \text{Transformada de Fourier Inversa}$$

$$\Rightarrow \phi_{ss}(\omega) \stackrel{\text{Definición}}{=} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \phi_{\hat{r}\hat{r}}\left(\frac{\omega}{m} - \frac{2\pi k}{m}\right) = \frac{1}{m} \phi_{\hat{r}\hat{r}}\left(\frac{\omega}{m}\right)$$

$$\text{Por tanto: } \sigma_s^2 = \phi_{ss}[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{m} \phi_{\hat{r}\hat{r}}\left(\frac{\omega}{m}\right) d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{m} \underbrace{\phi_{\hat{r}\hat{r}}^m[m]}_{\sigma_r^2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sigma_s^2 = \sigma_r^2/m = \sigma_r^2/m^2 \cdot \text{sinc}\left(\frac{m}{m}\right)}}$$

g)  $\phi_{ss}[m] = \phi_{\hat{r}\hat{r}}[n \cdot m]$  (apartado d)

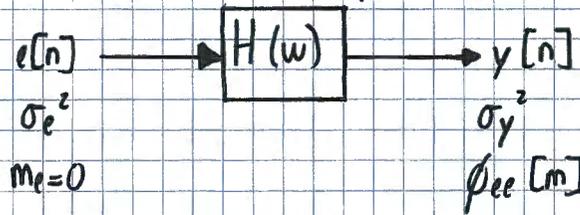
$$\text{NOTA apartado f) } \phi_{ss}[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{ss}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{m} \phi_{\hat{r}\hat{r}}\left(\frac{\omega}{m}\right) d\omega =$$

$$\stackrel{\text{Cambio de variable}}{=} \frac{1}{m \cdot 2\pi} \int_{-\pi/m}^{\pi/m} \phi_{\hat{r}\hat{r}}(\omega') d\omega' = \frac{1}{m \cdot 2\pi} \cdot \frac{2\pi}{m} \cdot \underbrace{\phi_{\hat{r}\hat{r}}^m[m]}_{\sigma_r^2}$$

$\omega' = \omega/m$

1<sup>er</sup> Parcial, Noviembre 2012 TDSÑ (Está la hoja fotocopiada con el examen)

**Problema 1:** Considere un sistema LTI. La entrada al sistema es  $e[n]$ , un ruido blanco aleatorio de media nula y potencia promedio  $\sigma_e^2$  y la salida  $y[n]$ . El sistema es un sistema de diferencias hacia atrás definido por  $y[n] = e[n] - e[n-1]$



$\phi = S$

- Determine la expresión del espectro de potencia  $\Phi_{yy}(\omega)$  de la salida y dibújelo entre  $-\pi \leq \omega \leq \pi$
- Obtenga la autocorrelación  $\phi_{yy}[m]$  de la salida  $y[n]$ . ¿Cuál es su longitud?
- Obtenga la potencia promedio  $\sigma_y^2$  de la salida  $y[n]$ .

Aquí piden → nuestra  $S_{yy}(e^{j\omega})$

a)  $\Phi_{yy}(\omega) = \frac{\phi_{ee}(\omega) \cdot |H(e^{j\omega})|^2}{\sigma_e^2}$

Cuidado cambian la nomenclatura de las letras

• Calculamos  $H(e^{j\omega})$ : Como es LTI  $\Rightarrow x[n] * h[n] = y[n]$

$$y[n] = e[n] - e[n-1] \rightarrow \text{Dato del enunciado}$$

$$y[n] = e[n] * (\delta[n] - \delta[n-1])$$

↓  
 $h[n]$

Como  $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ , su TF es  $H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega}$

Por tanto el  $|H(e^{j\omega})| = \sqrt{\text{Re}(H(e^{j\omega}))^2 + \text{Im}(H(e^{j\omega}))^2} = 1 - e^{-j\omega} = 1 - (\cos\omega - j\sin\omega) =$

$$= \frac{(1 - \cos\omega)}{\text{Re}(H(e^{j\omega}))} + \frac{j\sin\omega}{\text{Im}(H(e^{j\omega}))}$$

Con lo que  $|H(e^{j\omega})|^2 = (1 - \cos\omega)^2 + (\sin\omega)^2 = 1 + \cos^2\omega - 2\cos\omega + \sin^2\omega = 2 - 2\cos\omega$

Finalmente:  $\Phi_{yy} = \sigma_e^2 \cdot 2(1 - \cos\omega)$

Aquí piden →  $R_{yy}[m]$

b)  $\phi_{yy}[m] = \phi_{ee}[m] * c_{hh}[m] = \phi_{ee} * [h[m] * h[-m]]$

$$\left. \begin{aligned} h[m] &= \delta[m] - \delta[m-1] \\ h[-m] &= \delta[-m] - \delta[-m+1] \end{aligned} \right\}$$

$$c_{hh}[m] = h[m] * h[-m] = h[m] * (\delta[m] - \delta[m+1]) =$$

$$= -h[m+1] + h[m] = \delta[m] - \delta[m-1] - \delta[m+1] + \delta[m]$$

$$c_{hh}[m] = 2\delta[m] - \delta[m+1] - \delta[m-1]$$

Finalmente  $\phi_{yy}[m] = \sigma_e^2 \delta[m] * c_{hh}[m] = \sigma_e^2 \cdot [2\delta[m] - \delta[m+1] - \delta[m-1]]$  duración 3

Aquí piden  $\rightarrow$  d) P (potencia)

$$P = \sigma_y^2 + \cancel{N_y^2} \overset{0 \text{ (dato)}}{=} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Sgg}(e^{jw}) dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\sigma_e^2 (1 - \cos w) dw =$$
$$= \frac{\sigma_e^2}{\pi} \left[ w - \text{sen } w \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\sigma_e^2}{\pi} (\pi - 0 - (-\pi - 0)) = \underline{\underline{2\sigma_e^2}}$$

## Problema 2.1

Para cada uno de los sistemas siguientes determine si el sistema es: (1) estable, (2) causal, (3) lineal, (4) invariante con el tiempo y (5) sin memoria.

(a)  $T\{x(n)\} = g(n)x(n)$ , con  $g(n)$  dado

(b)  $T\{x(n)\} = \sum_{k=n_0}^n x(k)$

(c)  $T\{x(n)\} = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x(k)$

(d)  $T\{x(n)\} = x(n - n_0)$

(e)  $T\{x(n)\} = e^{x(n)}$

(f)  $T\{x(n)\} = ax(n) + b$

(g)  $T\{x(n)\} = x(-n)$

(h)  $T\{x(n)\} = x(n) + 3u(n + 1)$

- Nota 1: para el test de causalidad se usa la constante  $n_1$  para evitar confusiones con las definiciones de sistemas que usan  $n_0$ ; por tanto, las señales de prueba  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$  son iguales para  $n \leq n_1$  y difieren para  $n > n_1$ .
- Nota 2: las propiedades no pueden depender de las señales de entrada por lo que basta encontrar un contraejemplo para asegurar que el sistema no cumple con determinada propiedad.

(a)  $T\{x(n)\} = g(n)x(n)$ , con  $g(n)$  **dado**

Se trata de la modulación de la señal  $x(n)$  por la señal  $g(n)$ .

1. Estabilidad:

- $|x(n)| \leq M \Rightarrow |T\{x(n)\}| \leq |g(n)| |x(n)| = |g(n)| M$ ; si  $|g(n)|$  está acotado **sí es estable**.

2. Causalidad:

- $y_1(n) = g(n)x_1(n)$  e  $y_2(n) = g(n)x_2(n)$ ; la igualdad  $g(n)x_1(n) = g(n)x_2(n)$  se cumplirá en todos aquellos valores de  $n$  en los que  $x_1(n)$  sea igual a  $x_2(n)$  y, en particular, para todo  $n \leq n_1$ ; **sí es causal**.

3. Linealidad:

- $T\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = g(n)(ax_1(n) + bx_2(n)) = ag(n)x_1(n) + bg(n)x_2(n)$
- $aT\{x_1(n)\} + bT\{x_2(n)\} = a(g(n)x_1(n)) + b(g(n)x_2(n)) = ag(n)x_1(n) + bg(n)x_2(n)$
- $T\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = aT\{x_1(n)\} + bT\{x_2(n)\}$ ; **sí es lineal**.

4. Invarianza:

- $T\{x(n - n_0)\} = g(n)x(n - n_0)$
- $y(n - n_0) = g(n - n_0)x(n - n_0)$
- $T\{x(n - n_0)\} \neq y(n - n_0)$ ; **no es invariante**.

5. Memoria:

- $y(n_0)$  sólo depende del valor de  $x(n_0)$ ; **no tiene memoria**.

$$(b) T\{x(n)\} = \sum_{k=n_0}^n x(k)$$

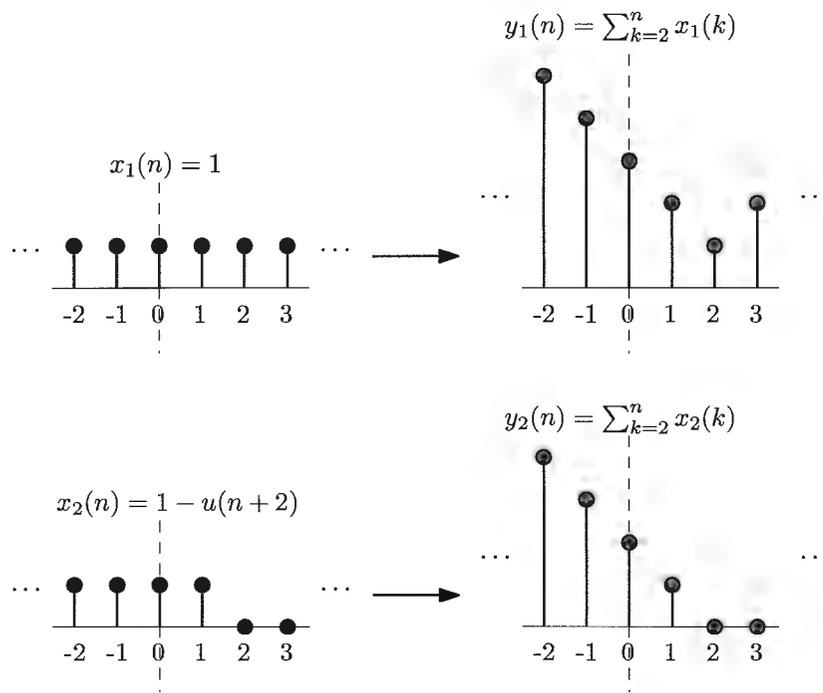
Nótese que  $n_0$  es un valor constante. La salida para  $n = n_1$  es la suma los valores de  $x(n)$  desde  $n = n_0$  hasta  $n = n_1$ . Nótese también que  $n_0$  puede ser mayor, menor o igual que  $n_1$ .

1. Estabilidad:

- $|x(n)| \leq M \Rightarrow |T\{x(n)\}| \leq \sum_{k=n_0}^n |x(k)| \leq |n - n_0 + 1| M$ ; cuando  $n$  tiende a  $\infty$ ,  $|y(n)|$  puede tender también tiende a  $\infty$ , por ejemplo con  $x(n) = u(n)$ ; **no es estable**.

2. Causalidad:

- Para  $n < n_0$  las salidas pueden ser iguales o no dependiendo del valor de  $n_1$ ; **no es causal**.
- Contraejemplo:  $x_1(n) = 1$ ,  $x_2(n) = 1 - u(n + 2)$ , ambas señales iguales para  $n \leq 1$ , ( $n_1 = 1$ );  $y(n) = \sum_{k=2}^n x(k)$ , ( $n_0 = 2$ )



pero  $y_1(n) \neq y_2(n)$ .

3. Linealidad:

- $T\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = \sum_{k=n_0}^n (ax_1(k) + bx_2(k)) = a \sum_{k=n_0}^n x_1(k) + b \sum_{k=n_0}^n x_2(k)$
- $aT\{x_1(n)\} + bT\{x_2(n)\} = a \sum_{k=n_0}^n x_1(k) + b \sum_{k=n_0}^n x_2(k)$
- $T\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = aT\{x_1(n)\} + bT\{x_2(n)\}$ ; **sí es lineal**.

4. Invarianza:

- $T\{x(n - n_1)\} = \sum_{k=n_0}^n x(k - n_1) = \sum_{k=n_0-n_1}^{n-n_1} x(k)$
- $y(n - n_1) = \sum_{k=n_0}^{n-n_1} x(k)$
- $T\{x(n - n_1)\} \neq y(n - n_1)$ ; **no es invariante**.

5. Memoria:

- Para todo  $n \neq n_0$ ,  $y(n)$  depende de valores de  $x(n)$  distintos de  $x(n_0)$ ; **sí tiene memoria**.

$$(c) T\{x(n)\} = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x(k)$$

Nótese que  $n_0$  es un valor constante. La salida para  $n = n_1$  es la suma de  $x(n_1)$  con sus  $n_0$  valores vecinos a la derecha y a la izquierda. Si  $n_0 = 0$  el sistema no hace nada.

#### 1. Estabilidad:

- $|x(n)| \leq M \Rightarrow |T\{x(n)\}| = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} |x(k)| \leq \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} M \leq |2n_0 + 1| M$ ; si  $|n_0| < \infty$  **sí es estable**.

#### 2. Causalidad:

- Si  $n_0 = 0$ , el sistema, que no hace nada, es causal.
- En caso contrario, suponiendo, sin pérdida de generalidad, que  $n_0 > 0$  (porque si  $n_0 < 0$  basta con permutar los límites del sumatorio), las salidas serán diferentes cuando  $n + n_0 > n_1$ , lo que incluirá el intervalo  $n_1 - n_0 \leq n \leq n_1$ ; por tanto **no es causal**.

#### 3. Linealidad:

- $T\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} (ax_1(k) + bx_2(k)) = a \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_1(k) + b \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_2(k)$
- $aT\{x_1(n)\} + bT\{x_2(n)\} = a \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_1(k) + b \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_2(k)$
- $T\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = aT\{x_1(n)\} + bT\{x_2(n)\}$ ; **sí es lineal**.

#### 4. Invarianza:

- $T\{x(n - n_1)\} = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x(k - n_1) = \sum_{k=n-n_0-n_1}^{n+n_0-n_1} x(k)$
- $y(n - n_1) = \sum_{k=n-n_0-n_1}^{n+n_0-n_1} x(k)$
- $T\{x(n - n_1)\} = y(n - n_1)$ ; **sí es invariante**.

#### 5. Memoria:

- Para todo  $n = n_1$ ,  $y(n)$  depende de valores de  $x(n)$  distintos de  $x(n_1)$ ; **sí tiene memoria**, excepto si  $n_0 = 0$  en cuyo caso el sistema **no tiene memoria**.

$$(d) T\{x(n)\} = x(n - n_0)$$

Se trata de un retraso ( $n_0 > 0$ ) o adelanto ( $n_0 < 0$ ) de la entrada. Si  $n_0 = 0$  el sistema no hace nada.

#### 1. Estabilidad:

- $|x(n)| \leq M \Rightarrow |T\{x(n)\}| = |x(n - n_0)| \leq M$ ; **sí es estable**.

#### 2. Causalidad:

- Si  $n_0 < 0$  **no es causal**; si  $n_0 \geq 0$  **sí es causal**.

#### 3. Linealidad:

- $T\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = ax_1(n - n_0) + bx_2(n - n_0)$
- $aT\{x_1(n)\} + bT\{x_2(n)\} = ax_1(n - n_0) + bx_2(n - n_0)$
- $T\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = aT\{x_1(n)\} + bT\{x_2(n)\}$ ; **sí es lineal**.

## 4. Invarianza:

- $T\{x(n - n_1)\} = x((n - n_1) - n_0)$
- $y(n - n_1) = x((n - n_0) - n_1)$
- $T\{x(n - n_1)\} = y(n - n_1)$ ; **sí es invariante.**

## 5. Memoria:

- La salida depende de  $n_0$  valores pasados o futuros de  $x(n)$ ; si  $n_0 \neq 0$  **sí tiene memoria.** Si  $n_0 = 0$  el sistema **no tiene memoria.**

$$(e) T\{x(n)\} = e^{x(n)}$$

## 1. Estabilidad:

- $|x(n)| \leq M \Rightarrow |T\{x(n)\}| = |e^{x(n)}| \leq e^{|x(n)|} \leq e^M$ ; **sí es estable.**

## 2. Causalidad:

- $y_1(n) = e^{x_1(n)}$  e  $y_2(n) = e^{x_2(n)}$ ; la igualdad  $e^{x_1(n)} = e^{x_2(n)}$  se cumplirá en todos aquellos valores de  $n$  en los que  $x_1(n)$  sea igual a  $x_2(n)$  y, en particular, para todo  $n \leq n_1$ ; **sí es causal.**

## 3. Linealidad:

- $T\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = e^{ax_1(n)+bx_2(n)} = e^{ax_1(n)}e^{bx_2(n)}$
- $aT\{x_1(n)\} + bT\{x_2(n)\} = ae^{x_1(n)} + be^{x_2(n)}$
- $T\{ax_1(n) + bx_2(n)\} \neq aT\{x_1(n)\} + bT\{x_2(n)\}$ ; **no es lineal.**

## 4. Invarianza:

- $T\{x(n - n_0)\} = e^{x(n-n_0)}$
- $y(n - n_0) = e^{x(n-n_0)}$
- $T\{x(n - n_0)\} = y(n - n_0)$ ; **sí es invariante.**

## 5. Memoria:

- La salida en  $n = n_0$  sólo depende de  $x(n_0)$ ; **no tiene memoria.**

$$(f) T\{x(n)\} = ax(n) + b$$

## 1. Estabilidad:

- $|x(n)| \leq M \Rightarrow |T\{x(n)\}| = |ax(n) + b| \leq |a|M + |b| \leq N$ ; si  $a < \infty$  y  $b < \infty$  **sí es estable.**

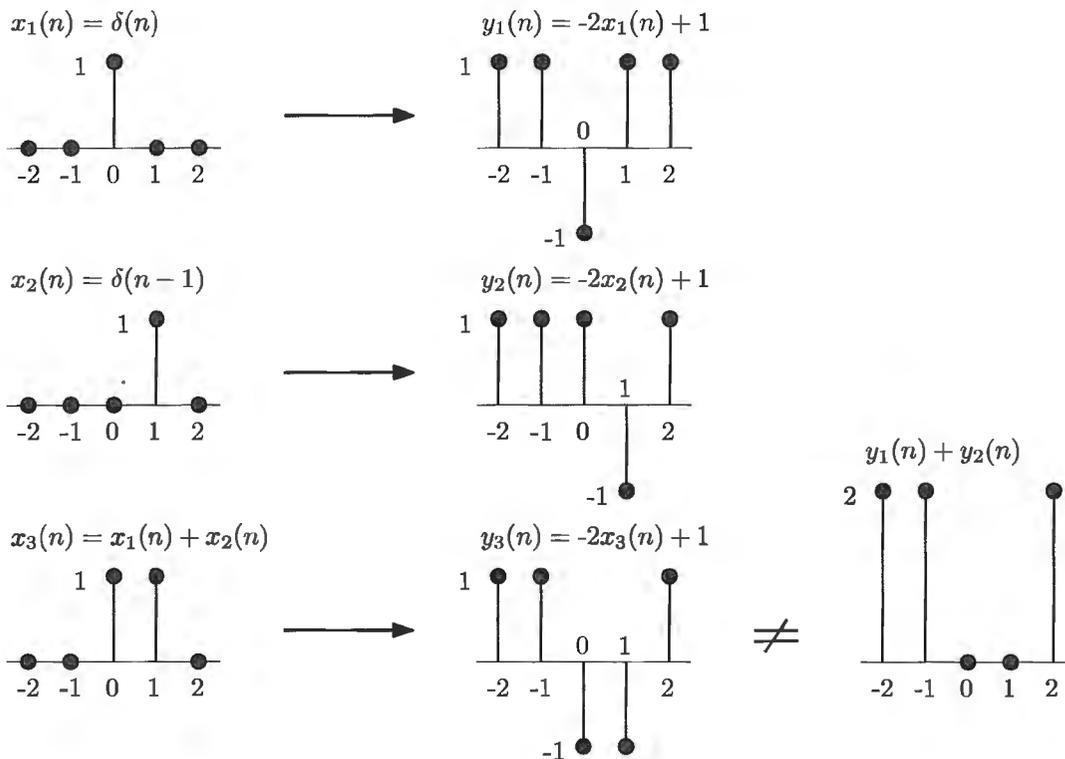
## 2. Causalidad:

- $y_1(n) = ax_1(n) + b$  e  $y_2(n) = ax_2(n) + b$ ; la igualdad  $ax_1(n) + b = ax_2(n) + b$  se cumplirá en todos aquellos valores de  $n$  en los que  $x_1(n)$  sea igual a  $x_2(n)$  y, en particular, para todo  $n \leq n_1$ ; **sí es causal.**

## 3. Linealidad:

- $T\{c_1x_1(n) + c_2x_2(n)\} = a(c_1x_1(n) + c_2x_2(n)) + b = ac_1x_1(n) + ac_2x_2(n) + b$

- $c_1T\{x_1(n)\} + c_2T\{x_2(n)\} = c_1(ax_1(n) + b) + c_2(ax_2(n) + b) = ac_1x_1(n) + ac_2x_2(n) + b(c_1 + c_2)$
- $T\{c_1x_1(n) + c_2x_2(n)\} \neq c_1T\{x_1(n)\} + c_2T\{x_2(n)\}$ ; **no es lineal.**
- **Contraejemplo con  $x_1(n) = \delta(n)$ ,  $x_2(n) = \delta(n - 1)$ ,  $a = -2$ ,  $b = 1$ ,  $c_1 = 1$  y  $c_2 = 1$ .**



Se observa que el sistema no es lineal porque  $y_3(n) = -2x_3(n) + 1 = -2(x_1(n) + x_2(n)) + 1 \neq y_1(n) + y_2(n)$

4. Invarianza:

- $T\{x(n - n_0)\} = ax(n - n_0) + b$
- $y(n - n_0) = ax(n - n_0) + b$
- $T\{x(n - n_0)\} = y(n - n_0)$ ; **sí es invariante.**

5. Memoria:

- La salida en  $n = n_0$  sólo depende de  $x(n_0)$ ; **no tiene memoria.**

(g)  $T\{x(n)\} = x(-n)$

La salida es la señal simétrica respecto al eje de ordenadas de la entrada.

1. Estabilidad:

- $|x(n)| \leq M \Rightarrow |T\{x(n)\}| = |x(-n)| \leq M$ ; es **estable.**

2. Causalidad:

- Para cualquier valor  $n < -n_1$  las salidas  $y_1 = x_1(-n)$  e  $y_2(n) = x_2(-n)$  serán distinta; **no es causal.**

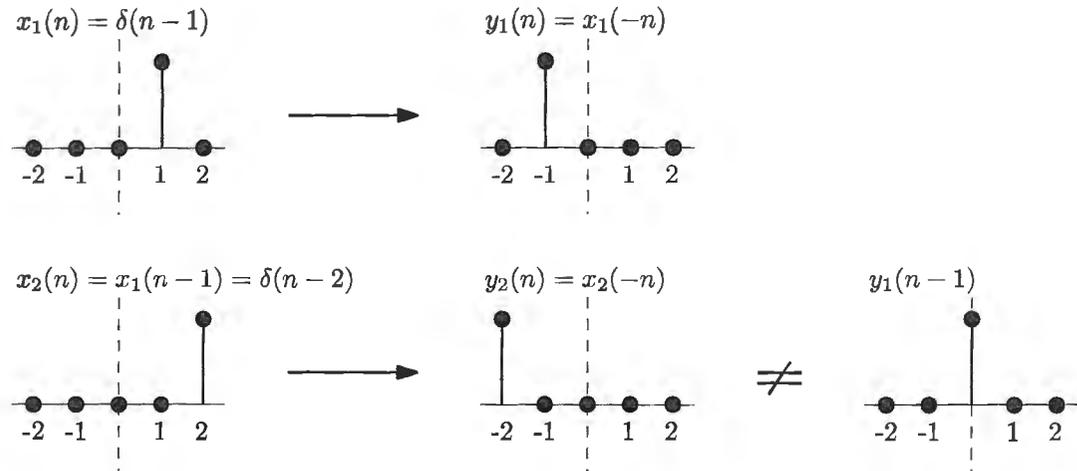
3. Linealidad:

- $T\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = ax_1(-n) + bx_2(-n)$

- $aT\{x_1(n)\} + bT\{x_2(n)\} = ax_1(-n) + bx_2(-n)$
- $T\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = aT\{x_1(n)\} + bT\{x_2(n)\}$ ; es **lineal**.

4. Invarianza:

- $T\{x(n - n_0)\} = x((-n) - n_0) = x(-n - n_0)$
- $y(n - n_0) = x(-(n - n_0)) = x(-n + n_0)$
- $T\{x(n - n_0)\} \neq y(n - n_0)$ ; **no es invariante**.
- Ejemplo:



5. Memoria:

- La salida en  $n = n_0$  con  $n_0 \neq 0$ , depende de valores de  $x(n)$  distintos de  $x(n_0)$ ; tiene **memoria**.

$(h) T\{x(n)\} = x(n) + 3u(n + 1)$

Nótese que el término  $3u(n + 1)$  suma 3 a la señal para valores de  $n \geq -1$ .

1. Estabilidad:

- $|x(n)| \leq M \Rightarrow |T\{x(n)\}| = |x(n) + 3u(n + 1)| \leq M + 3$ ; **sí es estable**.

2. Causalidad:

- $y_1(n) = x_1(n) + 3u(n + 1)$  e  $y_2(n) = x_2(n) + 3u(n + 1)$ ; la igualdad  $x_1(n) + 3u(n + 1) = x_2(n) + 3u(n + 1)$  se cumplirá en todos aquellos valores de  $n$  en los que  $x_1(n)$  sea igual a  $x_2(n)$  y, en particular, para todo  $n \leq n_1$ ; **sí es causal**.

3. Linealidad:

- $T\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = (ax_1(n) + bx_2(n)) + 3u(n + 1)$
- $aT\{x_1(n)\} + bT\{x_2(n)\} = a(x_1(n) + 3u(n + 1)) + b(x_2(n) + 3u(n + 1)) = ax_1(n) + bx_2(n) + 6u(n + 1)$
- $T\{ax_1(n) + bx_2(n)\} \neq aT\{x_1(n)\} + bT\{x_2(n)\}$ ; **no es lineal**.

4. Invarianza:

- $T\{x(n - n_0)\} = x(n - n_0) + 3u(n + 1)$
- $y(n - n_0) = x(n - n_0) + 3u((n - n_0) + 1)$

- $T\{x(n - n_0)\} \neq y(n - n_0)$ ; **no es invariante.**

5. Memoria:

- La salida en  $n = n_0$  sólo depende de  $x(n_0)$ ; **no tiene memoria.**

## Problema 2.7

Determine si cada una de las siguientes señales es periódica. Si lo es, indique su periodo.

(a)  $x(n) = e^{j(\pi n/6)}$

(b)  $x(n) = e^{j(3\pi n/4)}$

(c)  $x(n) = [\text{sen}(\pi n/5)] / (\pi n)$

(d)  $x(n) = e^{j(\pi n/\sqrt{2})}$

(a)  $x(n) = e^{j(\pi n/6)}$

- $e^{j\frac{\pi}{6}n} = e^{j\frac{\pi}{6}(n+N)} = e^{j\frac{\pi}{6}n} e^{j\frac{\pi}{6}N}$ ; para que se cumpla la igualdad y, por tanto,  $x(n)$  sea periódica,  $e^{j\frac{\pi}{6}N}$  debe ser igual a 1.
- Como  $1 = e^{j2\pi k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , debe cumplirse  $\frac{\pi}{6}N = 2\pi k$ , es decir  $N = 12k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- El periodo  $N$  debe ser el mínimo entero distinto de 0 que permita  $x(n) = x(n + N)$ .
- Con  $k = 1 \Rightarrow N = 12$ ;  $x(n)$  es **periódica**, con periodo  $N = 12$ .

(b)  $x(n) = e^{j(3\pi n/4)}$

- $e^{j\frac{3\pi}{4}n} = e^{j\frac{3\pi}{4}(n+N)} = e^{j\frac{3\pi}{4}n} e^{j\frac{3\pi}{4}N}$ ; para que se cumpla la igualdad y, por tanto,  $x(n)$  sea periódica,  $e^{j\frac{3\pi}{4}N}$  debe ser igual a 1.
- Como  $1 = e^{j2\pi k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , debe cumplirse  $\frac{3\pi}{4}N = 2\pi k$ , es decir  $N = \frac{8}{3}k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- El periodo  $N$  debe ser el mínimo entero distinto de 0 que permita  $x(n) = x(n + N)$ .
- Con  $k = 3 \Rightarrow N = 8$ ;  $x(n)$  es **periódica**, con periodo  $N = 8$ .

(c)  $x(n) = [\text{sen}(\pi n/5)] / (\pi n)$

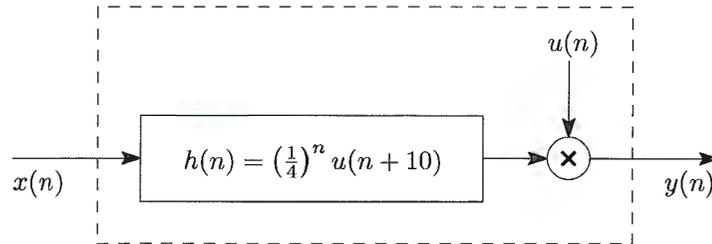
- No puede ser periódica porque el denominador es una función lineal en  $n$  y, por tanto, no periódica.

(d)  $x(n) = e^{j(\pi n/\sqrt{2})}$

- $e^{j\frac{\pi}{\sqrt{2}}n} = e^{j\frac{\pi}{\sqrt{2}}(n+N)} = e^{j\frac{\pi}{\sqrt{2}}n} e^{j\frac{\pi}{\sqrt{2}}N}$ ; para que se cumpla la igualdad y, por tanto,  $x(n)$  sea periódica,  $e^{j\frac{\pi}{\sqrt{2}}N}$  debe ser igual a 1.
- Como  $1 = e^{j2\pi k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , debe cumplirse  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}N = 2\pi k$ , es decir  $N = 2\sqrt{2}k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- El periodo  $N$  debe ser el mínimo entero distinto de 0 que permita  $x(n) = x(n + N)$ .
- No existen valores enteros de  $k$  y  $N$  que cumplan la condición, ya que  $\sqrt{2}$  es irracional; por tanto  $x(n)$  **no es periódica**.

### Problema 2.15

Considere el sistema que se muestra en la figura. La salida de un sistema LTI cuya respuesta al impulso es  $h(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n+10)$  se multiplica por una función escalón unidad  $u(n)$  para obtener la salida del sistema completo. Responda a cada una de las siguientes cuestiones, justificando brevemente las respuestas: (a) ¿es el sistema completo LTI?, (b) ¿es el sistema completo causal? y (c) ¿es el sistema completo estable en el sentido BIBO?



#### (a) LTI

- Para  $x_1(n) = \delta(n)$ ; la salida del sistema será  $y_1(n) = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n+10)\right] u(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$ .
- Para  $x_2(n) = \delta(n-1)$ ; la salida del sistema será  $y_2(n) = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u(n+9)\right] u(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u(n)$ .
- $x_2(n) = x_1(n-1)$ , pero  $y_2(n) \neq y_1(n-1) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u(n-1)$ ; por tanto, el sistema **no** es LTI.

#### (b) Causalidad

- Considere  $x_2(n)$  e  $y_2(n)$  del apartado (a).  $x_2(n) = 0$ ,  $n < 1$ , pero  $y_2(0) \neq 0$ . El sistema **no** es causal.

#### (c) Estabilidad

- $h(n)$  es absolutamente sumable,  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k u(k+10) = \sum_{k=-10}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{-10}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)}$ , es decir, estable.
- La multiplicación por  $u(n)$  no provoca que ninguna secuencia acotada se convierta en no acotada; el sistema es **estable**.

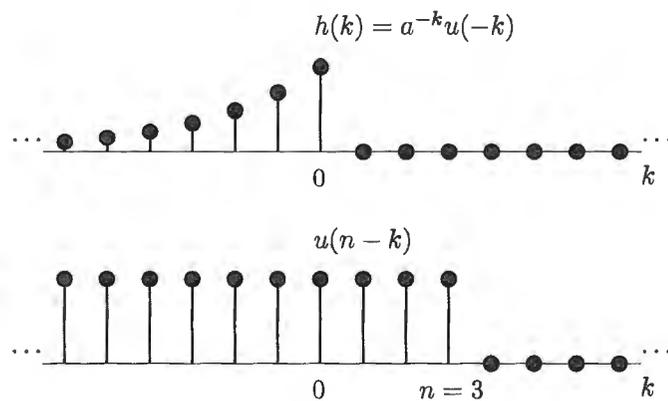
### Problema 2.3

Evaluando directamente la suma de convolución, determine la respuesta al escalón de un sistema lineal invariante con el tiempo cuya respuesta al impulso es:  $h(n) = a^{-n}u(-n)$ ,  $0 < a < 1$ .

- Tenemos  $h(n) = a^{-n}u(-n)$ ,  $0 < a < 1$  y  $x(n) = u(n)$ .
- Aplicando la suma de convolución:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{-k}u(-k)u(n-k)$$

- En la siguiente gráfica se muestra la señal  $h(k)$  con  $a = 0,7$  y  $u(n-k)$  con  $n = 3$



Se observan claramente dos zonas:

- $n \leq 0$  en donde los límites del sumatorio van desde  $-\infty$  hasta el valor actual de  $n$ :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n a^{-k} = \sum_{k=-n}^{\infty} a^k = \frac{a^{-n}}{1-a}$$

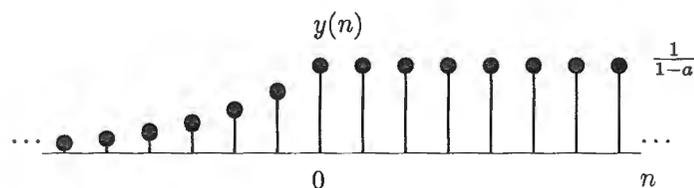
- $n \geq 0$ , en la que los límites del sumatorio van desde  $-\infty$  hasta 0:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^0 a^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$$

- Para  $n = 0$ , ambos resultados coinciden:  $\frac{a^{-0}}{1-a} = \frac{1}{1-a}$

- El resultado es, por tanto:

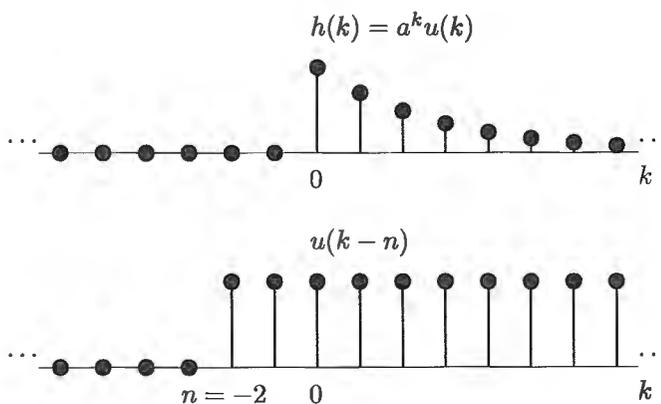
$$y(n) = \begin{cases} \frac{a^{-n}}{1-a} & n < 0 \\ \frac{1}{1-a} & n \geq 0 \end{cases} = \frac{1}{1-a} [a^{-n}u(-n-1) + u(n)]$$



- También se puede proceder aplicando la propiedad conmutativa de la convolución:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)a^{-(n-k)}u(-(n-k)) = a^{-n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u(k)u(k-n)$$

- Gráficamente, con  $a = 0,7$  y  $u(k-n)$  con  $n = -2$



Se observan también dos zonas:

- $n \leq 0$  en donde los límites del sumatorio van desde 0 a  $\infty$ :

$$y(n) = a^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{a^{-n}}{1-a}$$

- $n \geq 0$ , en la que los límites del sumatorio van desde  $n$  a  $\infty$ :

$$y(n) = a^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} a^k = (m = k - n) = a^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} a^{(m+n)} = \sum_{m=0}^{\infty} a^m = \frac{1}{1-a}$$

- El resultado es igual que el calculado previamente:

$$y(n) = \begin{cases} \frac{a^{-n}}{1-a} & n < 0 \\ \frac{1}{1-a} & n \geq 0 \end{cases} = \frac{1}{1-a} [a^{-n}u(-n-1) + u(n)]$$

- NOTA: Fórmula de la suma de una serie geométrica con un número infinito de elementos:

$$\sum_{k=N_1}^{\infty} a^k = \frac{a^{N_1}}{1-a}, \text{ si } |a| < 1$$

**Problema 2.13**

Indique cuáles de las siguientes señales discretas son autofunciones para sistemas LTI discretos y estables: 

(a)  $e^{j2\pi n/3}$

(b)  $3^n$

(c)  $2^n u(-n - 1)$

(d)  $\cos(\omega_0 n)$

(e)  $(1/4)^n$

(f)  $(1/4)^n u(n) + 4^n u(-n - 1)$

Para que una señal  $x(n)$  sea una autofunción para los sistemas LTI es condición suficiente que tenga forma exponencial  $x(n) = \alpha^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ , ya que aplicando la suma de convolución, resulta:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\alpha^{n-k} = \alpha^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\alpha^{-k}$$


Es decir, la salida  $y(n)$  es la misma señal de entrada  $x(n) = \alpha^n$  multiplicada por la constante  $H(\alpha) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\alpha^{-k}$ ,  $H(\alpha) \in \mathbb{C}$ , llamada autovalor:  $y(n) = x(n)H(\alpha)$ . Nótese que  $H(\alpha)$  depende de  $\alpha$ , pero no de  $n$ .

(a)  $e^{j2\pi n/3}$

- $e^{j2\pi n/3} = \alpha^n$ ,  $\alpha = e^{j2\pi/3}$ ; **sí** es una autofunción.

(b)  $3^n$

- $3^n = \alpha^n$ ,  $\alpha = 3$ ; **sí** es una autofunción.

(c)  $2^n u(-n - 1)$

- $2^n u(-n - 1) \neq \alpha^n$ ; **no** es una autofunción.
  - La multiplicación por un escalón (desplazado o no, invertido o no) hace que la variable  $n$  aparezca en alguno de los límites de la suma de convolución, por lo que la salida no será la entrada multiplicada por una constante.
- 

(d)  $\cos(\omega_0 n)$

- $\cos(\omega_0 n) \neq \alpha^n$ ; **no** es una autofunción.
- Pero  $\cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n} = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n$ ,  $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha_1 = e^{j\omega_0}$ ,  $\alpha_2 = e^{-j\omega_0}$ ; es decir, una combinación lineal de dos autofunciones.
- En general, una combinación lineal de autofunciones no tiene por qué ser una autofunción.

(e)  $\left(\frac{1}{4}\right)^n$

- $\left(\frac{1}{4}\right)^n = \alpha^n$ ,  $\alpha = \frac{1}{4}$ ; **sí** es una autofunción.
- 

$$(f) \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) + 4^n u(-n-1)$$

$$\blacksquare \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) + 4^n u(-n-1) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{4}\right)^{-n} u(-n-1) \neq \alpha^n; \text{ no es una autofunción.}$$

**Problema 2.11**

Considere un sistema LTI con respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \frac{1 - e^{-j2\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j4\omega}} \quad -\pi < \omega \leq \pi$$

Determine la salida  $y(n)$  para todo  $n$  si la entrada para todo  $n$  es

$$x(n) = \text{sen}\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

- $x(n)$  no es una autofunción, pero sí es una combinación lineal de autofunciones (ver Problema 2.13):

$$x(n) = \text{sen}\left(\frac{\pi n}{4}\right) = \frac{e^{j\pi n/4}}{2j} - \frac{e^{-j\pi n/4}}{2j}$$

- Aplicando linealidad y el concepto de autofunción la salida puede escribirse directamente como:

$$y(n) = \frac{1}{2j} \left[ H\left(\frac{\pi}{4}\right) e^{j\pi n/4} - H\left(-\frac{\pi}{4}\right) e^{-j\pi n/4} \right]$$

- Las constantes (autovalores) son:

$$H\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - e^{-j2\pi/4}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j4\pi/4}} = \frac{1 - e^{-j\pi/2}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\pi}} = \frac{1 - (-j)}{1 + \frac{1}{2}(-1)} = 2(1 + j) = 2\sqrt{2}e^{j\pi/4}$$

$$H\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - e^{j2\pi/4}}{1 + \frac{1}{2}e^{j4\pi/4}} = \frac{1 - e^{j\pi/2}}{1 + \frac{1}{2}e^{j\pi}} = \frac{1 - j}{1 + \frac{1}{2}(-1)} = 2(1 - j) = 2\sqrt{2}e^{-j\pi/4}$$

- Finalmente:

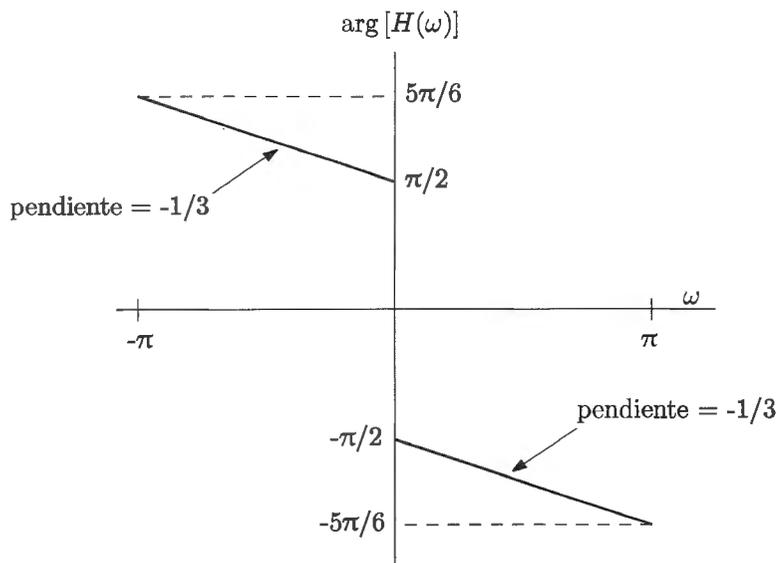
$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{2j} \left( 2\sqrt{2}e^{j\pi/4} e^{j\pi n/4} - 2\sqrt{2}e^{-j\pi/4} e^{-j\pi n/4} \right) = \\ &= 2\sqrt{2} \text{sen}\left(\frac{\pi(n+1)}{4}\right) = 2\sqrt{2} \text{sen}\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

### Problema 2.41

Considere un sistema LTI con  $|H(\omega)| = 1$ , y sea  $\arg [H(\omega)]$  como se muestra en la figura. Si la entrada es

$$x(n) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right)$$

determine la salida  $y(n)$ .



- $H(\omega)$  es hermítica (y, por tanto,  $h(n)$  real) porque la fase es impar y el módulo par; es decir,  $H^*(\omega) = H(-\omega)$ .
- Como  $H(\omega)$  es hermítica se puede escribir directamente

$$y(n) = \left|H\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right| \cos\left(\frac{3\pi}{2}n + \frac{\pi}{4} + \angle H\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

- La fase es lineal y puede expresarse como

$$\angle H(\omega) = \begin{cases} -\frac{1}{3}\omega + \frac{\pi}{2} & -\pi \leq \omega < 0 \\ -\frac{1}{3}\omega - \frac{\pi}{2} & 0 < \omega < \pi \end{cases}$$

- Para calcular  $H\left(\frac{3\pi}{2}\right)$  hay que tener en cuenta que  $H(\omega)$  es periódica de periodo  $2\pi$ :

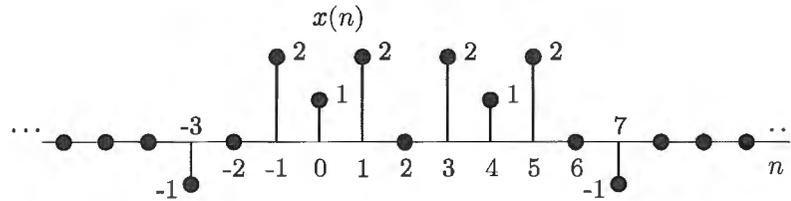
$$H\left(\frac{3\pi}{2}\right) = H\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

- Por tanto:

$$y(n) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}n + \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}n + \frac{11\pi}{12}\right)$$

**Problema 2.55**

Sea  $X(\omega)$  la transformada de Fourier de la secuencia  $x(n)$  de la figura. Haga los siguientes cálculos sin evaluar explícitamente  $X(\omega)$ :



- (a) Calcule  $X(\omega)|_{\omega=0}$ .
- (b) Calcule  $X(\omega)|_{\omega=\pi}$ .
- (c) Encuentre  $\angle X(\omega)$ .
- (d) Evalúe  $\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)d\omega$ .
- (e) Determine y dibuje la señal cuya transformada de Fourier es  $X(-\omega)$ .
- (f) Determine y dibuje la señal cuya transformada de Fourier es  $\Re \{X(\omega)\}$ .

(a)  $X(\omega)|_{\omega=0}$

- Aplicando la definición de la transformada de Fourier y particularizando para  $\omega = 0$

$$X(\omega)|_{\omega=0} = X(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \Big|_{\omega=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) = 8$$

(b)  $X(\omega)|_{\omega=\pi}$

- Aplicando la definición de la transformada de Fourier y particularizando para  $\omega = \pi$

$$X(\omega)|_{\omega=\pi} = X(\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \Big|_{\omega=\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(-1)^n = -4$$

(c)  $\angle X(\omega)$

- La señal  $x(n)$  es simétrica respecto a  $n = 2$ ; la señal  $x_1(n) = x(n+2)$  es simétrica respecto al origen.
- Una señal simétrica respecto al origen tiene fase nula. Sea, por ejemplo la señal  $x_2(n) = 2\delta(n+1) + 2\delta(n-1)$ . Su transformada de Fourier es

$$X_2(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = 2e^{j\omega} + 2e^{-j\omega} = 4 \cos(\omega)$$

Los valores de  $X_2(\omega)$  son siempre reales y, por tanto, tienen fase nula. Cualesquiera otros dos valores simétricos respecto al origen tendrán también una transformada de fase nula.

- Así pues, aplicando la propiedad de desplazamiento en  $n$

$$X_1(\omega) = e^{j\omega^2} X(\omega) \Rightarrow X(\omega) = e^{-j\omega^2} X_1(\omega), X_1(\omega) \in \mathbb{R}$$

- Por tanto, la fase de  $X(\omega)$  es

$$\angle X(\omega) = -2\omega, -\pi \leq \omega < \pi$$

(d)  $\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) d\omega$

- Aplicando la definición de la transformada inversa de  $X(\omega)$  y particularizando en  $n = 0$

$$x(n)|_{n=0} = x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega \Big|_{n=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) d\omega \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) d\omega = 2\pi x(0) = 2\pi$$

(e)  $X(-\omega)$

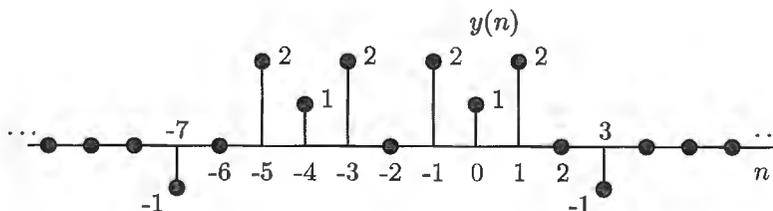
- Sea  $y(n)$  la secuencia buscada.
- Aplicando la definición de la transformada de Fourier

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \Rightarrow X(-\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{j\omega n}$$

- Esta expresión debe ser la transformada de Fourier de  $y(n)$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{j\omega n} = Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) e^{-j\omega n}$$

- Para que se cumpla esta igualdad la única posibilidad es que  $y(n) = x(-n)$



(f)  $\Re \{X(\omega)\}$

- Sea  $y(n)$  la secuencia buscada.
- En el apartado (c) se ha calculado  $X(\omega) = e^{-j\omega 2} X_1(\omega)$ ,  $X_1(\omega) \in \mathbb{R}$
- La parte real es

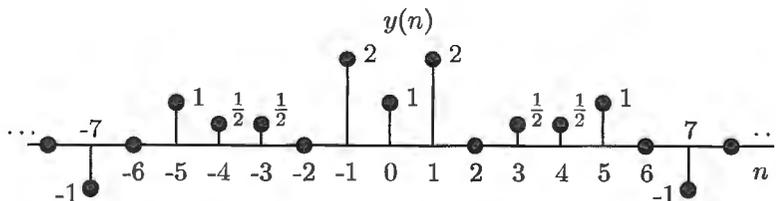
$$\Re \{X(\omega)\} = X_R(\omega) = X_1(\omega) \cos(-\omega 2) = X_1 \cos(\omega 2) = \frac{1}{2} X_1(\omega) e^{-j\omega 2} + \frac{1}{2} X_1(\omega) e^{j\omega 2}$$

- La transformada inversa es

$$y(n) = \frac{1}{2} x_1(n-2) + \frac{1}{2} x_1(n+2)$$

- Teniendo en cuenta que  $x_1(n) = x(n+2)$

$$y(n) = \frac{1}{2} x(n) + \frac{1}{2} x(n+4)$$



## Problema 2.8

Un sistema LTI tiene respuesta al impulso  $h(n) = 5(-1/2)^n u(n)$ . Use la transformada de Fourier para calcular la salida del sistema cuando la entrada es  $x(n) = (1/3)^n u(n)$ .

- La transformada de Fourier de una señal de tipo  $x(n) = a^n u(n)$ ,  $|a| < 1$ , como las  $h(n)$  y  $x(n)$  dadas, puede calcularse fácilmente (o buscarse en una tabla):

$$X(\omega) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n$$

- La última expresión toma la forma de una serie geométrica de razón  $r = ae^{-j\omega}$  cuya suma, habida cuenta de que  $|r| < 1$ , es:

$$X(\omega) = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

- Particularizando:

$$H(\omega) = 5 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \quad X(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

- La salida del sistema  $y(n)$ , puede calcularse como la transformada inversa de:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \frac{5}{\left(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)}$$

- Para aplicar linealidad necesitamos descomponer en fracciones simples:

$$Y(\omega) = \frac{A}{\left(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} + \frac{B}{\left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)}$$

con constantes  $A$  y  $B$  que puede determinarse con cualquiera de los métodos siguientes:

- Método 1: Sistema de ecuaciones

$$Y(\omega) = \frac{A}{\left(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} + \frac{B}{\left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)} = \frac{5}{\left(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)}$$

$$A\left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right) + B\left(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} A + B = 5 \\ -A/3 + B/2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 3 \\ B = 2 \end{array} \right.$$

- Método 2: Residuos

$$A = Y(\omega) \left(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) \Big|_{e^{-j\omega}=-2} = \frac{5}{1 - \frac{1}{3}(-2)} = 3$$

$$B = Y(\omega) \left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right) \Big|_{e^{-j\omega}=3} = \frac{5}{1 + \frac{1}{2}(-2)} = 2$$

obteniendo, con cualquiera de los métodos

$$Y(\omega) = \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} + \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)}$$

- Cada sumando de  $Y(\omega)$  es de la forma  $Y_i(\omega) = \frac{1}{1 - a_i e^{-j\omega}}$ ,  $|a_i| < 1$ , por lo que su transformada inversa es  $y_i(n) = a_i^n u(n)$ . Aplicando este resultado y linealidad se obtiene finalmente:

$$y(n) = 3 \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) = \left[3 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] u(n)$$

**Problema 3.1**

Determine la transformada Z, incluyendo la región de convergencia, de las siguientes secuencias:

(a)  $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

(b)  $-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$

(c)  $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n)$

(d)  $\delta(n)$

(e)  $\delta(n-1)$

(f)  $\delta(n+1)$

(g)  $\left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n) - u(n-10)]$

(a)  $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$\text{ROC} : \left| \frac{1}{2} z^{-1} \right| < 1 \Rightarrow |z| > \frac{1}{2}$$

(b)  $-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} \Rightarrow$$

$$(n \rightarrow -n) \Rightarrow -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} z^n = -\sum_{n=1}^{\infty} (2z)^n = -\frac{2z}{1-2z} = -\frac{2z}{2z(\frac{1}{2}z^{-1}-1)} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\text{ROC} : |2z| < 1 \Rightarrow |z| < \frac{1}{2}$$

(c)  $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n)$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}$$

$$(n \rightarrow -n) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n = \frac{1}{1-2z} = \frac{1}{2z(\frac{1}{2}z^{-1}-1)} = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\text{ROC} : |2z| < 1 \Rightarrow |z| < \frac{1}{2}$$

Nota:  $z = 0 \Rightarrow \frac{1}{1-2z}\Big|_{z=0} = 1$ , pero  $\frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\Big|_{z=0} = \frac{\infty}{\infty}$ . La indeterminación se resuelve tomando límite cuando  $z \rightarrow 0$ .

(d)  $\delta(n)$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)z^{-n} = z^{-0} = z^0 = 1$$

ROC: No hay ninguna condición para que la suma converja, por tanto  $0 \leq |z| \leq \infty$ ; es decir, todo el plano  $z$ .

(e)  $\delta(n-1)$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-1)z^{-n} = z^{-1}$$

ROC: No hay ninguna condición para que la suma converja, pero  $\lim_{z \rightarrow 0} z^{-1} = \infty$ , así que  $0 < |z| \leq \infty$  ó  $z \neq 0$  ó  $|z| > 0$ ; es decir, todo el plano  $z$  menos  $z = 0$ .

(f)  $\delta(n+1)$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n+1)z^{-n} = z$$

ROC: No hay ninguna condición para que la suma converja, pero  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z = \infty$ , así que  $0 \leq |z| < \infty$  ó  $|z| < \infty$ ; es decir, todo el plano  $z$  menos el círculo del infinito  $|z| = \infty$ .

(g)  $\left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n) - u(n-10)]$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n) - u(n-10)] z^{-n} &= \sum_{n=0}^9 \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^9 \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n = \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^9 \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} z^{-10}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \end{aligned}$$

ROC: No hay ninguna condición para que la suma converja, pero  $\lim_{z \rightarrow 0} X(z) = \infty$ , así que  $|z| > 0$ ; es decir, todo el plano  $z$  menos  $z = 0$ .

### Problema 3.6

A continuación se indican algunas transformadas  $Z$ . Para cada una de ellas, determine la transformada inversa usando los dos métodos discutidos en la sección 3.3 del libro: descomposición en fracciones simples y expansión en serie de potencias. Indique además en cada caso si existe transformada de Fourier.

$$(a) X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}$$

$$(b) X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, |z| < \frac{1}{2}$$

$$(c) X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}, |z| > \frac{1}{2}$$

$$(d) X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}, |z| > \frac{1}{2}$$

$$(e) X(z) = \frac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a}, |z| > \left| \frac{1}{a} \right|$$

$$(a) X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}$$

- Fracciones simples: ya está descompuesto; por inspección:  $x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

- División:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} = 1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3} + \dots$$

$$x(n) = \left\{ \dots, 0, 0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots \right\} = \left\{ \dots, 0, 0, \left(-\frac{1}{2}\right)^0, \left(-\frac{1}{2}\right)^1, \left(-\frac{1}{2}\right)^2, \left(-\frac{1}{2}\right)^3, \dots \right\}$$

$$= \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \end{cases} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

- La ROC incluye  $|z| = 1$ , por tanto existe  $X(\omega)$

$$(b) X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, |z| < \frac{1}{2}$$

- Fracciones simples: ya está descompuesto; por inspección:  $x(n) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$

- División:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \frac{1}{\frac{1}{2}z^{-1} + 1} = 2z - 4z^2 + 8z^3 - 16z^4 + \dots$$

$$x(n) = \{ \dots, 16, 8, -4, 2, 0, \dots \}$$

$$= \left\{ \dots, -\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}, -\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}, -\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}, -\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}, 0, 0, \dots \right\}$$

$$= \begin{cases} 0 & n \geq 0 \\ -\left(-\frac{1}{2}\right)^n & n < 0 \end{cases} = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$$

- La ROC no incluye  $|z| = 1$ , por tanto no existe  $X(\omega)$

$$(c) X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}, |z| > \frac{1}{2}$$

▪ Fracciones simples:

1. Hay que calcular los polos (raíces del denominador); pero ¡ojo!, la variable independiente es  $z$ . Si  $1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2} = 0$ , para aplicar la fórmula  $(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$  hay que identificar  $a = 1$ ,

$$b = \frac{3}{4} \text{ y } c = \frac{1}{8}, \text{ ya que } X(z) = \frac{z^{-1} \left( z - \frac{1}{2} \right)}{z^{-2} \left( z^2 + \frac{3}{4}z + \frac{1}{8} \right)} = \frac{z^2 - \frac{1}{2}z}{z^2 + \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}}. \text{ Los polos resultan } z_{p1} = -\frac{1}{4} \text{ y } z_{p2} = -\frac{1}{2}.$$

2. También se pueden calcular las raíces considerando  $z^{-1}$  como la variable independiente; en cuyo caso  $a = \frac{1}{8}$ ,  $b = \frac{3}{4}$  y  $c = 1$ . Si se hace así, los polos resultan  $z_{p1}^{-1} = -4$  y  $z_{p2}^{-1} = -2$ . Nótese que se ha considerado  $z^{-1}$  como variable independiente y, por tanto, las raíces calculadas son inversas de las obtenidas anteriormente; lo cual es correcto.

3. A partir de las raíces se construyen las fracciones simples:

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{A}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{B}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

4. Aplicando el método del sistema de ecuaciones (ver problema 2.8), resulta

$$A \left( 1 + \frac{1}{2}z^{-1} \right) + B \left( 1 + \frac{1}{4}z^{-1} \right) = 1 - \frac{1}{2}z^{-1} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ 2A + B = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -3 \\ B = 4 \end{cases}$$

5. Finalmente:

$$X(z) = \frac{-3}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{4}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}$$

que, por inspección (y linealidad) resulta:

$$x(n) = -3 \left( -\frac{1}{4} \right)^n u(n) + 4 \left( -\frac{1}{2} \right)^n u(n) = \left[ -3 \left( -\frac{1}{4} \right)^n + 4 \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right] u(n)$$

▪ División: No merece la pena; es un rollo y se llega, obviamente, al mismo resultado con más dificultad.

▪ La ROC incluye  $|z| = 1$ , por tanto existe  $X(\omega)$

$$(d) X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}, |z| > \frac{1}{2}$$

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{\left( 1 - \frac{1}{2}z^{-1} \right) \left( 1 + \frac{1}{2}z^{-1} \right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \Rightarrow x(n) = \left( -\frac{1}{2} \right)^n u(n)$$

▪ La ROC incluye  $|z| = 1$ , por tanto existe  $X(\omega)$

$$(e) X(z) = \frac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a}, |z| > \left| \frac{1}{a} \right|$$

$$X(z) = \frac{1 - az^{-1}}{-a \left( 1 - \frac{1}{a}z^{-1} \right)} = -\frac{1}{a} \frac{\left( 1 - az^{-1} \right)}{\left( 1 - \frac{1}{a}z^{-1} \right)} = -\frac{1}{a} \left[ \frac{1}{1 - \frac{1}{a}z^{-1}} - \frac{az^{-1}}{1 - \frac{1}{a}z^{-1}} \right]$$

$$= -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{a}z^{-1}} + z^{-1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{a}z^{-1}}$$

- Primer sumando:  $x_1(n) = -\frac{1}{a} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^n u(n) = -\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1} u(n) = -\left(a^{-(n+1)}\right) u(n)$
- Para el segundo sumando se puede aplicar la propiedad  $x(n - n_0) \longleftrightarrow z^{-n_0} X(z)$ , con  $n_0 = 1$ ; es decir,  $x_2(n - 1) = \left(\frac{1}{a}\right)^n u(n)$ , así que  $x_2(n) = \left(\frac{1}{a}\right)^{n-1} u(n - 1) = a^{-(n-1)} u(n - 1)$ .
- En resumen:  $x(n) = x_1(n) + x_2(n) = -\left(a^{-(n+1)}\right) u(n) + a^{-(n-1)} u(n - 1)$ , que podría escribirse también como  $x(n) = -a^{-1} \delta(n) + \left[\left(a^{-(n-1)}\right) - \left(a^{-(n+1)}\right)\right] u(n - 1)$ .
- Para que la ROC incluya  $|z| = 1$  y, por tanto exista  $X(\omega)$ , debe cumplirse  $\left|\frac{1}{a}\right| < 1$  ó  $|a| > 1$

**Problema 3.9**

Un sistema LTI causal tiene una respuesta al impulso  $h(n)$  cuya transformada  $z$  es

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

(a) ¿Cuál es la ROC de  $H(z)$ ?

(b) El sistema, ¿es estable?

(c) Encuentre la transformada  $z$  de una entrada  $x(n)$  que produce la salida

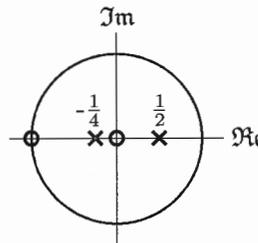
$$y(n) = -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n) - \frac{4}{3} (2)^n u(-n - 1)$$

(d) Encuentre la respuesta al impulso  $h(n)$  del sistema.

(a) ROC

Como el sistema es causal, la ROC debe contener los puntos del plano cuyo valor absoluto sea mayor que el valor absoluto del polo más alejado de  $z = 0$ . En este caso, los polos son  $z_{p1} = \frac{1}{2}$  y  $z_{p2} = -\frac{1}{4}$ , así que la ROC es  $|z| > \frac{1}{2}$ .

El diagrama de polos y ceros completo es:



(b) Estabilidad

Para que un sistema sea estable, la ROC debe contener el círculo unidad, lo que, efectivamente, ocurre; así que el sistema es estable.

(c) Calcular  $X(z)$  que produce  $y(n) = -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n) - \frac{4}{3} (2)^n u(-n - 1)$

- $Y(z) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 - 2z^{-1}} = \frac{1 + z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right) \left(1 - 2z^{-1}\right)}$

- La ROC del primer sumando es  $|z| > \frac{1}{4}$ , la del segundo sumando,  $|z| < 2$ ; así que la ROC de  $Y(z)$  es la intersección  $\frac{1}{4} < |z| < 2$ .

- La operación  $X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)}$  puede hacerse porque existe intersección de las ROCs,  $\frac{1}{4} < |z| < 2$ ; el resultado será válido, al menos en esta intersección.

$$\blacksquare X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{(1+z^{-1})}{(1+\frac{1}{4}z^{-1})(1-2z^{-1})} \cdot \frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-1})}{(1+z^{-1})} = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-2z^{-1}}$$

- Al realizar la división ha habido cancelación del cero  $z_{c1} = 1$  y del polo  $z_{p1} = \frac{1}{4}$  de  $H(z)$ . La ROC de  $X(z)$  ahora sólo depende de su polo  $z_p = 2$ . Con esta información las posibles ROCs podrían ser  $|z| > 2$  ó  $|z| < 2$ ; pero teniendo en cuenta que la operación se ha efectuado en la intersección  $\frac{1}{2} < |z| < 2$ , la ROC sólo puede ser  $|z| < 2$ .
- Aunque no se pide,  $x(n) = -(2)^n u(-n-1) + \frac{1}{2}(2)^{n-1} u(-n)$

**(d) Respuesta al impulso  $h(n)$**

- Es la transformada inversa de  $H(z)$ . Separando en fracciones simples resulta

$$H(z) = 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

de donde se obtiene

$$h(n) = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n) = \left[2 \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right] u(n)$$

**Problema 2.20**

Considere la ecuación en diferencias que representa un sistema LTI causal

$$y(n) + \frac{1}{a}y(n-1) = x(n-1)$$

(a) Encuentre la respuesta al impulso del sistema,  $h(n)$ , en función de la constante  $a$ .

(b) ¿Para que rango de valores de  $a$  el sistema es estable?

(a)  $h(n)$

1. Solución mediante cálculo explícito de la ecuación en diferencias:

- si  $x(n) = \delta(n)$ , la salida será  $y(n) = h(n)$ , por definición de sistema LTI.
- La causalidad implica  $h(n) = 0, n < 0$
- Así pues:

$$\begin{aligned} h(0) &= -\frac{1}{a}h(-1) + \delta(-1) = 0 \\ h(1) &= -\frac{1}{a}h(0) + \delta(0) = 1 \\ h(2) &= -\frac{1}{a}h(1) + \delta(1) = -\frac{1}{a} \\ h(3) &= -\frac{1}{a}h(2) + \delta(2) = -\frac{1}{a} \cdot -\frac{1}{a} = \left(-\frac{1}{a}\right)^2 \\ h(4) &= -\frac{1}{a}h(3) + \delta(3) = -\frac{1}{a} \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)^2 = \left(-\frac{1}{a}\right)^3 \\ &\vdots \\ h(n) &= \left(-\frac{1}{a}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

- Nótese que  $h(n) = \left(-\frac{1}{a}\right)^{n-1}$  es válido también para  $n = 1$ , ya que  $h(1) = 1 = \left(-\frac{1}{a}\right)^0$ .
- Combinando con  $h(n) = 0, n < 0$ , resulta  $h(n) = \left(-\frac{1}{a}\right)^{n-1} u(n-1)$ . Debe aparecer  $u(n-1)$  y no  $u(n)$  para incluir el resultado  $h(0) = 0$ .

2. Solución mediante transformada Z:

- $Y(z)\left(1 + \frac{1}{a}z^{-1}\right) = z^{-1}X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{z^{-1}}{1 + \frac{1}{a}z^{-1}}$ , con ROC  $|z| > \left|\frac{1}{a}\right|$  por ser causal.
- $H(z) = z^{-1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{a}z^{-1}} = z^{-1}H_1(z)$ .
- La última expresión permite hacer la la transformada inversa de forma inmediata de  $H_1(z)$  y después aplicar la propiedad de desplazamiento en  $n$ :

$$h_1(n) = \left(-\frac{1}{a}\right)^n u(n) \quad \Rightarrow \quad h(n) = h_1(n-1) = \left(-\frac{1}{a}\right)^{n-1} u(n-1)$$

**(b) Valores de  $a$  para que el sistema sea estable**

- A partir de la respuesta al impulso  $h(n)$ : hay que garantizar que  $h(n)$  sea absolutamente sumable, es decir  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$ , lo que se cumplirá si  $\left| \frac{1}{a} \right| < 1$  ó  $|a| > 1$ .
- A partir de la transformada  $Z$ : la ROC de  $H(z)$  debe contener el círculo unidad, así que  $\left| \frac{1}{a} \right| < 1$  ó  $|a| > 1$ .

## Problema 2.5

Un sistema LTI causal está descrito por la ecuación en diferencias

$$y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = 2x(n-1)$$

- Determine la respuesta homogénea del sistema.
- Determine la respuesta al impulso del sistema.
- Determine la respuesta al escalón del sistema.

### (a) Solución homogénea

- A partir de la ecuación en diferencias se forma el polinomio característico sustituyendo  $y(n-k)$  por  $z^{-k}$  y anulando la entrada,  $x(n) = 0$ :  $P(z) = 1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}$
- La solución homogénea tiene la forma  $y_h(n) = \sum_{m=0}^{N-1} A_m z_m^n$ , siendo  $N$  el número de raíces del polinomio característico,  $z_m$  las raíces y  $A_m$  constantes que deben determinarse con alguna condición adicional. En este caso las raíces son  $N = 2$ ,  $z_1 = 3$  y  $z_2 = 2$ . Así pues:  $y_h(n) = A_1 3^n + A_2 2^n$ .
- Nótese:
  - Las constantes  $A_m$  no son los residuos en los polos; el cálculo de sus valores depende de condiciones extra (continuidad, ...).
  - Las exponenciales no van multiplicadas por  $u(n)$ . El polinomio característico es idéntico al denominador de la transformada  $Z$  de la ecuación en diferencias y las raíces de ambos polinomios generan exponenciales cuya base son las raíces del polinomio; pero ahí termina su similitud.

### (b) Respuesta al impulso $h(n)$

- Tomando transformada  $Z$  y resolviendo para  $H(z) = Y(z)/X(z)$  resulta:

$$Y(z) - 5z^{-1}Y(z) + 6z^{-2}Y(z) = Y(z)(1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}) = 2z^{-1}X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2z^{-1}}{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}}$$

- Para hacer esta operación deberíamos asegurar que existe intersección de las ROCs de  $x(n)$  e  $y(n)$ . Puesto que estamos calculando  $h(n)$ , la entrada es  $x(n) = \delta(n)$ , cuya transformada  $Z$  es  $X(z) = 1$ , para todo  $z$ . Así que, siempre habrá intersección, excepto si  $Y(z)$  no convergiera en ningún punto.
- La ROC de  $H(z)$  será  $|z| > r_{max}$ , siendo  $r_{max}$  el módulo del polo más alejado del centro del plano  $z$ , ya que el sistema es causal.
- Separando en fracciones simples:  $H(z) = 2 \cdot \frac{1}{1 - 3z^{-1}} - 2 \cdot \frac{1}{1 - 2z^{-1}}$ , con ROC  $|z| > 3$ .
- Haciendo la transformada inversa:  $h(n) = 2[3^n - 2^n]u(n)$ .

**(c) Respuesta al escalón unidad**

- La transformada Z del escalón unidad es:  $U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$ , con ROC  $|z| > 1$ .
- La transformada de la respuesta será:  $S(z) = H(z)U(z) = \frac{2z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})(1 - 3z^{-1})(1 - z^{-1})}$ , con ROC  $|z| > 3$ .
- En fracciones simples:  $S(z) = 3 \cdot \frac{1}{1 - 3z^{-1}} - 4 \cdot \frac{1}{1 - 2z^{-1}} + \frac{1}{1 - z^{-1}}$ , con ROC  $|z| > 3$ .
- Haciendo la transformada inversa:  $s(n) = [3(3)^n - 4(2)^n + 1] u(n)$ .

**Problema 2.16**

Considere la siguiente ecuación en diferencias:

$$y(n) - \frac{1}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) = 3x(n)$$

- (a) Determine la forma general de la solución homogénea de esta ecuación en diferencias.
- (b) Esta ecuación en diferencias caracteriza tanto un sistema LTI causal como un sistema LTI anticausal. Encuentre las respuestas al impulso de los dos sistemas.
- (c) Demuestre que el sistema LTI causal es estable y que el sistema LTI anticausal es inestable.
- (d) Encuentre una solución particular de la ecuación en diferencias cuando  $x(n) = (1/2)^n u(n)$ .

**(a) Solución homogénea**

- Polinomio característico:  $P(z) = 1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}$  con raíces  $z_1 = \frac{1}{2}$ ,  $z_2 = -\frac{1}{4}$ .
- La solución homogénea tiene la forma  $y_h(n) = A_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + A_2 \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ , con  $A_1$  y  $A_2$  constantes.

**(b) Respuestas al impulso del sistema LTI causal  $h_c(n)$  y anticausal  $h_a(n)$** 

- Tomando transformada Z y resolviendo para  $H(z) = Y(z)/X(z)$  resulta:

$$Y(z) \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}\right) = 3X(z)$$

$$H(z) = \frac{3}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)} = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}$$

- $H(z)$  tiene polos en  $z_{p1} = \frac{1}{2}$  y  $z_{p2} = -\frac{1}{4}$  y, por tanto, puede asociarse a tres ROCs:
  - 1)  $|z| < \frac{1}{4}$ , con transformada inversa hacia la izquierda; es decir, anticausal.
  - 2)  $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{2}$ , con transformada inversa bilateral.
  - 3)  $|z| > \frac{1}{2}$ , con transformada inversa hacia la derecha; es decir, causal.
- Solución causal:  $|z| > \frac{1}{2} \Rightarrow h_c(n) = \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right] u(n)$
- Solución anticausal:  $|z| < \frac{1}{4} \Rightarrow h_a(n) = -\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right] u(-n-1)$

**(c) Estabilidad**

- La ROC de la solución causal incluye  $|z| = 1$ ; el sistema es estable.
- La ROC de la solución anticausal no incluye el círculo unidad; el sistema no es estable.

(d) **Solución particular para**  $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

- La transformada Z de la entrada es  $X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}$ .
- La transformada Z de la salida es

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{3}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)} = \frac{3}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

- Para que esta operación tenga sentido, la ROC de  $H(z)$  ha de tomarse  $|z| > \frac{1}{2}$ ; es decir, la solución causal; en caso contrario no existiría intersección y no podría usarse la transformada Z para determinar la solución (si la hubiera).
- Descomponiendo en fracciones simples y teniendo en cuenta que existe un polo doble en  $z = \frac{1}{2}$ :

$$Y(z) = \frac{A}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)} + \frac{B}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{C}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$$

de donde se obtiene el sistema de ecuaciones,

$$\left. \begin{array}{l} A + B + C = 3 \\ -A - B/4 + C/4 = 0 \\ A/4 - B/8 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1/3 \\ B = 2/3 \\ C = 2 \end{array} \right.$$

resultando,

$$Y(z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + 2 \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}, \text{ con ROC } |z| > \frac{1}{2}$$

- Haciendo la transformada inversa:

$$y(n) = \left[ \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] u(n) + 4(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u(n+1)$$

- El último término se calcula usando la transformada:  $na^n u(n) \longleftrightarrow \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, |z| > |a|$

para lo cual se hace la modificación:  $2 \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} = 2 \cdot 2z \cdot \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$

y teniendo en cuenta que la multiplicación de transformadas se invierte como la convolución de las correspondientes señales:

$$2 \cdot 2z \cdot \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} \longleftrightarrow 4\delta(n+1) * n \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) = 4(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u(n+1)$$

## Problema X

Hallar el término general de la secuencia de Fibonacci en la que cada número es la suma de los dos anteriores comenzando por 0, 1.

- La secuencia empieza: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55... Se puede escribir  $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$  con  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ .
- Se puede plantear como la ecuación en diferencias:

$$y(n) = \begin{cases} y(n-1) + y(n-2) + x(n) & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

con entrada  $x(n) = \delta(n-1)$ .

- Con este planteamiento la recurrencia se puede asimilar a la salida de un sistema LTI causal con respuesta al impulso  $h(n)$ .
- Puesto que la entrada es  $x(n) = \delta(n-1)$ , la salida será  $y(n) = h(n-1)$ , ya que:

$$\begin{aligned} h(-1) = y(0) &= 0 + 0 + \delta(-1) = 0 = f(0) \\ h(0) = y(1) &= 0 + 0 + \delta(0) = 1 = f(1) \\ h(1) = y(2) &= 0 + 1 + 0 = 1 = f(2) \\ h(2) = y(3) &= 1 + 1 + 0 = 2 = f(3) \\ h(3) = y(4) &= 2 + 1 + 0 = 3 = f(4) \\ &\vdots \\ h(n-1) = y(n) &= ? = f(n) \end{aligned}$$

- Tomando transformada Z:  $Y(z)(1 - z^{-1} - z^{-2}) = X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} - z^{-2}}$ , con ROC  $|z| > r_{max}$ , siendo  $r_{max}$  el módulo de la raíz más alejada de  $z = 0$ , por ser un sistema causal.

- Raíces:  $z_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ ,  $z_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$  (número áureo)
  - <http://www.goldennumber.net/>,
  - [http://en.wikipedia.org/wiki/Golden\\_ratio](http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio)

- Residuos:  $A = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ ,  $B = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

- $H(z) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}z^{-1}} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}z^{-1}}$ ,  $|z| > \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$

- $h(n) = \left[ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] u(n)$

- Así que  $f(n) = h(n-1) = \left[ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right] u(n-1)$ .

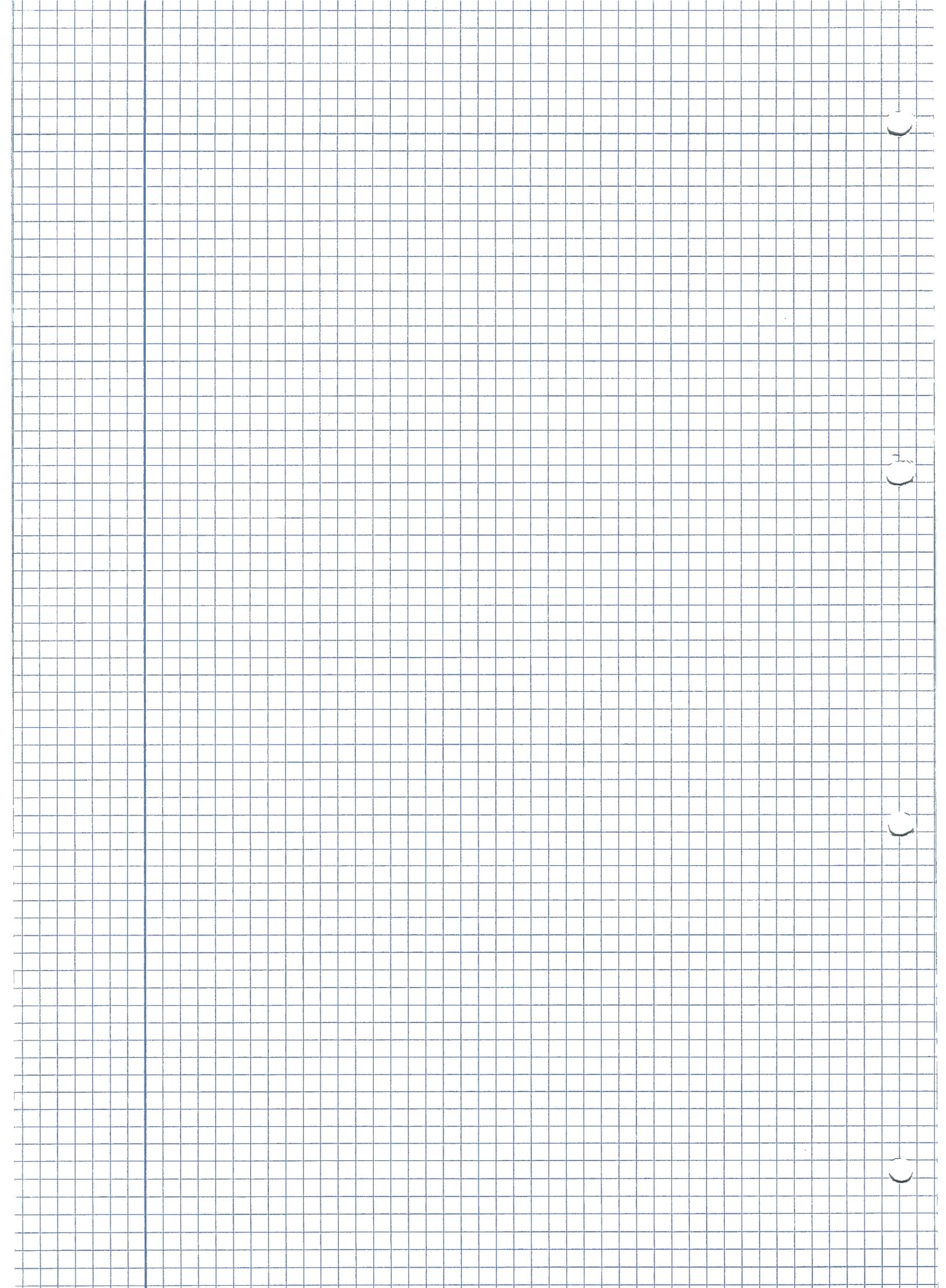
)

)

)

)

TEMA 2  
MUESTREO  
Y  
MULTITASA

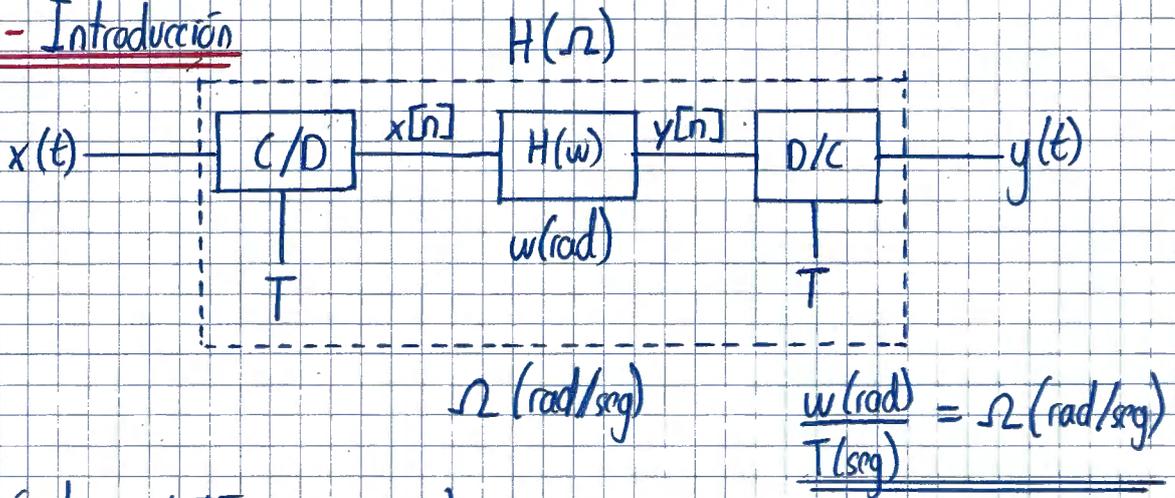


# Tema 2: Muestreo y Multitasa

## Indice

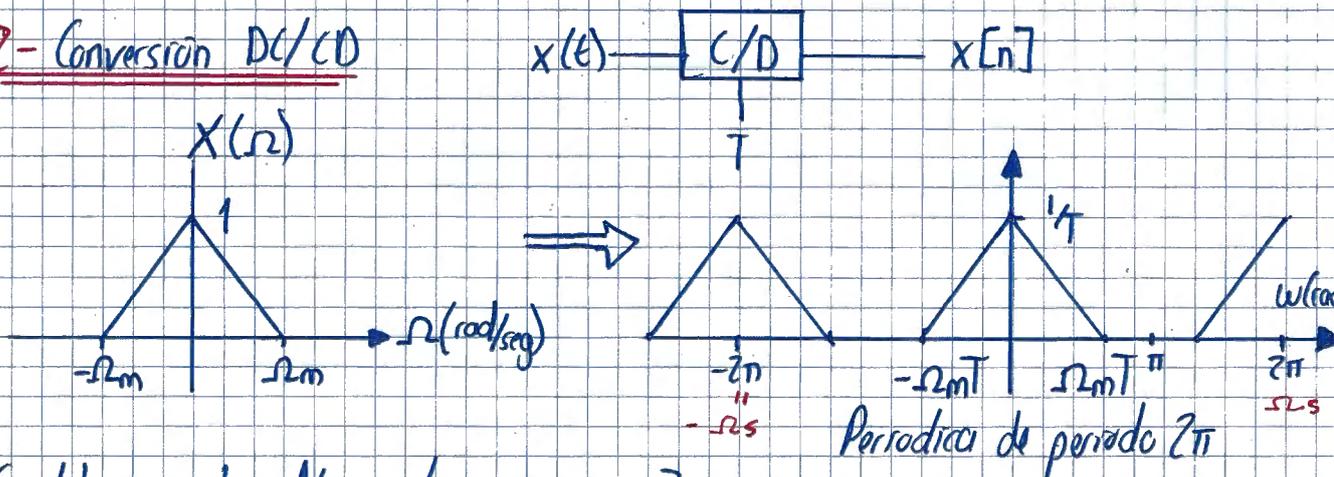
- 1- Introducción.
- 2- Conversión C/D y D/C.
- 3- Diezmado.
- 4- Interpolación.
- 5- Cambio de ritmo fraccionario.

## 1- Introducción



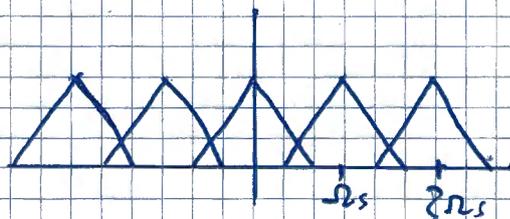
- \* Sistemas LTI
  - \*  $X(\Omega)$  limitada en banda
  - \* Nyquist
- } Se debe cumplir estas condiciones

## 2- Conversión DC/CD

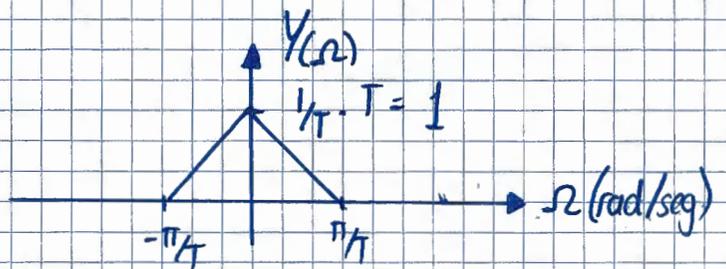
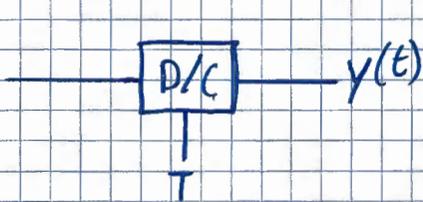
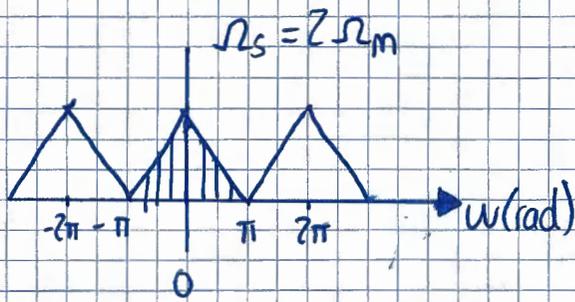


Se debe cumplir Nyquist:  $\Omega_s \geq 2\Omega_m$

Si  $\Omega_s < 2\Omega_m$



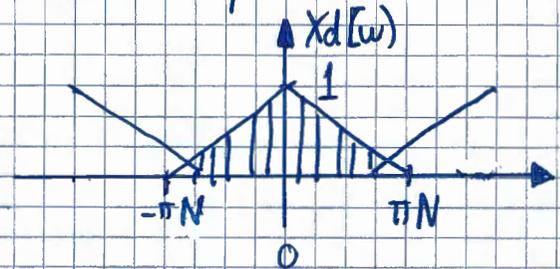
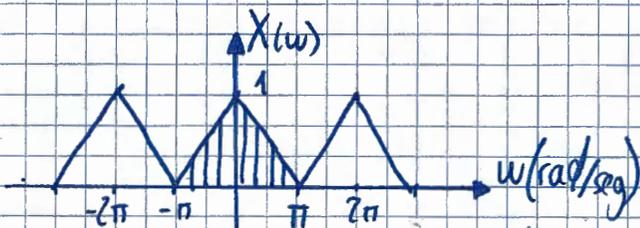
Se produce solapamiento



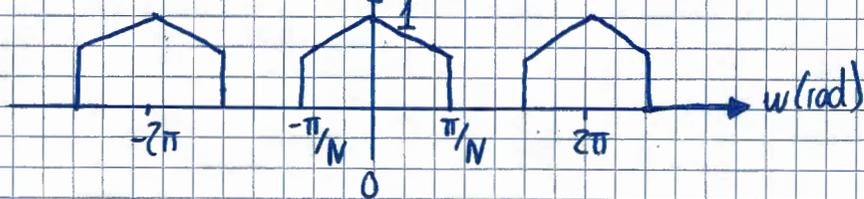
### 3- Drezmado



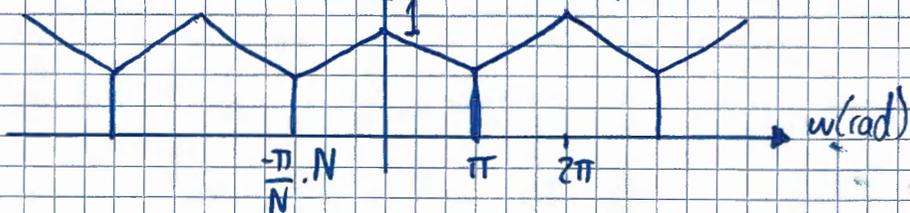
Drezmador en  $n$   
 Expansor en  $\omega$   
 $N \equiv$  entero positivo



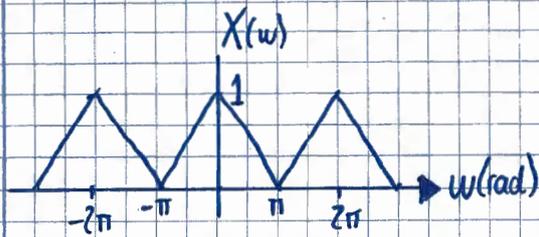
Al realizar drezmado se producirá (seguramente) y para ello realizamos lo siguiente para evitarlo.



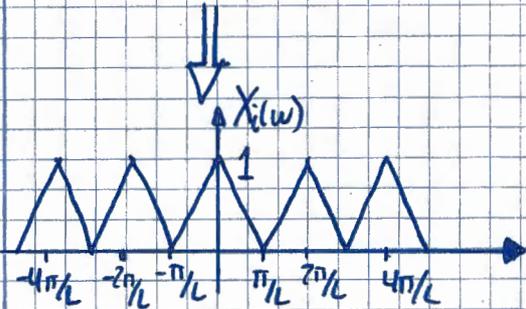
$$X_d(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(\omega - \frac{2\pi k}{N})$$



# 4 - Interpolación

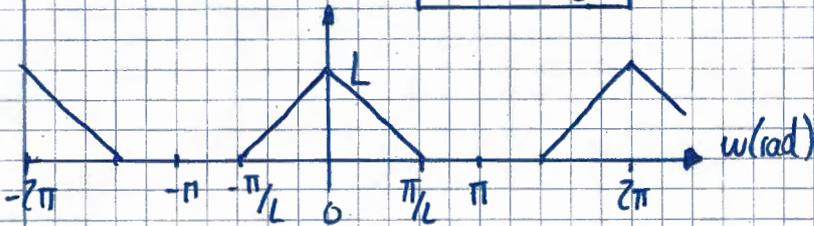
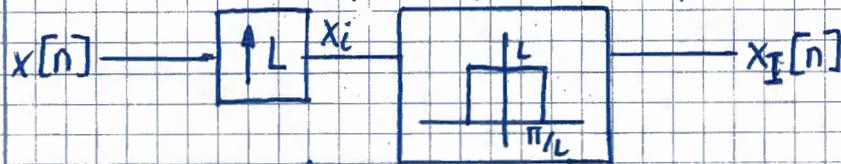


Expansar en  $n$   
 Diezmador en  $\omega$

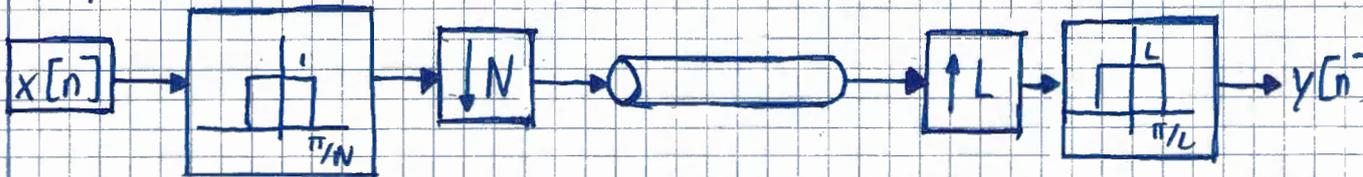


Periodica periodo  $2\pi/L$   
 (Periodica periodo  $2\pi$ )

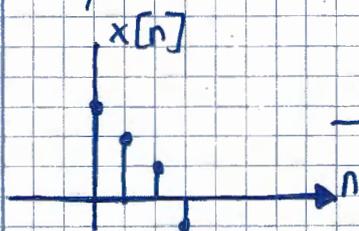
Para evitar tantas replicas producidas por la interpolación realizamos lo siguiente:



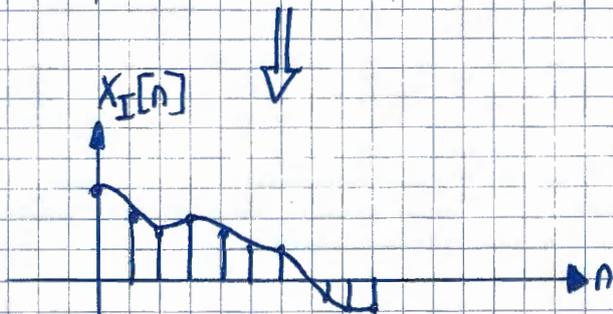
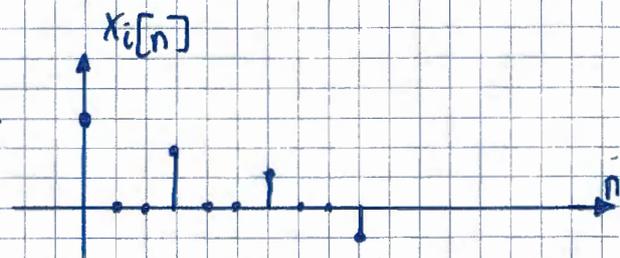
El proceso completo sería:



lo que ocurre en el tiempo al interpolar es:

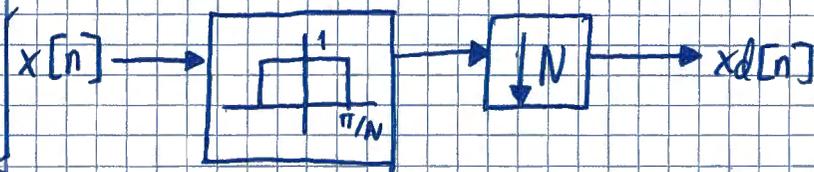


$L-1$  ceros entre cada dos muestras

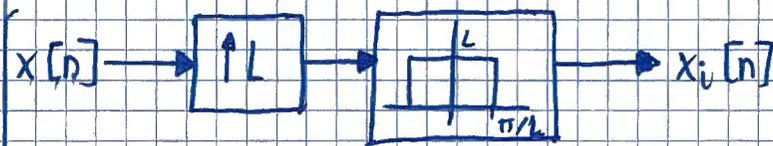


## 5- Cambio de ritmo fraccionario

Diezmado



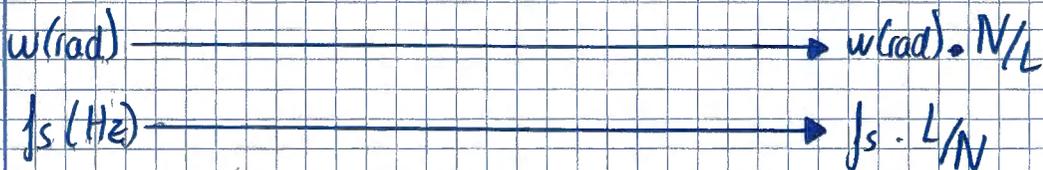
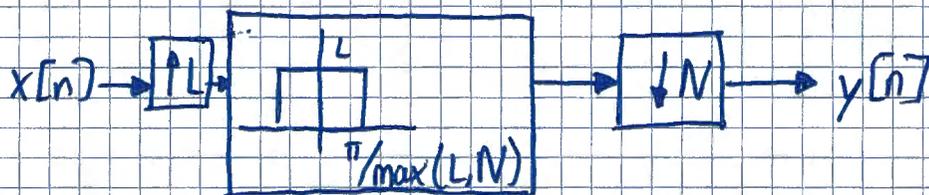
Interpolacion



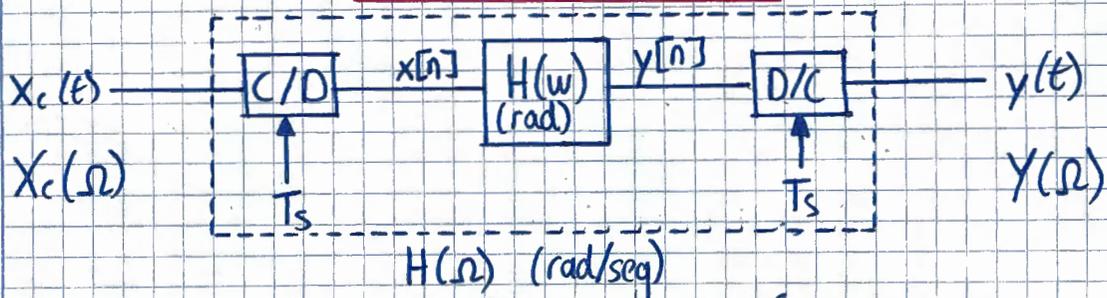
$$\Omega \text{ (rad/seg)} = 2\pi f \text{ (Hz)} \text{ (muestras/seg)}$$

$$w \text{ (rad)} = \Omega \text{ (r/s)} \cdot T \text{ (seg)} = \frac{\Omega \text{ (r/s)}}{f_s \text{ (Hz)}}$$

Para cambiar el ritmo de muestreo aplicamos:



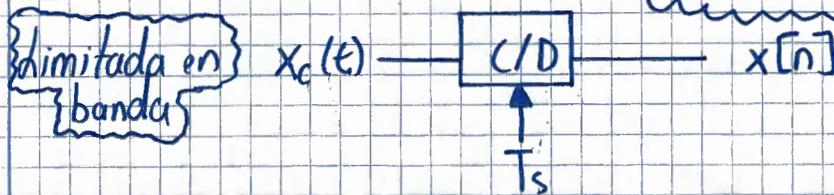
# Tema 1: Muestreo & Multitasa



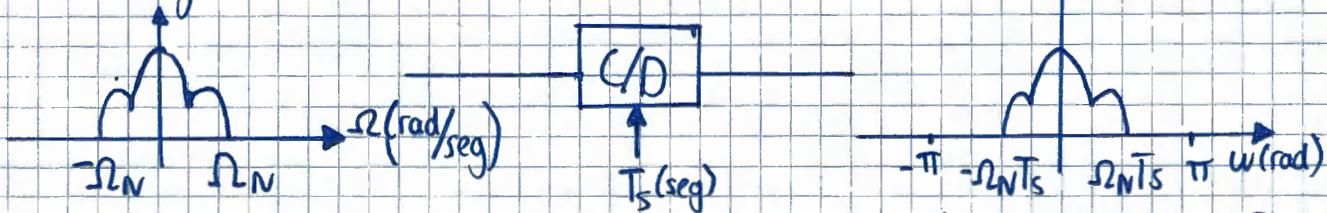
PROCESADO DIGITAL DE LA SEÑAL

$$\underline{\underline{\Omega = \frac{\omega(\text{rad})}{T_s(\text{seg})} = (\text{rad/seg})}}$$

1) C/D:

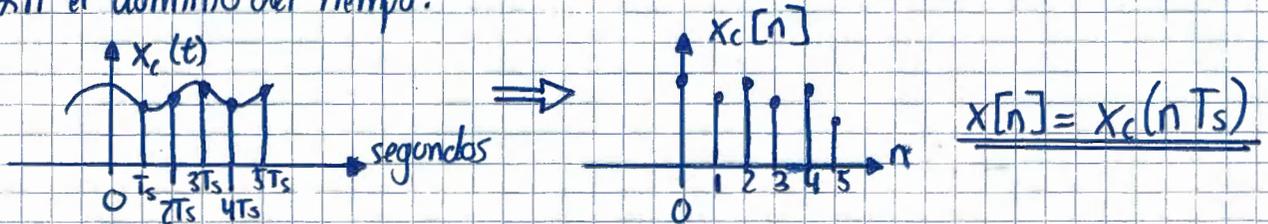


Tenemos el siguiente  $X_c(\Omega)$ :



PERIÓDICAS DE PERIODO 2π

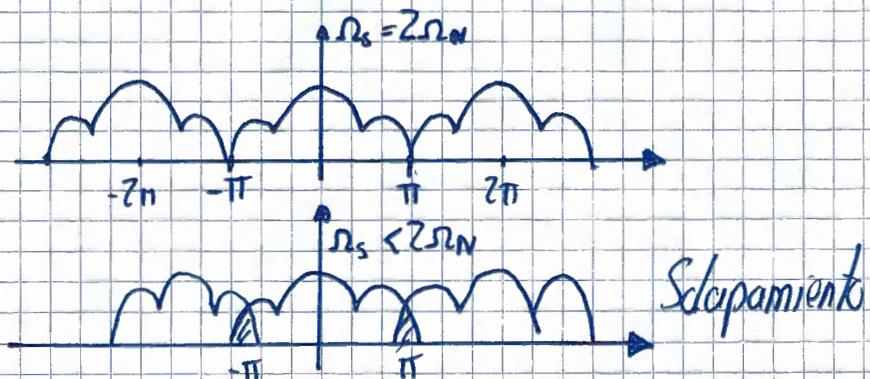
En el dominio del tiempo:



En el dominio de la frecuencia:  $X_c(\omega) \rightarrow X(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_K X\left(\frac{\omega}{T_s} - \frac{2\pi K}{T_s}\right)$

CRITERIO DE NYQUIST:  $\underline{\underline{\Omega_s \geq 2\Omega_N}}$

Varios casos:



## 2) Interpolación:

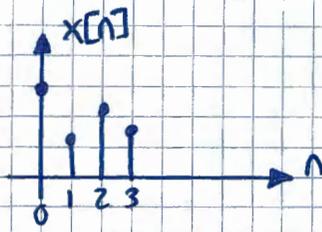
$$x[n] \rightarrow \boxed{\uparrow L}$$

Expansor  
 $L = n^{\circ}$  entero

Se expande en el tiempo discreto

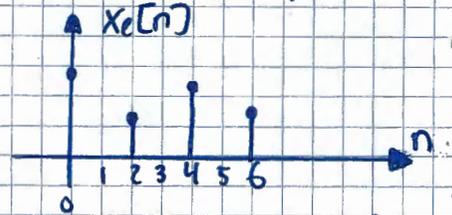
$$x_c[n] = x[n/L]$$

Dominio del TIEMPO

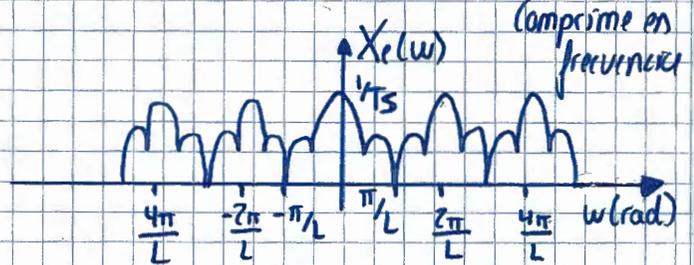
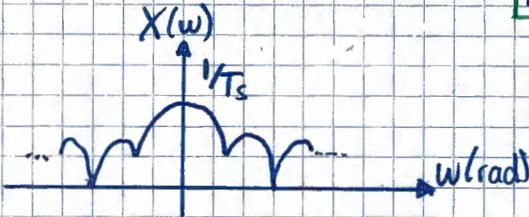


"Mete  $L-1$  ceros entre cada par de muestras"

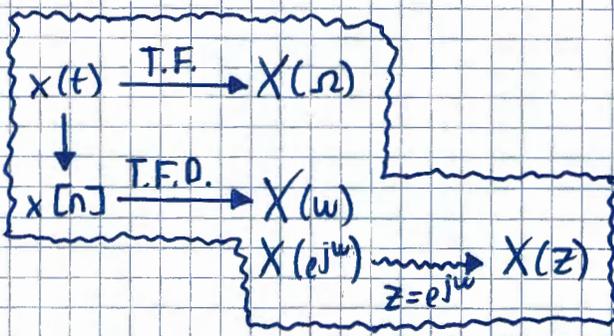
$$L=2$$



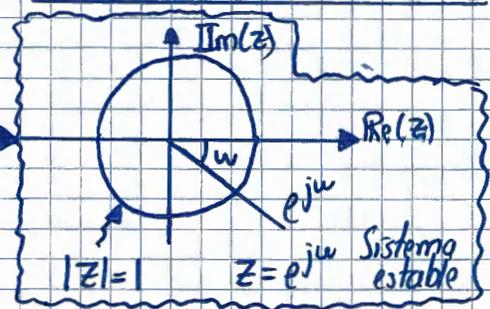
Dominio de la FRECUENCIA



(Comprime en frecuencia)



Periodica de PERIODO  $2\pi/L$



- Comprimir la señal en frecuencia:  $w \rightarrow w/L$
- Cambiar la frecuencia de muestreo: multiplicarla por un factor entero  $L$ :  $f_s \rightarrow f_s \cdot L$

## 3) Drezado

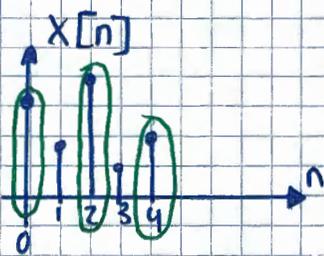
$$x[n] \rightarrow \boxed{\downarrow N}$$

Compresor  
 $N = n^{\circ}$  entero

Se comprime en el tiempo

$$x_c[n] = x[nN]$$

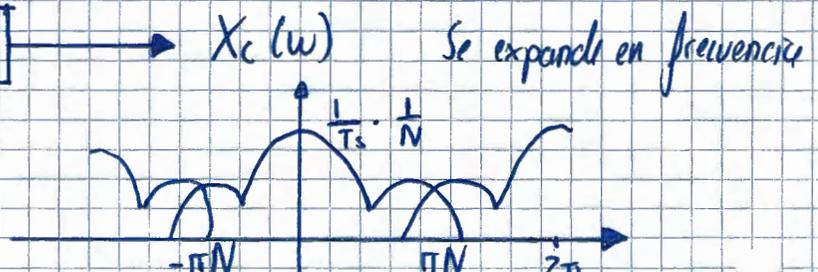
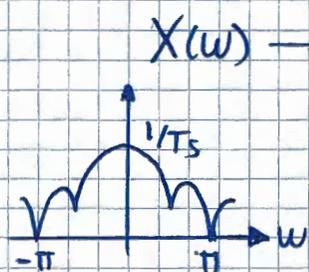
Dominio del TIEMPO



"Toma una de cada  $N$  muestras"

$$N=2$$

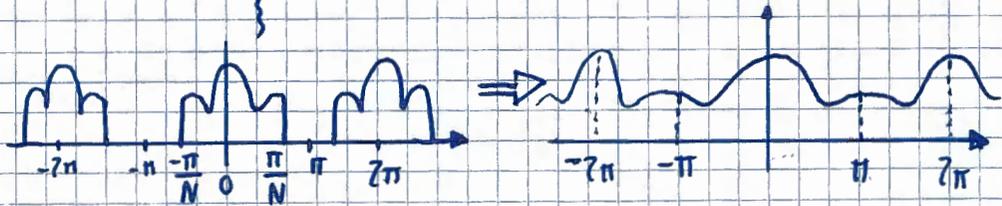
Dominio de la FRECUENCIA



Se expande en frecuencia

Puede haber solapamiento!!

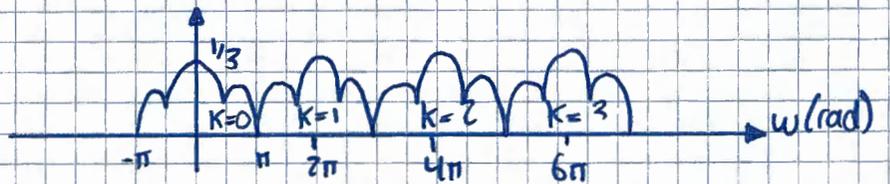
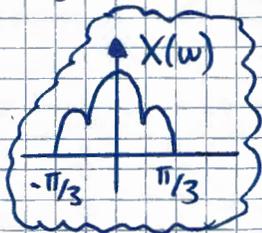
Para solucionar el solapamiento:



Matemáticamente:  $X_c(w) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{w}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right)$  supongamos  $N=3$

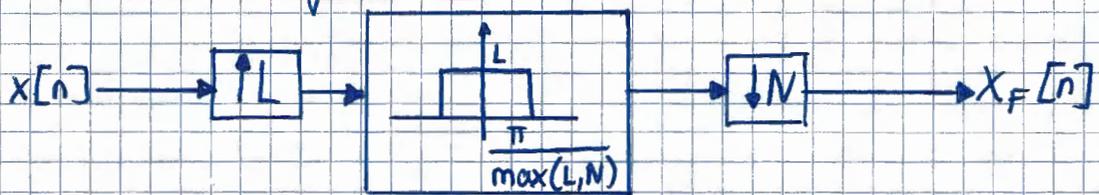
$$= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 X\left(\frac{w}{3} - \frac{2\pi k}{3}\right) = \frac{1}{3} \left[ X\left(\frac{w}{3}\right) + X\left(\frac{w}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) + X\left(\frac{w}{3} - \frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

$\begin{matrix} k=0 & & k=1 & & k=2 \end{matrix}$



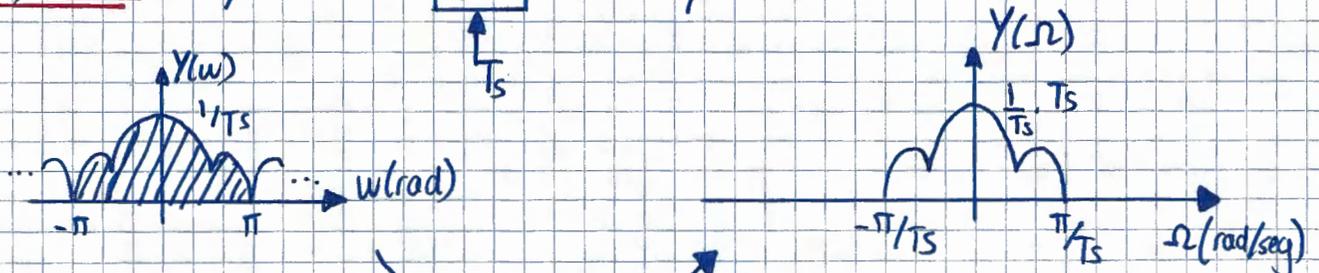
- Expande  $w$  en frecuencia:  $w \rightarrow w \cdot N$
- Comprime la  $f_s$ :  $f_s \rightarrow f_s / N$

#### 4) Cambio de ritmo fraccionario

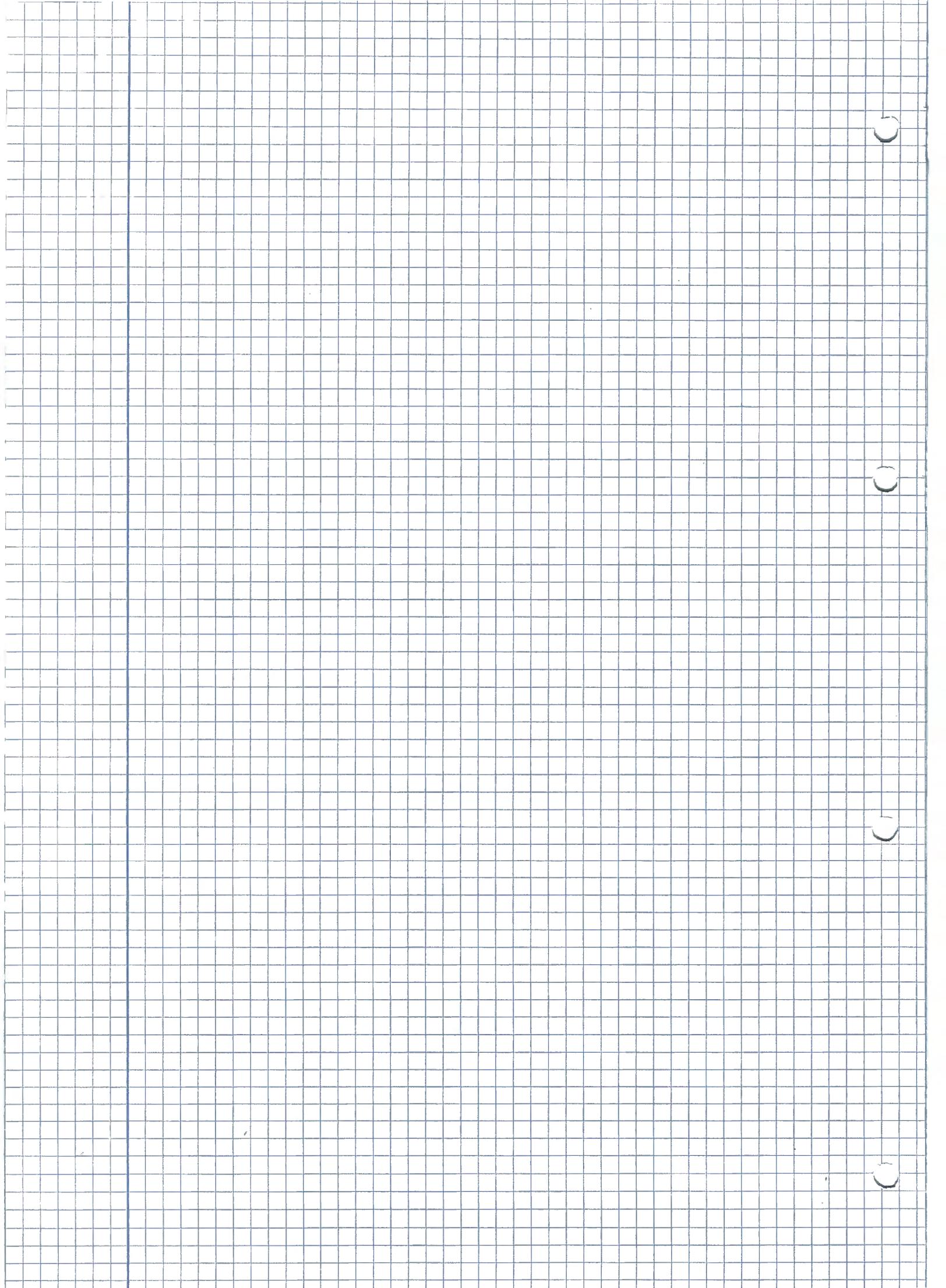


$$f_s \longrightarrow f_s \cdot L \longrightarrow f_s \cdot \frac{L}{N}$$

#### 5) D/C $y[n] \longrightarrow \text{D/C} \longrightarrow y(t)$



$$\frac{w(\text{rad})}{T_s(\text{seg})} = \omega(\text{rad/seg})$$



$$\cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})$$

$$\cos(\omega_0 n) \xrightarrow{T.Fourier} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \pi\delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$$

$$e^{j\omega_0 n} \xrightarrow{T.Fourier} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$$

### TRANSFORMADAS Z

$$\delta[n - n_0] \xrightarrow{z} z^{-n_0}$$

$$a^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > a$$

$$-a^n u[-n - 1] \xrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| < a$$

### MUESTREO

$$t = nT$$

$$\omega = \Omega T$$

### PROCESAMIENTO MULTITASA

#### Compresor

$$y[n] = x[Mn]$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\frac{\omega}{M} - \frac{2\pi k}{M})})$$

#### Expansor

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n - kL]$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$$

10

2

3

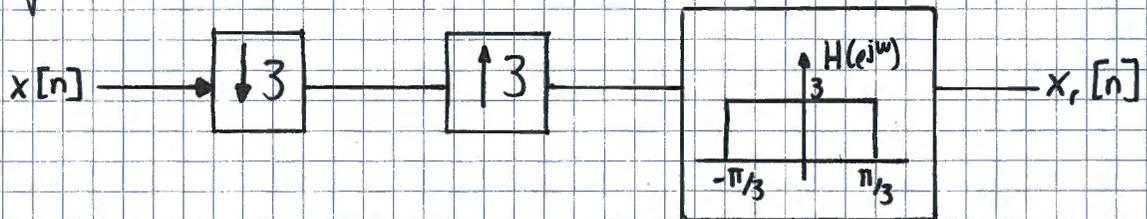
4

# PROBLEMAS LIBRO ENUNCIADOS

Tratamiento de Señales en Tiempo Discreto — Alan V. Oppenheim (3ª Edición)

## Problemas Tema 2

**Problema 4.15:** Considere el sistema que se muestra en la Figura P.4.15-1. Para cada una de las siguientes señales de entrada  $x[n]$  indicar si la salida  $x_r[n] = x[n]$ .

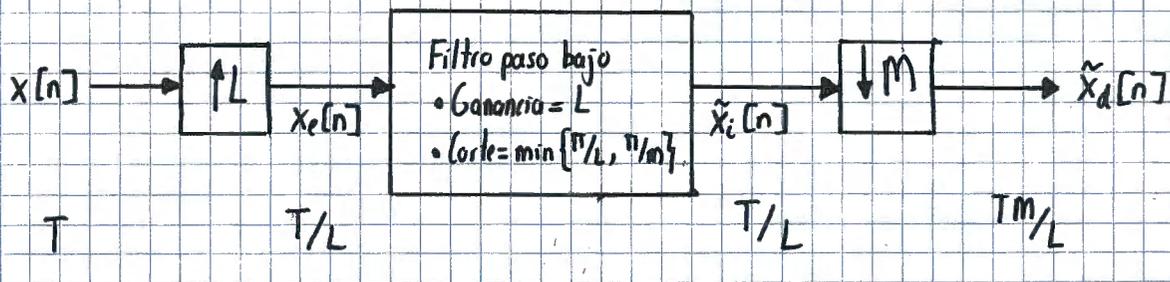


a)  $x[n] = \cos(\pi n/4)$

b)  $x[n] = \cos(\pi n/2)$

c)  $x[n] = \left[ \frac{\sin(\pi n/8)}{\pi n} \right]^2$

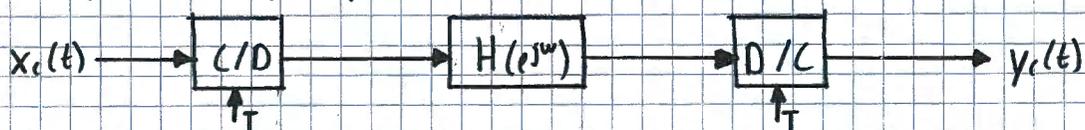
**Problema 4.17:** Cada uno de los apartados que siguen indica una señal  $x[n]$  y los correspondientes factores de interpolación ( $L$ ) y diezmado ( $M$ ) para el sistema de la Figura 4.28. Determine la correspondiente salida  $\tilde{x}_d[n]$



PERIODO DE MUESTREO

a)  $x[n] = \frac{\sin(2\pi n/3)}{\pi n}$  ;  $L = 4$  ;  $M = 3$     b)  $x[n] = \sin(3\pi n/4)$  ;  $L = 3$  ;  $M = 5$

**Problema 4.26:** En el sistema de la Figura 4.26 se utiliza para filtrar señales musicales en tiempo continuo y emplea una velocidad de muestreo de 16 KHz.



$H(e^{j\omega})$  es un filtro paso banda ideal con corte en  $\pi/2$ . Si la entrada es limitada en banda de forma que  $X_c(j\Omega) = 0$  para  $|\Omega| > \Omega_c$ , cómo se debería escoger para que el sistema completo sea lineal e invariante con el tiempo.

**Problema 4.33:** Dado el sistema de la figura P.4.33, obtenga la expresión de  $y[n]$  en función de  $x[n]$ . Simplifique la expresión tanto como sea posible.



**Problema 4.38:** Considere los dos sistemas de la figura P.4.38.

a) Para  $M=2, L=3$  y cualquier señal arbitraria  $x[n]$  ¿sirve  $y_A[n] = y_B[n]$ . Si su respuesta es afirmativa, justifíquela. Si es negativa, explíquela claramente o proporcione un contraejemplo.

b) ¿Cómo deben estar relacionadas  $M$  y  $L$  para garantizar que  $y_A[n] = y_B[n]$  para cualquier señal arbitraria  $x[n]$ ?



**Problema 4.66:** En muchas ocasiones para aplicaciones de audio es necesario muestrear una señal  $x_c(t)$  en tiempo continuo a una frecuencia de muestreo  $1/T = 44 \text{ kHz}$ . La figura P.4.66-1 muestra un sistema discreto para adquirir las muestras, que incluye un filtro antialiasamiento en tiempo continuo  $H_{a0}(j\Omega)$ . En muchas aplicaciones, en lugar del sistema convencional que se ilustra en la figura P.4.66-1 se utiliza el sistema de "sobremuestreo x4" que se muestra en la figura P.4.66-2. En este sistema:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \pi/4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



$(1/T) = 44 \text{ kHz}$

Figura P.4.66-1

es un filtro paso bajo ideal y

$$H_{a1}(j\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq \Omega_p \\ 0 & |\Omega| > \Omega_s \end{cases}$$

para algunos valores  $0 \leq \Omega_p \leq \Omega_s < \infty$



$(1/T) = 4 \times 44 \text{ kHz} = 176 \text{ kHz}$

Figura P.4.66-2

Suponiendo que  $H(e^{j\omega})$  es ideal, obtenga el mínimo conjunto de especificaciones del filtro antialiasamiento  $H_{a1}(j\Omega)$ , es decir, el mínimo valor de  $\Omega_p$  y el máximo valor de  $\Omega_s$ , tales que el sistema de la figura P.4.66-2 sea equivalente al sistema de la figura P.4.66-1.

**Problema 4.15**

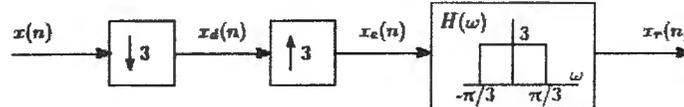
Considere el sistema de la figura. Para cada una de las siguientes señales de entrada  $x(n)$  indique si la salida cumple  $x_r(n) = x(n)$ .

(a)  $x(n) = \cos(\pi n/4)$

(b)  $x(n) = \cos(\pi n/2)$

(c)  $x(n) = \left[ \frac{\text{sen}(\pi n/8)}{\pi n} \right]^2$

Ayuda: use la propiedad de modulación para determinar la transformada de Fourier  $X(\omega)$ .

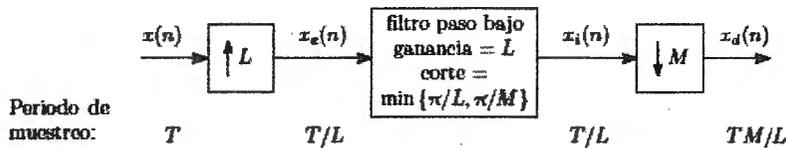


**Problema 4.17**

Cada uno de los apartados siguientes indica una señal  $x(n)$  y los correspondientes factores de interpolación y diezmado  $L$  y  $M$  para el sistema de la figura. Determine la correspondiente salida  $x_d(n)$ .

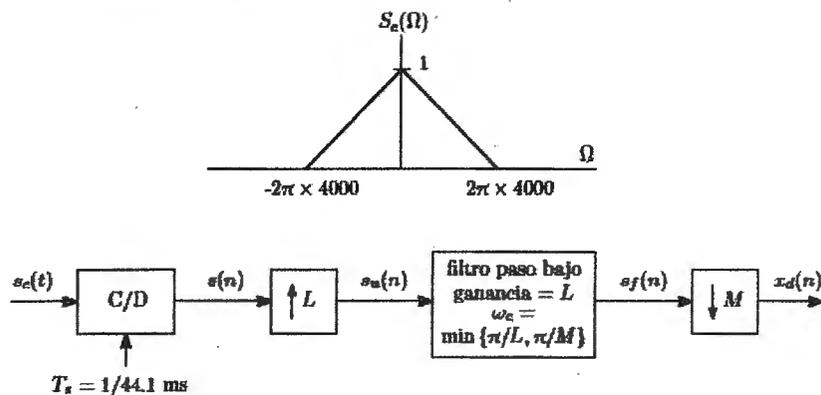
(a)  $x(n) = \text{sen}(2\pi n/3)/\pi n$ ,  $L = 4$ ,  $M = 3$

(b)  $x(n) = \text{sen}(3\pi n/4)$ ,  $L = 6$ ,  $M = 7$



**Problema 4.64**

Suponga que  $s_c(t)$  es una señal de voz cuya transformada de Fourier en tiempo continuo  $S_c(\Omega)$  se muestra en la figura. Utilizando el sistema de la figura se obtiene una secuencia en tiempo discreto  $s_r(n)$ .  $H(\omega)$  es un filtro paso bajo en tiempo discreto ideal de frecuencia de corte  $\omega_c$  y ganancia  $L$  en la banda de paso, como se muestra en la figura. La señal  $s_r(n)$  se utilizará como entrada a un codificador de voz que funciona correctamente sólo cuando las muestras en tiempo discreto representan una señal muestreada a una frecuencia de 8 kHz. Escoja los valores de  $L$ ,  $M$  y  $\omega_c$  que produzcan una señal de entrada  $s_r(n)$  correcta al codificar de voz.



**Problema 4.31**

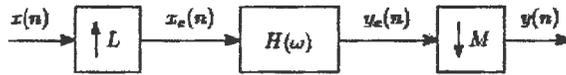
Considere el sistema en tiempo discreto que se muestra en la figura, donde

(i)  $L$  y  $M$  son enteros positivos

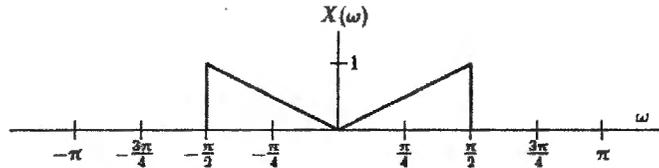
$$(ii) x_e(n) = \begin{cases} x(n/L) & n = kL, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$(iii) y(n) = y_e(nM)$$

$$(iv) H(\omega) = \begin{cases} M & |\omega| \leq \pi/4 \\ 0 & \pi/4 \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$



(a) Suponga que  $L = 2$  y  $M = 4$  y que  $X(\omega)$ , la transformada de Fourier en tiempo discreto de  $x(n)$ , es real y tiene la forma que se muestra en la siguiente figura. Realice un gráfico adecuadamente etiquetado de  $X_e(\omega)$ ,  $Y_e(\omega)$  e  $Y(\omega)$ , las transformadas de Fourier en tiempo discreto de  $x_e(n)$ ,  $y_e(n)$  e  $y(n)$ , respectivamente. Asegúrese de etiquetar claramente las amplitudes y frecuencias destacadas.

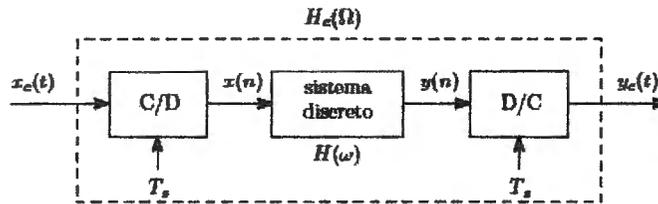


(b) Suponga ahora que  $L = 2$  y  $M = 8$ . Determine  $y(n)$  en este caso.

Sugerencia: observe qué diagramas cambian en su respuesta al apartado (a).

**Problema 4.5**

Considere el esquema de la figura en el que sistema en tiempo discreto es un filtro paso bajo ideal de frecuencia de corte  $\pi/8$  rad/s.



(a) Si  $x_c(t)$  es de banda limitada a 5 kHz, ¿cuál es el valor máximo de  $T_s$  para que se evite el solapamiento en el convertor C/D?

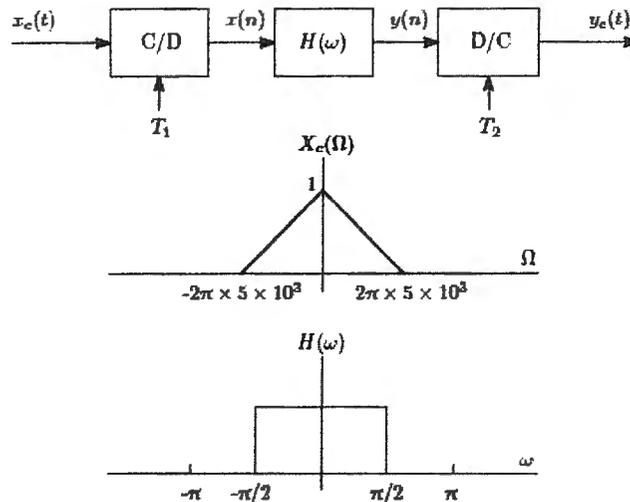
(b) Si  $1/T_s = 10$  kHz, ¿cuál será la frecuencia de corte del filtro efectivo en tiempo continuo?

(c) Repita el apartado (b) para  $1/T_s = 20$  kHz.

**Problema 4.29**

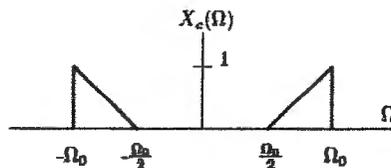
La figura muestra  $X_c(\Omega)$  y  $H(\omega)$  para el sistema que se indica. Dibuje y etiquete la transformada de Fourier de  $y_c(t)$  en cada uno de los siguientes casos:

- (a)  $1/T_1 = 1/T_2 = 10^4$
- (b)  $1/T_1 = 1/T_2 = 2 \times 10^4$
- (c)  $1/T_1 = 2 \times 10^4, 1/T_2 = 10^4$
- (d)  $1/T_1 = 10^4, 1/T_2 = 2 \times 10^4$



**Problema 4.23**

Una señal en tiempo continuo  $x_c(t)$ , con transformada de Fourier  $X_c(\Omega)$  mostrada en la figura, se muestrea con periodo de muestreo  $T_s = 2\pi/\Omega_0$  para formar la secuencia  $x(n) = x_c(nT_s)$ .



- (a) Dibuje la transformada de Fourier  $X(\omega)$  para  $|\omega| \leq \pi$ .
- (b) La señal  $x(n)$  va a ser transmitida a través de un canal digital. En el receptor debe recuperarse la señal original  $x_c(t)$ . Dibuje un diagrama de bloques del sistema de recuperación y especifique sus características. Asuma que dispone de filtros ideales.
- (c) En términos de  $\Omega_0$ , ¿para qué rango de valores de  $T_s$  se puede recuperar  $x_c(t)$  a partir de  $x(n)$ ?

**Problema 4.25**

La figura muestra un filtro en tiempo continuo implementado mediante un filtro LTI discreto paso bajo ideal con respuesta en frecuencia en el intervalo  $-\pi \leq \omega \leq \pi$

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

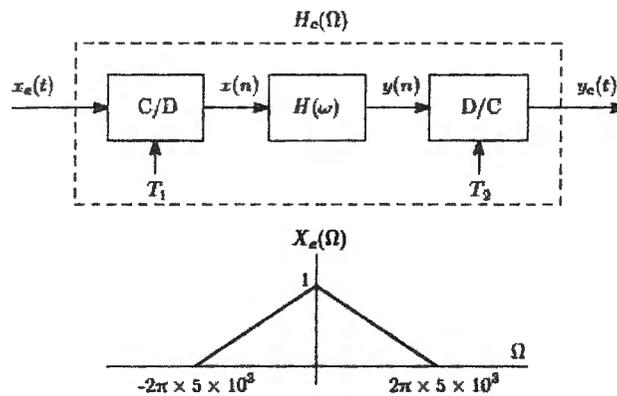
(a) Si la transformada de Fourier de  $x_c(t)$ ,  $X_c(\Omega)$ , es como se muestra en la figura y  $\omega_c = \pi/5$ , dibuje y etiquete  $X(\omega)$ ,  $Y(\omega)$  e  $Y_c(\Omega)$  para cada uno de los siguientes casos:

(i)  $1/T_1 = 1/T_2 = 2 \times 10^4$

(ii)  $1/T_1 = 4 \times 10^4$ ,  $1/T_2 = 10^4$

(iii)  $1/T_1 = 10^4$ ,  $1/T_2 = 3 \times 10^4$

(b) Para  $1/T_1 = 1/T_2 = 6 \times 10^3$ , y para señales de entrada  $x_c(t)$  cuyo espectro esté limitado en banda a  $|\Omega| < 2\pi \times 5 \times 10^3$  (sin otra restricción), ¿cuál es el valor máximo de la frecuencia de corte  $\omega_c$  del filtro  $H(\omega)$  para que el sistema completo sea LTI? Para el valor máximo de  $\omega_c$ , especifique  $H_c(\Omega)$ .



**Problema 4.1**

La señal

$$x_c(t) = \text{sen}(2\pi 100t)$$

se muestra con un periodo de muestreo de  $T_s = 1/400$  s y se obtiene una señal en tiempo discreto  $x(n)$ . ¿Cuál es la señal resultante  $x(n)$ ?

**Problema 4.2**

La secuencia

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right), \quad -\infty < n < \infty$$

se obtiene muestreando la señal en tiempo continuo

$$x_c(t) = \cos(\Omega_0 t), \quad -\infty < n < \infty$$

con una frecuencia de 1000 muestras/s. Indique dos posibles valores de  $\Omega_0$  que podrían producir la secuencia  $x(n)$ .

**Problema 4.3**

La señal en tiempo continuo

$$x_c(t) = \cos(4000\pi t)$$

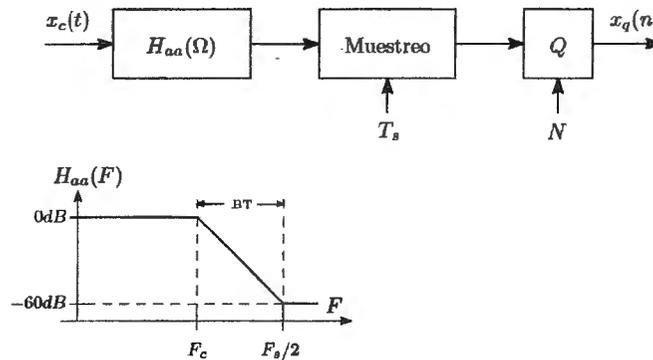
se muestrea con periodo  $T_s$  y se obtiene la señal en tiempo discreto

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

- (a) Determine un valor de  $T_s$  que sea consistente con esta información.
- (b) ¿Es único el valor de  $T_s$  obtenida en (a)? Si es así, explique por qué. Si no, indique otro valor de  $T_s$  que sea consistente con la información dada.

**Problema (Test 2005)**

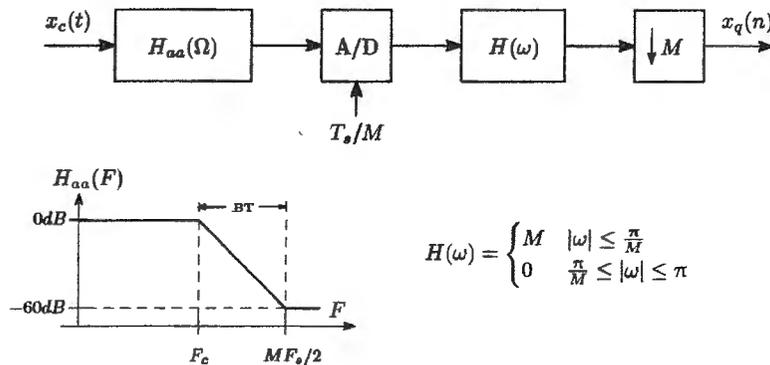
Para muestrear una señal  $x_c(t)$  con ancho de banda 10 kHz se emplea el esquema de la figura.



Calcule los siguientes parámetros:  $F_s$  (frecuencia de muestreo),  $F_c$  (frecuencia de corte del filtro) y  $N$  (número de bits del cuantificador), teniendo en cuenta: a) Se muestrea a la frecuencia de Nyquist; b) La pendiente de la banda de transición debe ser de  $-175 \text{ dB/octava}$ ; c) El ruido de cuantificación debe ser igual al ruido que se produce por el solapamiento espectral en el muestreo; d) El cuantificador es uniforme; y e) La señal de entrada y el margen dinámico del cuantificador responden a  $X_m = 4\sigma_x$ .

**Problema**

Para facilitar el diseño del filtro antisolapamiento del problema anterior y mejorar las prestaciones del muestreo se emplea el esquema alternativo con sobremuestreo y diezmado mostrado en la figura.



La frecuencia de corte se fija en  $F_c = 4950 \text{ Hz}$  y la pendiente en la banda de paso en  $-12 \text{ dB/octava}$ . Calcular a) el factor de sobremuestreo  $M$  que permite este diseño y b) la relación señal a ruido de cuantificación resultante manteniendo el mismo número de bits que en el problema anterior ( $N = 12$ ).

0

0

0

0

# Problema 4.1

$$x_c(t) = \sin(2\pi 100t)$$

$$T_s = 1/400 \text{ (s)} \quad \omega \text{ (rad/seg)}$$

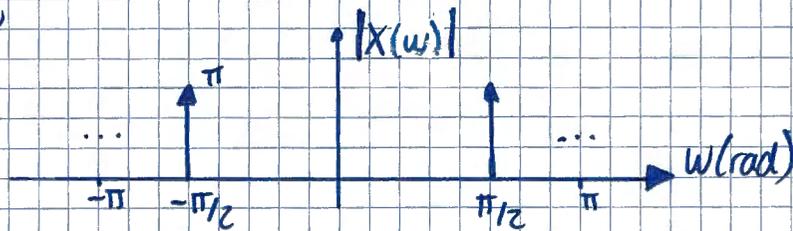
$x[n]$ ?

$$x[n] = x_c(nT_s) = \sin(2\pi 100 \cdot 1/400 n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)$$

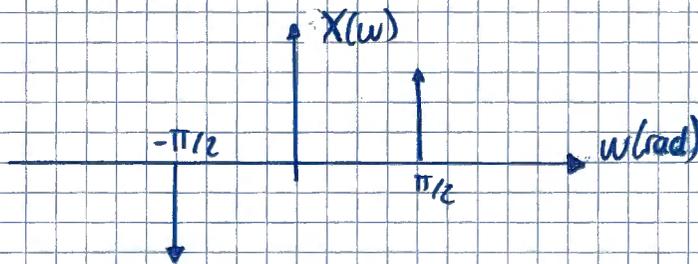
$$\omega \text{ (rad/seg)} \cdot T_s \text{ (seg)} = \omega \text{ (rad)}$$

$$2\pi \cdot 100 \cdot 1/400 = \pi/2 \text{ rad}$$

En módulo



la señal resultante será  $X(\omega) = \pi \left[ -\delta(\omega - \pi/2) + \delta(\omega + \pi/2) \right]$



En módulo  $|X(\omega)| = \pi (\delta(\omega - \pi/2) + \delta(\omega + \pi/2))$

T.F.D. de  
 $\cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$

## Problema 4.2

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right), \quad -\infty < n < \infty$$

$$x_c(t) = \cos(\Omega_0 t), \quad -\infty < t < \infty$$

$$f_s = 1000 \frac{\text{muestras}}{\text{seg}} = 1000 \text{ Hz} = 1 \text{ kHz}$$

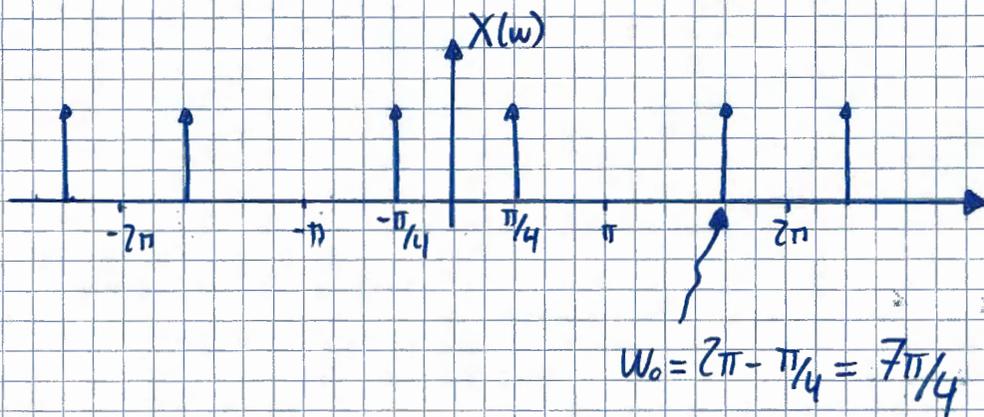
$$\omega_0 = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \longrightarrow \Omega_0 \text{ (rad/seg)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\omega_0 \text{ (rad)}}{T_s} &= \Omega_0 \text{ (rad/seg)} \\ \omega_0 \cdot f_s &= \Omega_0 \end{aligned}}$$

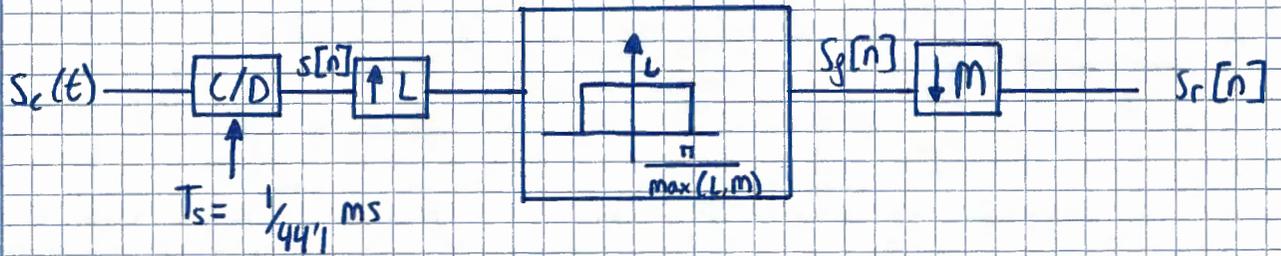
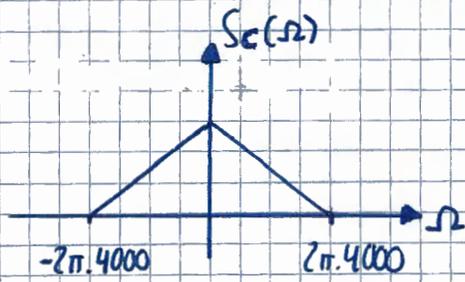
$$\Omega_0 = \frac{\pi}{4} \cdot 1000 = 250\pi \text{ rad/seg}$$

$$\Omega_0 \text{ (rad/seg)} = 2\pi f_0 = 2\pi \cdot 125 \text{ rad/seg}$$

$$f_0 = \underline{\underline{125 \text{ Hz}}}$$



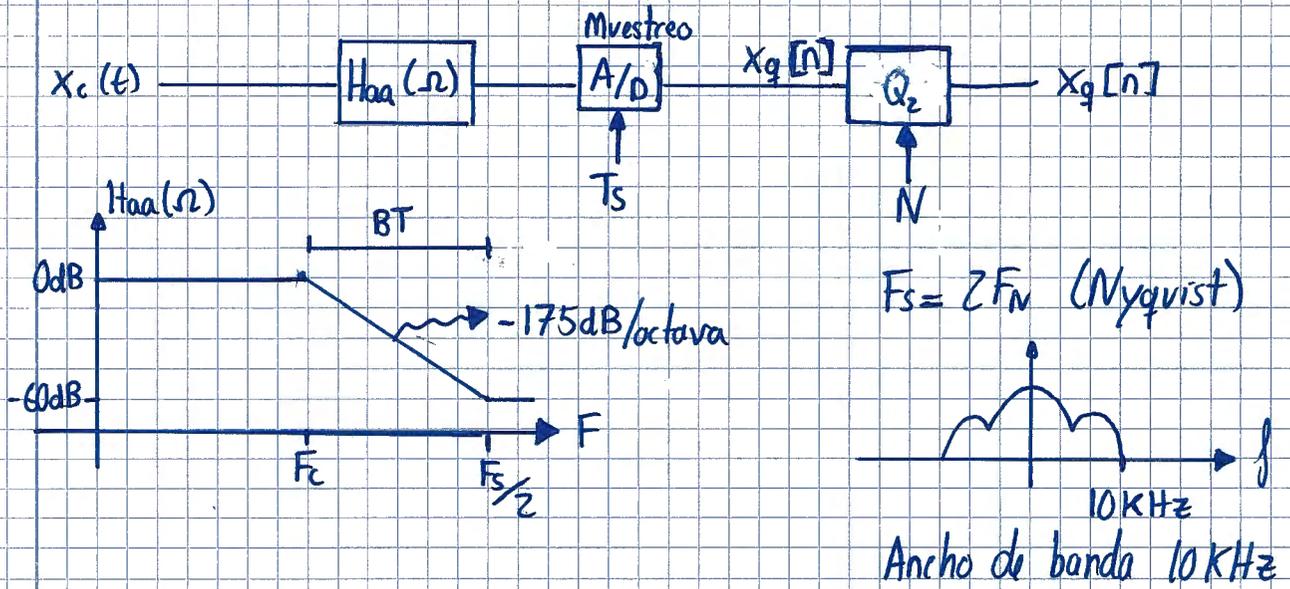
# Problema 4.64



$$f_s = \frac{1}{T_s} = 441 \text{ kHz} \quad \xrightarrow{\hspace{10em}} \quad 8 \text{ kHz}$$

$$441 \text{ kHz} \cdot \frac{L}{m} = 8 \text{ kHz} \quad \rightarrow \quad \frac{L}{m} = \frac{8}{441} = \frac{80}{441}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} L = 80 \\ m = 441 \\ \omega_c = \pi/441 \end{array} \right.$$

Problema (Hoja 5) (Test 2005)

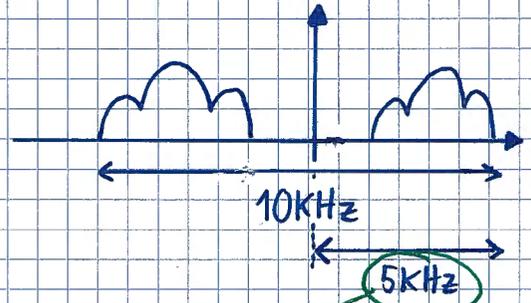


Sabemos que:  $SNR_Q = 6 \cdot N - 7.25 \text{ (dB)}$

PREGUNTAR

a)  $F_s = 2F_N = 2 \cdot 10 \text{ KHz} = 20 \text{ KHz}$

$F_s = 2F_N = 2 \cdot 5 \text{ KHz} = 10 \text{ KHz}$



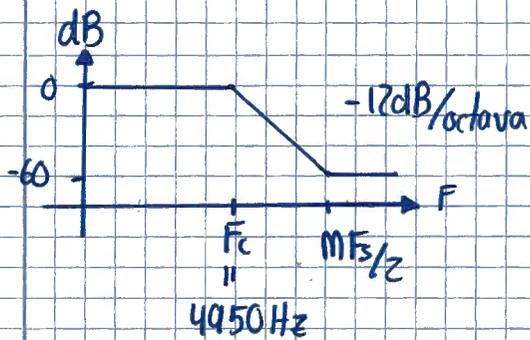
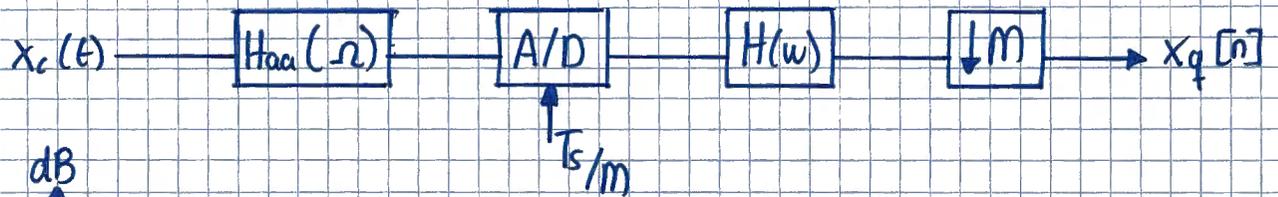
b)  $-175 \text{ dB} = \frac{0 \text{ dB} - 60 \text{ dB}}{\log_2 \left( \frac{5000}{F_c} \right)}$   $\rightarrow F_c = \frac{5000}{2^{60/175}} = 3942.4 \text{ Hz}$

c)  $10 \log \frac{P_s}{P_q} = 60 \text{ dB} = B_{\text{pasa}} - B_{\text{atenuada}}$  por tanto:

$60 = 6N - 7.25$

$N = \frac{60 + 7.25}{6} = 11.2 \rightarrow 12 \text{ bits}$

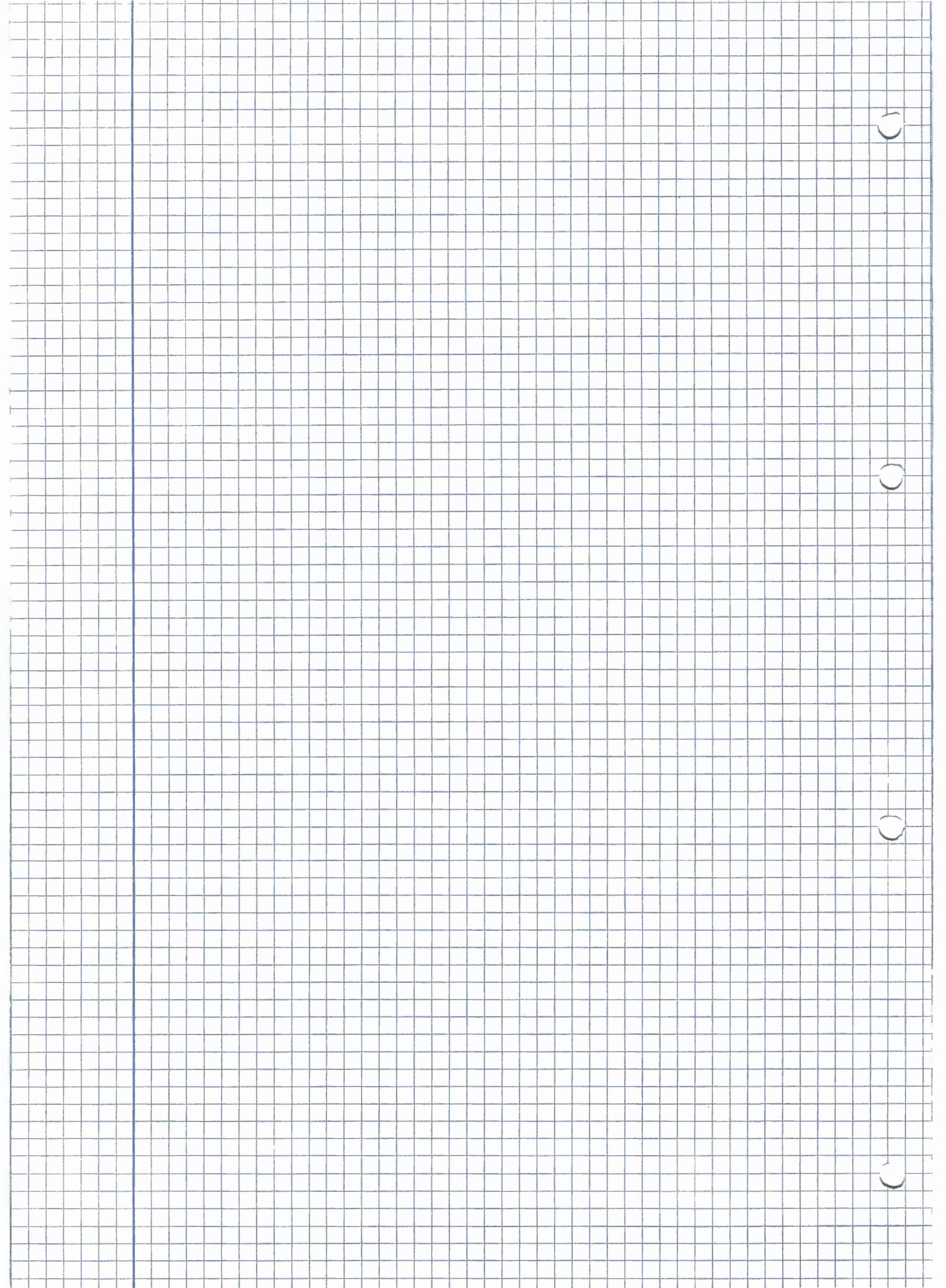
# Problema (Hoja 5) (continuación 2005)



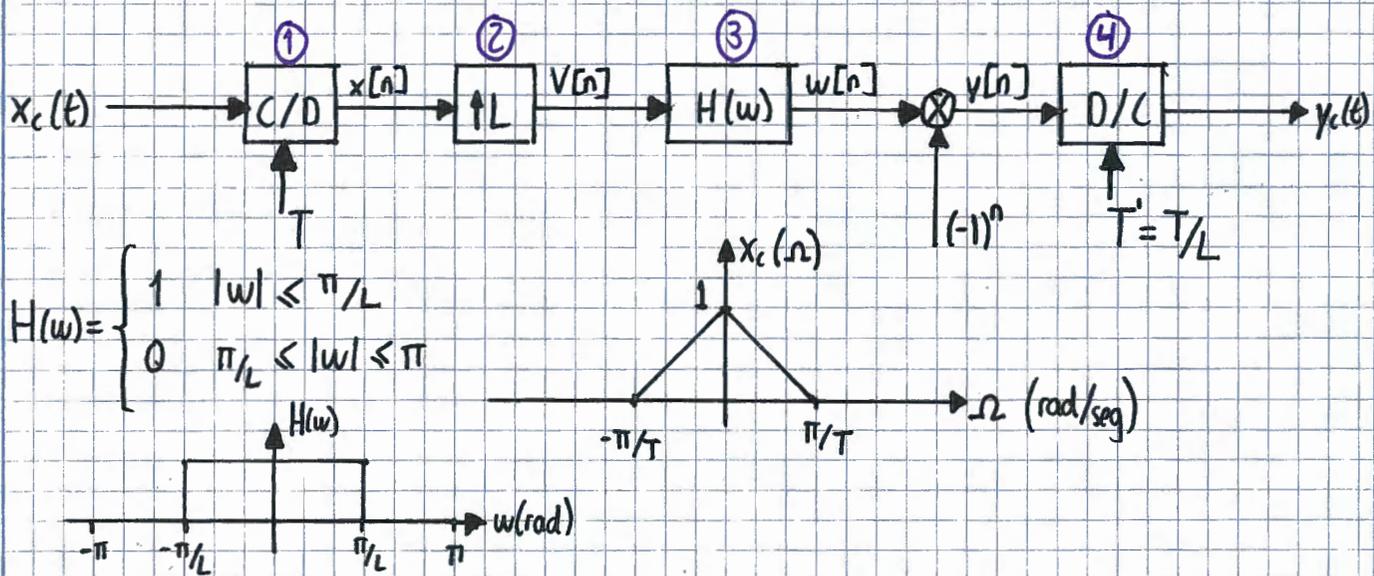
$$a) -12 = \frac{60}{\log_2\left(\frac{mF_s/2}{F_c}\right)} = \frac{60}{\log_2\left(\frac{m \cdot 5000}{4950}\right)}$$

$$\Rightarrow \underline{m = 32}$$

$$b) \underline{SNR_q = 6N - 7.25 + 10 \log(m) = 79.8 \text{ dB}}$$

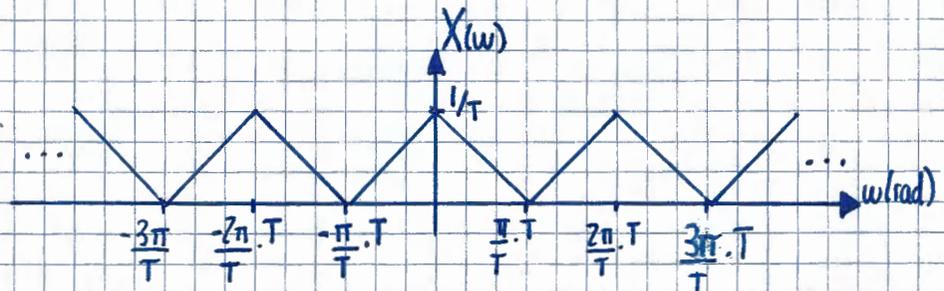


# Problema Repaso Teoría



Solución:  $dY_c(\omega)$ ?

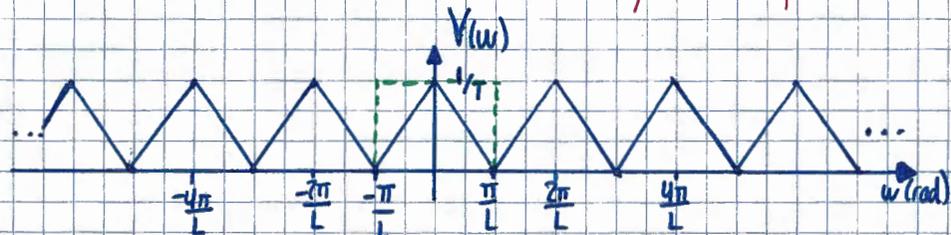
①  $\omega$  (rad/seg)  $\cdot T$  (seg) =  $\Omega$



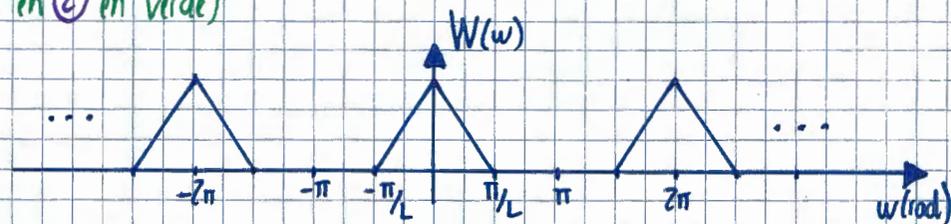
② Interpolación  $\uparrow L$

Expandir en  $n$   
Drezado en  $\omega$

⊕ El \$H(\omega)\$ saca periódicos



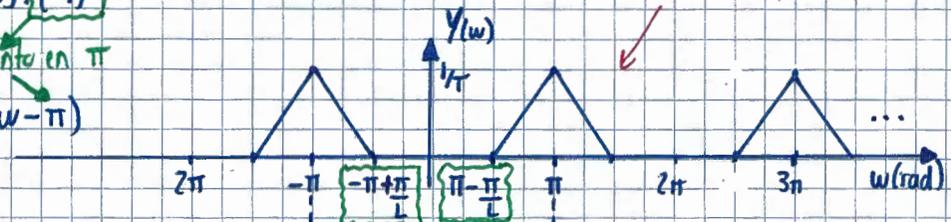
③ Filtro paso bajo (Hecho en ② en verde)



③-④  $\otimes (-1)^n$

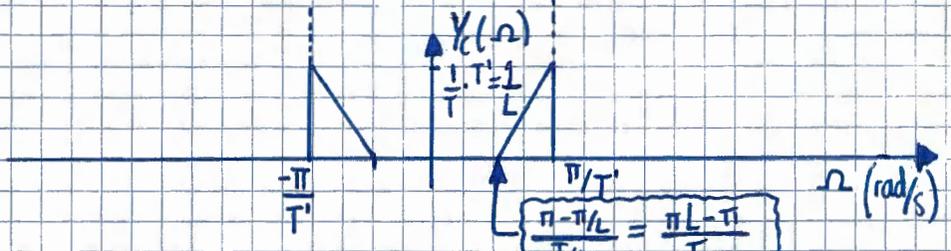
$y[n] = w[n] \cdot (-1)^n$   
Desplazamiento en  $\pi$   
 $Y(\omega) = W(\omega - \pi)$

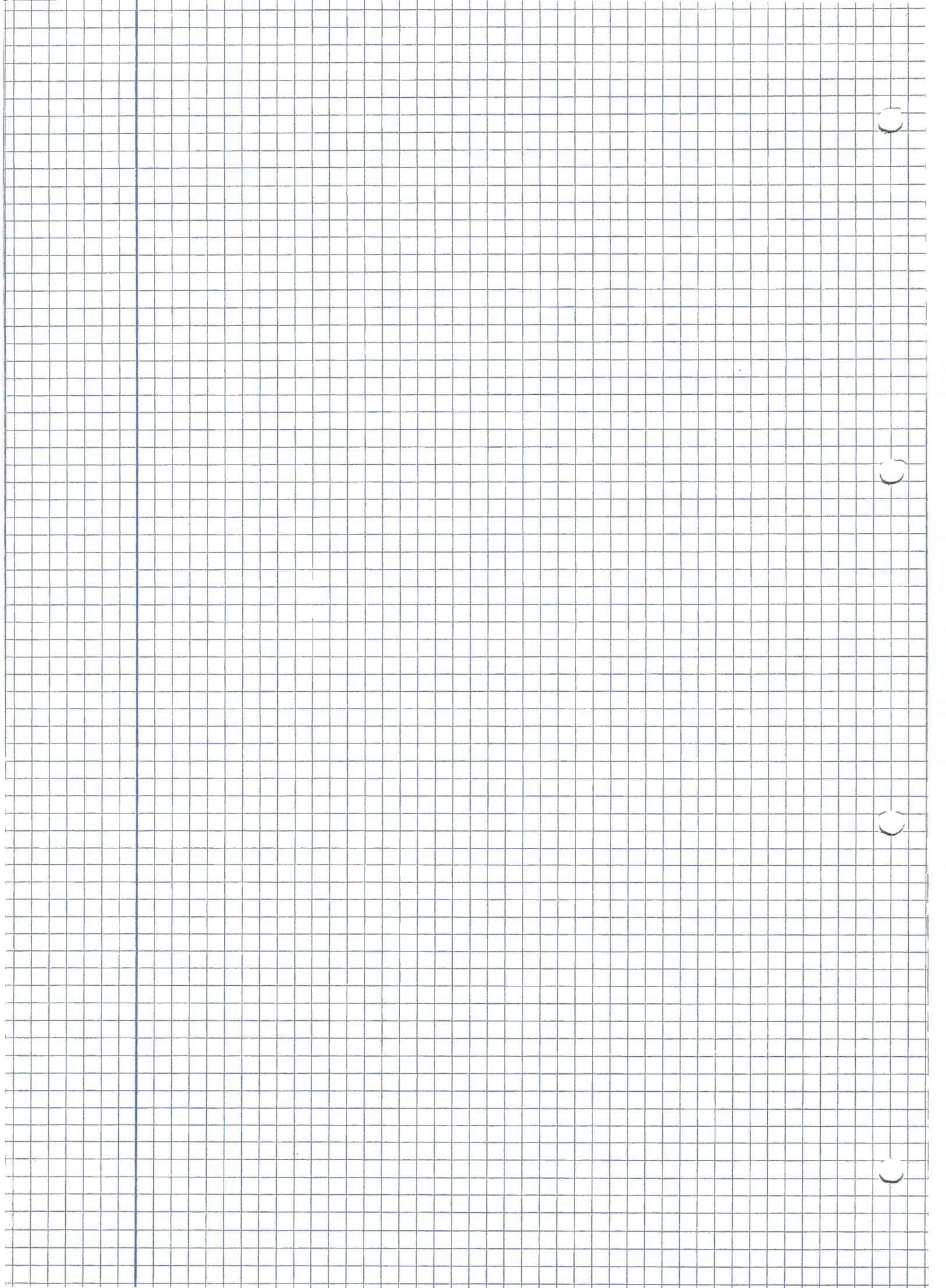
Sólo de  $(-\pi - \pi)$



④  $\omega$  (rad/seg) =  $\frac{\omega(\text{rad})}{T'(\text{seg})}$

$T'(\text{seg}) = T/L$





# Tratamiento Digital de Señales (21-11-11) Grupo 44

Apellidos: \_\_\_\_\_ Nombre: \_\_\_\_\_

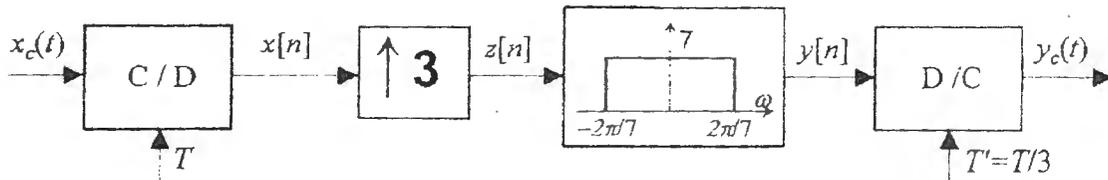
D.N.I.: \_\_\_\_\_

Firma: \_\_\_\_\_


Duración del examen: 70 minutos (Todos los apartados deben ser razonados)

## Problema 1 4,5 puntos

Considere la señal de tiempo continuo  $x_c(t) = \cos \Omega_0 t$  que es muestreada con periodo  $T$  para obtener la señal de tiempo discreto  $x[n] = x_c(nT)$ . La señal  $x[n]$  se hace pasar por un expansor de razón 3 y un fpb ideal de ganancia 7 y frecuencia de corte  $\omega_c = 2\pi/7$ , como se muestra en la figura.



Considere las dos siguientes situaciones:

1.  $F_s = 1/T = 5 \cdot 10^3$  Hz;  $\Omega_0 = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^3$  rad/s.
2.  $F_s = 1/T = 3 \cdot 10^3$  Hz;  $\Omega_0 = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^3$  rad/s.

Para ambas situaciones:

- a) Determine la expresión de  $x[n]$  y  $X(\omega)$  y dibuje esta última.
- b) Determine la expresión de  $z[n]$ ,  $y[n]$ ,  $Z(\omega)$  e  $Y(\omega)$  y dibuje las dos últimas.
- c) Determine la expresión de  $y_c(t)$  e  $Y_c(\Omega)$  y dibuje esta última.

1)

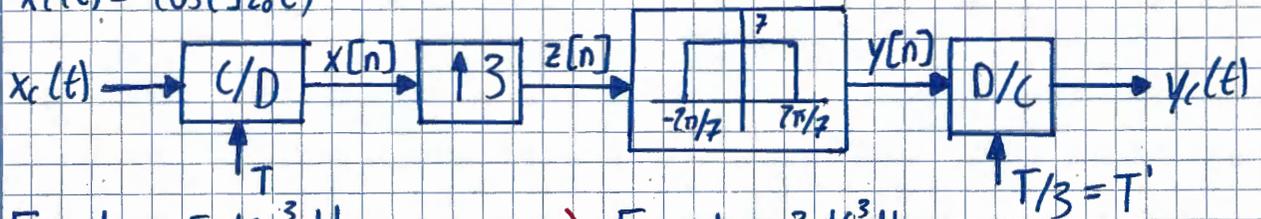
1)

1)

1)

# Problema 1 Noviembre 2017

$$x_c(t) = \cos(\Omega_0 t)$$



2 Situaciones

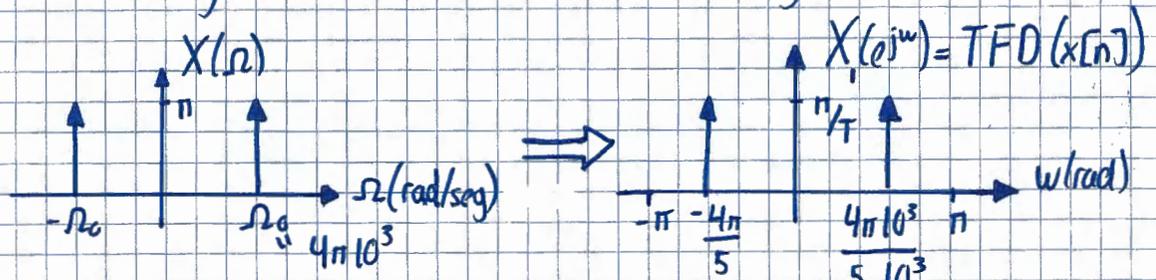
1)  $F_s = \frac{1}{T} = 5 \cdot 10^3 \text{ Hz}$

$$\Omega_0 = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ rad/seg}$$

2)  $F_s = \frac{1}{T} = 3 \cdot 10^3 \text{ Hz}$

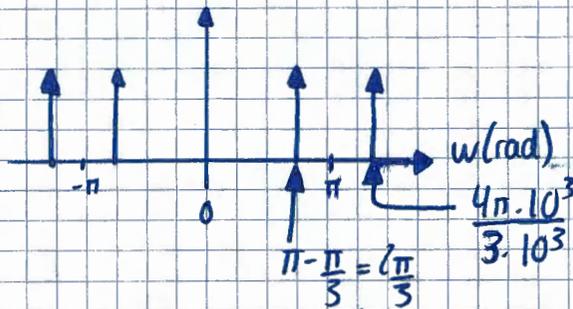
$$\Omega_0 = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ rad/seg}$$

a) CASO 1)



$$x_1[n] = \cos\left(\frac{4\pi}{5}n\right) = x_c(nT) = x_c\left(n \frac{1}{5 \cdot 10^3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi \cdot 10^3}{5 \cdot 10^3} \cdot n\right)$$

CASO 2)



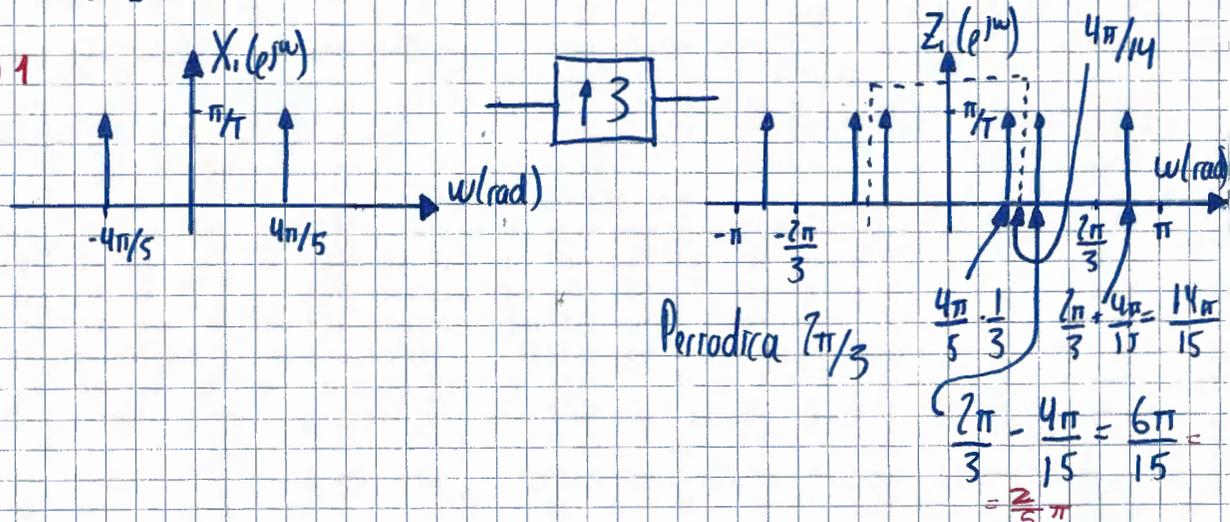
$$x_2[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) = x_c\left(\frac{4\pi \cdot 10^3}{3 \cdot 10^3}n\right)$$

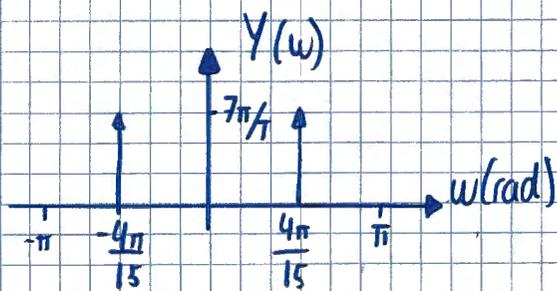
En el dominio de la frecuencia:

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{T_1} \left[ \delta\left(\omega - \frac{4\pi}{5}\right) + \delta\left(\omega + \frac{4\pi}{5}\right) \right]$$

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{T_2} \left[ \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{3}\right) + \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

b) CASO 1





$$z_1[n] = x_1[n/3]$$

$$y[n] = 7 \cos\left(\frac{4\pi}{15} n\right)$$

Por tanto,  $z_1[n] = \sum_k x_1[k] \delta[n-Lk]$

$$z_1[n] = \left[ \cos\left(\frac{4\pi}{15} n\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{15} n\right) + \cos\left(\frac{14\pi}{15} n\right) \right]$$

TF  
 $Z_1(e^{j\omega})$

$$Z_1(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{T} \left[ \delta\left(\omega - \frac{4\pi}{15}\right) + \delta\left(\omega + \frac{4\pi}{15}\right) + \delta\left(\omega - \frac{6\pi}{15}\right) + \delta\left(\omega + \frac{6\pi}{15}\right) + \delta\left(\omega - \frac{14\pi}{15}\right) + \delta\left(\omega + \frac{14\pi}{15}\right) \right]$$

Este resultado es anterior del filtro

$$Z_1(e^{j\omega}) = X_1(e^{j3\omega})$$

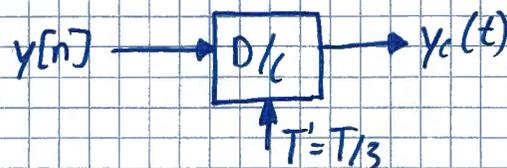
(CASO 2) Análogo CASO 1 PONEMOS SOLO SOLUCIONES

$$Z(e^{j\omega}) = X(e^{j3\omega}) = \frac{\pi}{T} \left[ \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{9}\right) + \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{9}\right) + \delta\left(\omega - \frac{4\pi}{9}\right) + \delta\left(\omega + \frac{4\pi}{9}\right) + \delta\left(\omega - \frac{8\pi}{9}\right) + \delta\left(\omega + \frac{8\pi}{9}\right) \right]$$

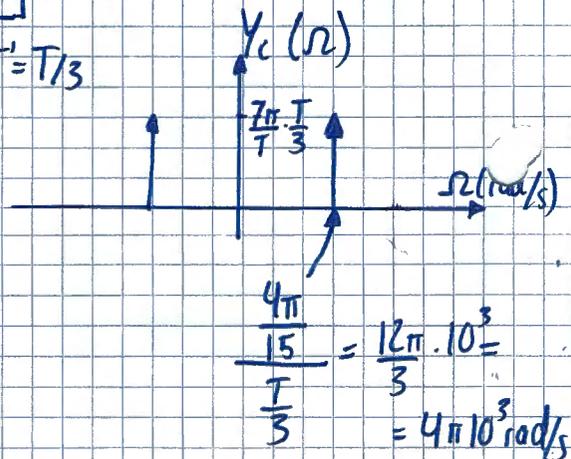
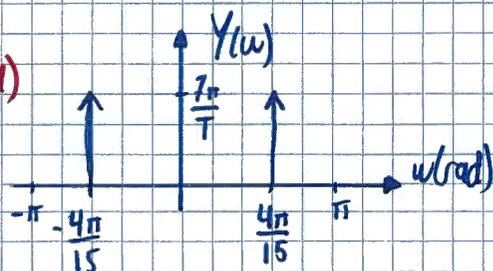
$$y[n] = 7 \cos\left(\frac{2\pi}{9} n\right)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{7\pi}{T} \left[ \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{9}\right) + \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{9}\right) \right]$$

c)  $y_c(t)$ ?  $Y_c(\Omega)$ ?



(CASO 1)



$$y_c(t) = \frac{7}{3} \cos(4\pi 10^3 t)$$

$$Y_c(\Omega) = \frac{7\pi}{3} \left[ \delta(\Omega - 4\pi 10^3) + \delta(\Omega + 4\pi 10^3) \right]$$

(CASO 2)

$$Y_c(\Omega) = \frac{7\pi}{3} \left[ \delta(\Omega - 2000\pi) + \delta(\Omega + 2000\pi) \right]$$

$$\Omega \leq \pi/T$$

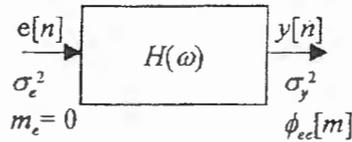
# Tratamiento Digital de Señales (1er parcial)

Apellidos: \_\_\_\_\_ Nombre: \_\_\_\_\_

D.N.I.: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_ Firma: \_\_\_\_\_


## Problema 1.

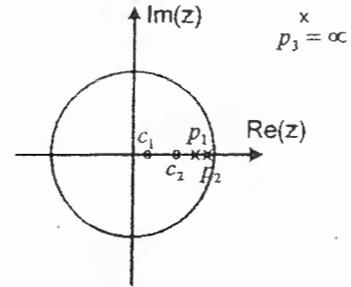
Considere un sistema LTI. La entrada al sistema es  $e[n]$ , un ruido blanco aleatorio de media nula y potencia promedio  $\sigma_e^2$ , y la salida es  $y[n]$ . El sistema es un sistema de diferencias hacia atrás definido por  $y[n] = e[n] - e[n-1]$ .



- Determine la expresión del espectro de potencia  $\Phi_{yy}(\omega)$  de la salida y dibújelo entre  $-2\pi \leq \omega \leq 2\pi$ .
- Obtenga la autocorrelación  $\phi_{yy}[m]$  de la salida  $y[n]$ . ¿Cuál es su longitud?
- Obtenga la potencia promedio  $\sigma_y^2$  de la salida  $y[n]$ .

## Problema 2.

El diagrama ceros-polos de la Figura representa a un sistema LTI estable que proviene de un sistema descrito por una ecuación en diferencias con coeficientes constantes.



- ¿Está completo el diagrama? Razone por qué sí/no está completo.
- Escriba una función del sistema  $H(z)$ , compatible con dicho diagrama.
- Especifique la R.O.C  $\{H(z)\}$ . ¿Hay alguna región en la que el sistema sea causal?
- Escriba una ecuación en diferencias que se corresponda con el diagrama. Si lo prefiere, considere que  $c_1 = 1/3$ ;  $c_2 = 1/2$ ;  $p_1 = 2/3$ ;  $p_2 = 3/4$ .
- Dibuje un flujograma que relacione  $x[n]$  con  $y[n-1]$  y contenga solamente dos sistemas de primer orden conectados en serie.

## Problema 3.

Considere el sistema multitasa de dos ramas de la Figura 1 cuya entrada es  $x[n]$  y su salida  $y[n]$ .

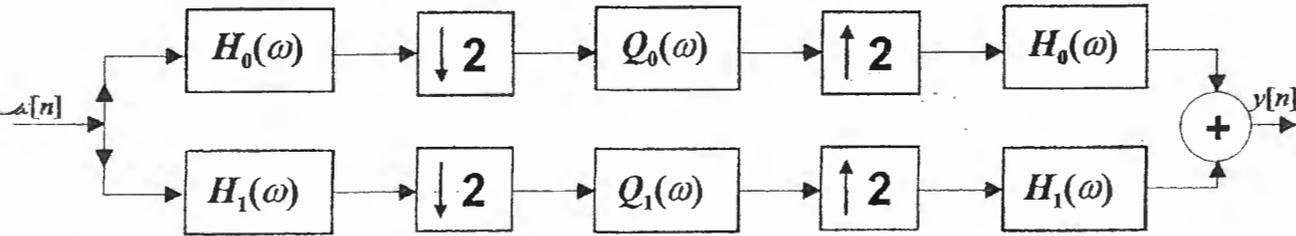


Figura 1

Los filtros  $H_0(\omega)$  y  $H_1(\omega)$  son sendos filtros paso-bajo y paso-alto de frecuencia de corte  $\omega_c = \pi/2$  y los filtros  $Q_0(\omega)$  y  $Q_1(\omega)$  cubren todo el espectro  $-\pi \leq \omega \leq \pi$  y vienen dados por la Figura 2. Se pide:

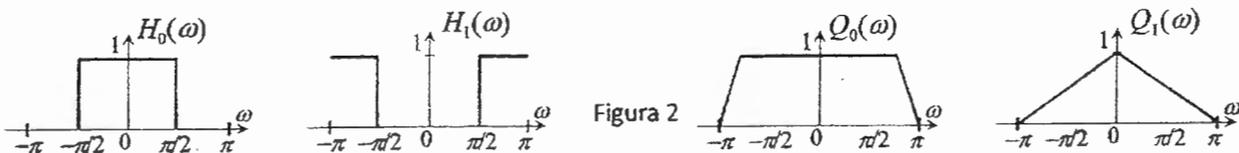


Figura 2

- Hacer un bosquejo de  $G(\omega) = Y(\omega)/X(\omega)$ , la respuesta en frecuencia global del sistema.
- Especificar algún sistema multitasa de dos ramas equivalente al anterior y que utilice como filtros  $H_0(z)$ ,  $Q_0(z)$  y  $Q_1(z)$  o alguna versión expandida de ellos ( $H_0(z^M)$ ,  $Q_0(z^M)$  y  $Q_1(z^M)$ )? No deberá utilizar ningún expansor, compresor o muestreador, pero quizá necesite algún modulador.

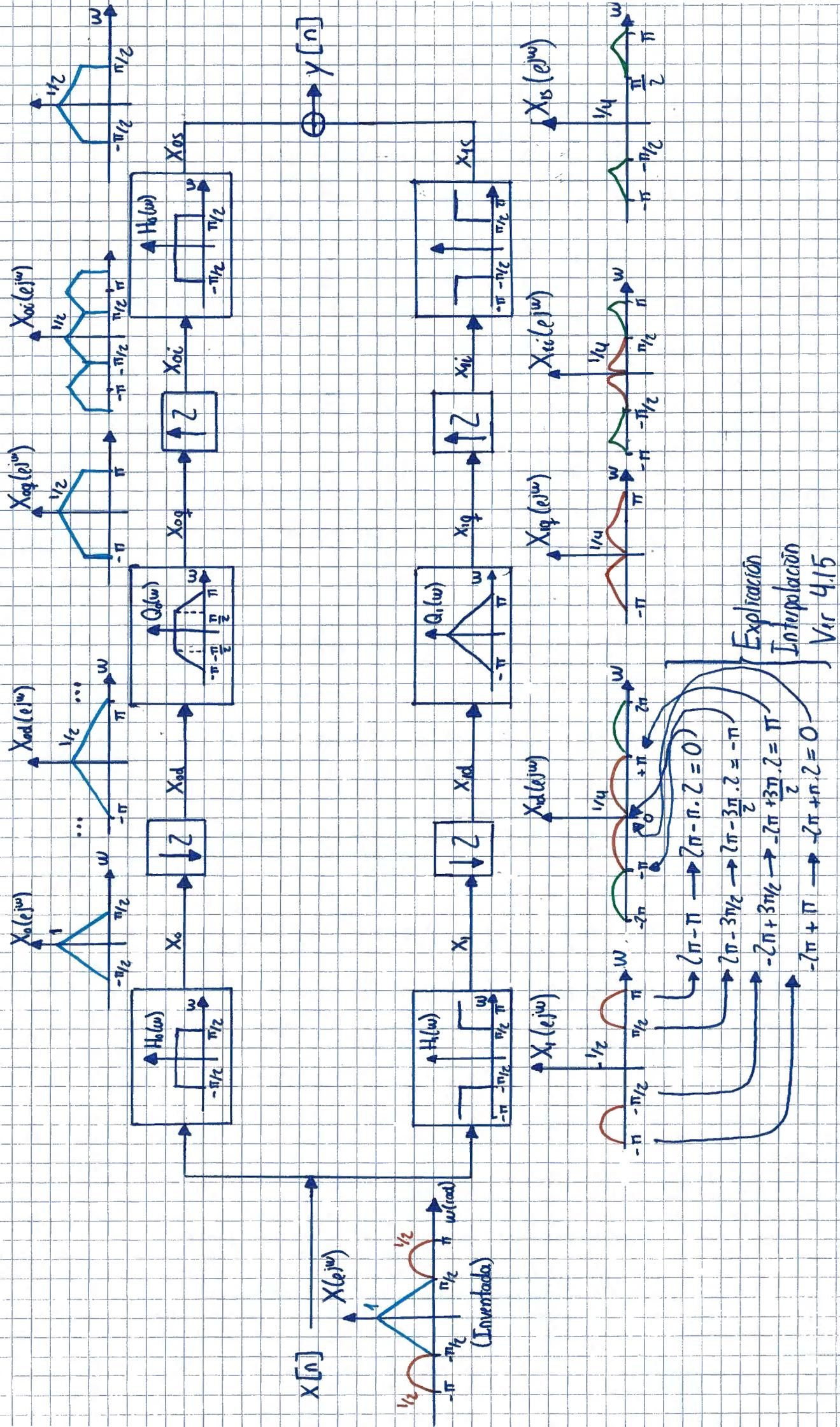
1

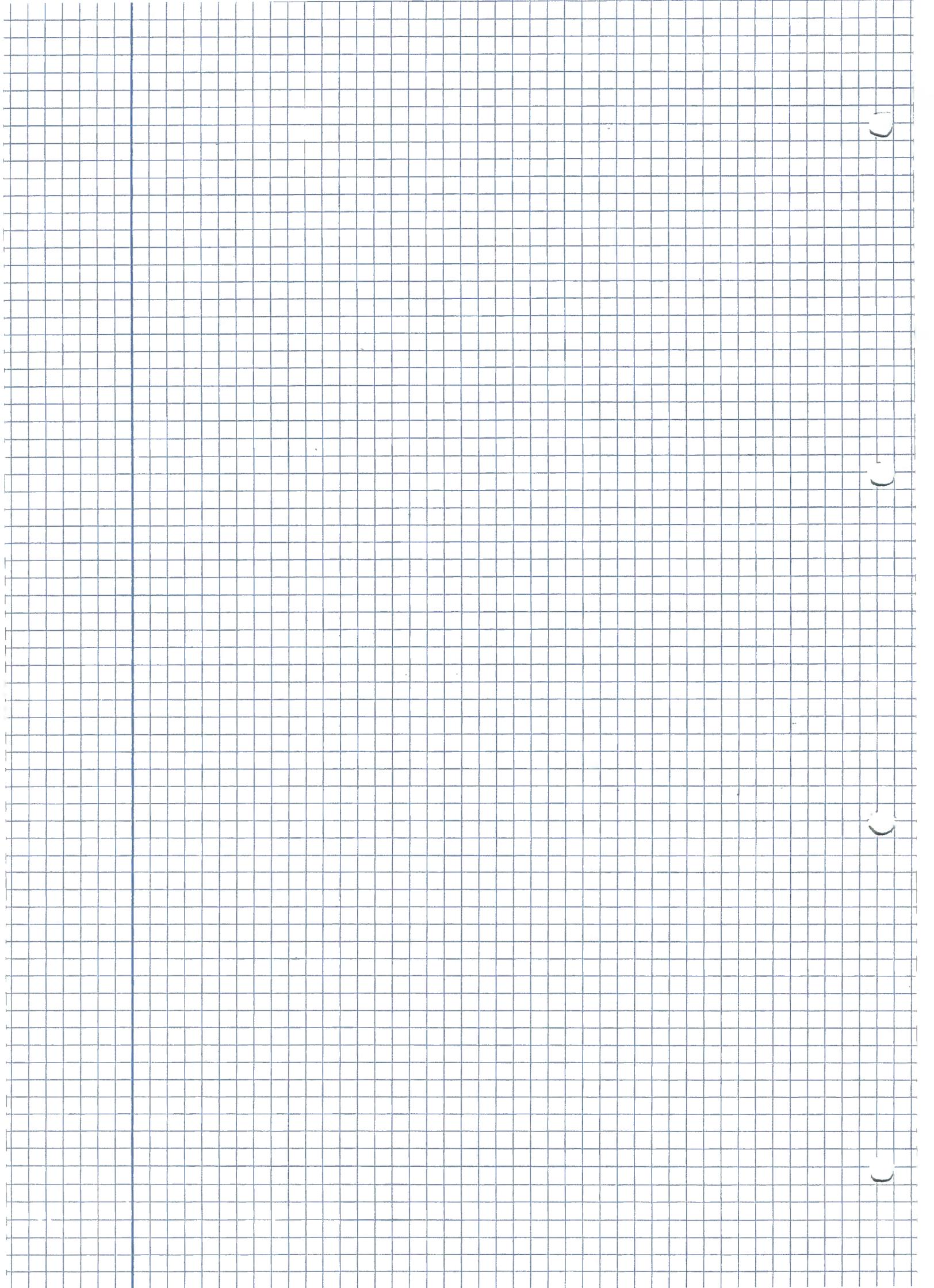
2

3

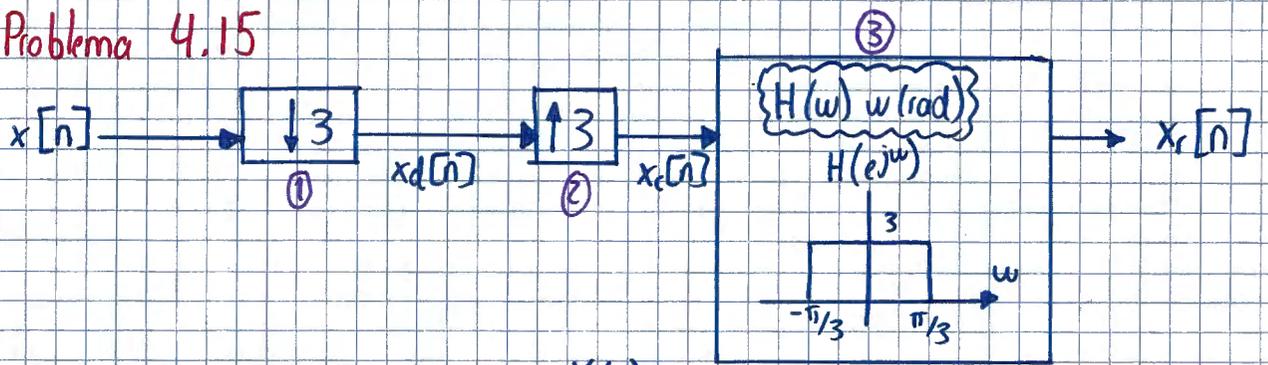
4

Noviembre 2012 Problema 3 = Libro Oppenheim 4-49)

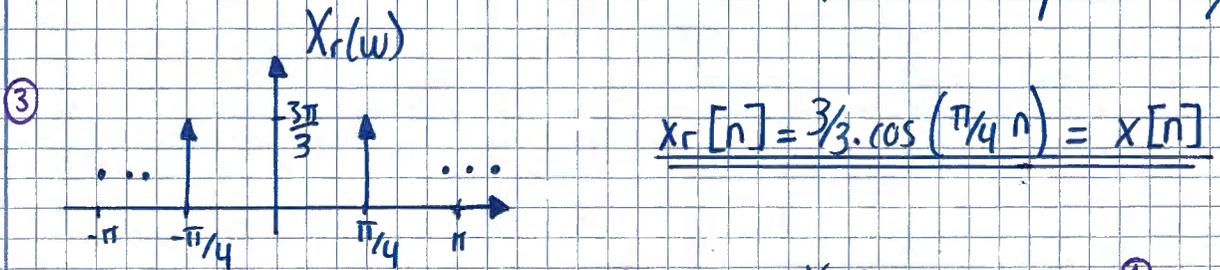
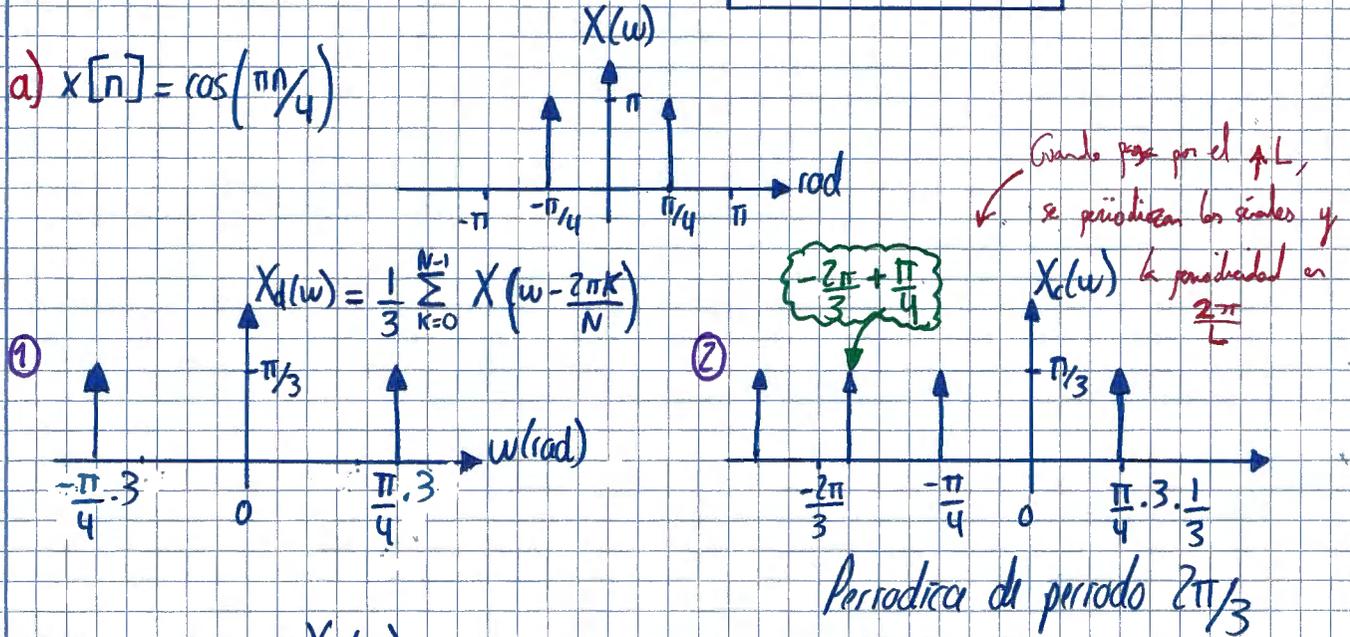




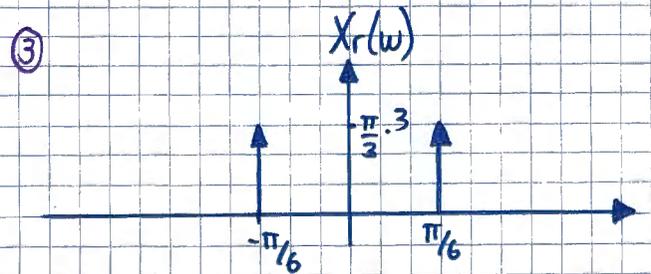
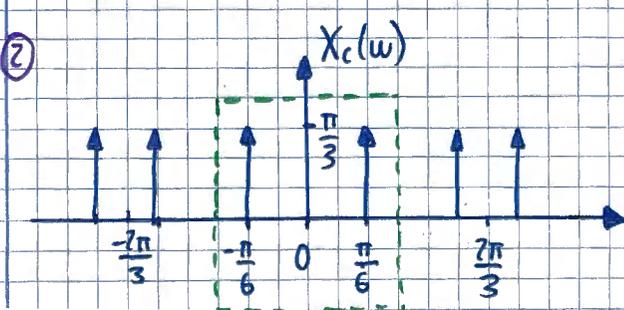
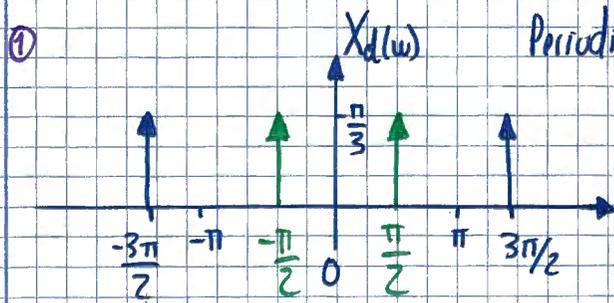
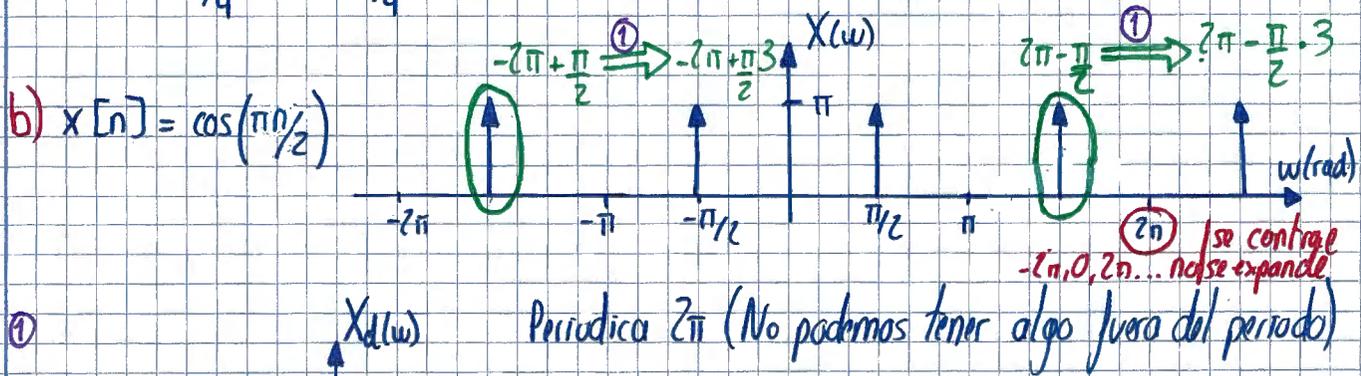
# Problema 4.15



a)  $x[n] = \cos(\pi n/4)$

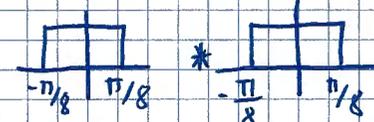


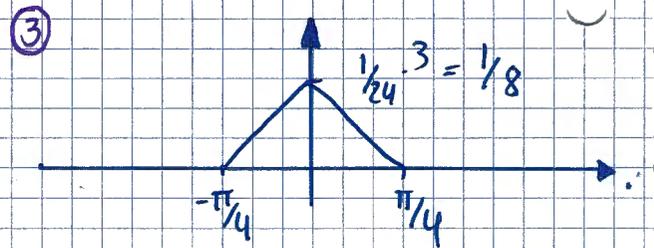
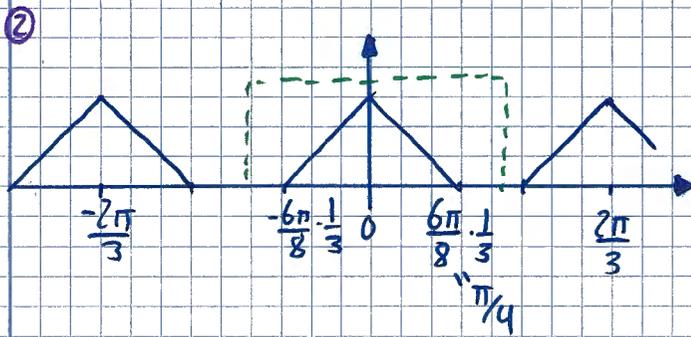
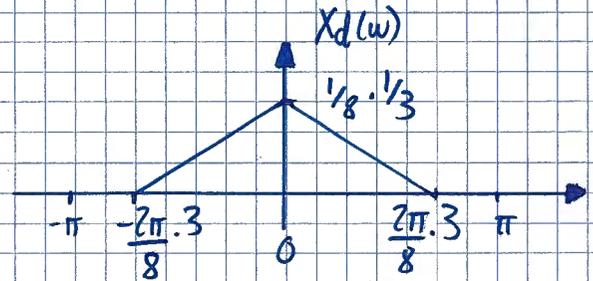
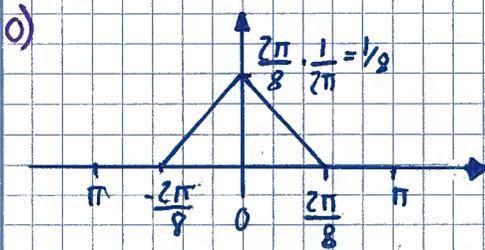
b)  $x[n] = \cos(\pi n/2)$



$$c) x[n] = \left( \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)}{\pi n} \right)^2$$

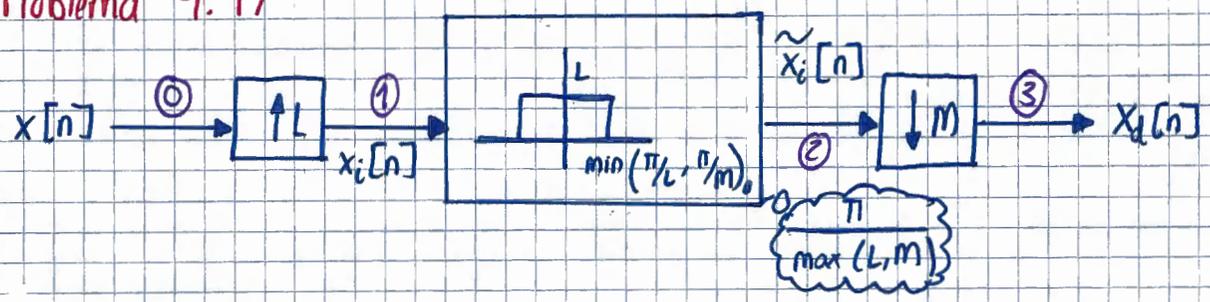
$\xrightarrow{\text{sinc}\left(\frac{\pi}{8}n\right)} x[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)}{\pi n} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)}{\pi n} = h[n] \cdot h[n]$

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} H(\omega) \otimes_{\frac{1}{\pi}} H(\omega) =$$




$$\underline{\underline{x_r[n] = x[n]}}$$

# Problema 4.17



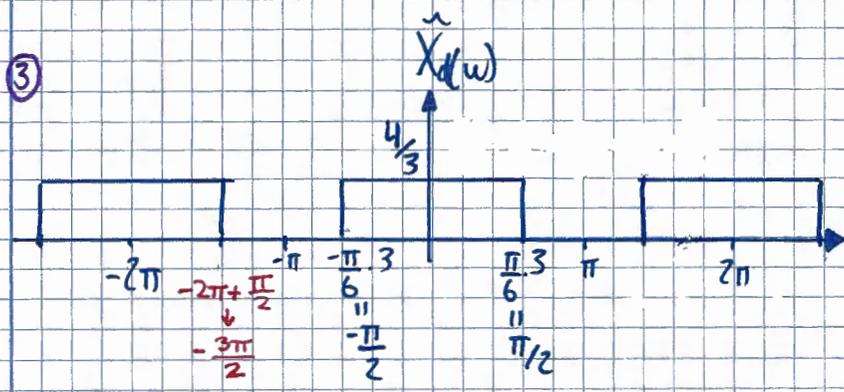
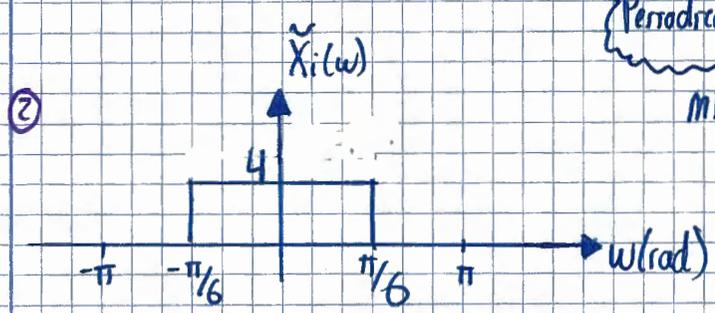
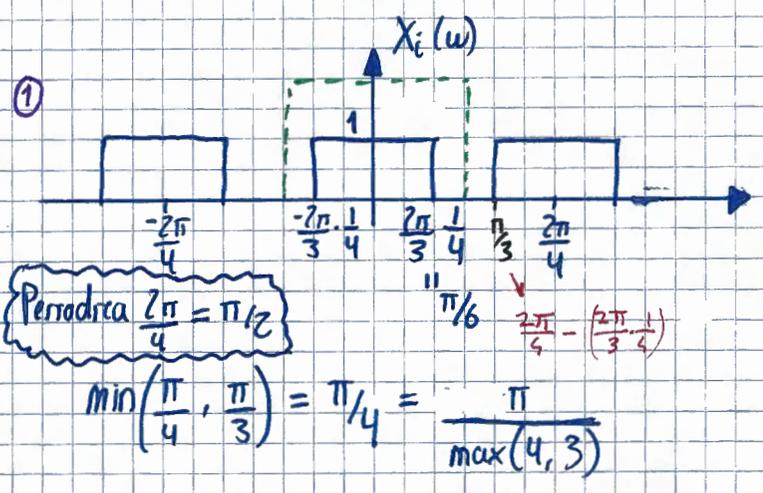
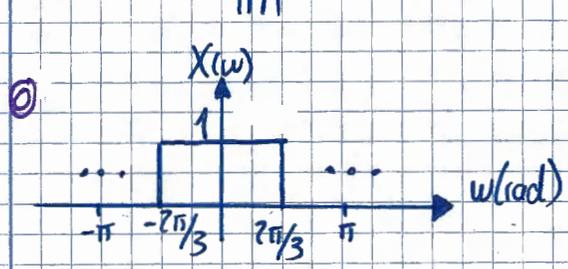
$T$   
 $f_s$

$T/L$   
 $L f_s$

$T/L$   
 $L f_s$

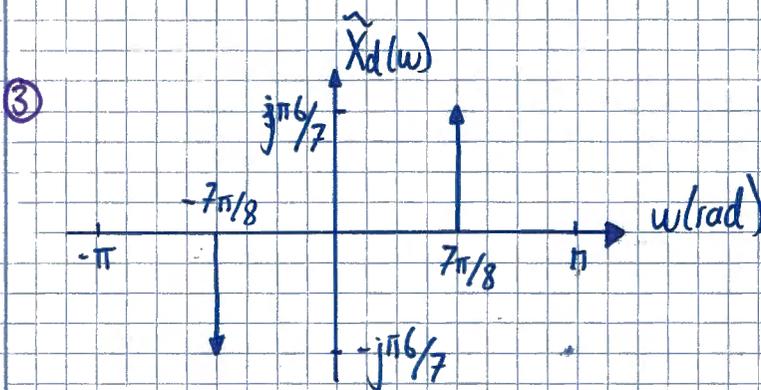
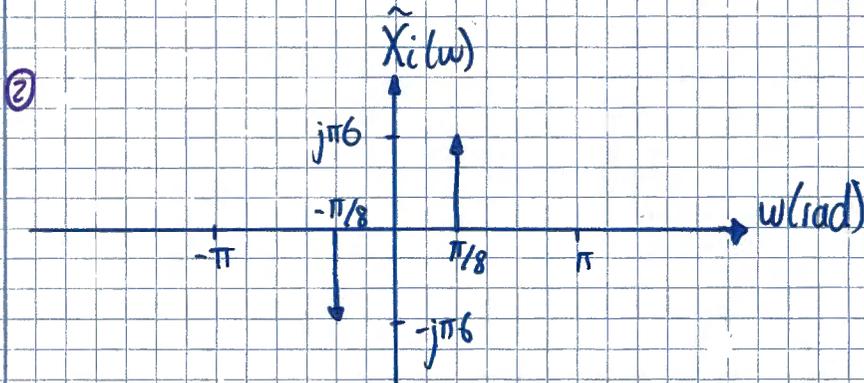
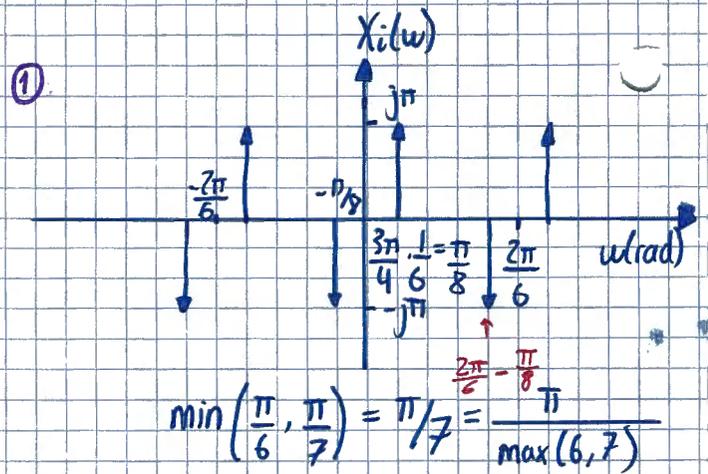
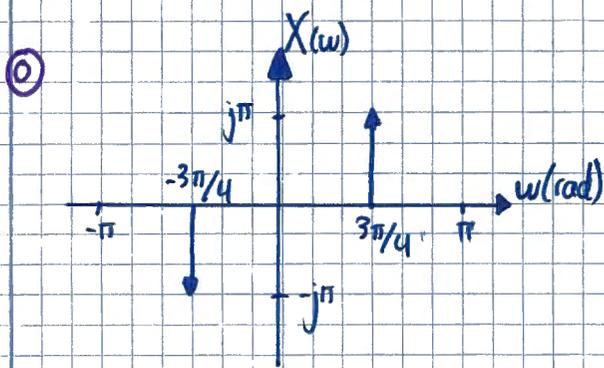
$TM/L$   
 $\frac{L}{M} f_s$

a)  $x[n] = \frac{\text{sen}(2\pi n/3)}{\pi n}$  ;  $L=4$  ;  $M=3$



$$x_d[n] = \frac{16}{9} \frac{\text{sinc}(\pi/2 \cdot n)}{\pi n}$$

b)  $x[n] = \sin(3\pi n/4)$ ;  $L=6$ ;  $M=7$

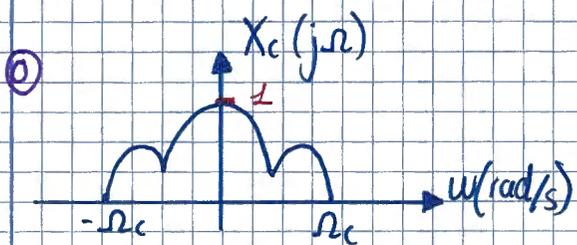
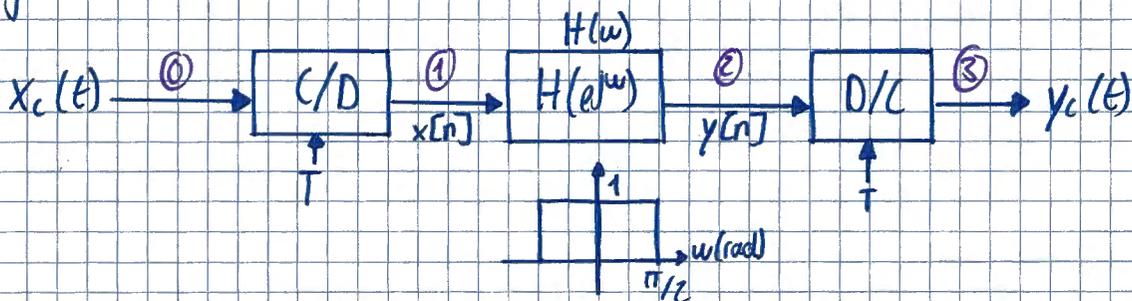


$\tilde{X}_d[n] = \frac{6}{7} \sin\left(\frac{7\pi}{8} n\right) = \tilde{x}_d[n]$

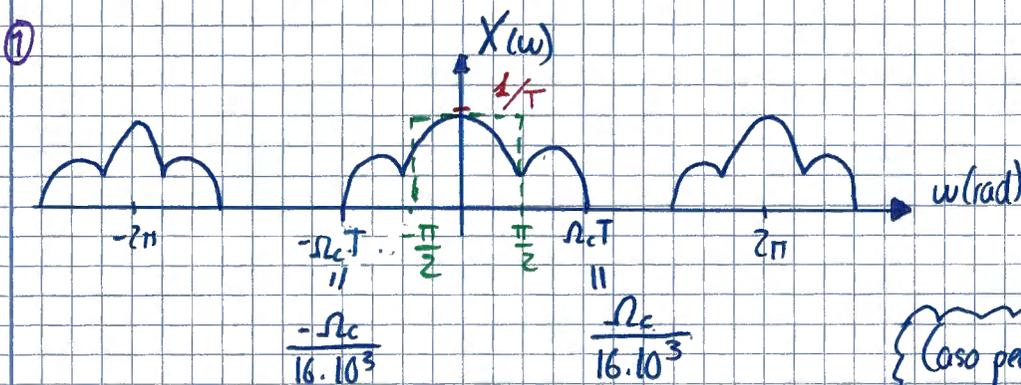
# Problema 4.26)

Para que sea LTI debemos recuperar la señal.

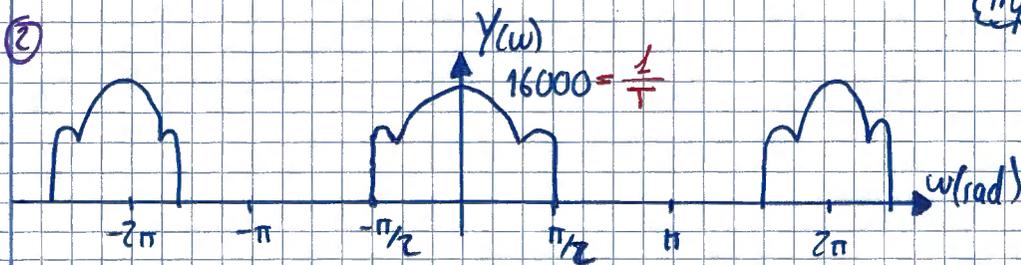
$f_s = 16 \text{ kHz}$



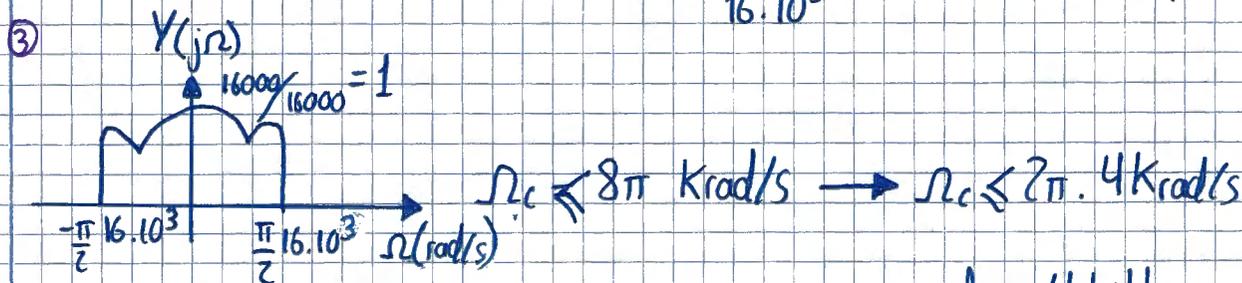
$X_c(j\Omega) = 0 \quad |\Omega| > \Omega_c$



Caso peor: perdemos información

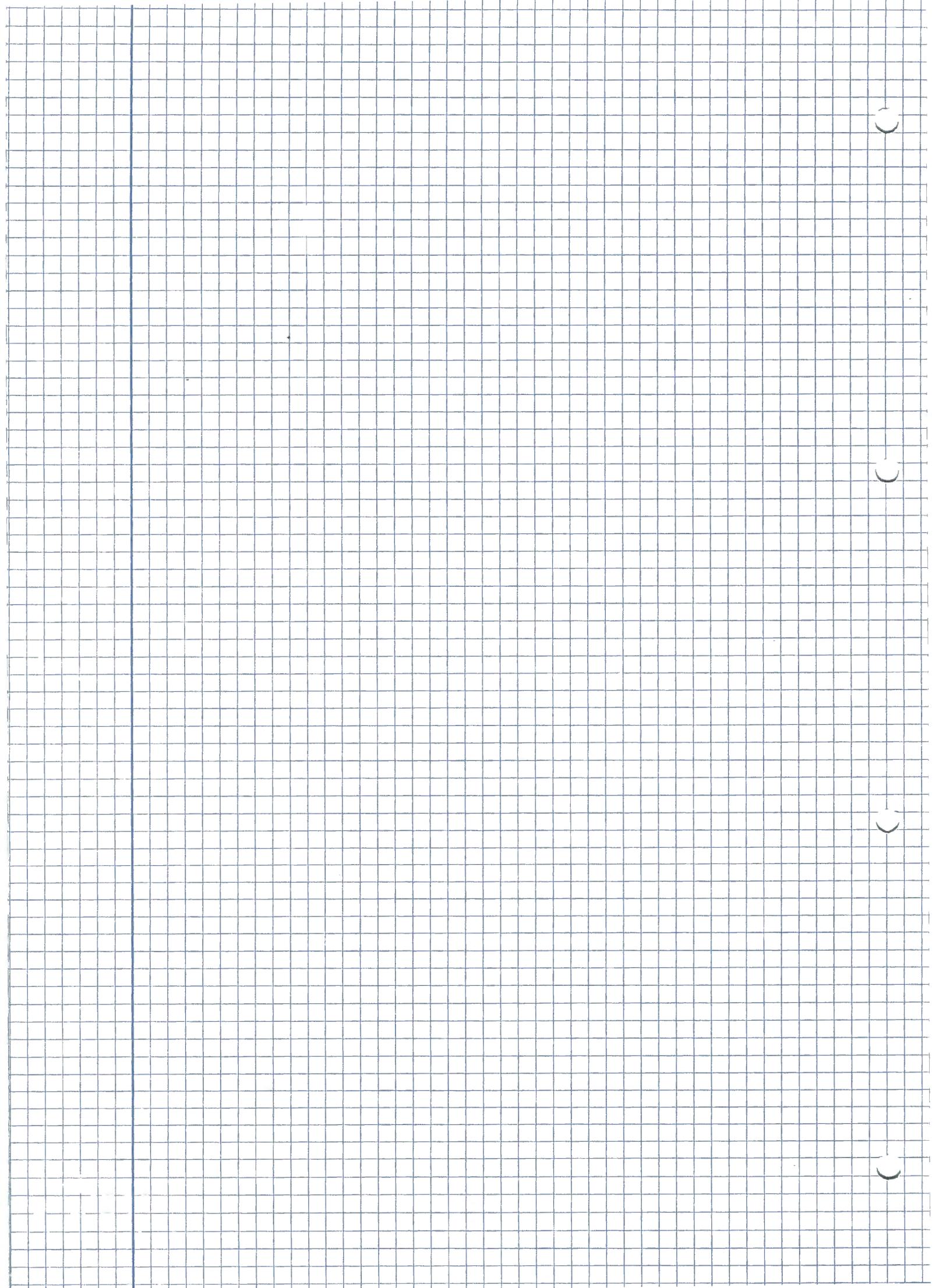


$$\Omega_c T \leq \pi/2 \rightarrow \frac{\Omega_c}{16 \cdot 10^3} \leq \pi/2 \rightarrow \Omega_c \leq \pi \cdot 8 \text{ kHz}$$

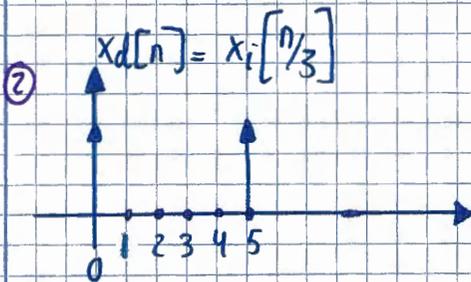
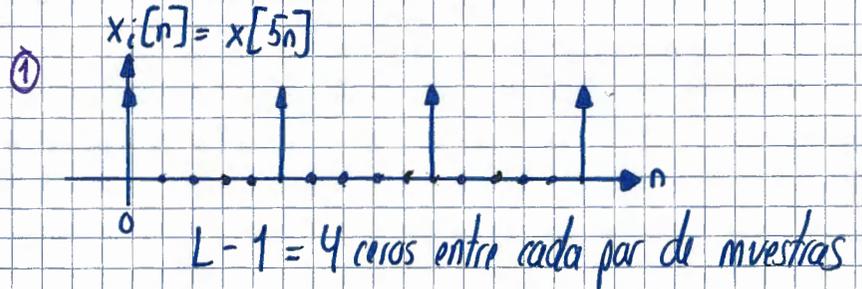
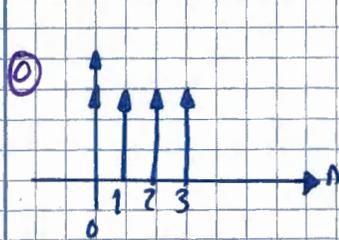
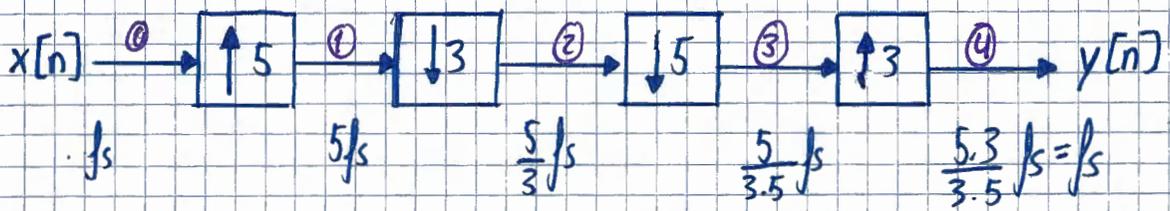


$$\Omega_c \leq 8\pi \text{ Krad/s} \rightarrow \Omega_c \leq 2\pi \cdot 4 \text{ Krad/s}$$

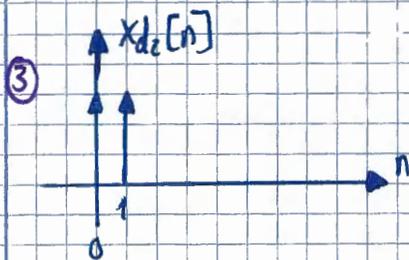
$f_c = 4 \text{ kHz}$



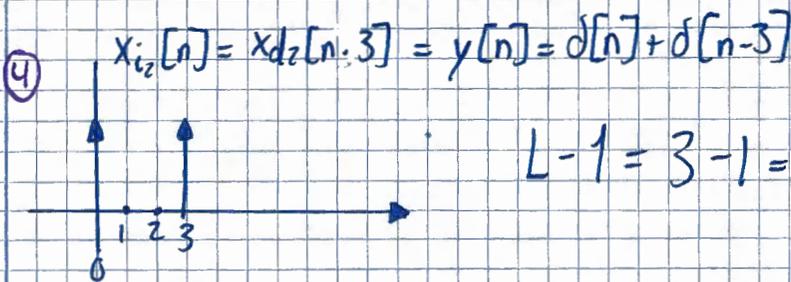
# Problema 4.33)



(tome las muestras de  $x_i[n]$  cada 3 muestras)



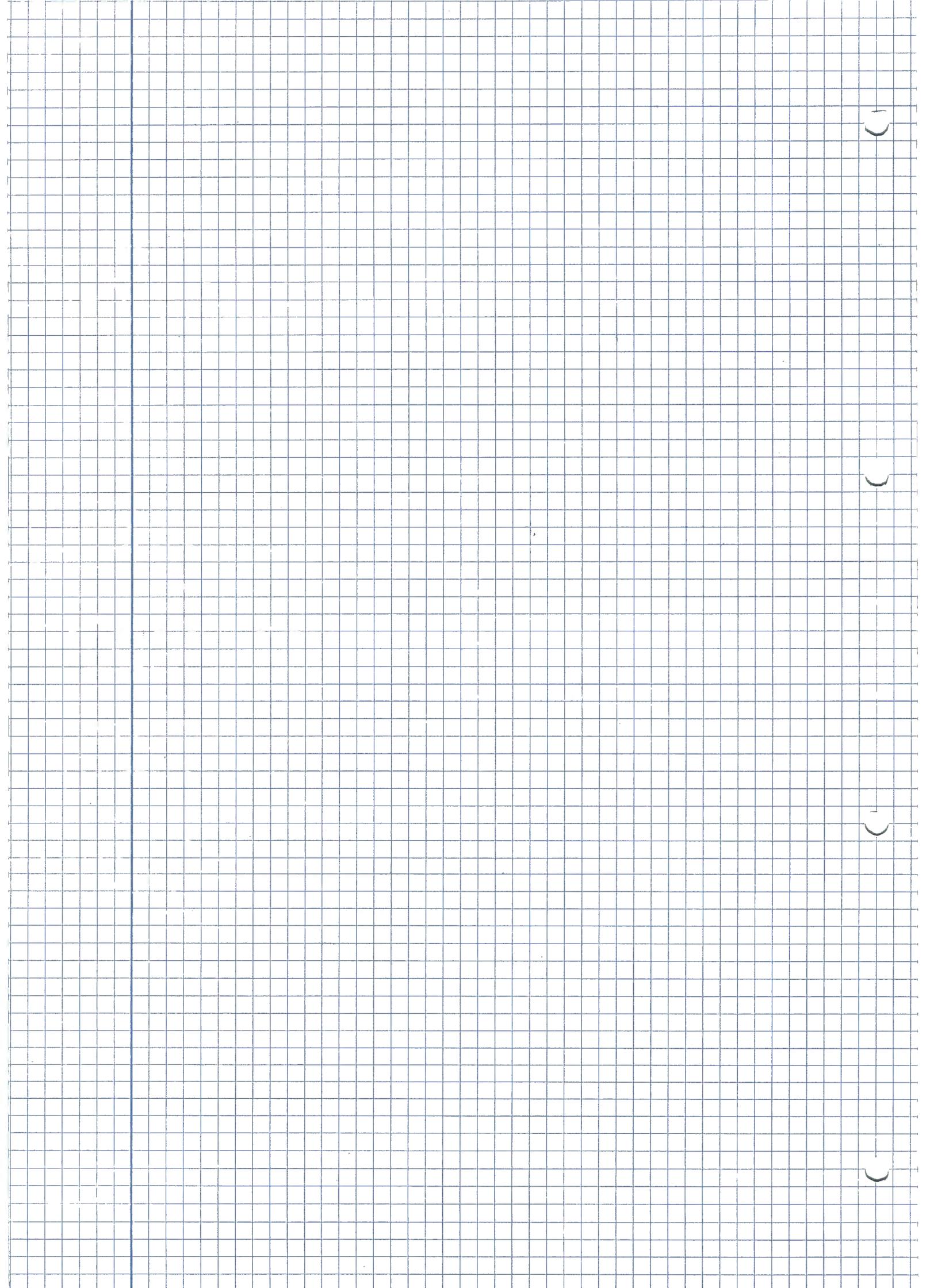
(tome las muestras de  $x_d[n]$  cada 5 muestras)



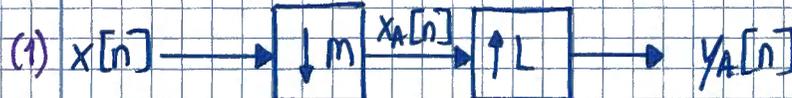
$L-1 = 3-1 = 2$  ceros entre muestras



$$y[n] = \begin{cases} x[n] & ; n=0, n=3 \\ 0 & ; \text{resto} \end{cases} \quad \begin{cases} x[n] & ; n=3k \\ 0 & ; \text{resto} \end{cases} \quad [k \in \mathbb{Z}]$$

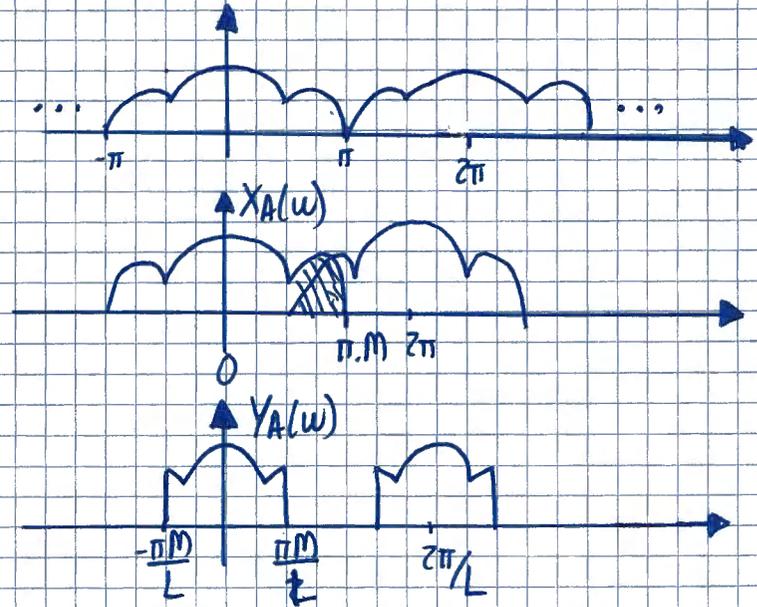


# Problema 4.38)

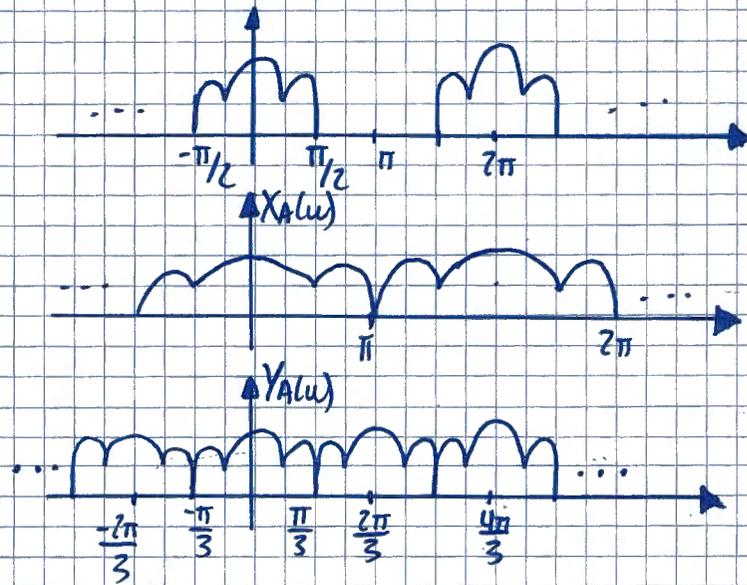


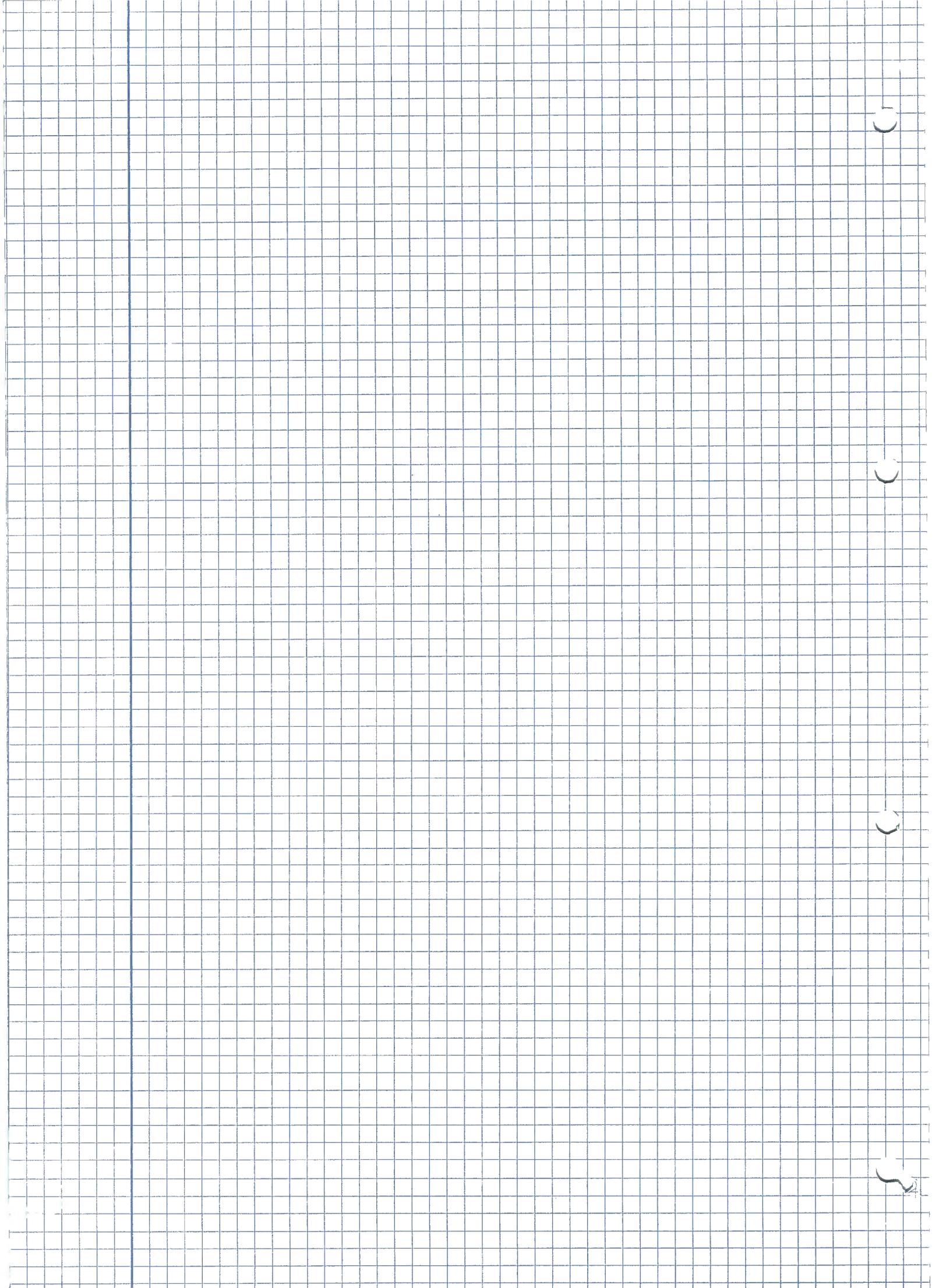
a)  $M=2$   
 $L=3$

(i) Suponemos:

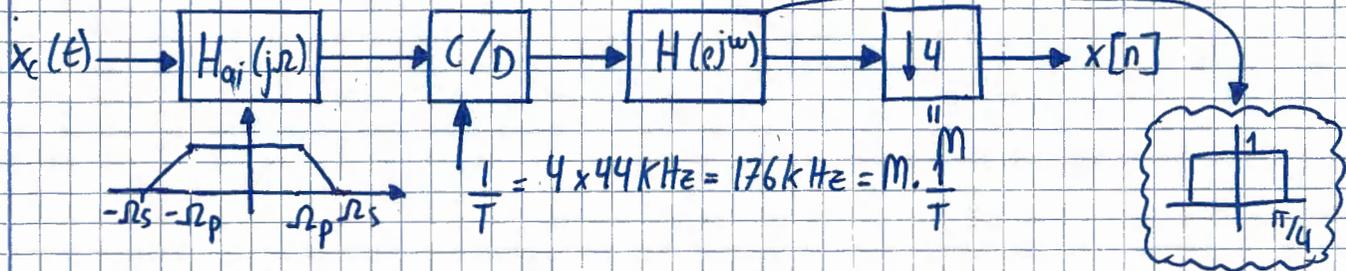
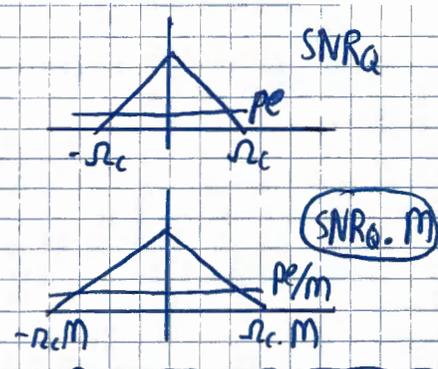
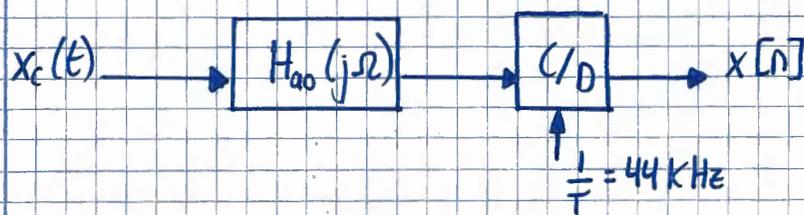


(ii) Ahora suponemos:

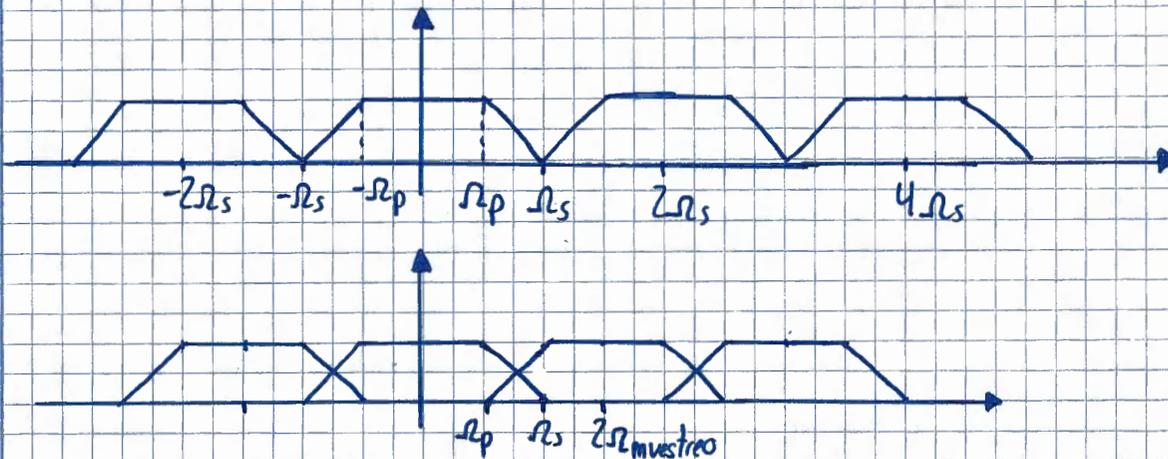




# Problema 4.66)



$$H_{oi}(j\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq \Omega_p \\ 0 & |\Omega| > \Omega_p \end{cases}$$

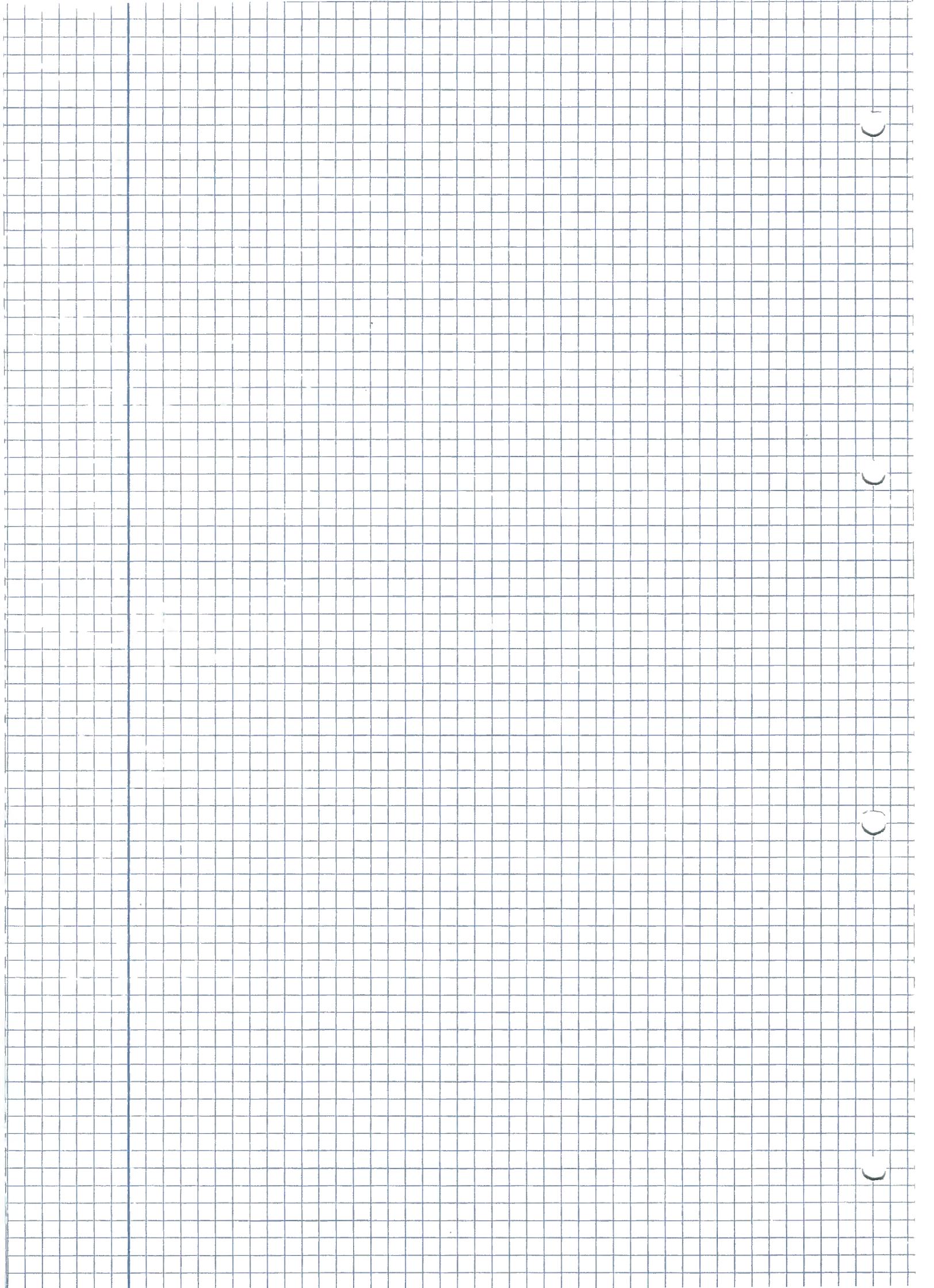


$$2\Omega_{muestreo} = \Omega_s + \Omega_p \Rightarrow 2 \cdot (2\pi \cdot 44 \cdot 10^3) = \Omega_s + \Omega_p$$

$$\frac{\pi}{4} = \Omega_p \cdot \frac{T}{M} \Rightarrow \Omega_p = \frac{\pi}{4} \frac{M}{T} = \frac{\pi}{4} \cdot 4 \cdot 44 \cdot 10^3 \text{ (rad/s)}$$

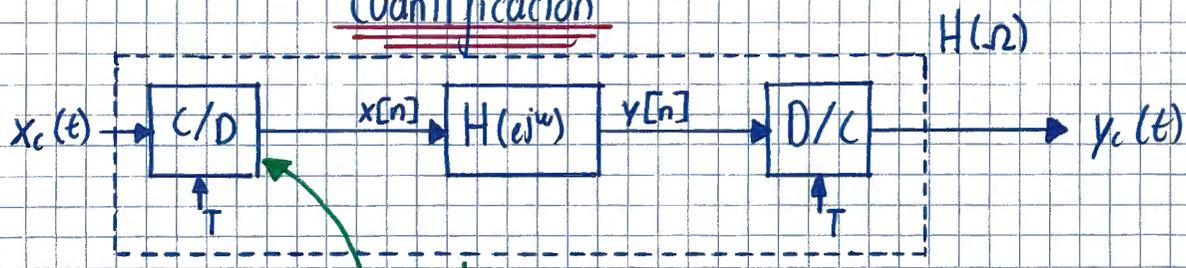
$$\underline{\underline{\Omega_p = 44\pi \cdot 10^3 \text{ (rad/s)}}}$$

$$\underline{\underline{\Omega_s = 4\pi \cdot 44 \cdot 10^3 - M \cdot 44 \cdot 10^3 = 3\pi \cdot 44 \cdot 10^3 \text{ rad/s}}}$$

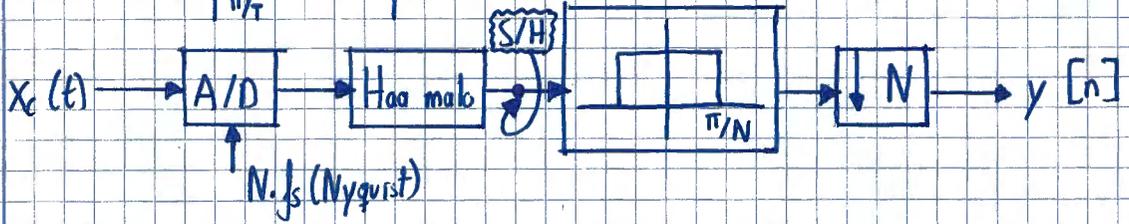
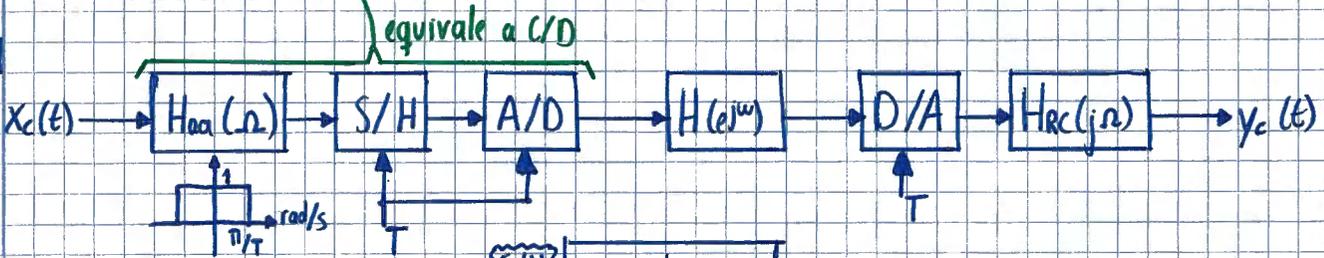


Ni me lo miraba

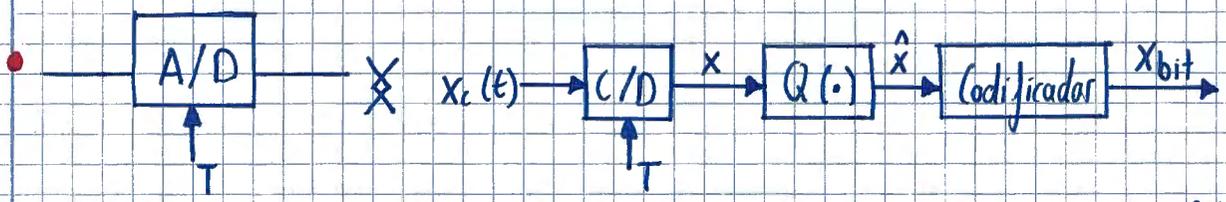
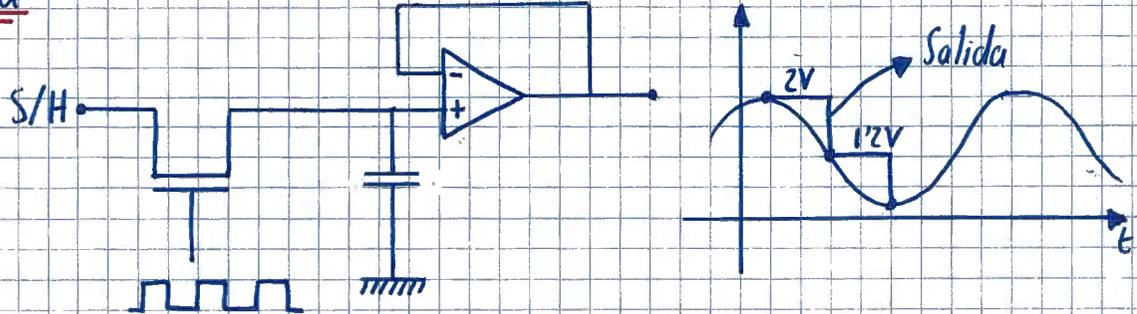
Cuantificación



S/H = Sample/Hold



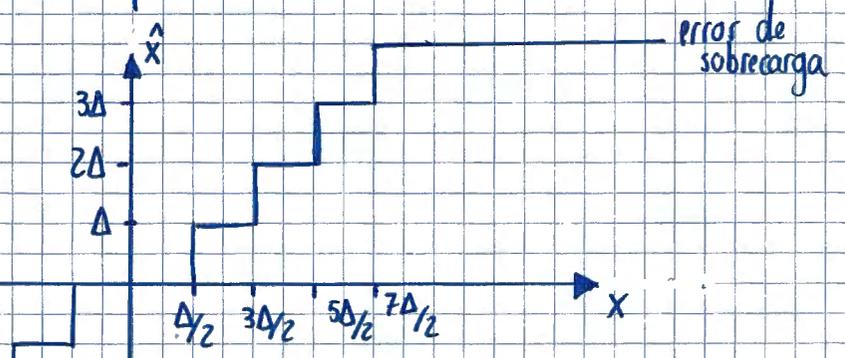
Sample & Hold



$\Delta \equiv$  tamaño escalón de cuantificación (Voltios)

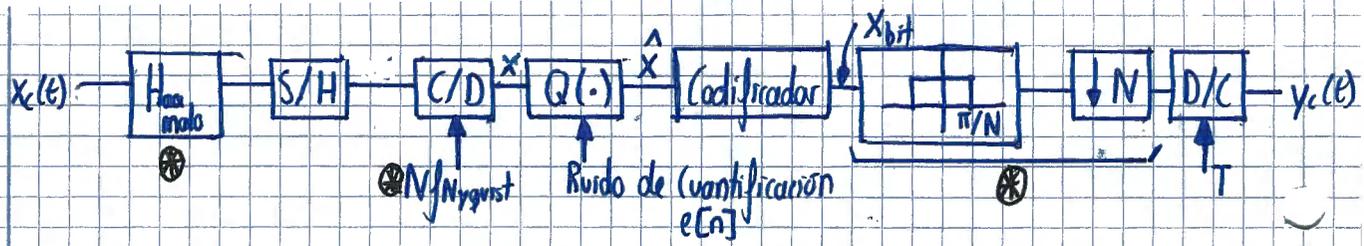
$$\Delta = \frac{2X_m}{2^{B+1}}$$

$B+1 \equiv n^\circ$  bits codificador



Por ejemplo: 1V-2V  $\rightarrow$  1.5V  
 2V-3V  $\rightarrow$  2.5V  
 3V-4V  $\rightarrow$  3.5V  
 $\underbrace{\hspace{2cm}}_X \quad \underbrace{\hspace{2cm}}_{\hat{X}}$

$2X_m \equiv$  Valor fondo de escala



$$\hat{x}[n] = x[n] + e[n] \quad ; \quad -\frac{\Delta}{2} \leq e[n] \leq \frac{\Delta}{2} \quad ; \quad e[n] \equiv \text{Ruido Blanco Gaussiano}$$

$\mu_e = 0$  y  $P = \sigma_e^2$

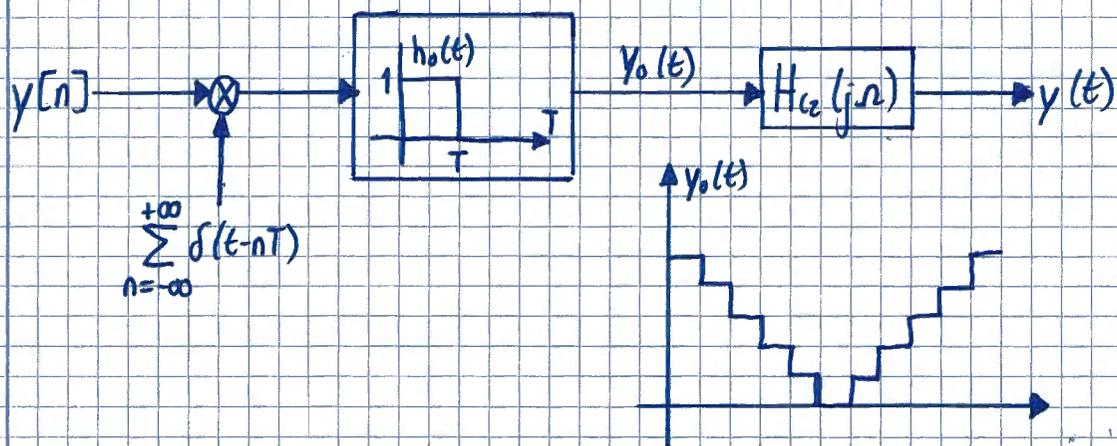
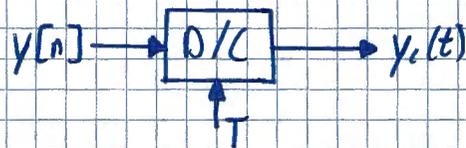
$$P = \sigma_e^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e[n]^2 \cdot f_e de = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 \cdot \frac{1}{\Delta} de = \frac{\Delta^2}{12}$$

$$P = \sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{(2^{x_m}/2^{8n})^2}{12}$$

$$SNR_Q = 10 \log \frac{P_{\text{señal}}}{P_{\text{ruido}}} = 10 \log \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = 20 \log \frac{\sigma_x}{\sigma_e} = 10 \log \frac{\sigma_x^2}{\Delta^2/12} = 10 \log \frac{\sigma_x^2}{(2^{x_m}/2^{8n})^2/12}$$

$$SNR_Q = \dots = 6.02 \cdot B + 10.8 - 20 \log \frac{x_m}{\sigma_x}$$

$\begin{cases} \sigma_x = 4x_m & \text{para señal gaussiana} \\ \sigma_x = x_m & \text{para señal sinusoidal} \end{cases} \rightarrow SNR_Q = 6.02B + 10.8 \text{ (dB)}$



Apellidos \_\_\_\_\_ Nombre \_\_\_\_\_

Calificación \_\_\_\_\_ 1 + \_\_\_\_\_ 2 + \_\_\_\_\_ 3 + \_\_\_\_\_ 4 = \_\_\_\_\_

1. Considere un sistema LTI causal cuyas entrada  $x(n)$  y salida  $y(n)$  están relacionadas por la ecuación en diferencias:

$$y[n] = y[n-1] + x[n] - x[n-5]$$

a) Determine la respuesta al impulso  $h[n]$  (1 p).

b) Calcule la salida del sistema  $y[n]$  para la entrada  $x[n] = 3 + 2 \cos(\pi n + \pi/4)$  (1,5 p).

(a) Determine la respuesta al impulso  $h(n)$ .

- Tomando transformada  $z$

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = X(z) - z^{-5}Z(z)$$

de donde

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-5}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{z^{-5}}{1 - z^{-1}}$$

- Haciendo la transformada  $z$  inversa

$$h(n) = u(n) - u(n - 5)$$

(b) Calcule la salida del sistema  $y(n)$  para la entrada  $x(n) = 3 + 2 \cos(\pi n + \pi/4)$ .

- El sistema es estable ( $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = 5 < \infty$ ), por tanto tiene transformada de Fourier

$$H(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1 - e^{-j\omega 5}}{1 - e^{-j\omega}}$$

- El sistema es real, por tanto  $H(\omega) = H^*(-\omega)$
- La entrada es la suma de dos sinusoides: 3 con frecuencia 0 y  $2 \cos(\pi n + \pi/4)$  con frecuencia  $\pi$
- Con estas condiciones la salida es:  $y(n) = 3H(0) + |H(\pi)| 2 \cos(\pi n + \pi/4 + \angle H(\pi))$

$H(0) = \frac{1 - e^{-j\omega 5}}{1 - e^{-j\omega}} \Big|_{\omega=0} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$ , indeterminado

pero  $H(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j0n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) = \sum_{n=0}^4 1 = 5$

$H(\pi) = \frac{1 - e^{-j\omega 5}}{1 - e^{-j\omega}} \Big|_{\omega=\pi} = \frac{1 - (-1)}{1 - (-1)} = 1 \Rightarrow |H(\pi)| = 1, \angle H(\pi) = 0$

- Así pues, la salida es  $y(n) = 5 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cos(\pi n + \pi/4 + 0)$ , es decir

$$y(n) = 15 + 2 \cos(\pi n + \pi/4)$$

**2.** Si la entrada a un sistema LTI causal es:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n] - u[-n-1]$$

La transformada Z de la salida tiene la forma:

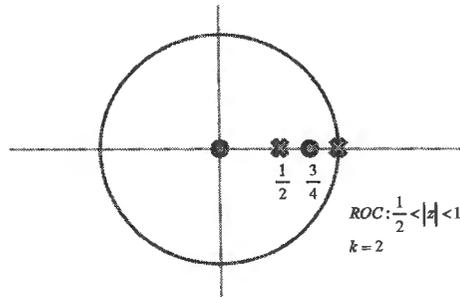
$$Y(z) = \frac{(1 - \frac{3}{4}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

a) Especifique X(z) y dibuje su diagrama polo-cero y su ROC (1 p).

b) Especifique la respuesta al impulso del sistema (1,5 p).

(a)

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{1}{(1 - z^{-1})} = \frac{2(1 - \frac{3}{4}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{2(z - \frac{3}{4}) \cdot z}{(z - \frac{1}{2})(z - 1)}$$

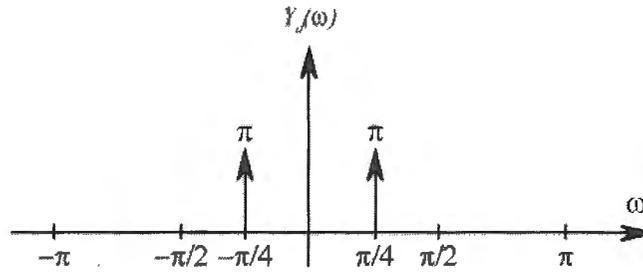


(b)

$$H(z) = \frac{1}{2} \frac{(1 - z^{-1})}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} \quad \text{ROC: } |z| > 1/2$$

$$h[n] = \frac{1}{2} \left[ -2 \cdot \delta[n] + 3 \left(\frac{-1}{2}\right)^n \cdot u[n] \right]$$

- 3.** Se muestra idealmente una señal  $x_c(t) = \cos(2\pi \cdot 250 \cdot t) + e^{j2\pi \cdot 4800 \cdot t}$  con una frecuencia de muestreo  $F_s$ , resultando una secuencia  $x_d(n) = x_c(nT_s)$ . La señal  $x_d(n)$  se filtra con un filtro  $H(\omega)$  paso bajo ideal con frecuencia de corte  $\omega_c$ , resultando la secuencia  $y_d(n)$ . La siguiente figura muestra la transformada de Fourier de la secuencia  $y_d(n)$ :



- a) Sabiendo que  $\frac{F_s}{2} > 250\text{Hz}$ , calcule el valor de la frecuencia de muestreo empleada (1 p).  
 b) Indique el valor máximo de  $\omega_c$  compatible con la  $Y_d(\omega)$  de la figura (1,5 p).

a) El par de deltas de  $Y_d(\omega)$  se corresponden con el coseno bien muestreado, por lo que  $F_s=2000$  Hz

b) La exponencial está submuestreada, apareciendo un alias en  $\frac{4\pi}{5}$ , por lo que el filtro lo suprime y por tanto

$$\omega_{cMAX} < \frac{4\pi}{5}$$

4.

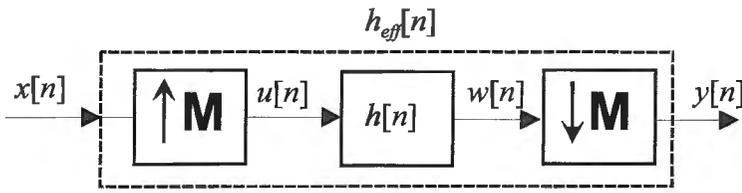


Figura 1

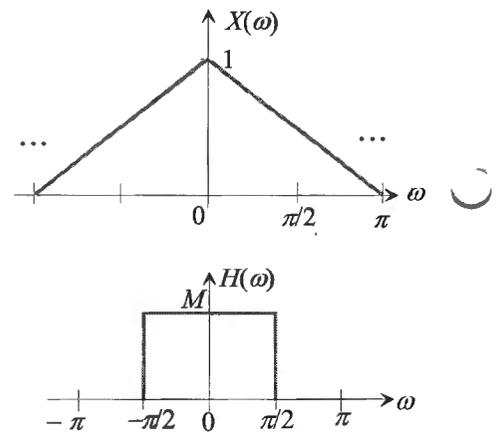


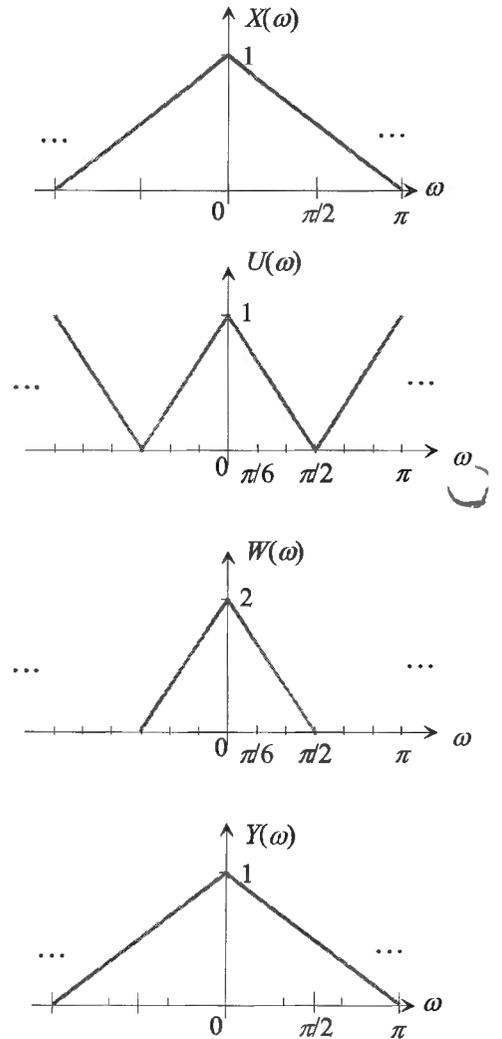
Figura 2

En la Figura 1, el módulo etiquetado con  $h[n]$  es un sistema LTI de tiempo discreto cuya respuesta impulsiva viene dada por  $h[n]$ .

- En términos de  $h[n]$ , determine la respuesta impulsiva  $h_{eff}[n]$  del sistema que tiene como entrada  $x[n]$  y como salida  $y[n]$  (1 p).
- Dibuje  $U(\omega)$ ,  $W(\omega)$  e  $Y(\omega)$ , para  $|\omega| < \pi$ , teniendo en cuenta la Figura 2 y  $M=2$ . (1,5 p).

$$a) \quad Y(\omega) = X(\omega) \underbrace{\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H\left(\frac{\omega}{M} - k \frac{2\pi}{M}\right)}_{H_{eff}(\omega)} \xleftrightarrow{DTFT} y[n] = x[n] * \underbrace{h[nM]}_{h_{eff}[n]}$$

- Los respectivos espectros se muestran en la figura de la derecha.



Apellidos \_\_\_\_\_ Nombre \_\_\_\_\_

Calificación \_\_\_\_\_ 1 + \_\_\_\_\_ 2 + \_\_\_\_\_ 3 + \_\_\_\_\_ 4 = \_\_\_\_\_

- 1.** Considere el sistema de tiempo discreto el cual, a la entrada  $x[n]$ , le asigna la salida  $y[n]$ , definida por la siguiente relación de entrada salida en el dominio de la frecuencia:

$$Y(\omega) = e^{-j\omega} X(\omega) + j \frac{dX(\omega)}{d\omega}; \quad |\omega| \leq \pi$$

en donde  $X(\omega)$  y  $Y(\omega)$  son las DTFTs de  $x[n]$  e  $y[n]$ , respectivamente.

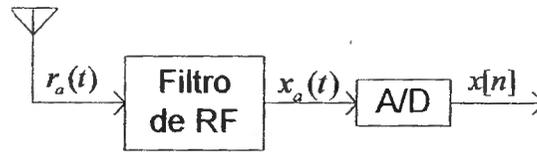
- a) ¿Es lineal el sistema? ¿Es invariante? Demuéstrelo. **(0,8 p)**  
b) Si la entrada es  $x[n] = \delta[n]$ , ¿cuánto vale la salida correspondiente? **(0,8 p)**  
c) Si la entrada es  $x[n] = 2\delta[n] + \delta[n-2]$ , ¿cuánto vale la salida correspondiente? **(0,9 p)**

EXAMEN COMPLETO

Repaso ejercicios Temas 1 y 2.

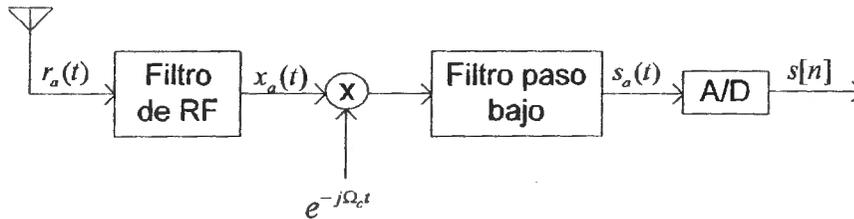
2.

- a) Considere el sistema siguiente. En él la señal de salida de antena  $r_a(t)$  se pasa por un filtro paso banda. La banda de paso de este filtro de RF es de 25 a 26 MHz. La salida del filtro de RF se muestrea mediante un conversor analógico digital, A/D:



Calcule la frecuencia de muestreo mínima que no produce solapamiento espectral. (1,25 p)

- b) En otro esquema, vea la siguiente figura, el muestreo se hace en banda base (se muestrea la equivalente paso bajo).



El filtro real paso bajo tiene un ancho de banda de 500 kHz y el demodulador complejo tiene una frecuencia de  $\Omega_c = 2\pi \cdot 25.5 \cdot 10^6$  rad/seg. ¿Cuál es la frecuencia de muestreo mínima? (1,25 p)

# Enero 2014. Examen Entero

## 1º PARCIAL

### Problema 1

$$Y(\omega) = e^{-j\omega} X(\omega) + j \frac{dX(\omega)}{d\omega}; |\omega| \leq \pi$$

a) DTFD<sup>-1</sup>  $\rightarrow y[n] = x[n-1] + nx[n]$

• Lineal?  $ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow ay_1[n] + by_2[n]$

$$\left. \begin{aligned} y_1[n] &= x_1[n-1] + nx_1[n] \\ y_2[n] &= x_2[n-1] + nx_2[n] \end{aligned} \right\} y[n] = \underbrace{ax_1[n-1]}_{ay_1[n]} + \underbrace{bx_2[n-1]}_{by_2[n]} + \underbrace{anx_1[n]}_{ay_1[n]} + \underbrace{bnx_2[n]}_{by_2[n]}$$

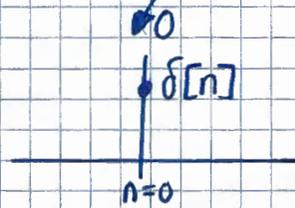
LINEAL  $\Leftarrow y[n] = ay_1[n] + by_2[n]$

• Invariante?  $y[n] = x[n-1] + nx[n]$

$$x[n-n_0] \rightarrow y[n] = x[n-n_0-1] + nx[n-n_0]$$

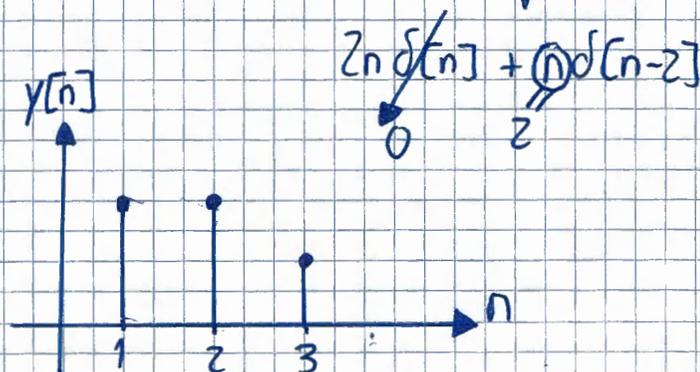
$$y[n-n_0] = x[n-n_0-1] + (n-n_0)x[n-n_0] \neq \Rightarrow \text{NO INVARIANTE}$$

b)  $x[n] = \delta[n] \rightarrow y[n] = \delta[n-1] + n\delta[n] = \delta[n-1]$



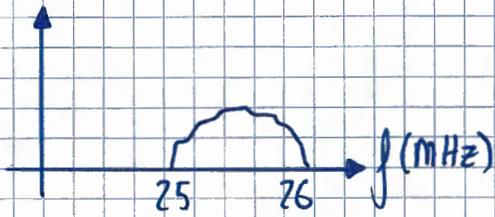
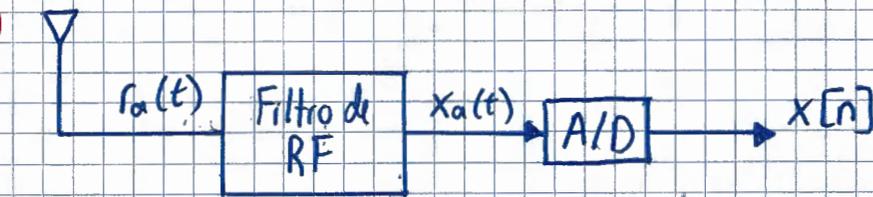
c)  $x[n] = 2\delta[n] + \delta[n-2]$

$$y[n] = 2\delta[n-1] + \delta[n-3] + \underbrace{n[2\delta[n] + \delta[n-2]]}_{2n\delta[n] + n\delta[n-2]}$$



## Problema 2

a)

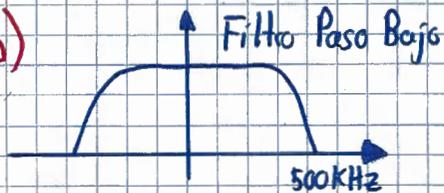


¿ $f_s$  mínima que no produce solapamiento?

(CUIDADO!! Para señales PASO BANDA:

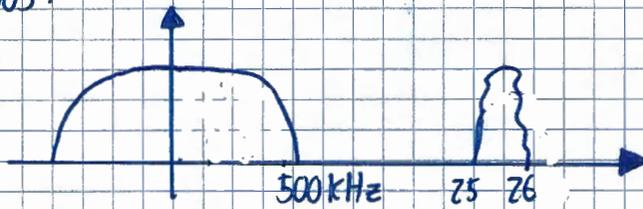
$$f_s \geq 2(f_m - f_i) = 2(26 - 25) = 2 \text{ MHz}$$

b)



$$\Omega_c = 2\pi \cdot 250 \cdot 10^3 \text{ rad/seg}$$

Tenemos:



$$f_s \text{ mínima} = 1 \text{ MHz} \quad (2 \times 500 \text{ kHz})$$

**3.** Con un sistema de adquisición de datos, que solo opera con una frecuencia de muestreo  $F_s = 48000 \text{ Hz}$ , se ha digitalizado una señal  $x_c(t) = 10\cos(4\pi 10^3 t)$ , obteniéndose la secuencia  $x_d(n) = x_c(nT_s)$ .

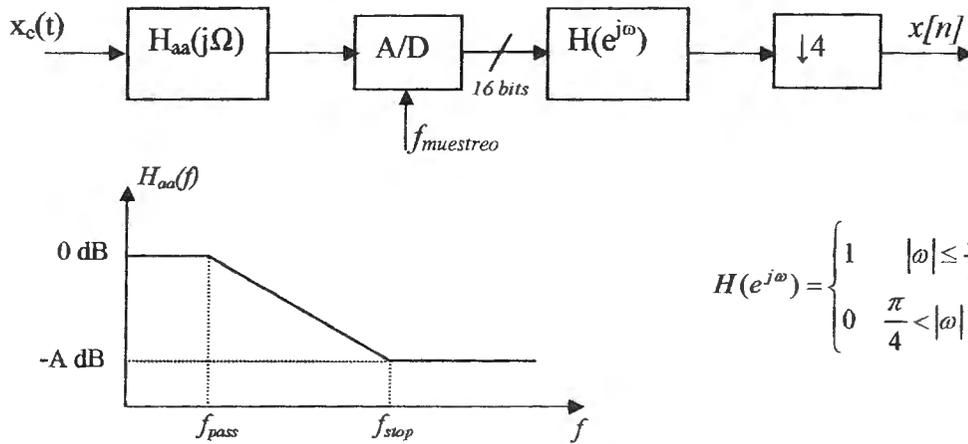
El espectro de la señal  $x_d(n)$  es  $X_d(\omega) = 10\pi\delta(\omega - \omega_0)$ , para  $0 \leq |\omega| < \pi$ . ¿Cuánto vale  $\omega_0$ ? **(0,8 p)**

El valor de  $\omega_0$  que resulta es demasiado bajo (la ocupación del eje de frecuencias  $[0 \ \pi]$  es bajo) por lo que se plantea diezmar la secuencia  $x_d(n)$ , obteniéndose una secuencia  $y_d(n)$  con espectro  $Y_d(\omega) = 10\pi\delta(\omega - \omega_1)$ , para  $0 \leq |\omega| < \pi$ .

b) Dibuje el esquema del diezmador que permite obtener la secuencia  $y_d(n)$  para  $\omega_1 = \frac{4}{9}\pi$ . **(0,8 p)**

c) Admitiendo que  $\omega_1$  pueda llegar a valer  $\pi$ , calcule los nuevos parámetros del diezmador del apartado anterior. **(0,9 p)**

4. En un proyecto de audio de alta calidad se especifica que la señal debe digitalizarse sin distorsión con un ancho de banda mínimo de 22.05 KHz. Con el fin de simplificar el diseño del filtro 'antialiasing' se utiliza el esquema de sobremuestreo x4 que se muestra en la figura y que incluye un conversor A/D de 16 bits.



Especifique la frecuencia del conversor A/D,  $f_{muestreo}$ , y determine los parámetros del filtro antialiasing  $A$ ,  $f_{pass}$  y  $f_{stop}$ . (2,5 p)

**Nota 1:** Utilice la aproximación:  $SNR = 6 \cdot n^\circ \text{ de bits} - 7.25$ .

**Nota 2:** El ruido de cuantificación debe ser igual al ruido que se produce por el solapamiento espectral en el muestreo.

### Problema 3

$$f_s = 48000 \text{ Hz}$$

$$x_c(t) = 10 \cdot \cos(4\pi \cdot 10^3 t)$$

$$x_d[n] = x_c(nT_s)$$

$$a) X_d(\omega) = 10\pi \delta(\omega - \omega_0) \\ 10 \cos(2\pi f_0 t)$$

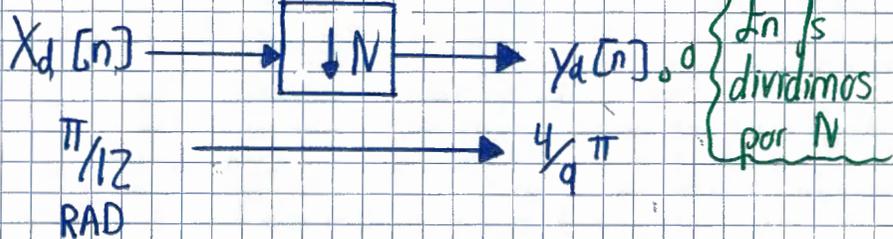
$$f_0 \rightarrow 2\pi f_0 = \Omega_0 \text{ (rad/seg)}$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \cdot T_s = \frac{2\pi f_0}{f_s} \text{ (rad)}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 10^3}{48000} = \pi/12 \text{ (rad)}$$

$$b) Y_d(\omega) = 10\pi \delta(\omega - \omega_1)$$

$$\omega_1 = \frac{4}{9}\pi$$

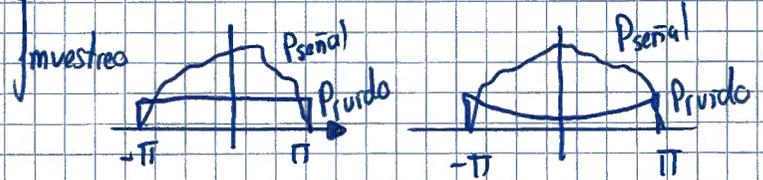
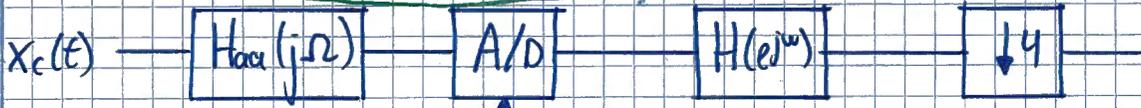
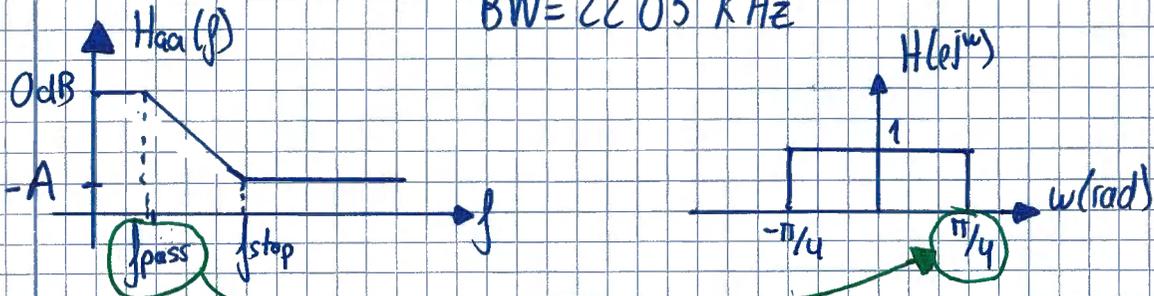


$$N \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{4}{9}\pi \Rightarrow \underline{\underline{N=8}}$$

$$c) \omega_1 = \pi \quad \text{¿N?} \rightarrow \underline{\underline{N=12}}$$

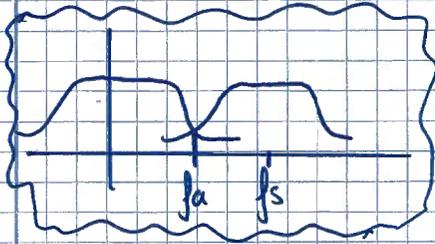
# Problema 4

$BW = 22'05 \text{ KHz}$



$SNR = 6.16 - 7'25$

- $f_{muestreo} = 2 \times 22'05 \text{ KHz} = 44'1 \text{ KHz}$
- $SNR_a = A = 6.16 - 7'25 = 88'75 \text{ dB}$



•  $f_{stop} = f_a = \frac{f_{muestreo}}{2} = 22'05 \text{ KHz}$

•  $\frac{2\pi f_{pass}}{f_s} = \frac{\pi}{4} \implies f_{pass} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{44'1 \text{ KHz}}{2\pi} = 5'5125 \text{ KHz}$

## Problema 4.1

La señal

$$x_c(t) = \text{sen}(2\pi 100t)$$

se muestrea con un periodo de muestreo de  $T_s = 1/400$  s y se obtiene una señal en tiempo discreto  $x(n)$ . ¿Cuál es la señal resultante  $x(n)$ ?

- $x(n) = x_c(t)|_{t=nT_s} = x_c(nT_s)$ , así que

$$x(n) = \text{sen}\left(2\pi 100n \frac{1}{400}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

- El muestreo puede considerarse como el cambio de variable  $t \rightarrow nT_s$ , teniendo en cuenta que  $n$  es la variable discreta y por tanto, sólo puede tomar valores enteros.
- Interpretando el muestreo como un cambio de variable es posible hacer cálculos como los siguientes:
  1. ¿cuántas muestras hay en  $t_0$  s? Respuesta:  $N = \frac{t_0}{T_s}$ , por ejemplo, si  $T_s = 125 \mu\text{s}$ , en 20 ms habrá  $N = \frac{20 \times 10^{-3}}{125 \times 10^{-6}} = 160$  muestras. Pero, ¡ojo!,  $N$  debería ser entero; no tiene sentido considerar un número no entero de muestras.
  2. ¿qué valor de  $n$  se corresponde con  $t_0$  s? Respuesta:  $n_0 = \frac{t_0}{T_s}$ , el mismo cálculo que el párrafo anterior. Evidentemente,  $n_0$  debe ser entero; si no, no existe tal correspondencia. Por ejemplo, si  $T_s = 125 \mu\text{s}$ , ¿qué muestra se corresponde con 200  $\mu\text{s}$ . Se puede calcular  $n_0 = \frac{200 \times 10^{-6}}{125 \times 10^{-6}} = 1,6$ ; este instante de tiempo  $t_0$  no coincide con ninguna muestra.
  3. ¿qué valor de  $t$  se corresponde con la muestra  $n_0$ ? Respuesta:  $t_0 = n_0 T_s$ , por ejemplo, si  $T_s = 125 \mu\text{s}$ , la muestra  $n_0 = 1000$  se corresponde con  $t_0 = 1000 \cdot 125 \times 10^{-6} \text{ s} = 125 \text{ ms}$ .

### Problema 4.2

La secuencia

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right), \quad -\infty < n < \infty$$

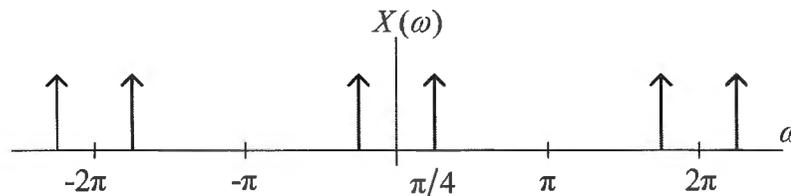
se obtiene muestreando la señal en tiempo continuo

$$x_c(t) = \cos(\Omega_0 t), \quad -\infty < t < \infty$$

con una frecuencia de 1000 muestras/s. Indique dos posibles valores de  $\Omega_0$  que podrían producir la secuencia  $x(n)$ .

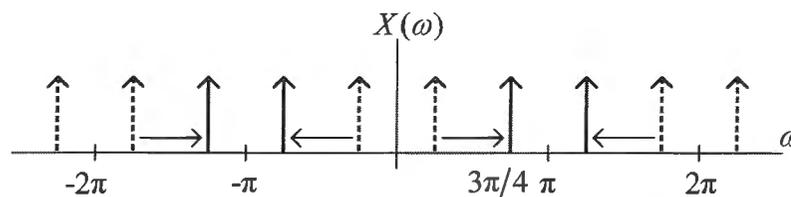
- La frecuencia de muestreo es de 1000 muestras/s, o lo que es lo mismo,  $f_s = 1000$  Hz; por tanto  $T_s = 1/f_s = 10^{-3}$  s.
- En general  $x(n) = \cos(\omega_0 n) = \cos(\Omega_0 n T_s) \Rightarrow \omega_0 = \Omega_0 T_s \Rightarrow \Omega_0 = \omega_0 / T_s = \omega_0 f_s$
- Supongamos que la secuencia proviene de un muestreo correcto, es decir con una frecuencia superior a la de Nyquist. En este caso:  $\Omega_0 = (\pi/4)1000 = 250\pi = 2\pi 125$  rad/s, que se corresponde con una frecuencia  $f_0 = 125$  Hz. Comprobamos que la frecuencia de muestreo es superior a la frecuencia de Nyquist,  $f_N = 2f_0 = 250$  Hz.

El espectro de  $x(n)$  tendrá la siguiente forma:



- El espectro de la figura puede obtenerse también a partir de otras frecuencias  $\Omega_i$ , manteniendo el mismo periodo de muestreo  $T_s$ . En efecto, si aumentamos la frecuencia continua  $\Omega_i$  la frecuencia discreta aumentará en la misma proporción ya que  $\omega_i = \Omega_i T_s$ . Así, por ejemplo, para  $\Omega_{i1} = 500\pi$ , la frecuencia discreta será  $\omega_{i1} = \pi/2$ , para  $\Omega_{i2} = 750\pi$  será  $\omega_{i2} = 3\pi/4$ .

Nótese que el resultado en el espectro es el desplazamiento de las deltas hacia la derecha y hacia la izquierda, como se muestra en la siguiente figura, en la que las deltas originales se han dibujado con líneas discontinuas, las deltas correspondientes a  $\Omega_{i2}$  en trazo continuo y el desplazamiento de deltas con flechas horizontales.



Si la frecuencia continua  $\Omega_i$  se sigue incrementando, llegará un momento en el que el espectro de  $x(n)$  tenga exactamente la misma forma que el espectro original, porque las nuevas deltas se situarán en el mismo lugar que ocupaban las originales. Puede verse fácilmente que esto ocurrirá cuando la frecuencia discreta de las nuevas deltas sean  $\omega_1 = -\pi/4 + 2\pi$  o  $\omega_2 = \pi/4 + 2\pi$ . Si la frecuencia continua se incrementa aún más, el espectro vuelve a ser el mismo cuando las nuevas deltas se sitúan en  $\omega_1 = -\pi/4 + 4\pi$  o  $\omega_2 = \pi/4 + 4\pi$ , o, en general, en  $\omega_{1k} = -\pi/4 + 2\pi k$  o  $\omega_{2k} = \pi/4 + 2\pi k$ , con  $k \in \mathbb{N}$ .

- Todas las nuevas frecuencias  $\Omega_i$  cuyo espectro coincide con el original son “alias” de la frecuencia original  $\Omega_0$ . Nótese que es condición necesaria que el desplazamiento de las deltas supere la frecuencia discreta  $\pi$ , lo que supone un muestreo a frecuencia inferior a la de Nyquist.
- En el caso de que la señal a muestrear sea un coseno hay otra forma de generar una secuencia alias debido a la paridad de la función; i.e.  $\cos(\omega_0 n) = \cos(-\omega_0 n)$ . En el espectro  $\delta(\omega - \omega_0)$  y  $\delta(\omega + \omega_0)$  intercambian sus posiciones si se cambia  $\omega_0$  por  $-\omega_0$ . Por tanto, las frecuencias  $\omega_k = -\omega_0 + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  también producen un espectro idéntico al original.
- En definitiva, para una señal coseno, las frecuencias alias vienen dadas por  $\omega_{k\pm} = 2\pi k \pm \omega_0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- Teniendo en cuenta lo indicado en los párrafos anteriores otros valores dos posibles valores de frecuencia continua que generan la misma secuencia serían, por ejemplo:

$$\circ \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right)n\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{4}n\right)$$

$$\Omega_1 = \omega T_s = 7\pi/4 \cdot 1000 = 1750\pi = 2\pi 875 \text{ rad.}$$

$$\circ \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}n\right) = \cos\left(\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\right)n\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{4}n\right)$$

$$\Omega_2 = \omega T_s = 9\pi/4 \cdot 1000 = 2250\pi = 2\pi 1125 \text{ rad.}$$

En ambos casos, las señales continuas estarían mal muestreadas; es decir, muestreadas con una frecuencia inferior a la de Nyquist.

### Problema 4.3

La señal en tiempo continuo

$$x_c(t) = \cos(4000\pi t)$$

se muestrea con periodo  $T_s$  y se obtiene la señal en tiempo discreto

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

- (a) Determine un valor de  $T_s$  que sea consistente con esta información.
- (b) ¿Es único el valor de  $T_s$  obtenido en (a)? Si es así, explique por qué. Si no, indique otro valor de  $T_s$  que sea consistente con la información dada.

- Este problema es similar al anterior (4.2), sólo que en esta ocasión se mantiene la frecuencia continua fija y se varía la frecuencia de muestreo. Recuérdese que en el proceso de muestreo se produce la “normalización” de frecuencias  $\omega = \Omega T_s$ , por lo que es indiferente cambiar la frecuencia continua  $\Omega$  (como en el problema anterior) o el periodo de muestreo  $T_s$  (en este problema). Por lo tanto, los razonamientos son idénticos.

- Las respuestas sucintas serán:

- (a) Frecuencia superior a la de Nyquist:  $T_s = \frac{\omega_0}{\Omega_0} = \frac{\pi/4}{4000\pi} = \frac{1}{12000}$  s.  
En efecto,  $f_s = 1/T_s = 12000$  Hz  $>$   $2f_0 = 4000$  Hz.

- (b) No, porque la secuencia  $x(n)$  puede provenir de una señal  $x_{ci}(t)$  alias de  $x_c(t)$  muestreado con solapamiento espectral.

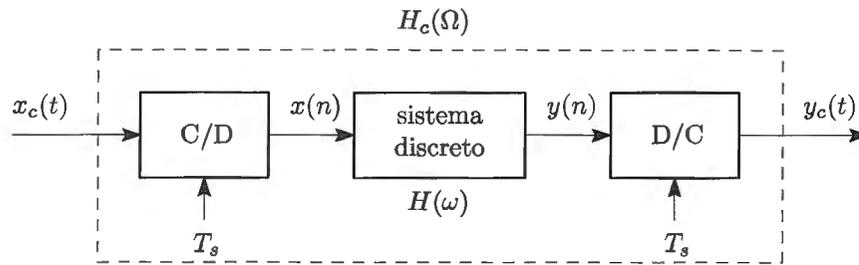
Por ejemplo,  $x_1(n) = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)n\right)$ , de donde  $T_{s1} = \frac{7\pi/3}{4000\pi} = \frac{7}{12000}$  s.

Teniendo en cuenta la paridad del coseno, otra posible secuencia es

$$x_2(n) = \cos\left(\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)n\right), \text{ de donde } T_{s2} = \frac{5\pi/3}{4000\pi} = \frac{5}{12000} \text{ s.}$$

### Problema 4.5

Considere el esquema de la figura en el que sistema en tiempo discreto es un filtro paso bajo ideal de frecuencia de corte  $\pi/8$  rad.



- (a) Si  $x_c(t)$  es de banda limitada a 5 kHz, ¿cuál es el valor máximo de  $T_s$  para que se evite el solapamiento en el conversor C/D?
- (b) Si  $1/T_s = 10$  kHz, ¿cuál será la frecuencia de corte del filtro efectivo en tiempo continuo?
- (c) Repita el apartado (b) para  $1/T_s = 20$  kHz.

(a) Valor máximo de  $T_s$  para evitar solapamiento

- No hay solapamiento si se cumple la condición de Nyquist:  $f_s \geq 2f_M$ ; es decir  $T_s \leq \frac{1}{2f_M}$ .
- El periodo máximo es, por tanto,  $T_{s \max} = \frac{1}{2f_M} = \frac{1}{2 \cdot 5000} = 10^{-4}$  s.

(b) Frecuencia de corte continua  $\Omega_{c1}$  si  $f_{s1} = 10$  kHz

- Aplicando la "normalización" de frecuencias:  $\Omega_{c1} = \omega_c f_{s1} = \frac{\pi}{8} 10000 = 1250\pi = 2\pi 625$  rad/s.

(c) Frecuencia de corte continua  $\Omega_{c2}$  si  $f_{s2} = 20$  kHz

- Aplicando la "normalización" de frecuencias:  $\Omega_{c2} = \omega_c f_{s2} = \frac{\pi}{8} 20000 = 2250\pi = 2\pi 1250$  rad/s.

**Problema 4.29**

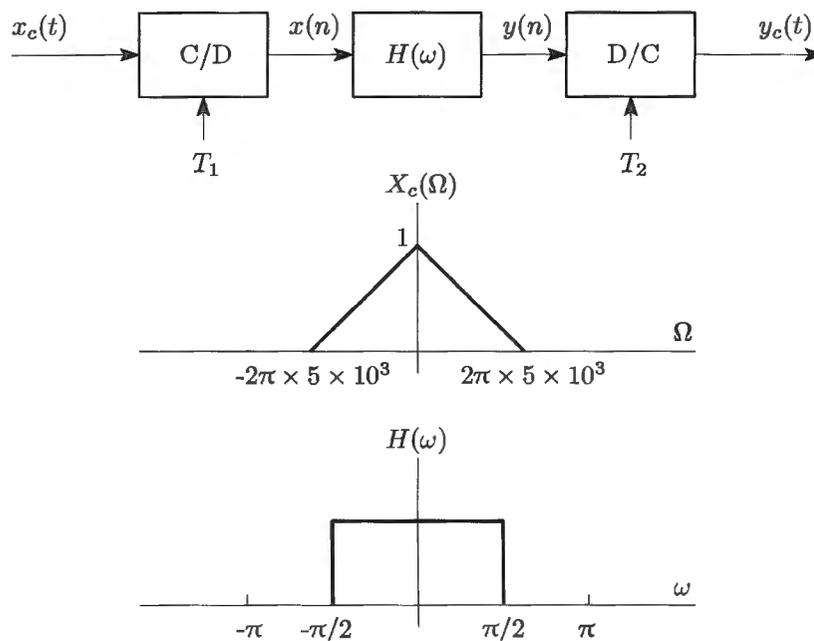
La figura muestra  $X_c(\Omega)$  y  $H(\omega)$  para el sistema que se indica. Dibuje y etiquete la transformada de Fourier de  $y_c(t)$  en cada uno de los siguientes casos:

(a)  $1/T_1 = 1/T_2 = 10^4$

(b)  $1/T_1 = 1/T_2 = 2 \times 10^4$

(c)  $1/T_1 = 2 \times 10^4, 1/T_2 = 10^4$

(d)  $1/T_1 = 10^4, 1/T_2 = 2 \times 10^4$



**pre-(a)**

- Frecuencia de Nyquist:  $f_N = 2f_M = 2 \times 5 \times 10^3 = 10^4$  Hz.

- Muestreo en general:  $X(\omega) = \frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(\frac{\omega}{T_1} - \frac{2\pi k}{T_1}\right)$

- Muestreo sin solapamiento:  $X(\omega) = \frac{1}{T_1} X_c\left(\frac{\omega}{T_1}\right), |\omega| \leq \pi$

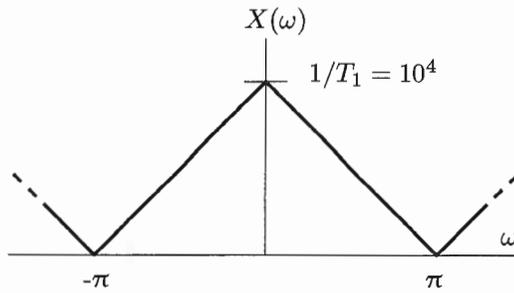
- Reconstrucción con filtro paso bajo ideal:  $Y_c(\Omega) = T_2 Y(\Omega T_2)$

(a)  $1/T_1 = 1/T_2 = 10^4$

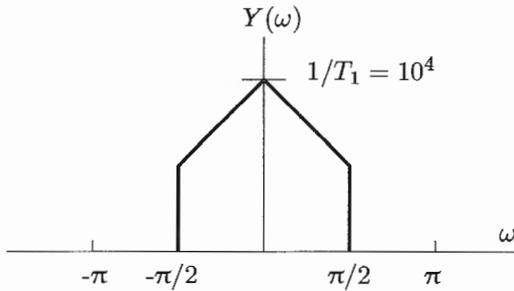
- $T_1 = T_N \Rightarrow$  muestreo a frecuencia de Nyquist sin solapamiento.

- $T_2 = T_N \Rightarrow$  reconstrucción a frecuencia de Nyquist.

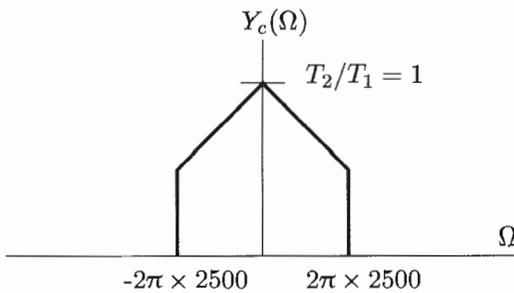
- Muestreo:  $\omega_M = \Omega_M T_1 = \frac{2\pi \times 5 \times 10^3}{10^4} = \pi$



- Filtrado:



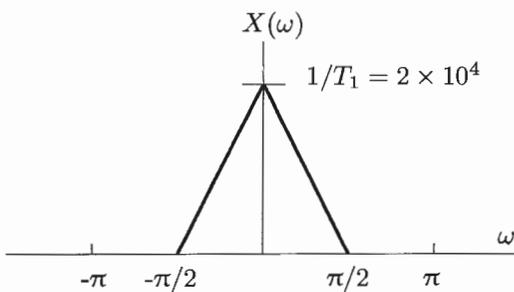
- Reconstrucción:  $\Omega_c = \frac{\omega_c}{T_2} = \frac{\pi \times 10^4}{2} = 2\pi \times 2500$



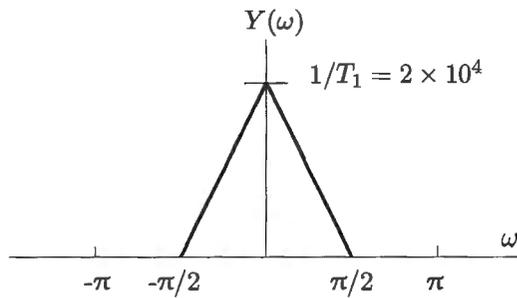
(b)  $1/T_1 = 1/T_2 = 2 \times 10^4$

- $T_1 = T_N/2 \Rightarrow$  sobremuestreo ( $\times 2$ ) sin solapamiento.
- $T_2 = T_N/2 \Rightarrow$  reconstrucción al doble de la frecuencia de Nyquist.

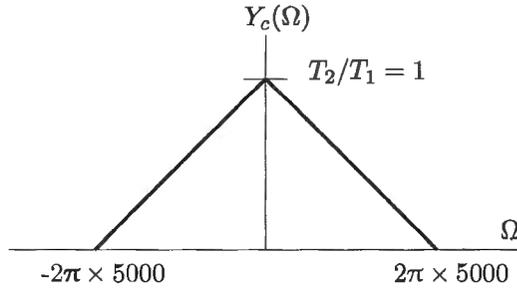
- Muestreo:  $\omega_M = \Omega_M T_1 = \frac{2\pi \times 5 \times 10^3}{2 \times 10^4} = \frac{\pi}{2}$



- Filtrado:

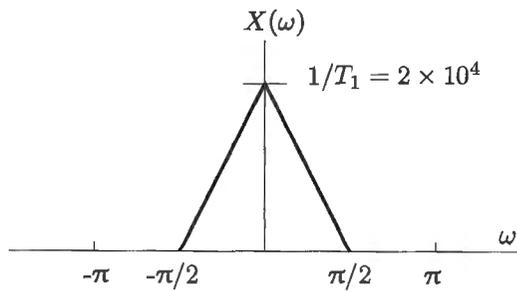


■ Reconstrucción:  $\Omega_c = \frac{\omega_c}{T_2} = \frac{\pi \times 2 \times 10^4}{2} = 2\pi \times 5000$

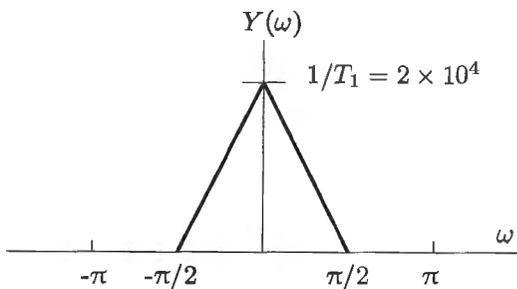


(c)  $1/T_1 = 2 \times 10^4, 1/T_2 = 10^4$

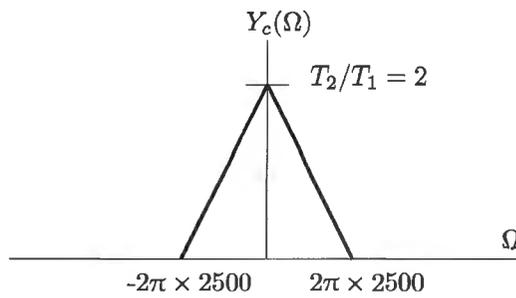
- $T_1 = T_N/2 \Rightarrow$  sobremuestreo ( $\times 2$ ) sin solapamiento.
- $T_2 = T_N \Rightarrow$  reconstrucción a frecuencia de Nyquist.
- Muestreo:  $\omega_M = \Omega_M T_1 = \frac{2\pi \times 5 \times 10^3}{2 \times 10^4} = \frac{\pi}{2}$



■ Filtrado:

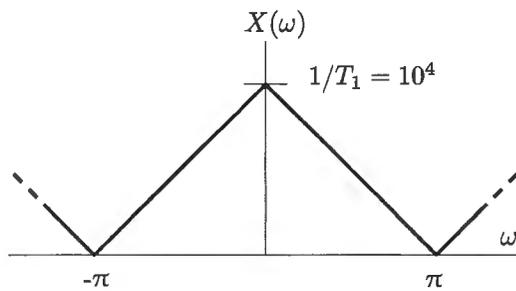


■ Reconstrucción:  $\Omega_c = \frac{\omega_c}{T_2} = \frac{\pi \times 10^4}{2} = 2\pi \times 2500$

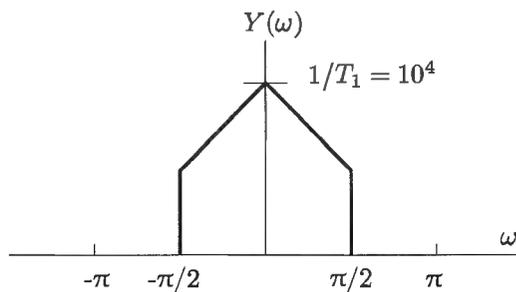


(d)  $1/T_1 = 10^4$ ,  $1/T_2 = 2 \times 10^4$

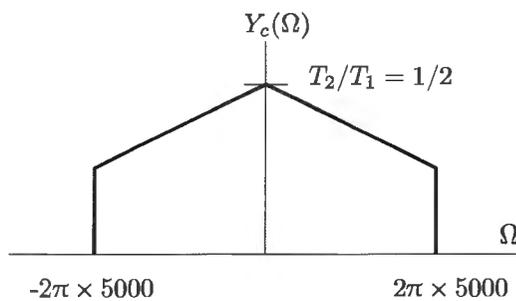
- $T_1 = T_N \Rightarrow$  muestreo a frecuencia de Nyquist sin solapamiento.
- $T_2 = T_N/2 \Rightarrow$  reconstrucción al doble de la frecuencia de Nyquist.
- Muestreo:  $\omega_M = \Omega_M T_1 = \frac{2\pi \times 5 \times 10^3}{10^4} = \pi$



- Filtrado:



- Reconstrucción:  $\Omega_c = \frac{\omega_c}{T_2} = \frac{\pi \times 2 \times 10^4}{2} = 2\pi \times 5000$



**Problema 4.25**

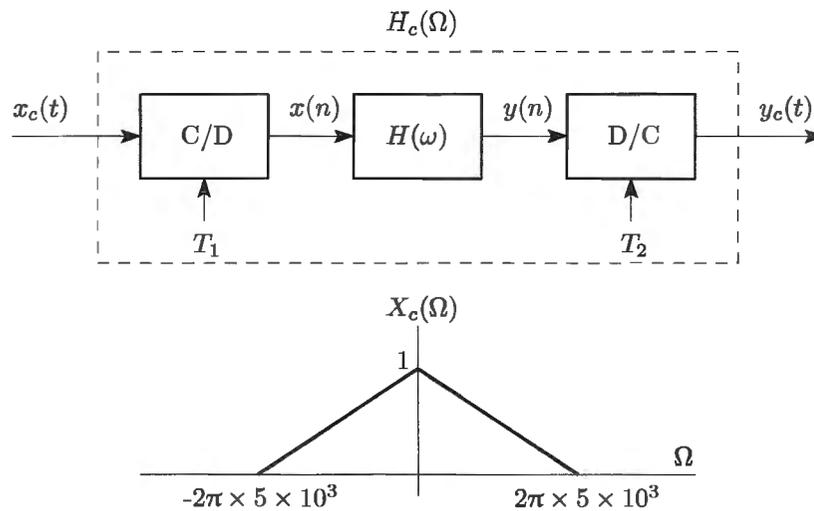
La figura muestra un filtro en tiempo continuo implementado mediante un filtro LTI discreto paso bajo ideal con respuesta en frecuencia en el intervalo  $-\pi \leq \omega \leq \pi$

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

(a) Si la transformada de Fourier de  $x_c(t)$ ,  $X_c(\Omega)$ , es como se muestra en la figura y  $\omega_c = \pi/5$ , dibuje y etiquete  $X(\omega)$ ,  $Y(\omega)$  e  $Y_c(\Omega)$  para cada uno de los siguientes casos:

- (i)  $1/T_1 = 1/T_2 = 2 \times 10^4$
- (ii)  $1/T_1 = 4 \times 10^4, 1/T_2 = 10^4$
- (iii)  $1/T_1 = 10^4, 1/T_2 = 3 \times 10^4$

(b) Para  $1/T_1 = 1/T_2 = 6 \times 10^3$ , y para señales de entrada  $x_c(t)$  cuyo espectro esté limitado en banda a  $|\Omega| < 2\pi \times 5 \times 10^3$  (sin otra restricción), ¿cuál es el valor máximo de la frecuencia de corte  $\omega_c$  del filtro  $H(\omega)$  para que el sistema completo sea LTI? Para el valor máximo de  $\omega_c$ , especifique  $H_c(\Omega)$ .

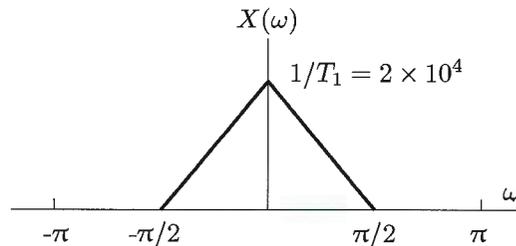


**pre-(a)**

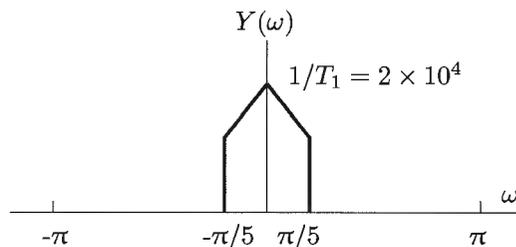
- Frecuencia de Nyquist:  $f_N = 2f_M = 2 \times 5 \times 10^3 = 10^4$  Hz.
- Muestreo en general:  $X(\omega) = \frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(\frac{\omega}{T_1} - \frac{2\pi k}{T_1}\right)$
- Muestreo sin solapamiento:  $X(\omega) = \frac{1}{T_1} X_c\left(\frac{\omega}{T_1}\right), |\omega| \leq \pi$
- Reconstrucción con filtro paso bajo ideal:  $Y_c(\Omega) = T_2 Y(\Omega T_2)$

(a-i)  $1/T_1 = 1/T_2 = 2 \times 10^4$

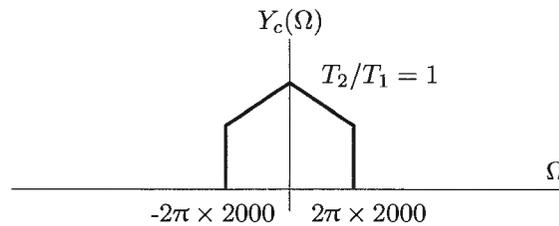
- $T_1 = T_N/2 \Rightarrow$  sobremuestreo ( $\times 2$ ) sin solapamiento.
- $T_2 = T_N/2 \Rightarrow$  reconstrucción al doble de la frecuencia de Nyquist.
- Muestreo:  $\omega_M = \Omega_M T_1 = \frac{2\pi \times 5 \times 10^3}{2 \times 10^4} = \frac{\pi}{2}$



- Filtrado:

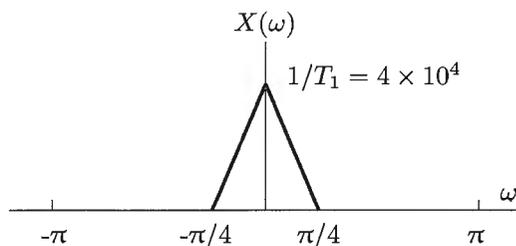


- Reconstrucción:  $\Omega_c = \frac{\omega_c}{T_2} = \frac{\pi \times 2 \times 10^4}{5} = 2\pi \times 2000$

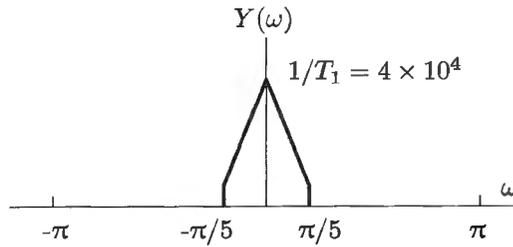


(a-ii)  $1/T_1 = 4 \times 10^4, 1/T_2 = 10^4$

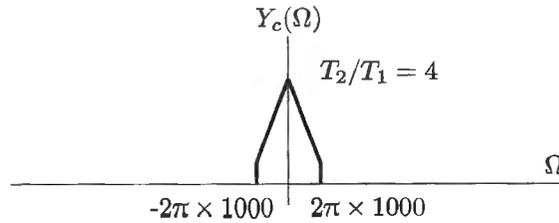
- $T_1 = T_N/4 \Rightarrow$  sobremuestreo ( $\times 4$ ) sin solapamiento.
- $T_2 = T_N \Rightarrow$  reconstrucción a frecuencia de Nyquist.
- Muestreo:  $\omega_M = \Omega_M T_1 = \frac{2\pi \times 5 \times 10^3}{4 \times 10^4} = \frac{\pi}{4}$



- Filtrado:



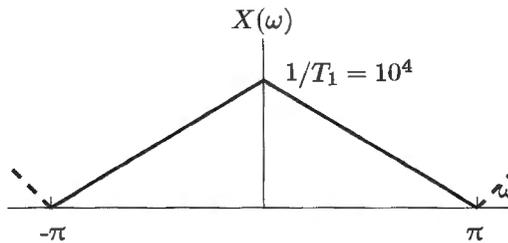
■ Reconstrucción:  $\Omega_c = \frac{\omega_c}{T_2} = \frac{\pi \times 10^4}{5} = 2\pi \times 1000$



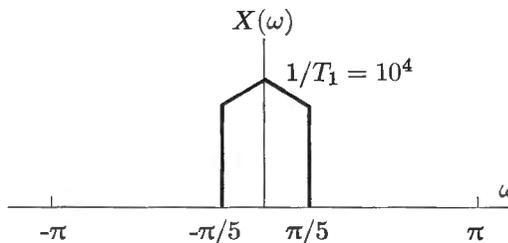
(a-iii)  $1/T_1 = 10^4, 1/T_2 = 3 \times 10^4$

- $T_1 = T_N \Rightarrow$  muestreo a frecuencia de Nyquist sin solapamiento.
- $T_2 = T_N/3 \Rightarrow$  reconstrucción al triple de la frecuencia de Nyquist.

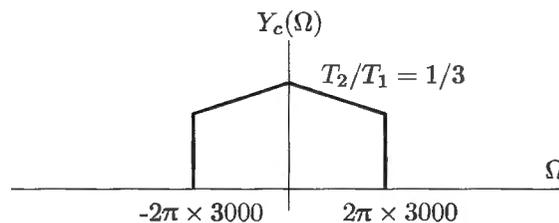
■ Muestreo:  $\omega_M = \Omega_M T_1 = \frac{2\pi \times 5 \times 10^3}{10^4} = \pi$



- Filtrado:

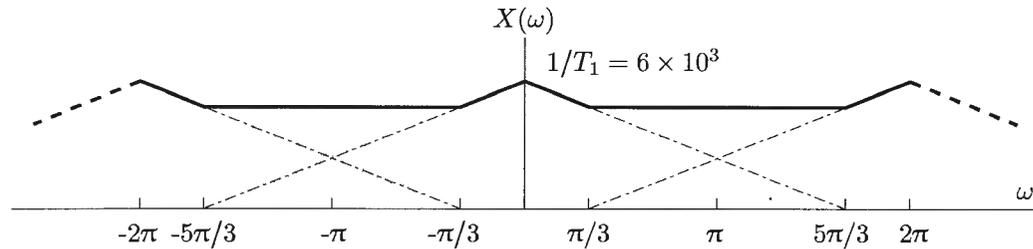


■ Reconstrucción:  $\Omega_c = \frac{\omega_c}{T_2} = \frac{\pi \times 3 \times 10^4}{5} = 2\pi \times 3000$



(b)  $1/T_1 = 1/T_2 = 6 \times 10^3$

- $T_1 = 5T_N/3 \Rightarrow$  submuestreo ( $\times 3/5$ ) con solapamiento.
- $T_2 = 5T_N/3 \Rightarrow$  reconstrucción a  $3/5$  de la frecuencia de Nyquist.
- Muestreo:  $\omega_M = \Omega_M T_1 = \frac{2\pi \times 5 \times 10^3}{6 \times 10^3} = \frac{5\pi}{3}$



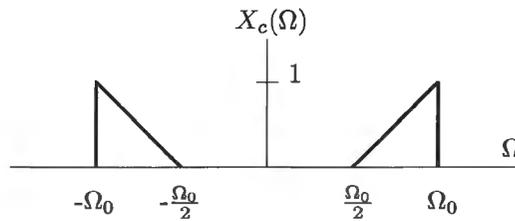
En la figura puede verse claramente que la única parte del espectro que no se ve afectada por el solapamiento espectral es  $|\omega| \leq \pi/3$ . Así que si se elige  $\omega_c = \pi/3$  el espectro a la salida del filtro y, por tanto, al reconstruir la señal continua, se puede relacionar de forma LTI con la señal de entrada continua.

La frecuencia discreta  $\omega_c = \pi/3$  se corresponde tras la reconstrucción con la frecuencia continua  $\Omega_c = \frac{\pi \times 6 \times 10^3}{3} = 2\pi \times 10^3$ , así que el filtro LTI paso bajo equivalente continuo responde a:

$$H_c(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq 2\pi \times 10^3 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

**Problema 4.23**

Una señal en tiempo continuo  $x_c(t)$ , con transformada de Fourier  $X_c(\Omega)$  mostrada en la figura, se muestrea con periodo de muestreo  $T_s = 2\pi/\Omega_0$  para formar la secuencia  $x(n) = x_c(nT_s)$ .



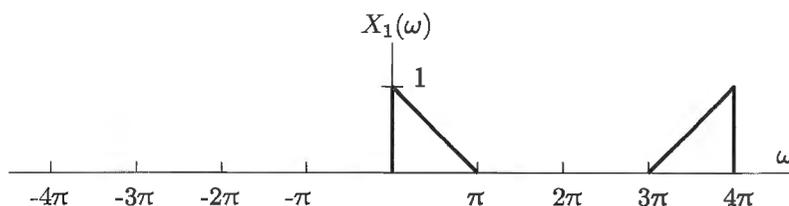
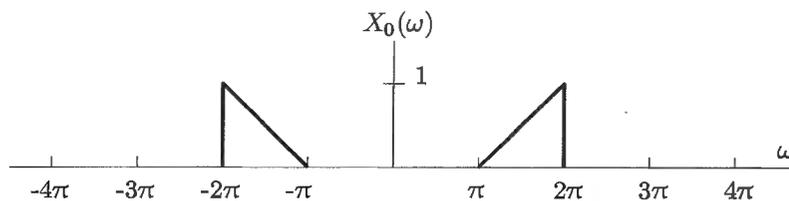
- (a) Dibuje la transformada de Fourier  $X(\omega)$  para  $|\omega| \leq \pi$ .
- (b) La señal  $x(n)$  va a ser transmitida a través de un canal digital. En el receptor debe recuperarse la señal original  $x_c(t)$ . Dibuje un diagrama de bloques del sistema de recuperación y especifique sus características. Asuma que dispone de filtros ideales.
- (c) En términos de  $\Omega_0$ , ¿para qué rango de valores de  $T_s$  se puede recuperar  $x_c(t)$  a partir de  $x(n)$ ?

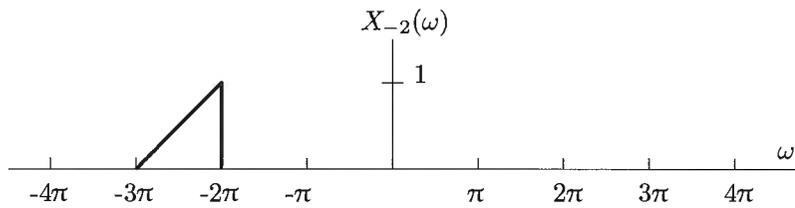
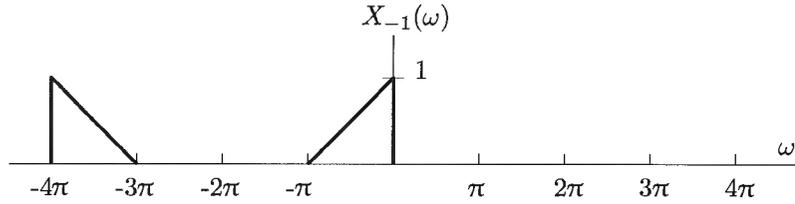
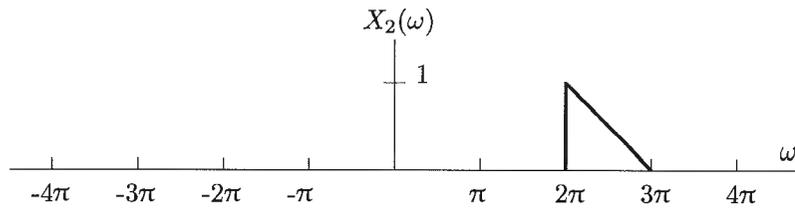
**pre-(a)**

- Periodo de Nyquist:  $T_N = \frac{\pi}{\Omega_0}$
- El periodo de muestreo:  $T_s = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 2T_N \Rightarrow$  submuestreo ( $\times 1/2$ ) con solapamiento.

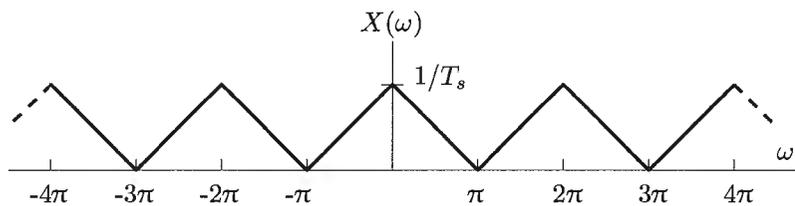
**(a) Dibujar  $X(\omega)$**

- El espectro de la secuencia  $x(n)$  resultante del muestreo de una señal continua siempre viene dado por la expresión  $X(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(\frac{\omega}{T_s} - \frac{2\pi k}{T_s}\right)$ .
- La frecuencia continua  $\Omega_0$  se corresponde con la frecuencia discreta  $\omega_0 = \Omega_0 T_s = 2\pi$ . El espectro invade el exterior del intervalo  $|\omega| \leq \pi$  como corresponde a un submuestreo.
- Las siguientes figuras muestran el espectro  $X_k(\omega) = X_c\left(\frac{\omega}{T_s} - \frac{2\pi k}{T_s}\right)$  para distintos valores de  $k$ :





- El espectro  $X(\omega)$  es la suma escalada de los espectros  $X_k(\omega)$  como se muestra en la siguiente figura:

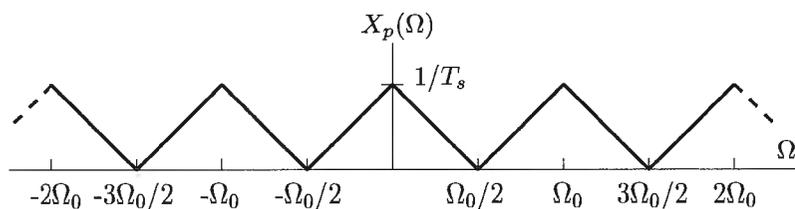


- Como puede verse, el espectro resultante  $X(\omega)$  es periódico con periodo  $2\pi$ , como debe ser.
- También se aprecia que, aunque el muestreo se ha hecho a frecuencia mitad que la de Nyquist, los espectros parciales no se solapan, por lo que no hay una suma que provoque una distorsión irrecuperable.

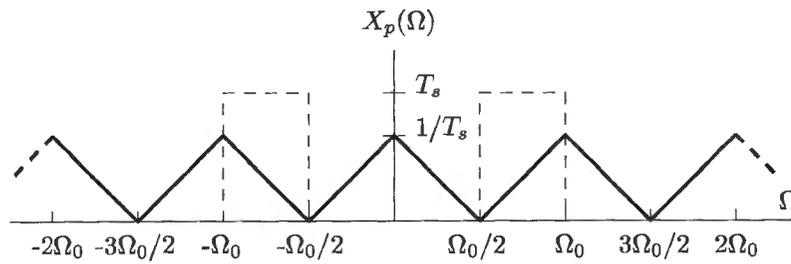
**(b) ¿Cómo recuperar  $x_c(t)$  a partir de  $x(n)$ ?**

- Está claro que no se puede recuperar con un convertidor C/D normal (modulador con tren de impulsos (A/D) + filtro paso bajo ideal) porque lo que se obtendría sería una señal paso bajo distinta de la buscada.

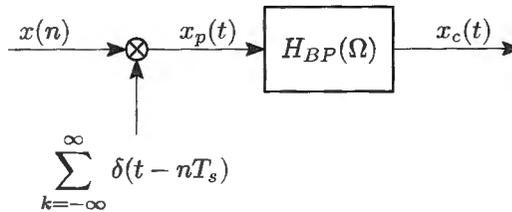
- El modulador generará la señal  $x_p(t)$  con espectro  $X_p(\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(\Omega_0 - k\Omega_s)$ , igual al espectro de  $x(n)$  pero con la frecuencia “desnormalizada”:



- De este espectro se puede recuperar la señal original  $x_c(t)$  mediante un filtrado paso banda con ganancia  $T_s$ , indicado con línea de puntos en la siguiente figura



- Así pues, el esquema de recuperación sería:



con

$$H_{BP}(\Omega) = \begin{cases} T_s & \Omega_0/2 \leq |\Omega| \leq \Omega_0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

**(c) Rango de valores de  $T_s$  que permiten recuperar  $x_c(t)$**

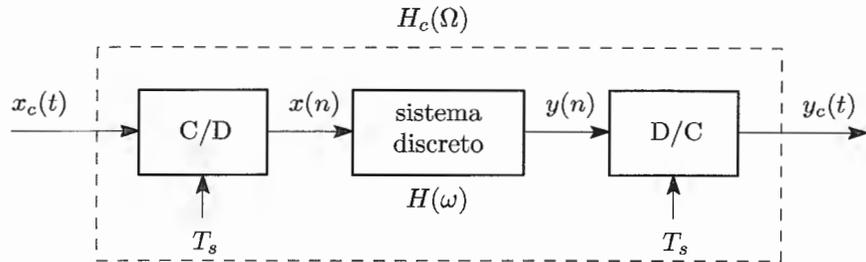
- Según el apartado (b)  $T_s = \frac{2\pi}{\Omega_0}$  permite recuperar la señal original (considerada como paso banda).
- Los valores  $T_s \leq \frac{\pi}{\Omega_0}$  (frecuencia de Nyquist y superiores) también permiten recuperar la señal original (considerada como paso bajo).
- Para esta señal, los valores de  $T_s$  que permiten recuperar la señal original son:  $\left\{ \frac{2\pi}{\Omega_0}, T_s : T_s \leq \frac{\pi}{\Omega_0} \right\}$

**Problema 4.12**

En el sistema de la figura suponga que

$$H(\omega) = \frac{j\omega}{T_s}, \quad -\pi \leq \omega < \pi$$

y que  $T_s = 1/10$  s.



(a) Para cada una de las siguientes entradas  $x_c(t)$  obtenga la correspondiente salida  $y_c(t)$ .

(I)  $x_c(t) = \cos(6\pi t)$

(II)  $x_c(t) = \cos(14\pi t)$

(b) ¿Corresponden las salidas  $y_c(t)$  a lo que podría esperarse de un diferenciador?

pre-(a)

- Frecuencia de muestreo:  $f_s = \frac{1}{T_s} = 10$  Hz
- El sistema discreto  $H(\omega)$  puede reescribirse como  $H(\omega) = 10\omega e^{j\pi/2}$ , con módulo  $|H(\omega)| = 10|\omega|$  par y fase  $\angle H(\omega) = \begin{cases} -\pi/2 & \omega < 0 \\ 0 & \omega = 0 \text{ impar, por lo que la respuesta al impulso } h(n) \text{ es real.} \\ \pi/2 & \omega > 0 \end{cases}$
- El valor de la fase para  $\omega < 0$  resulta de  $H(\omega)|_{\omega < 0} = -10|\omega| e^{j\pi/2} = 10|\omega| e^{-j\pi} e^{j\pi/2}$ .

(a) (i)  $x_c(t) = \cos(6\pi t)$

- $\Omega_1 = 6\pi = 2\pi \times 3 \text{ rad/s} \Rightarrow f_1 = 3 \text{ Hz} < f_s/2 \Rightarrow x_c(t)$  está sobremuestreada.
- $x_1(n) = \cos(6\pi n T_s) = \cos\left(6\pi \frac{1}{10} n\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{5} n\right)$
- Entrada coseno a un sistema LTI real  $\Rightarrow y_1(n) = \left|H\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right| \cos\left(\frac{3\pi}{5} n + \angle H\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right)$ , con  $\left|H\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right| = 6\pi$  y  $\angle H\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{2}$ ; es decir,  $y_1(n) = 6\pi \cos\left(\frac{3\pi}{5} n + \frac{\pi}{2}\right)$
- Aplicando la desnormalización de frecuencias debida a la reconstrucción resulta la señal en tiempo continuo  $y_c(t) = 6\pi \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = -6\pi \text{ sen}(6\pi t)$ , ya que  $\cos(\alpha t + \pi/2) = -\text{sen}(\alpha t)$ .

(a) (ii)  $x_c(t) = \cos(14\pi t)$

- $\Omega_2 = 14\pi = 2\pi \times 7 \text{ rad/s} \Rightarrow f_2 = 7 \text{ Hz} \neq f_s/2 \Rightarrow x_c(t)$  está submuestreada.
- $x_2(n) = \cos(14\pi n T_s) = \cos\left(14\pi \frac{1}{10} n\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{5} n\right)$ ; como la frecuencia discreta es mayor que  $2\pi$  se puede restar esa cantidad, quedando  $x_2(n) = \cos\left(-\frac{3\pi}{5} n\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{5} n\right)$  por la paridad del coseno.
- Como  $x_2(n) = x_1(n)$ , la salida es también  $y_c(t) = -6\pi \sin(6\pi t)$ , como en el caso (i) anterior.

(b) ¿Funciona el sistema como un diferenciador?

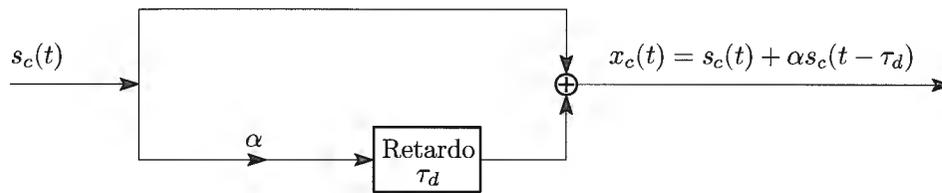
- Para que el sistema funcione como un diferenciador de la señal  $x_c(t) = \cos(\Omega_0 t)$  la salida debería ser

$$y_c(t) = \frac{dx_c(t)}{dt} = -\Omega_0 \sin(\Omega_0 t)$$

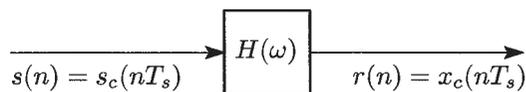
- En el caso (i)  $y_c(t) = -6\pi \sin(6\pi t)$ , así que el sistema sí funciona como un diferenciador.
- En el caso (ii)  $y_c(t) = -6\pi \sin(6\pi t) \neq -14\pi \sin(14\pi t)$ . En este caso el sistema no diferencia la señal  $\cos(14\pi t)$  sino su señal alias  $\cos(6\pi t)$ .

### Problema 4.7

La figura muestra un modelo simple de canal de comunicaciones multirrayecto. Suponga que  $s_c(t)$  es de banda limitada de forma que  $S_c(\Omega) = 0$  para  $|\Omega| \geq \pi/T_s$  y que  $x_c(t)$  se muestrea con periodo de muestreo  $T_s$  obteniéndose la secuencia  $x(n) = x_c(nT_s)$ .



- (a) Determine la transformada de Fourier de  $x_c(t)$  y la transformada de Fourier de  $x(n)$  en función de  $S_c(\Omega)$ .
- (b) Se desea simular el sistema multirrayecto mediante un sistema en tiempo discreto escogiendo  $H(\omega)$  en la figura de forma que la salida sea  $r(n) = x_c(nT_s)$  cuando la entrada sea  $s(n) = s_c(nT_s)$ . Determine  $H(\omega)$  en función de  $T_s$  y  $\tau_d$ .
- (c) Determine la respuesta al impulso  $h(n)$  cuando (i)  $\tau_d = T_s$  y (ii)  $\tau_d = T_s/2$ .



#### (pre-a) Frecuencia de Nyquist

- $\Omega_M = \frac{\pi}{T_s}$ , la frecuencia de Nyquist es  $\Omega_N = 2\pi f_N = 2\Omega_M = \frac{2\pi}{T_s} \Rightarrow f_N = \frac{1}{T_s}$ .
- La especificación de la frecuencia máxima de un espectro como  $\Omega = \frac{\pi}{T_s}$  indica siempre muestreo a frecuencia de Nyquist  $f_N = \frac{1}{T_s}$ .
- La señal  $x_c(t)$  es paso bajo y está muestreada a frecuencia de Nyquist, por tanto, está bien muestreada y no se produce solapamiento espectral.

#### (a) $X_c(\Omega)$ y $X(\omega)$ en función de $S_c(\Omega)$

- $X_c(\Omega) = \mathcal{F}\{s_c(t) + \alpha s_c(t - \tau_d)\} = S_c(\Omega) + \alpha e^{-j\Omega\tau_d} S_c(\Omega) = S_c(\Omega) (1 + \alpha e^{-j\Omega\tau_d})$
- Puesto que la señal está muestreada a frecuencia de Nyquist:  

$$X(\omega) = \frac{1}{T_s} X_c\left(\frac{\omega}{T_s}\right) = \frac{1}{T_s} S_c\left(\frac{\omega}{T_s}\right) (1 + \alpha e^{-j\omega\tau_d/T_s}), \quad |\omega| \leq \pi.$$

#### (b) $H(\omega)$

- Como  $X_c(\Omega) = S_c(\Omega) (1 + \alpha e^{-j\Omega\tau_d}) = S_c(\Omega) H_c(\Omega)$ , el sistema que se quiere simular es:  

$$H_c(\Omega) = 1 + \alpha e^{-j\Omega\tau_d}.$$
- Pero  $H_c(\Omega)$  no está limitado en banda; el módulo, por ejemplo, es  $|H(\Omega)| = 1 + \alpha$  para todo  $\Omega$ .
- Sin embargo, la señal sí está limitada en banda con una frecuencia máxima  $\Omega_M = \pi/T_s$ .

- Así que para simular correctamente el sistema continuo se debe simular

$$\widetilde{H}_c(\Omega) = \begin{cases} 1 + \alpha e^{-j\Omega\tau_d} & |\Omega| \leq \pi/T_s \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \text{ para evitar el solapamiento espectral que produciría la discretización de } H_c(\Omega).$$

- En discreto, haciendo el cambio de variable  $\omega = \Omega T_s$  se obtiene  $H(\omega) = 1 + \alpha e^{-j\omega\tau_d/T_s}$ ,  $|\omega| \leq \pi$ .

(c) (i)  $h(n)$  con  $\tau_d = T_s$

- En este caso  $H(\omega) = 1 + \alpha e^{-j\omega}$ ,  $|\omega| \leq \pi$ , con transformada inversa  $h(n) = \delta(n) + \alpha\delta(n-1)$
- Recuérdese que  $\mathcal{F}\{\delta(n)\} = 1$  y  $\mathcal{F}\{x(n-n_0)\} = e^{-j\omega n_0} X(\omega)$ .

- También puede calcularse la transformada inversa mediante la integral

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{j\omega n} + \alpha e^{j\omega(n-1)}) d\omega = \frac{\text{sen}(\pi n)}{\pi n} + \alpha \frac{\text{sen}(\pi(n-1))}{\pi(n-1)}$$

- Empleando la función  $\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}$  puede escribirse  $h(n) = \text{sinc}(n) + \alpha \text{sinc}(n-1)$
- Nótese que,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,  $\text{sen}(\pi n) = 0$  por lo que el primer sumando es siempre nulo, excepto para  $n = 0$ , en el que se obtiene la indeterminación  $0/0$ , que se resuelve aplicando la regla de L'Hôpital o mediante el cálculo del límite  $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\pi n)}{\pi n} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\pi \cos(\pi n)}{\pi} = 1$ . Así pues, el primer sumando  $\text{sinc}(n)$  vale 0 para todo  $n$  excepto para  $n = 0$  que vale 1; es decir  $\delta(n)$ , por definición.
- Aplicando el mismo análisis al segundo sumando resulta  $\alpha\delta(n-1)$ .

(c) (ii)  $h(n)$  con  $\tau_d = T_s/2$

- En este caso  $H(\omega) = 1 + \alpha e^{-j\omega/2}$ ,  $|\omega| \leq \pi$ , con transformada inversa

$$h(n) = \delta(n) + \alpha \frac{\text{sen}(\pi(n-1/2))}{\pi(n-1/2)} = \delta(n) + \alpha \text{sinc}(n-1/2)$$

- Es importante señalar que  $h(n) \neq \delta(n) + \alpha\delta(n-1/2)$ ; el segundo sumando carece de sentido, ya que no se puede hacer un desplazamiento no entero.

**Apéndice**

- Para ilustrar el comportamiento de la función  $\text{sinc}(x)$  se incluyen las siguientes gráficas en las que se muestra en rojo la función continua en la variable continua  $x$  y en negro la función discreta en la variable  $n$  discreta (es decir para valores de  $x$  enteros).
- Véase como  $\delta(n) = \text{sinc}(n)$  (figura 1),  $\delta(n-1) = \text{sinc}(n-1)$  (figura 2), pero que  $\text{sinc}(n-1/2)$  no es una  $\delta(n)$  desplazada (figura 3).

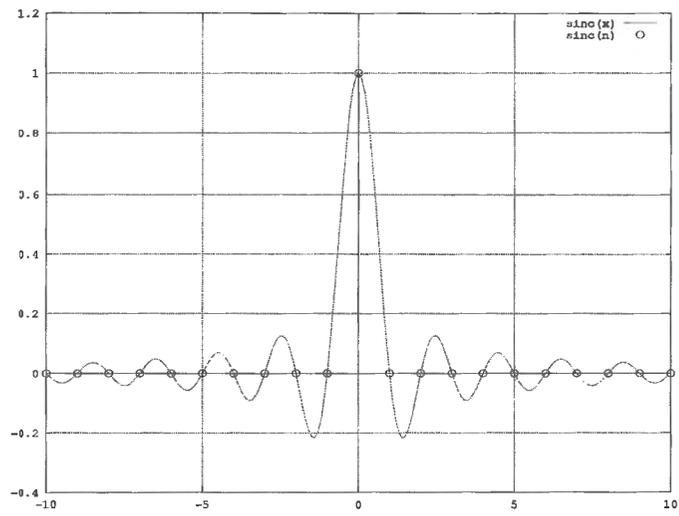


Figura 1:  $\text{sinc}(x)$  y  $\text{sinc}(n)$

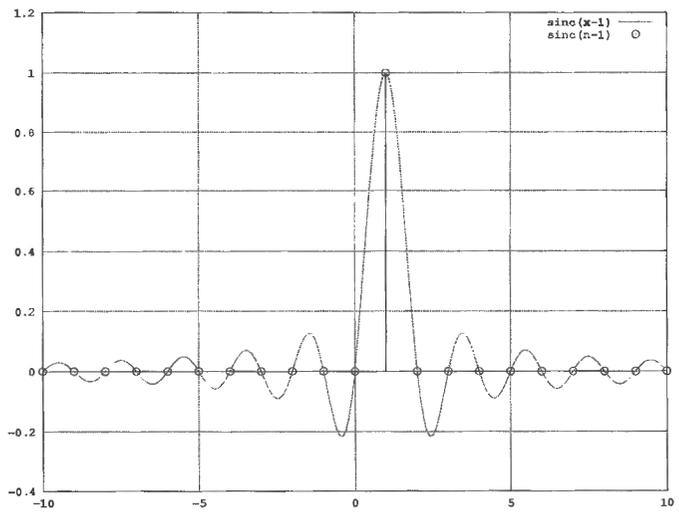


Figura 2:  $\text{sinc}(x - 1)$  y  $\text{sinc}(n - 1)$

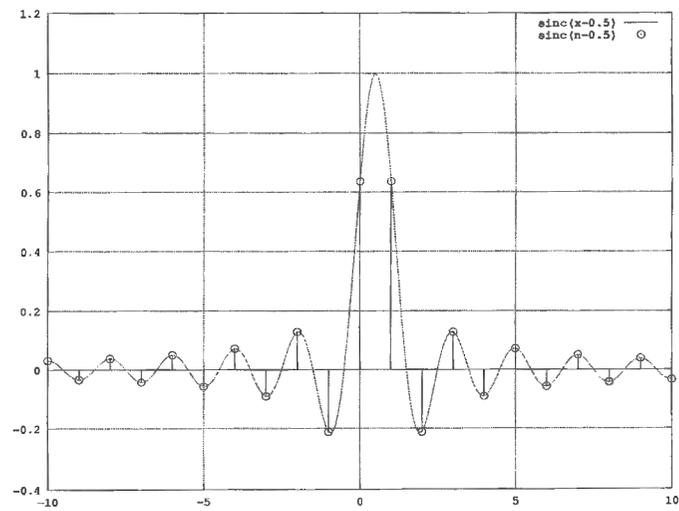


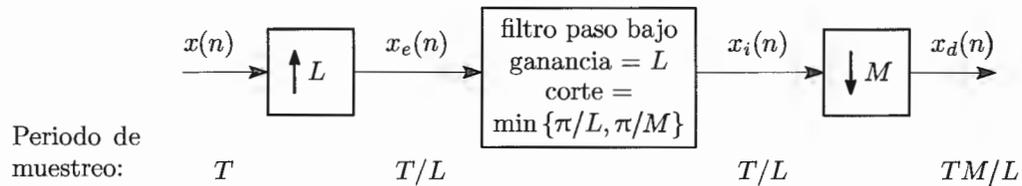
Figura 3:  $\text{sinc}(x - 1/2)$  y  $\text{sinc}(n - 1/2)$

**Problema 4.17**

Cada uno de los apartados siguientes indica una señal  $x(n)$  y los correspondientes factores de interpolación y diezmado  $L$  y  $M$  para el sistema de la figura. Determine la correspondiente salida  $x_d(n)$ .

(a)  $x(n) = \text{sen}(2\pi n/3)/\pi n, L = 4, M = 3$

(b)  $x(n) = \text{sen}(3\pi n/4), L = 6, M = 7$



- La cadena de expansor, filtro y compresor actúa cambiando la frecuencia de muestreo de  $x(n)$  de  $f_1 = 1/T$  a  $f_2 = Lf_1/M$ . En el proceso, el filtro asegura que se selecciona una única réplica del espectro de  $x_e(n)$  y que el compresor no produce solapamiento; es decir se trata de una interpolación por  $L$  seguida de un diezmado por  $M$ . En estas circunstancias  $X_d(\omega) = \frac{L}{M} X\left(\omega \frac{L}{M}\right), |\omega| \leq \pi$ .

(a)  $x(n) = \text{sen}(2\pi n/3)/\pi n, L = 4, M = 3$

- En este caso  $X(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \frac{2\pi}{3} \\ 0 & \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$  (véase el Problema 4.7 en problemas-7).
- Tras el cambio de frecuencia:  $X_d(\omega) = \begin{cases} \frac{4}{3} & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$ , ya que  $\frac{L}{M} = \frac{4}{3}$  y  $\frac{2\pi M}{3L} = \frac{\pi}{2}$ .
- Finalmente,  $x_d(n) = \mathcal{F}^{-1}\{X_d(\omega)\} = \frac{4}{3} \frac{\text{sen}(\pi n/2)}{\pi n}$

(b)  $x(n) = \text{sen}(3\pi n/4), L = 6, M = 7$

- En este caso  $X(\omega) = \frac{\pi}{j} \left[ \delta\left(\omega - \frac{3\pi}{4}\right) - \delta\left(\omega + \frac{3\pi}{4}\right) \right], |\omega| \leq \pi$ .
- Tras el cambio de frecuencia:  $X_d(\omega) = \frac{\pi}{j} \left[ \delta\left(\omega - \frac{7\pi}{8}\right) - \delta\left(\omega + \frac{7\pi}{8}\right) \right], |\omega| \leq \pi$ .
- Finalmente,  $x_d(n) = \mathcal{F}^{-1}\{X_d(\omega)\} = \text{sen}\left(\frac{7\pi}{8}n\right)$

### Problema 4.15

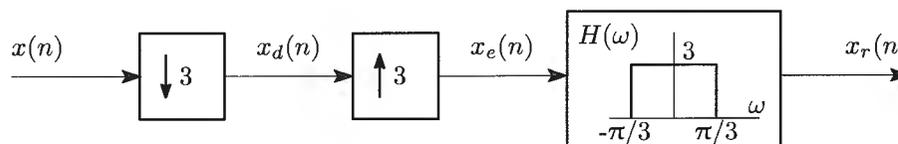
Considere el sistema de la figura. Para cada una de las siguientes señales de entrada  $x(n)$  indique si la salida cumple  $x_r(n) = x(n)$ .

(a)  $x(n) = \cos(\pi n/4)$

(b)  $x(n) = \cos(\pi n/2)$

(c)  $x(n) = \left[ \frac{\text{sen}(\pi n/8)}{\pi n} \right]^2$

Ayuda: use la propiedad de modulación para determinar la transformada de Fourier  $X(\omega)$ .



- El sistema está formado por un compresor  $\times 3$  y un interpolador  $\times 3$  (expansor y filtro paso bajo ideal).
- Para que la salida  $x_r(n)$  sea igual a la entrada  $x(n)$  el interpolador debe invertir la transformación producida por el compresor. Esta inversión sólo es posible si el compresor no genera solapamiento espectral; es decir si  $X(\omega) = 0, \pi/3 \leq |\omega| \leq \pi$ .

(a)  $x(n) = \cos(\pi n/4)$

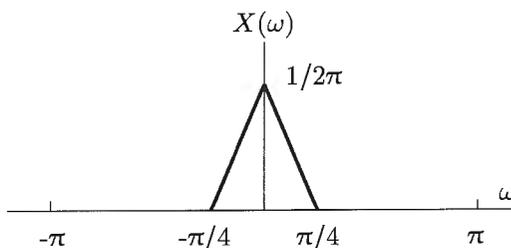
- $X(\omega)$  está formado por deltas en frecuencias  $\omega = \pm\pi/4$  por lo que no se produce solapamiento espectral y, por tanto  $x_r(n) = x(n)$

(b)  $x(n) = \cos(\pi n/2)$

- $X(\omega)$  está formado por deltas en frecuencias  $\omega = \pm\pi/2$  por lo que sí se produce solapamiento espectral y, por tanto  $x_r(n) \neq x(n)$

(c)  $x(n) = \left[ \frac{\text{sen}(\pi n/8)}{\pi n} \right]^2$

- Sea  $x_1(n) = \frac{\text{sen}(\pi n/8)}{\pi n}$  con transformada de Fourier  $X_1(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \pi/8 \\ 0 & \pi/8 \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$ .
- Como  $x(n) = x_1(n)x_1(n)$  su transformada es  $X(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_1(\omega)$ , cuya gráfica se muestra en la siguiente figura



- $X(\omega)$  se extiende hasta frecuencias  $\omega = \pm\pi/4$  por lo que no se produce solapamiento espectral y, por tanto  $x_r(n) = x(n)$

### Problema 4.31

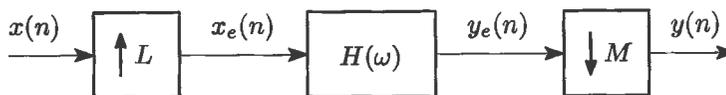
Considere el sistema en tiempo discreto que se muestra en la figura, donde

(i)  $L$  y  $M$  son enteros positivos

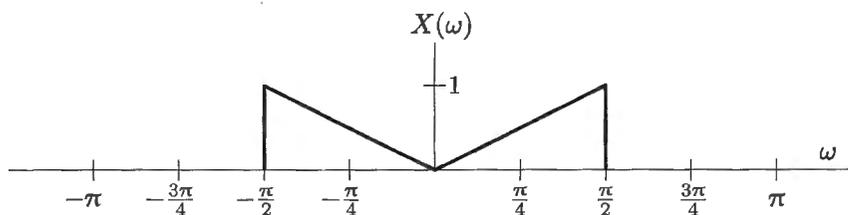
$$(ii) x_e(n) = \begin{cases} x(n/L) & n = kL, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

(iii)  $y(n) = y_e(nM)$

$$(iv) H(\omega) = \begin{cases} M & |\omega| \leq \pi/4 \\ 0 & \pi/4 \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$



(a) Suponga que  $L = 2$  y  $M = 4$  y que  $X(\omega)$ , la transformada de Fourier en tiempo discreto de  $x(n)$ , es real y tiene la forma que se muestra en la siguiente figura. Realice un gráfico adecuadamente etiquetado de  $X_e(\omega)$ ,  $Y_e(\omega)$  e  $Y(\omega)$ , las transformadas de Fourier en tiempo discreto de  $x_e(n)$ ,  $y_e(n)$  e  $y(n)$ , respectivamente. Asegúrese de etiquetar claramente las amplitudes y frecuencias destacadas.



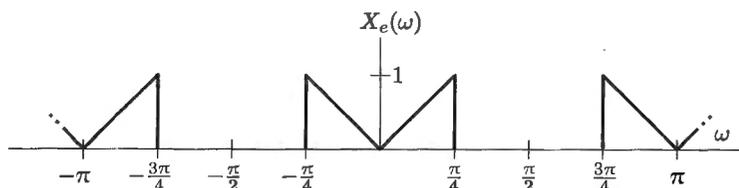
(b) Suponga ahora que  $L = 2$  y  $M = 8$ . Determine  $y(n)$  en este caso.

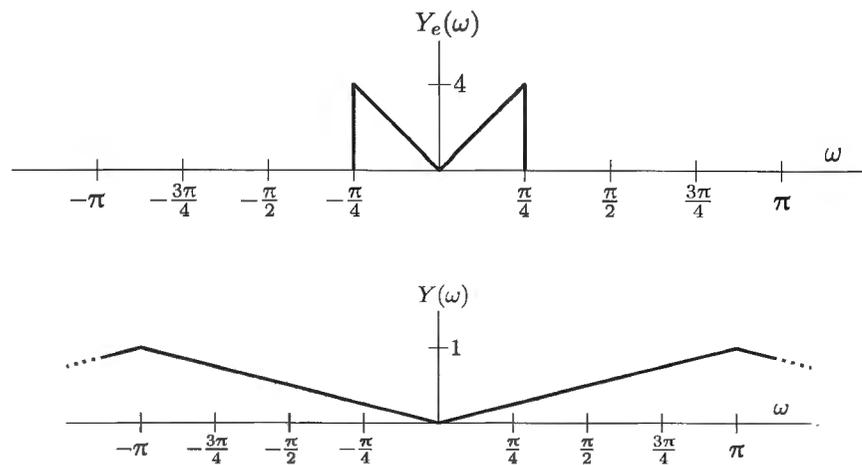
Sugerencia: observe qué diagramas cambian en su respuesta al apartado (a).

- Las condiciones (i), (ii) y (iii) no son más que las definiciones y restricciones de un expansor y un compresor.

(a)  $L = 2, M = 4$

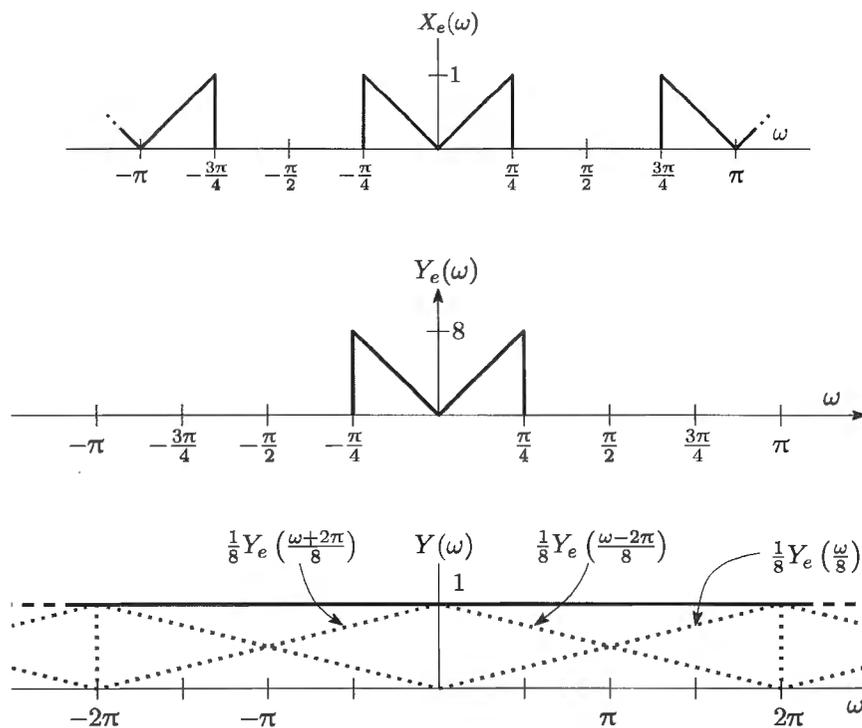
- Con estos valores el filtro paso bajo asegura una interpolación y un diezmado con una única réplica del espectro de  $x(n)$  y sin solapamiento. El sistema completo hace un cambio de ritmo fraccionario  $L/M = 1/2$  pero con ganancia  $G = 8$ .
- En cualquier caso el expansor produce réplicas espectrales debido a la periodicidad del espectro.
- Las gráficas son:





(b)  $L = 2, M = 8$

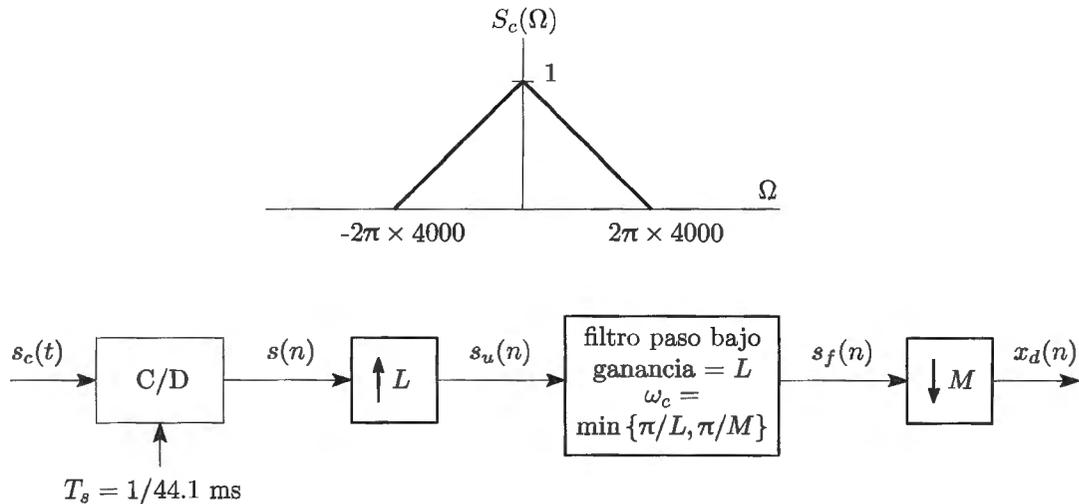
- Con estos valores el filtro paso bajo asegura que la interpolación es correcta, pero no el diezmado; por tanto, se producirá solapamiento espectral.
- Las gráficas son:



- Nótese que en la última gráfica el eje de frecuencias no es igual al de las restantes gráficas.
- El solapamiento espectral hace  $Y(\omega) = 1$ , cuya transformada inversa es  $y(n) = \delta(n)$ .

### Problema 4.64

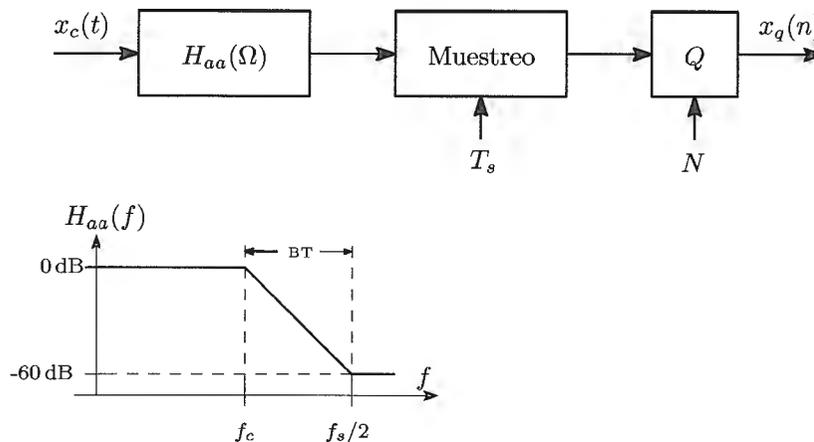
Suponga que  $s_c(t)$  es una señal de voz cuya transformada de Fourier en tiempo continuo  $S_c(\Omega)$  se muestra en la figura. Utilizando el sistema de la figura se obtiene una secuencia en tiempo discreto  $s_r(n)$ .  $H(\omega)$  es un filtro paso bajo en tiempo discreto ideal de frecuencia de corte  $\omega_c$  y ganancia  $L$  en la banda de paso, como se muestra en la figura. La señal  $s_r(n)$  se utilizará como entrada a un codificador de voz que funciona correctamente sólo cuando las muestras en tiempo discreto representan una señal muestreada a una frecuencia de 8 kHz. Escoja los valores de  $L$ ,  $M$  y  $\omega_c$  que producen una señal de entrada  $s_r(n)$  correcta al codificar de voz.



- La frecuencia de Nyquist es  $f_N = 2 \times 4000 = 8$  kHz.
- La señal  $s_c(t)$  está muestreada a la frecuencia  $f_s = 44,1 \times 10^3 = 44,1$  kHz  $> f_N$ , por tanto, está bien muestreada.
- Para obtener una frecuencia  $f_2 = 8$  kHz para la secuencia  $s_r(n)$  a partir de la frecuencia  $f_1 = f_s = 44,1$  kHz con el esquema de la figura hay que calcular  $L$  y  $M$  enteros tales que  $f_2 = Lf_1/M$ , es decir  $L/M = 8000/100 = 80/441$  y, por tanto,  $L = 80$  y  $M = 441$ .
- El filtro paso bajo  $H(\omega)$  tiene ganancia  $L$ , según el enunciado, necesaria para que la amplitud de espectro de  $s_r(n)$  sea la correcta  $L/M$  pues el factor  $1/M$  se introduce durante la compresión.
- La frecuencia de corte del filtro será  $\omega_c = \min \left\{ \frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{M} \right\} = \min \left\{ \frac{\pi}{80}, \frac{\pi}{441} \right\} = \frac{\pi}{441}$ .

## Problema T2-1

Para muestrear la señal continua  $x_c(t)$  con ancho de banda 10 kHz se emplea el esquema de la figura.

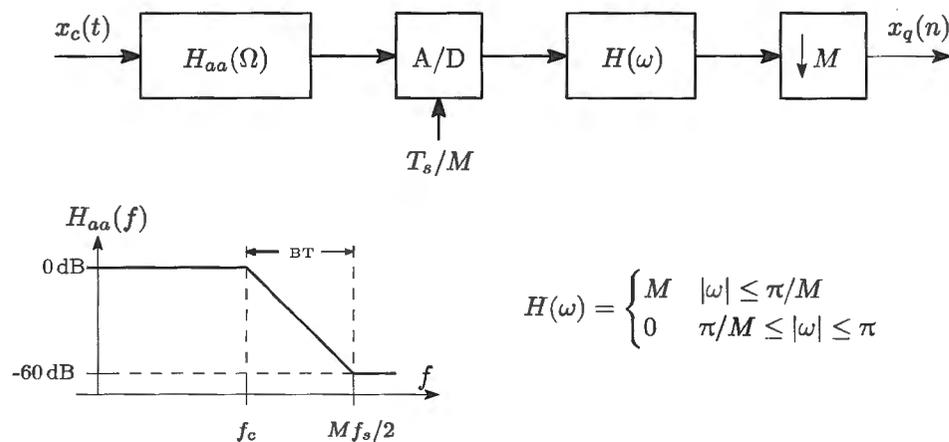


Calcule los siguientes parámetros:  $f_s$  (frecuencia de muestreo),  $f_c$  (frecuencia de corte del filtro) y  $N$  (número de bits del cuantificador), teniendo en cuenta: a) Se muestrea a la frecuencia de Nyquist; b) La pendiente de la banda de transición debe ser de  $-175$  dB/octava; c) El ruido de cuantificación debe ser igual al ruido que se produce por el solapamiento espectral en el muestreo; d) El cuantificador es uniforme; y e) La señal de entrada y el margen dinámico del cuantificador responden a  $X_m = 4\sigma_x$ .

- La señal tiene ancho de banda 10 kHz, lo que significa que su espectro se anula para  $f_M \geq 5$  kHz.
- La frecuencia de muestreo es la frecuencia de Nyquist,  $f_s = 2f_M = 10$  kHz, igual al ancho de banda.
- Para medir una diferencia de frecuencias en octavas debe tenerse en cuenta que una octava se corresponde con una distancia entre una determinada frecuencia y su mitad o su doble; por ejemplo, si  $f_1 = 100$  Hz, las frecuencias  $f_2 = 50$  Hz y  $f_3 = 200$  Hz están una octava por debajo y por encima, respectivamente, de la frecuencia  $f_1$ . Se trata, por tanto de una escala que no es lineal sino logarítmica; en concreto, el número de octavas que separan a las frecuencias  $f_2 > f_1$  se obtiene mediante  $\log_2(f_2/f_1)$ .
- La pendiente de la banda de transición se calcula como  $p = \frac{A}{\log_2(f_s/2f_c)}$  dB/octava, siendo  $A$  la diferencia en dBs de las ganancias del filtro en las bandas de paso y rechazada.
- Dando valores,  $-175 = \frac{-60}{\log_2(5000/f_c)} \Rightarrow f_c = \frac{5000}{2^{\frac{60}{175}}} = 3942,4$  Hz.
- Según d) y e) la señal a ruido de cuantificación responde a la ecuación  $\text{SNR}_Q = 6N - 7,25$  dB y debe ser, según c),  $\text{SNR}_Q = 60$  dB, por tanto  $N = \left\lceil \frac{60 + 7,25}{6} \right\rceil = \lceil 11,2083 \rceil = 12$  bits. Nótese que la condición de que  $N$  ha de ser un número entero se incluye mediante el cálculo del entero superior.

### Problema T2-2

Para facilitar el diseño del filtro antisolapamiento del problema T2-1 y mejorar las prestaciones del muestreo se emplea el esquema alternativo con sobremuestreo y diezmado mostrado en la figura.



La frecuencia de corte se fija en  $f_c = 4950$  Hz y la pendiente en la banda de paso en  $p = -12$  dB/octava. Calcular a) el factor de sobremuestreo  $M$  que permite este diseño y b) la relación señal a ruido de cuantificación resultante manteniendo el mismo número de bits que en el problema anterior ( $N = 12$ ).

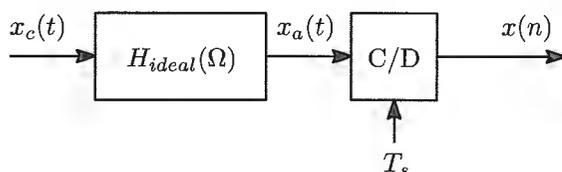
- La ecuación para la pendiente será ahora:  $p = \frac{A}{\log_2(Mf_s/2f_c)}$ , de donde  $M = \left\lceil \frac{f_c}{f_s} 2^{(1+A/p)} \right\rceil$ , con el cálculo del entero superior para que  $M$  sea un entero.
- Dando valores,  $M = \left\lceil \frac{4950}{10000} 2^{(1+60/12)} \right\rceil = 32$ .
- La nueva relación señal a ruido de cuantificación se calcula mediante  $SNR_Q = 6N - 7,25 + 10 \log_{10}(M) = 79,8$  dB.

### Problema 4.61

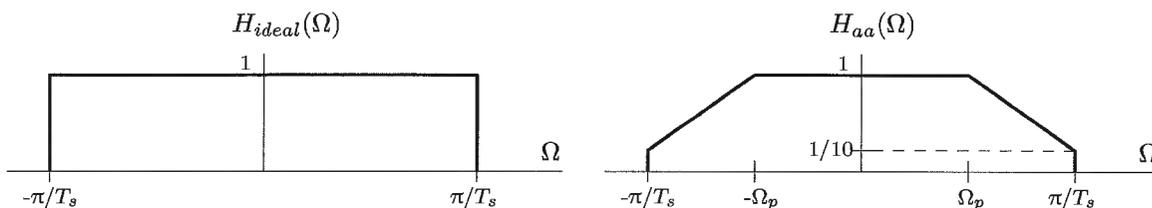
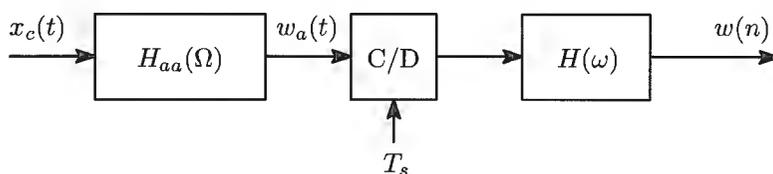
En la sección 4.8.1 del libro se ha considerado el uso de pre-filtrado para evitar el solapamiento. En la práctica, el filtro antisolapamiento no puede ser ideal. Sin embargo, las características no ideales pueden ser compensadas, al menos parcialmente, con un sistema discreto aplicado a la secuencia de salida del convertidor C/D  $x(n)$ .

Considere los dos sistemas de la figura en la que también se indican los filtros antisolapamiento ideal  $H_{ideal}(\Omega)$  y no ideal  $H_{aa}(\Omega)$ . El filtro discreto  $H(\omega)$  debe especificarse para compensar las características no ideales de  $H_{aa}(\Omega)$ .

Sistema 1:

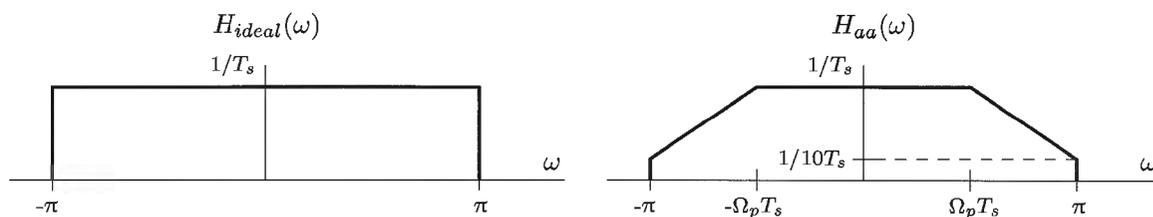


Sistema 2:

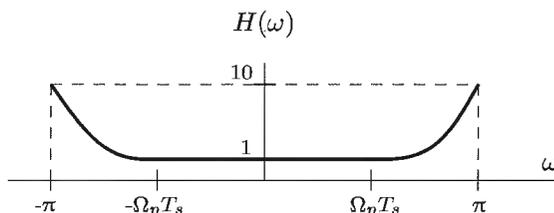


Dibuje  $H(\omega)$  para que las secuencias  $x(n)$  y  $w(n)$  sean iguales.

- La "simulación" discreta de los filtros continuos es



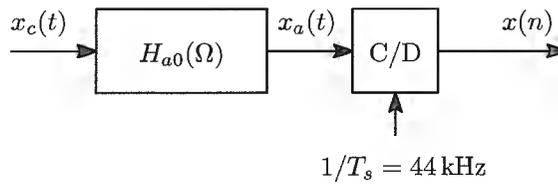
- Para que las señales  $x(n)$  y  $w(n)$  sean iguales debe cumplirse  $H_{ideal}(\omega) = H_{aa}(\omega)H(\omega)$ ; es decir  $H(\omega) = H_{ideal}(\omega)/H_{aa}(\omega)$ .
- El filtro discreto  $H(\omega)$  debe tener este aspecto



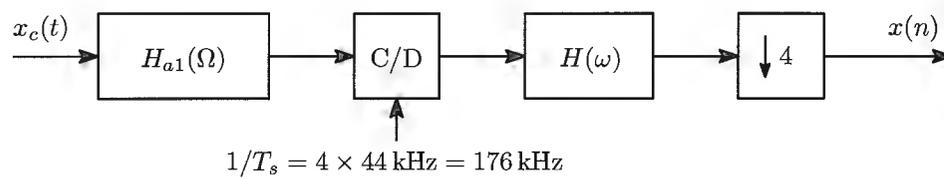
- Nótese que las transformadas se multiplican, no se suman, por lo que en el intervalo  $\Omega_p T_s \leq |\omega| \leq \pi$  la transformada  $H(\omega)$  debe compensar la caída  $-\alpha\omega + \beta$  de  $H_{aa}(\omega)$  con  $1/(-\alpha\omega + \beta)$ .

**Problema 4.65**

En muchas aplicaciones de audio es necesario muestrear una señal continua  $x_c(t)$  con una frecuencia de muestreo  $1/T_s = 44 \text{ kHz}$ . La siguiente figura muestra un sistema sencillo, que incluye el filtro antisolapamiento continuo  $H_{a0}(\Omega)$ , para obtener las muestras deseadas.



Alternativamente, en lugar de este sistema sencillo, puede usarse un sistema con sobremuestreo por un factor de 4 como el que se muestra a continuación



en el que

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi/4 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

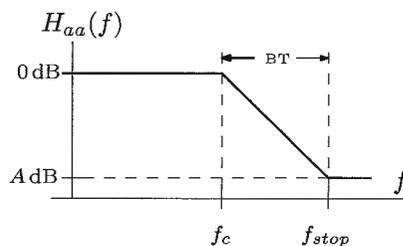
es un filtro paso bajo ideal, y

$$H_{a1}(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \Omega_p \\ 0, & |\Omega| > \Omega_s \end{cases}$$

para algunos valores  $0 \leq \Omega_p \leq \Omega_s < \infty$ .

Encuentre el mínimo conjunto de especificaciones del filtro antisolapamiento  $H_{a1}(\Omega)$  (es decir, los valores mínimo de  $\Omega_p$  y máximo de  $\Omega_s$ ) para que los dos sistemas sean equivalentes.

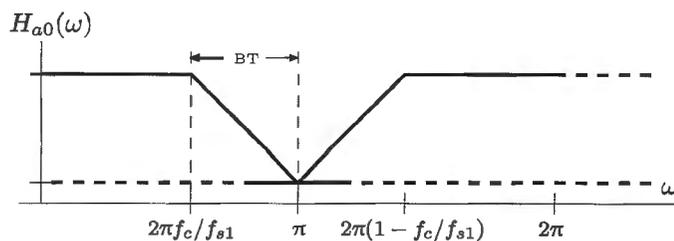
- Los filtros antisolapamiento pueden modelarse tal como se muestra



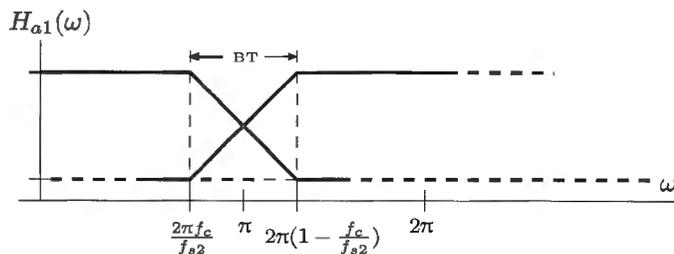
donde  $f_c$  indica la frecuencia de corte,  $f_{stop}$  la frecuencia inicial de la banda rechazada y  $BT$  la banda de transición.

El contenido espectral útil de la señal a muestrear debe estar en la región  $|f| \leq f_c$ .

- Cuando se emplea el esquema simple la frecuencia de muestreo debe ser  $f_{s1} \geq 2f_{stop}$  para evitar el solapamiento de la banda de transición



- Con el esquema con sobremuestreo la frecuencia de muestreo puede reducirse al doble de la frecuencia correspondiente a la mitad de la banda de transición porque el filtro discreto elimina el solapamiento



La frecuencia central de la banda de transición es  $f_m = (f_c + f_{stop})/2$ , así que la frecuencia de muestreo es ahora  $f_{s2} \geq 2f_m = f_c + f_{stop}$ .

- Nótese que en el enunciado del problema  $\Omega_s$  es la frecuencia inicial de la banda rechazada del filtro; el subíndice  $s$  no indica muestreo (*sampling*) sino *stop*.
- En el problema:

1. la región  $|\Omega| \leq \Omega_p$  se mapea en  $|\omega| \leq \pi/4$ ; es decir  $\Omega_p = \frac{\pi/4}{T_s} = 2\pi \times 22 \text{ kHz}$ .
2. la frecuencia  $f_s$  debe cumplir  $f_s \leq (1/T_s) - f_p = 176 - 22 = 154 \text{ kHz}$ ; es decir  $\Omega_s \leq 2\pi \times 154 \text{ rad/s}$ .

Con estos valores  $\omega_p = \Omega_p T_s = \pi/4$  y  $\omega_m = 2\pi f_m T_s = 2\pi T_s (f_p + f_s)/2 = \pi$ .

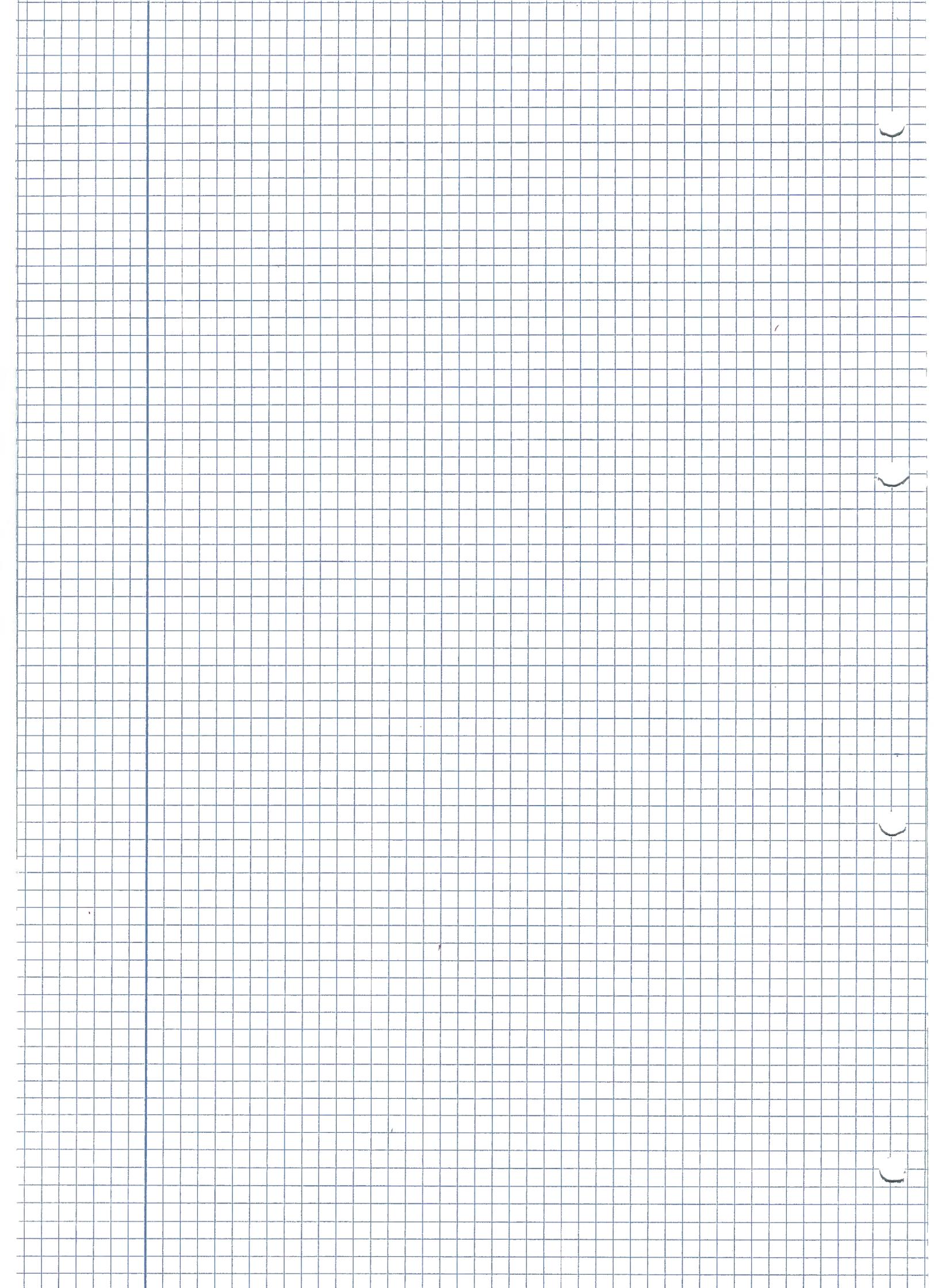
1

2

3

4

TEMA 3  
FILTROS  
DIGITALES



## Flujogramas. TEMA 3

### • Dado un grafo (un flujograma):

- 1) Tomar nudos donde entren variaciones. Se pueden tomar todos los nudos del flujograma no obstante, no se recomienda.
- 2) Una vez escogidos los nudos planteamos sus ecuaciones poniendo exclusivamente  $y[n]$  que le llega al nudo en cuestión así sucesivamente hasta llegar al nudo de la salida.
- 3) Empezando con el nudo de la salida sustituir las ecuaciones de los nudos hasta llegar a una ecuación en diferencias con únicamente la señal de entrada y salida.
- 4)  $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

### • Dada una función de transferencia:

- 1) Sacamos la ecuación en diferencias
- 2) De la ecuación de diferencias dejamos a un lado de la igualdad  $y[n]$  exclusivamente cualquier desplazamiento de  $y[n]$  lo pasamos al otro lado de la igualdad.
- 3) Usamos el flujograma de la forma 1. Recomendaciones:
  - dos  $z^{-1}$  ponerlos con flechas verticales
  - dos  $ctes$  que multiplican horizontalmente.
- 4) Una vez con el flujograma en forma 1 podemos pasarlo a cualquier forma [mirar hoja 4 formas]

### • Pseudocódigo:

- Inicializamos los nudos a los que le llegan una flecha de  $z^{-1}$

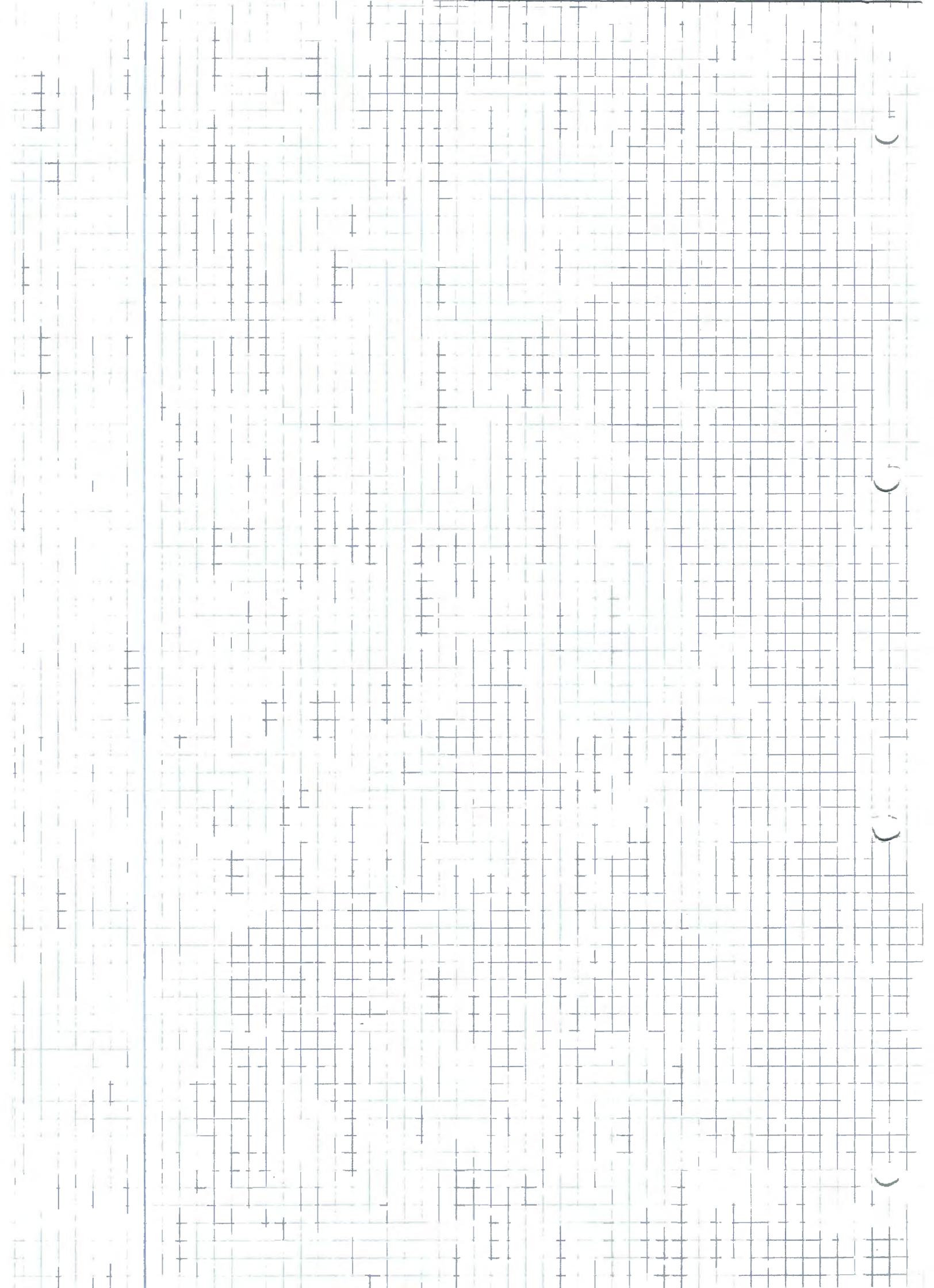
- Inicializamos el bucle (for  $n \dots x.length$ )

- Escribimos las ecuaciones de los nudos que NO son punta de un  $z^{-1}$

- Actualizamos los registros: Ejemplo:  $w^2 \xrightarrow{z^{-1}} w^3 \rightarrow w^3 = w^2$

- Finalizamos bucle: end

- Diagrama polo-cero.



# Sistemas & Filtros Tema 3

- \* Si  $h[n]$  es real  $\rightarrow$  por cada cero y/o polo se tiene su conjugado:  $(c_i, c_i^*)$  y/o  $(p_i, p_i^*)$
- \* Sistema paso-todo  $\rightarrow$  por cada polo en "a" se tiene también un cero en  $1/a^*$
- \* Sistema fase mínima  $\rightarrow$  por cada cero "z\_cero" se tiene también  $1/z_{cero}^*$ ,  $z_{cero}^*$  y  $1/z_{cero}$   
 $\rightarrow$  por cada polo "z\_polo" se tiene también  $1/z_{polo}^*$ ,  $z_{polo}^*$  y  $1/z_{polo}$

## \* Sistemas de fase lineal

Tipo	I	II	III	IV
Simetría	par	par	Impar	impar
Orden	par	impar	par	impar

- Orden = duración - 1
- duración = n° muestras

Tienen un cero en  $z = -1$  ( $\omega = \pi$ )  
 $\hookrightarrow$  No valen para paso alto

Tienen un cero en  $z = -1$  y  $z = 1$   
 $\hookrightarrow$  No valen para P.A. ni P.B

Tienen un cero en  $z = 1$   
 $\hookrightarrow$  No valen para P.B

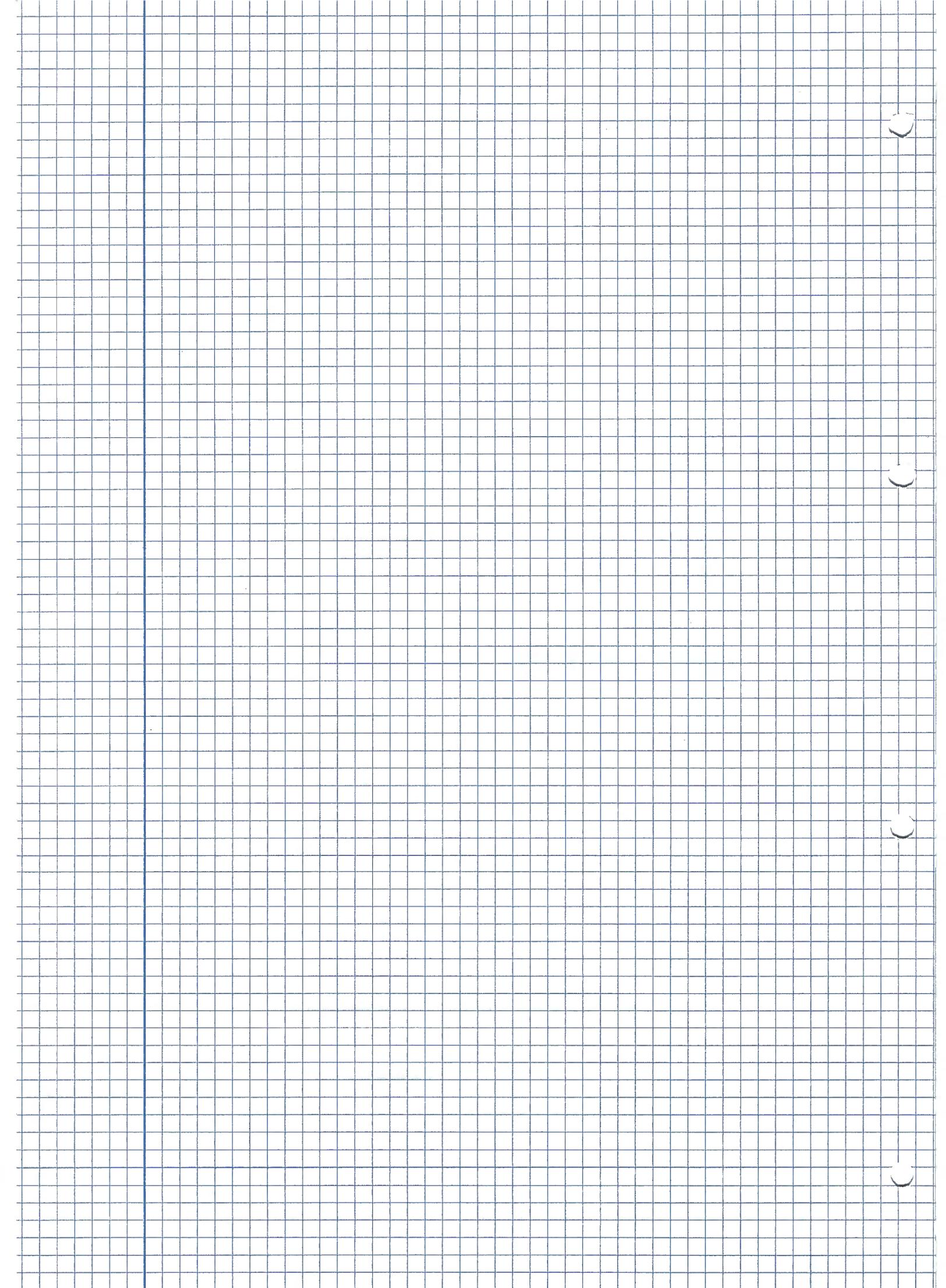
## \* Descomposición de sistemas: $H(z) = H_{ap}(z) \cdot H_{min}(z)$

- 1) Reflejamos los ceros externos al círculo unidad introduciendo para cada uno de ellos un cero y un polo con el mismo ángulo que el cero externo y con magnitud inversa.
- 2) Ceros reflejados y todo lo interior al círculo unidad (salvo polos en cero)  $\rightarrow$  Fase Mínima
- 3) Polos reflejados y ceros externos  $\rightarrow$  Paso todo Polo en el origen crea inestabilidad
- 4)  $H(z) = A \cdot H_{min}(z) \cdot B H_{ap}(z)$  y se cumple que  $A = B^{-1}$
- 5) Para calcular A y B hacemos que  $H_{ap}(z)|_{z=1} = 1$  obteniendo B y luego A
- 6) El sistema para compensar la distorsión en amplitud será:  $H_c(z) = 1/H_{min}(z)$

## \* Sistema fase máxima: todos los ceros están fuera de la $|z| \geq 1$

## \* Sumatorias de series geométricas:

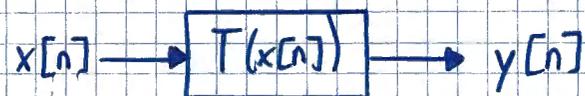
$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \quad ; \quad \sum_{n=0}^n ar^n = \frac{1 - \text{último razón}}{1 - \text{razón}}$$



# TEMA 0 y 3: Repaso + Filtros Digitales

- 1) Caracterización de sistemas LTI
- 2) Sistema Inverso
- 3) Sistemas paso-todo
- 4) Sistemas de fase mínima.
- 5) Descomposición de sistemas
- 6) Sistemas de fase lineal
- 7) Flujoograma
- 8) Diseño de filtros

## 1) Caracterización de sistemas LTI



\* **Linealidad:**  $ax_1[n] + bx_2[n] \longrightarrow ay_1[n] + by_2[n]$

\* **Invarianza temporal:**  $x[n-n_0] \longrightarrow y[n-n_0]$

\* **Causalidad:** da  $y[n]$  en un instante depende de la entrada en ese instante o posteriores.

\* **Memoria:** da  $y[n]$  depende de  $x[n]$  en instantes anteriores o posteriores.

\* **Estabilidad BIBO:** da entrada está acotada en amplitud, la salida también

\* **Invertibilidad:** Un sistema  $h$  es inverso si en cascada con  $h^{-1}[n]$  recupera la entrada:  $h[n] * h^{-1}[n] = \delta[n]$

### 1.1) Respuesta al impulso: Para sistemas LTI



\* **Causal:** Si  $h[n] = 0 \quad \forall n < 0$

\* **Estable:** Si  $\sum_{h=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$

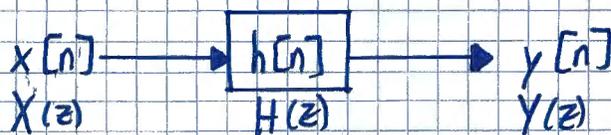
\* **Con memoria:** Si  $h[n] \neq c \cdot \delta[n]$  con  $c \in \mathbb{C}$

\* **Invertible:** Si  $\underbrace{h[n]}_{LTI} * \underbrace{h^{-1}[n]}_{LTI} = \delta[n]$

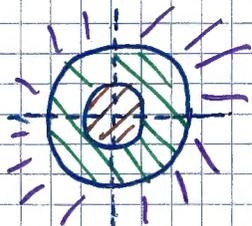
1.2) Función de sistema: Para sistemas LTI

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \cdot z^{-n}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

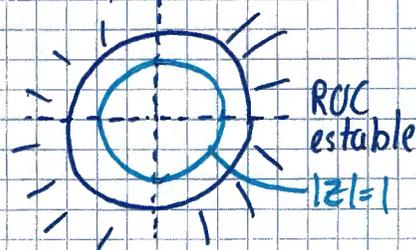


\* **Causal:** Si el grado del numerador es menor o igual que el del denominador.



Anticausal  
No-causal  
Causal

\* **Estable:** Si ROC contiene a  $|z|=1$



\* **Sin-memoria:** Si la ROC es todo el plano z



$\omega$  en radianes  
 $e^{j\omega} = \omega$   
nomenclatura

1.3) Respuesta en frecuencia:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \cdot e^{-j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

Si es estable:  $H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$

Podemos representar la respuesta en fase y módulo:  $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j\phi(e^{j\omega})}$

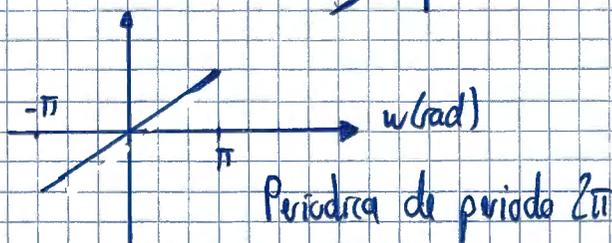
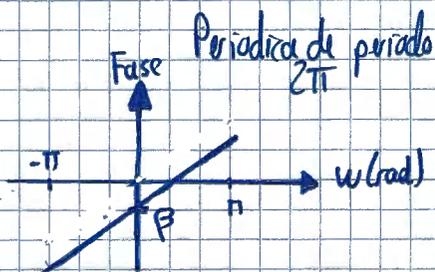
• Módulo:  $|H(e^{j\omega})| = \sqrt{(H_{\text{real}}(e^{j\omega}))^2 + (H_{\text{img}}(e^{j\omega}))^2}$

• Fase:  $\phi(e^{j\omega}) = \arctg \left[ \frac{H_{\text{img}}(e^{j\omega})}{H_{\text{real}}(e^{j\omega})} \right]$

Filtros FIR  
con simetría

(FLG) • Sistemas de fase lineal generalizada:  $\phi(e^{j\omega}) = -\alpha\omega + \beta$

(F.L) • Fase lineal:  $\phi(e^{j\omega}) = -\alpha\omega$



• Retardo de grupo:  $Y_{\text{grupo}}(\omega) = \frac{-d\phi(e^{j\omega})}{d\omega}$

Para F.L.G. ó F.L.  $\equiv Y_{\text{grupo}}(\omega) = \frac{-d}{d\omega} (-\alpha\omega + \beta) = \alpha = \text{cte}$



• Retardo de fase:  $Y_{\text{ph}}(\omega) = \frac{-\phi(e^{j\omega})}{\omega}$

Para F.L.  $\equiv Y_{\text{ph}}(\omega) = Y_{\text{gr}}(\omega) = \alpha = \text{cte}$

1.4) Ecuación en diferencias:

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left[ \sum_{k=0}^m b_k x[n-k] + \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right]$$

Recursividad (IIR)

• FIR (Finite Impulse Response): tiene  $h[n]$  finita, normalmente:

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left[ \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] \right] \quad \text{sin recursividad}$$

• IIR (Infinite Impulse Response): tienen  $h[n]$  infinita y tienen recursividad en  $y[n]$

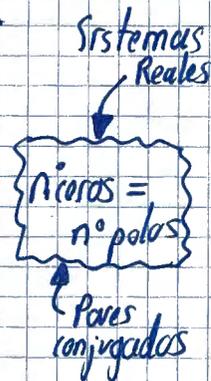
$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left[ b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] \right]$$

(Si despejamos poniendo la salida a la izquierda y dejando la entrada a la derecha queda la típica ec. en diferencias)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\prod_{k=0}^M (1 - z_{\text{zero},k} z^{-1})}{\prod_{k=0}^N (1 - z_{\text{polo},k} z^{-1})} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

•  $H(z_{\text{zero}} \neq 0) = 0$  Zeros anulan el polinomio del numerador.

•  $H(z_{\text{polo}}) \rightarrow \infty$  Zeros anulan el polinomio del denominador.

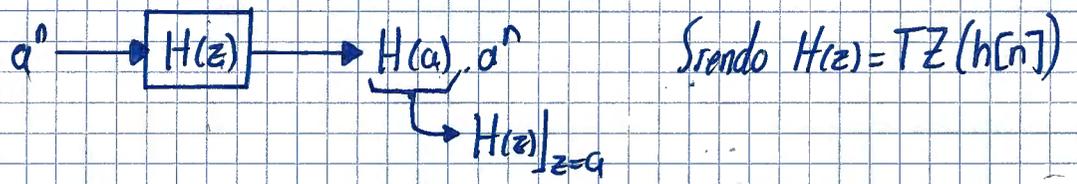


1.5) Autofunciones:

$x[n]$  es autofunción  $\Leftrightarrow x[n] \xrightarrow{T} a \cdot x[n] \quad a \in \mathbb{C}$

Si es LTI:  $\underline{x[n] = a^n} \quad a = \text{cte} \in \mathbb{C}$

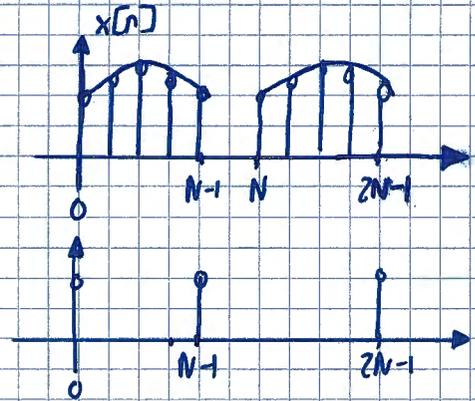
$y[n] = x[n] * h[n] = a^n * h[n] = H(a) \cdot a^n$



1.6) Señales Periódicas:

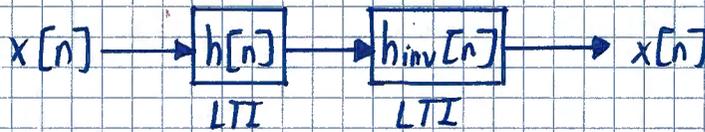
$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$



$x[n] \xrightarrow{h[n]} y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot H(e^{j \frac{2\pi}{N} k}) \cdot e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = H(e^{j \frac{2\pi}{N} k}) \cdot x[n]$   
autofunción

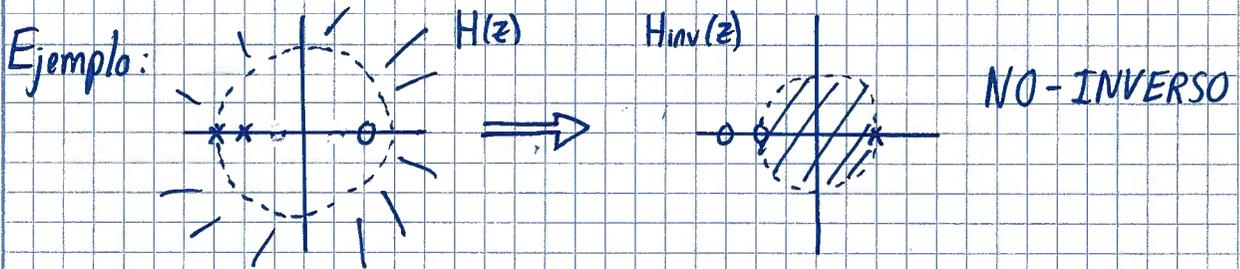
2) Sistema Inverso



- $h[n] * h_{inv}[n] = \delta[n]$
- $H(z) \cdot H_{inv}(z) = 1 \rightarrow H_{inv}(z) = \frac{1}{H(z)}$

dos ceros se transforman en polos y los polos se convierten en ceros

Siempre y cuando haya una ROC dentro una zona común (coincidan). Si no, no existe el sistema inverso



3) Sistema paso-todo:

$$|H(e^{j\omega})| = \text{constante } \forall \omega$$

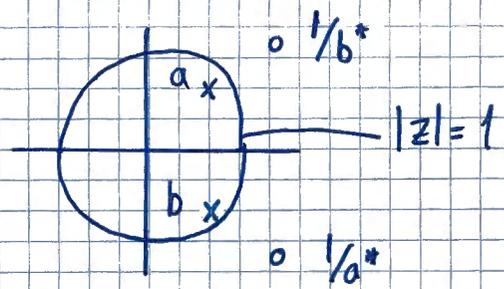
ORDEN 1

$H_{ap} = H_{pt} = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}$   
 All Pass  $\leftarrow$   $\rightarrow$  Paso Todo

esto significa: polo en  $a \Rightarrow$  cero en  $1/a^*$

recíprocos conjugados o para conjugados

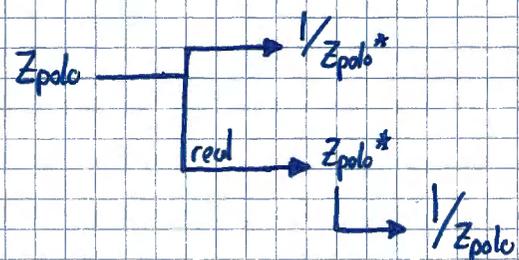
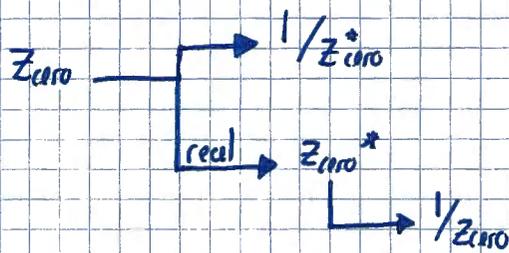
$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} - b^*}{1 - bz^{-1}}$$



#### 4) Sistemas fase mínima

TZ  $C(j\omega) = |H(e^{j\omega})| \cdot |H(1/e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})|^2$

$C(z) = H(z) \cdot \tilde{H}(z)$  → Paraconjugado de  $H(z) = H^*(1/z^*)$



Ejemplo:  $C(z) = H(z) \cdot \tilde{H}(z)$  Racional de coeficientes reales

Ceros  $\equiv C_1 = -0.25 - 0.25j$

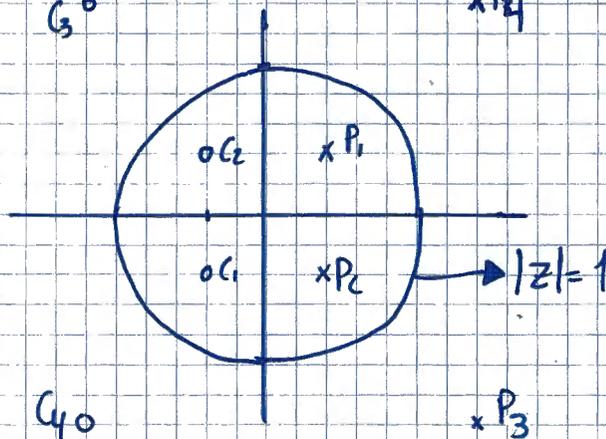
Polos  $\equiv P_1 = 0.25 + 0.25j$

$C_3^0$

$C_2 = C_1^* = -0.25 + 0.25j$

$C_3 = \frac{1}{C_1} = \frac{1}{-0.25 - 0.25j} = -2 + 2j$

$C_4 = \frac{1}{C_1^*} = \frac{1}{C_2} = \frac{1}{-0.25 + 0.25j} = -2 - 2j = C_3^*$



$$C(z) = \frac{H(z)}{\tilde{H}(z)} = \frac{(1 - C_1 z^{-1})(1 - C_2 z^{-1})(1 - C_3 z^{-1})(1 - C_4 z^{-1})}{(1 - P_1 z^{-1})(1 - P_2 z^{-1})(1 - P_3 z^{-1})(1 - P_4 z^{-1})}$$

$C(z) = H(z) \cdot \tilde{H}(z)$

→ No pueden coincidir  $(C_1, C_4), (C_2, C_3), (P_1, P_3), (P_2, P_4)$

16 combinaciones todas con igual  $C(e^{j\omega})$  pero como no pueden coincidir 4 tenemos 12 combinaciones  $H(z) \cdot \tilde{H}(z)$ . En  $H(z)$  y  $\tilde{H}(z)$  tienen que aparecer los ceros y polos y sus paraconjugados respectivamente.

$H(z) \leftarrow C_1, C_4, P_1, P_3$

$\tilde{H}(z) \leftarrow C_2, C_3, P_2, P_4$

Las 16 combinaciones serían:

$$H_1(z) = \frac{(1 - c_1 z^{-1})(1 - c_2 z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})} K_1$$

$$H_2(z) = \frac{(1 - c_3 z^{-1})(1 - c_4 z^{-1})}{(1 - p_3 z^{-1})(1 - p_4 z^{-1})} K_2$$

$$H_3(z) = \frac{(1 - c_1 z^{-1})(1 - c_3 z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})} K_3$$

~~$$H_4(z) = \frac{(1 - c_1 z^{-1})(1 - c_4 z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})} K_4$$~~

$$H_5(z) = \frac{(1 - c_1 z^{-1})(1 - c_2 z^{-1})}{(1 - p_3 z^{-1})(1 - p_4 z^{-1})} K_5$$

.....

porque  $c_1$  y  $c_4$   
 $c_1 \Rightarrow c_4 = 1/c_1^*$

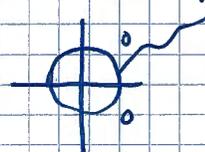
Eliminamos las combinaciones:  $\frac{(c_1, c_4)}{(p_1, p_3)}$ ,  $\frac{(c_1, c_4)}{(p_2, p_4)}$ ,  $\frac{(c_2, c_3)}{(p_1, p_3)}$ ,  $\frac{(c_2, c_3)}{(p_2, p_4)}$ , ...

basicamente no pueden estar los pares  $(c_1, c_4)$ ,  $(c_2, c_3)$ ,  $(p_1, p_3)$ ,  $(p_2, p_4)$

- Fase mínima si todos los ceros están dentro de la  $|z| < 1$   
 (Estricta si los ceros están en  $|z| = 1$ )



- Fase máxima si todos los ceros están fuera de la  $|z| > 1$

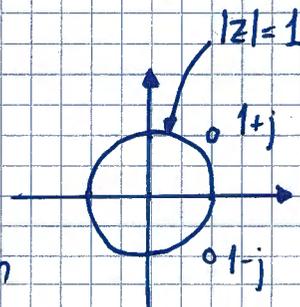


### 5) Descomposición de sistemas

$$H(z) = H_{ap}(z) \cdot H_{min}(z)$$

• Ejemplo:

$$H(z) = \frac{(1 - (1+j)z^{-1})(1 - (1-j)z^{-1})}{(1-j)^*}$$



1er paso:

Hacemos el inverso conjugado para que entren en la circunferencia:

$$\frac{1}{(1+j)^*} = \frac{1}{1-j} = 0.5 + 0.5j$$

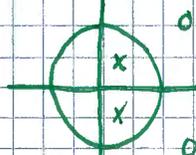
$$\frac{1}{(1-j)^*} = \frac{1}{1+j} = 0.5 - 0.5j$$

} Esto sería la fase mínima

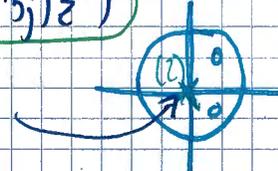
2o paso: Multiplico y divido por lo obtenido en el paso 1.

$$H(z) = \frac{(1 - (1+j)z^{-1})(1 - (1-j)z^{-1})}{(1-j)^*} \cdot \frac{(1 - (0.5 - 0.5j)z^{-1})(1 - (0.5 + 0.5j)z^{-1})}{(1 - (0.5 - 0.5j)z^{-1})(1 - (0.5 + 0.5j)z^{-1})}$$

Paso Todo



2 polos para compensar



• Fase mínima

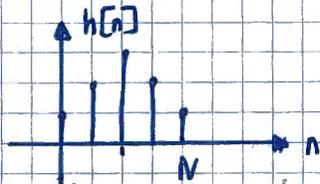
## 6) Sistemas de fase lineal

$$\phi(e^{j\omega}) = -\alpha\omega + \beta \quad |\omega| \leq \pi$$

FLG  $\Rightarrow$  Tienen simetría en  $h[n]$ :  $h[n] = \pm h[n-N]$

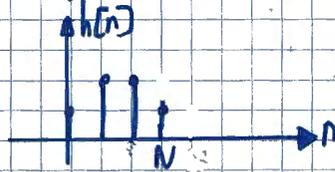
• TIPO I: Simetría PAR

Orden PAR (N)



• TIPO II: Simetría PAR

Orden IMPAR



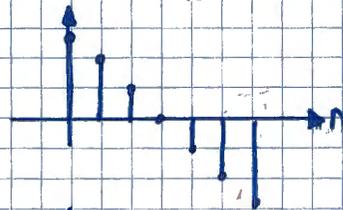
Tienen un cero en  $z = -1$  ( $\omega = \pi$ )

$\hookrightarrow$  NO valen para paso alto

( $\omega = 0$  y  $\omega = \pi$ )

• TIPO III: Simetría IMPAR

ORDEN PAR

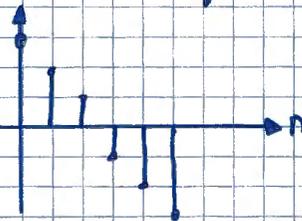


Tienen un cero en  $z = -1$  y  $z = 1$

$\hookrightarrow$  NO valen para P.A. ni P.Bajo  
(Tª Hilbert)

• TIPO IV: Simetría IMPAR

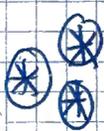
ORDEN IMPAR



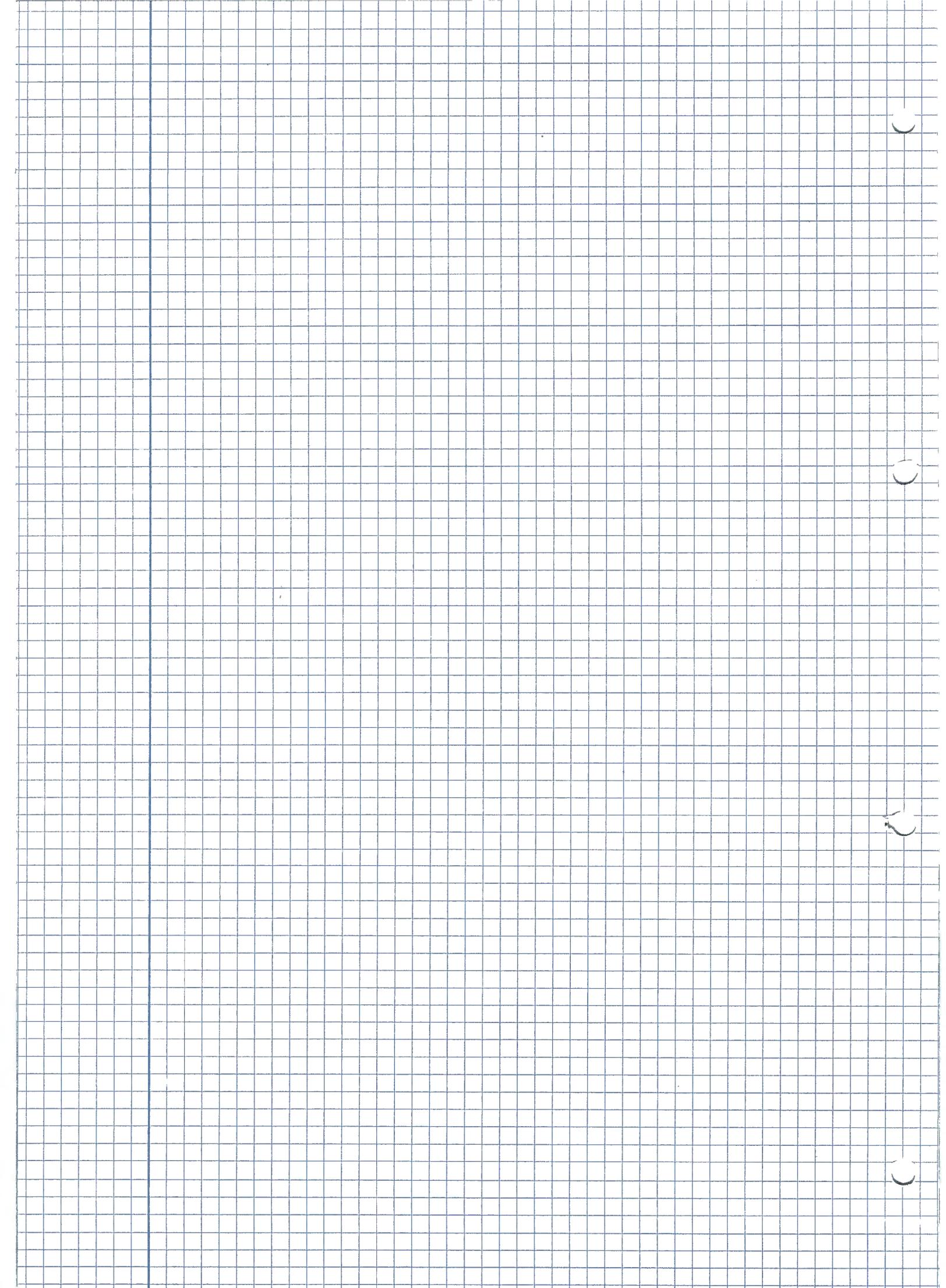
Tienen un cero en  $z = 1$  ( $\omega = 0$ )

$\hookrightarrow$  NO valen para P. Bajo

$$Y_{gr}(\omega) = \text{orden} / 2 \quad (\text{para todos})$$



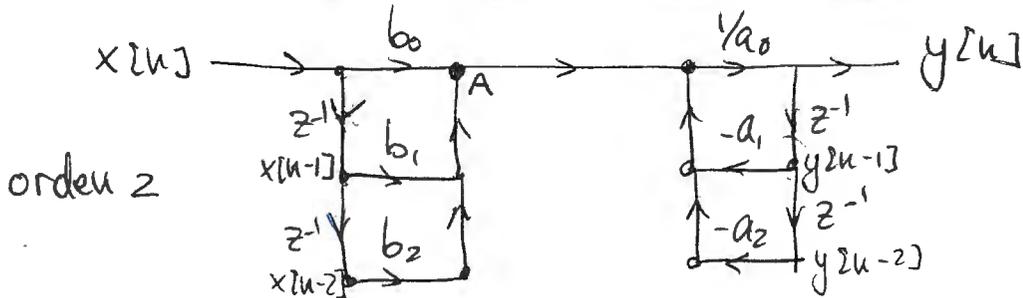
Si  $h[n]$  real  $\rightarrow$  Por cada cero también se tiene su conjugado



# 7) Flujoograma

**F. Directa I.** SOLO usar esta para sacar la ec. de diferencias

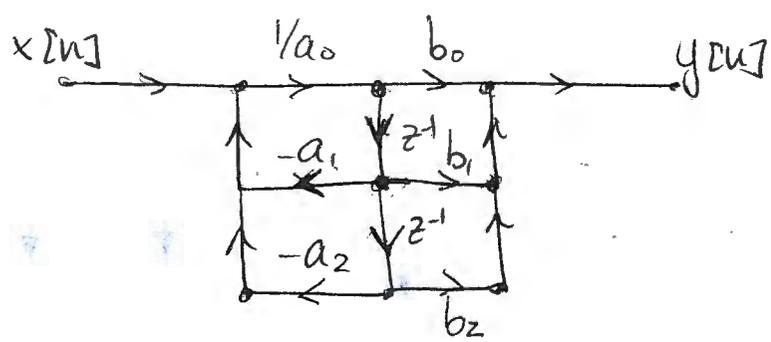
$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left[ \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^M a_k y[n-k] \right]$$



$$y[n] = \frac{1}{a_0} [b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2]]$$

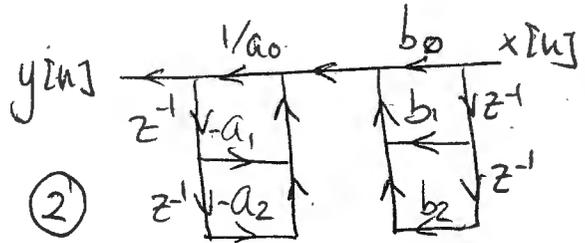
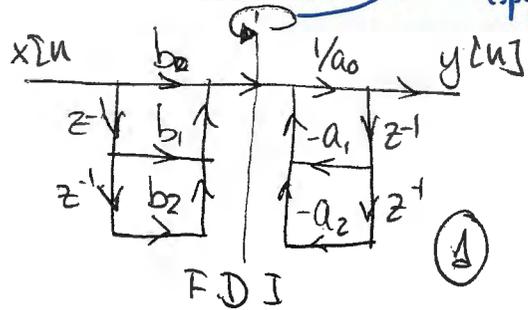
$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = \overbrace{b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]}^A$$

**F. Directa II**

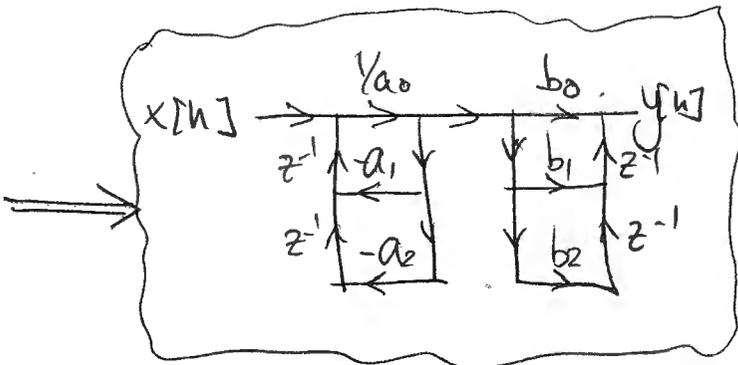


**F. Directa III**

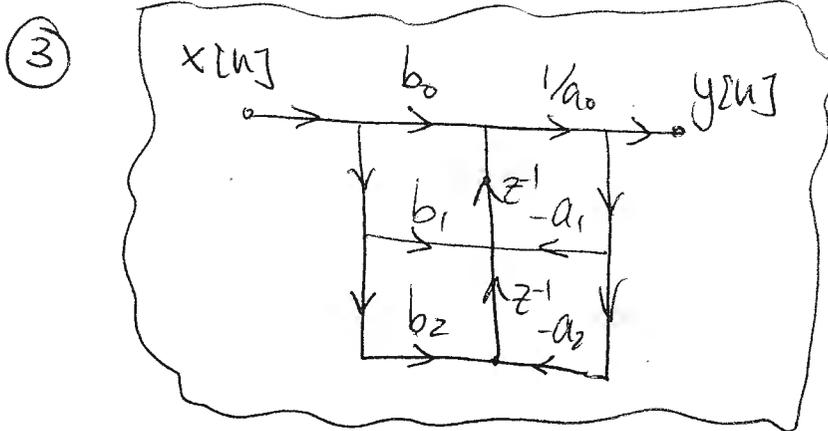
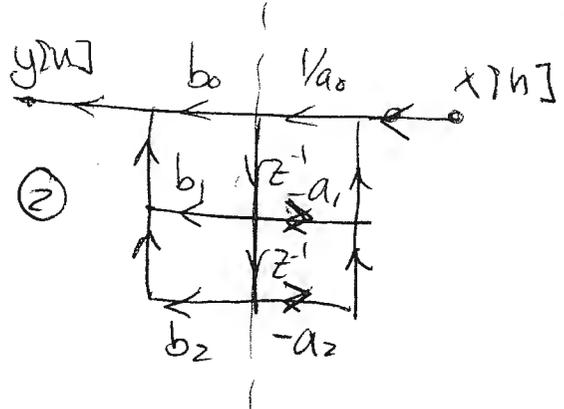
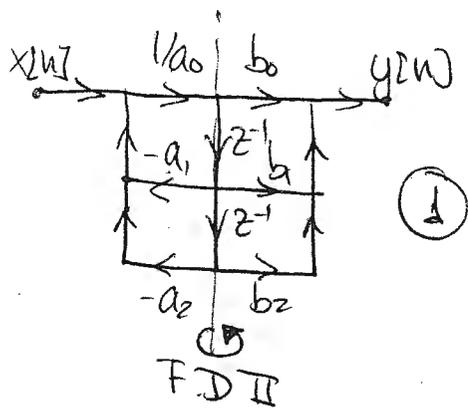
Como si fuera un espejo



- ③ Cambiamos sentido flechas. Intercambio  $x[n]$  por  $y[n]$

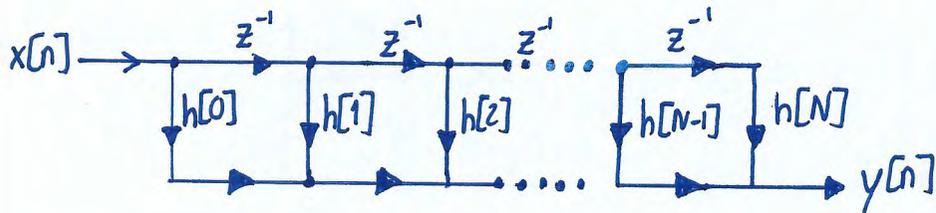


# F. Directa IV



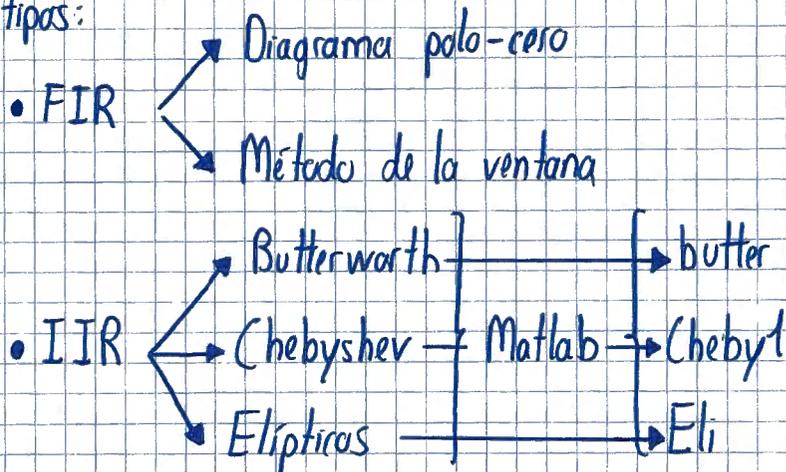
# FIR

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h[n]z^{-n} = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \dots + h[N]z^{-N}$$



# 8) Diseño de filtros

Dos tipos:

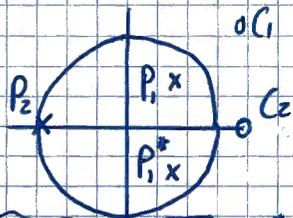


## FIR:

① A partir del Diagrama polo-cero:

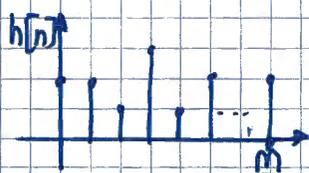
⊗ Si  $h[n]$  es real o de coeficientes reales

↳ dos ceros y los polos aparecen por pares conjugados



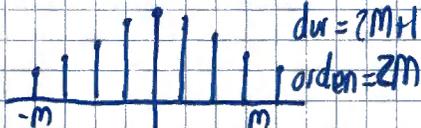
Salvo los que tengan parte real

ORDEN FILTRO FIR  $\equiv n^{\circ}$  ceros =  $n^{\circ}$  polos =  $\text{dur}(h[n]) - 1$



ORDEN = M  
dur = M+1

Ejemplo

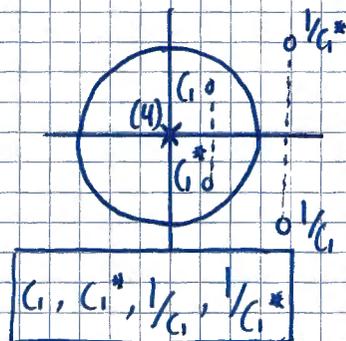


⊗ Si  $h[n]$  es simétrica (par o impar), el filtro es de Fase Lineal Generalizada

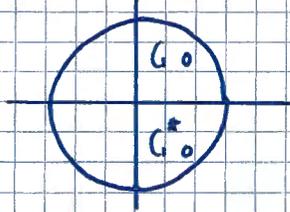
⇒ Filtros FIR: tipo I, II, III y IV

↳ los ceros aparecen por par conjugados

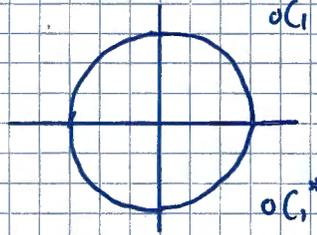
↳ Polos en  $z=0$  del mismo orden que el  $n^{\circ}$  de ceros  $\equiv n^{\circ}$  total de ceros



⊗ Si  $h[n]$  tiene  $H(z)$  fase mínima  $\rightarrow$  TODOS los ceros están dentro de  $|z|=1$

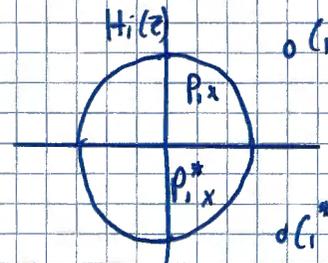
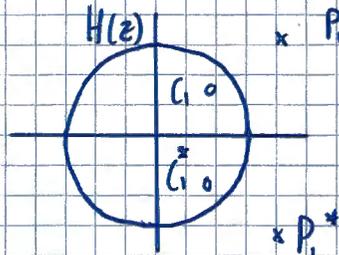


⊗ Si  $h[n]$  tiene una  $H(z)$  de fase máxima  $\rightarrow$  TODOS los ceros están fuera de la circunferencia de  $|z|=1$



⊗ Si  $h[n]$  tiene una  $h_i[n]$  tal que  $h[n] * h_i[n] = \delta[n]$  ó  $H(z) \cdot H_i(z) = 1$  ó  $H(z)$  tiene inverso:

Caso ideal



da ROC de  $H(z)$  y  $H_i(z)$  tienen que coincidir en algún punto

Casosual: No suele existir  $H_i(z) = \frac{1}{H(z)}$  estable, da mejor que podemos conseguir

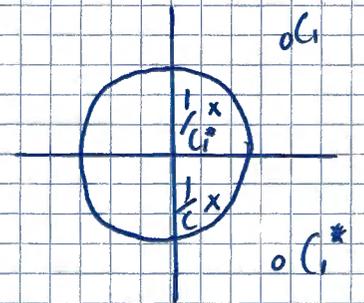
es  $H_i(z) = \frac{1}{H_{min}(z)}$

$$H(z) \cdot H_i(z) = [H_{min}(z) \cdot H_{op}(z)] \cdot H_i(z) = \underbrace{H_{min}(z) \cdot H_{op}(z)}_{H(z)} \cdot \frac{1}{H_{min}(z)} = H_{op}(z) = cte$$

⊗ Si  $h[n]$  tiene una  $H(z) = H_{op}(z)$  Paso todo

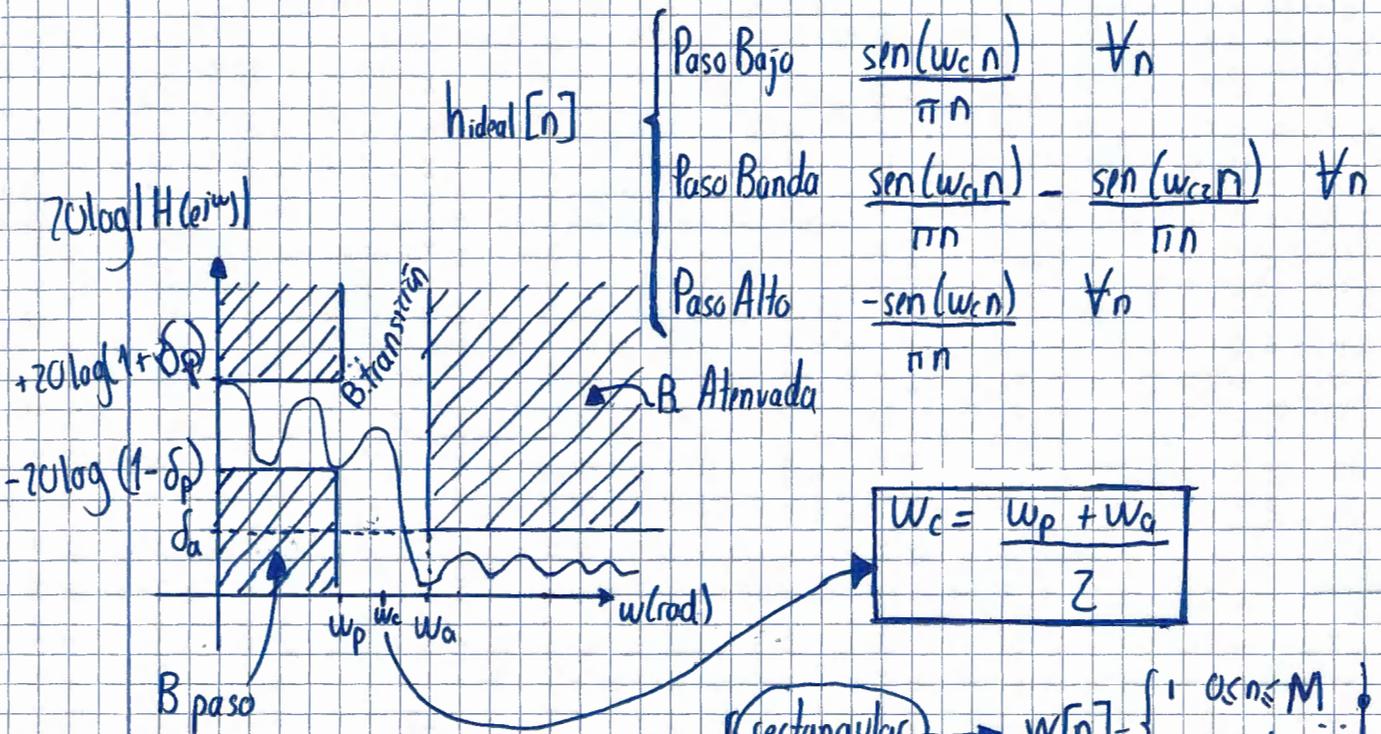
Fase es monótona decreciente  
Retardo de grupo positivo

$\rightarrow$  Polo en  $a \rightarrow$  cero en  $1/a^*$   
ceros y polos paraconjugados



## 2) Método de la ventana:

$$h[n] = h_{ideal}[n] \cdot W[n]$$



$$w[n] \equiv \text{ventana}$$

- rectangular  $\rightarrow w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$
- triangular
- Hanning
- Blackman
- Kaiser
- Hamming

retardo de grupo

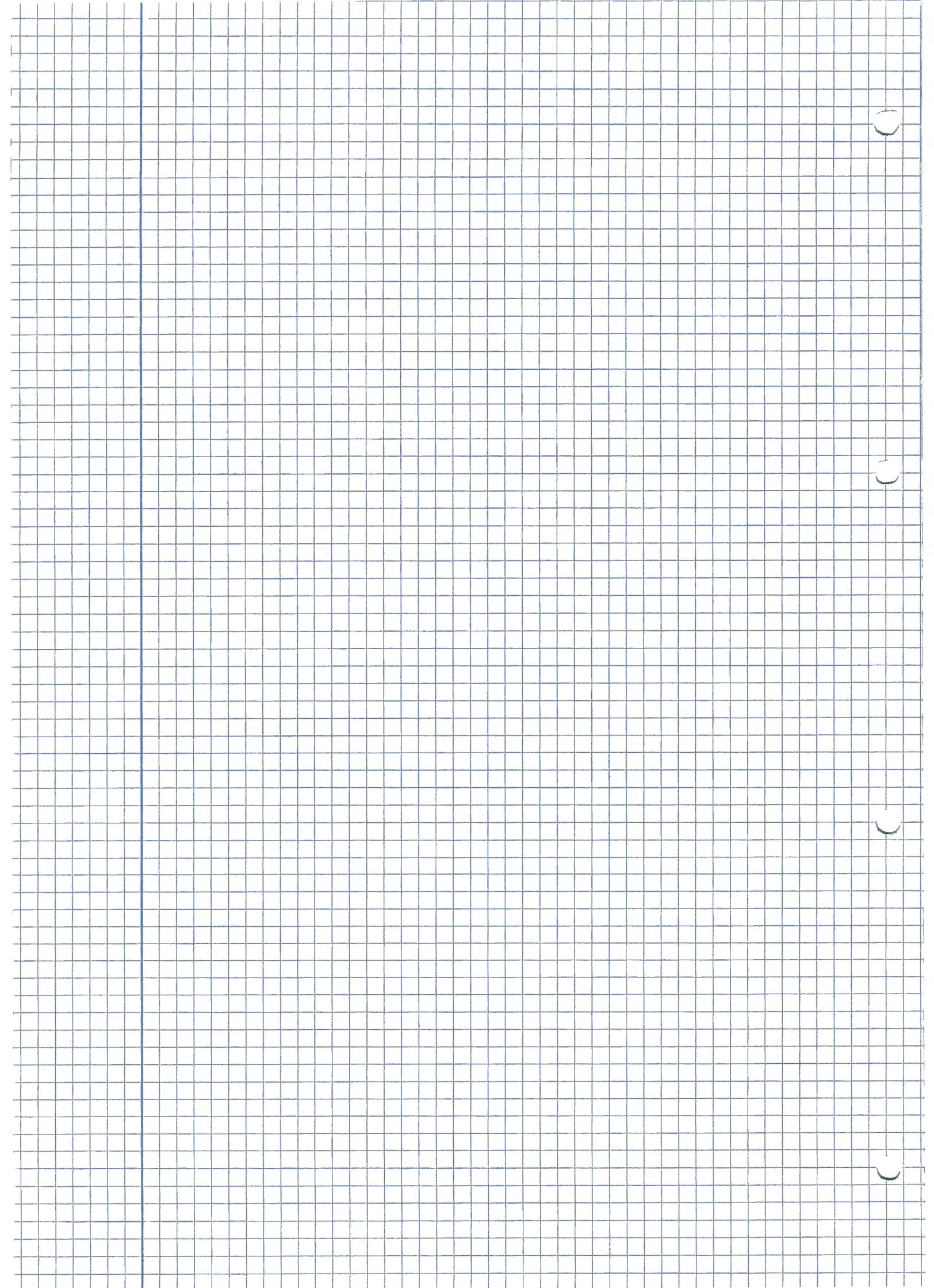
Orden = M  $\equiv \frac{e_{gr}}{2}$

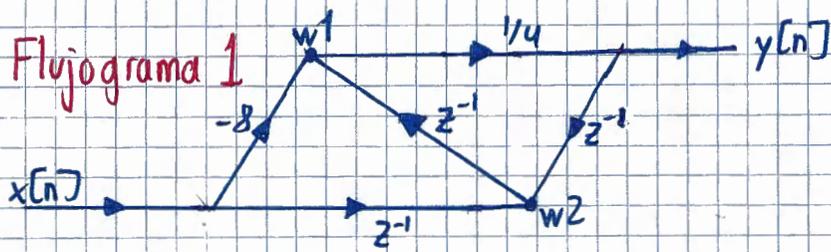
FIR tipo I, II, III, IV

Ancho banda transición

$$\Delta\omega = \omega_a - \omega_p = \frac{4\pi}{M+1}$$

Nos la darían adaptada al problema del examen





$$w1[n] = -8x[n] + w2[n-1]$$

$$w2[n] = x[n-1] + y[n-1]$$

$$y[n] = \frac{1}{4} w1$$

$$y[n] = \frac{1}{4} w1 = \frac{1}{4} (-8x[n] + w2[n-1]) = \frac{1}{4} (-8x[n] + x[n-2] + y[n-2])$$

$$\Rightarrow y[n] = -2x[n] + \frac{1}{4}x[n-2] + \frac{1}{4}y[n-2]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow y[n] - \frac{1}{4}y[n-2] = -2x[n] + \frac{1}{4}x[n-2]$$

$$Y(z)(1 - \frac{1}{4}z^{-2}) = X(z)(-2 + \frac{1}{4}z^{-2})$$

$$H(z) = \frac{(-2 + \frac{1}{4}z^{-2})}{(1 - \frac{1}{4}z^{-2})}$$

Diagrama Polo-Cero

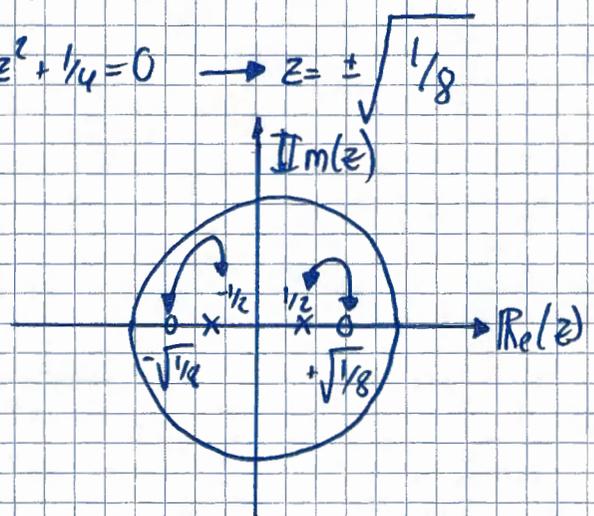
ceros:  $-2 + \frac{1}{4}z^2 = 0$

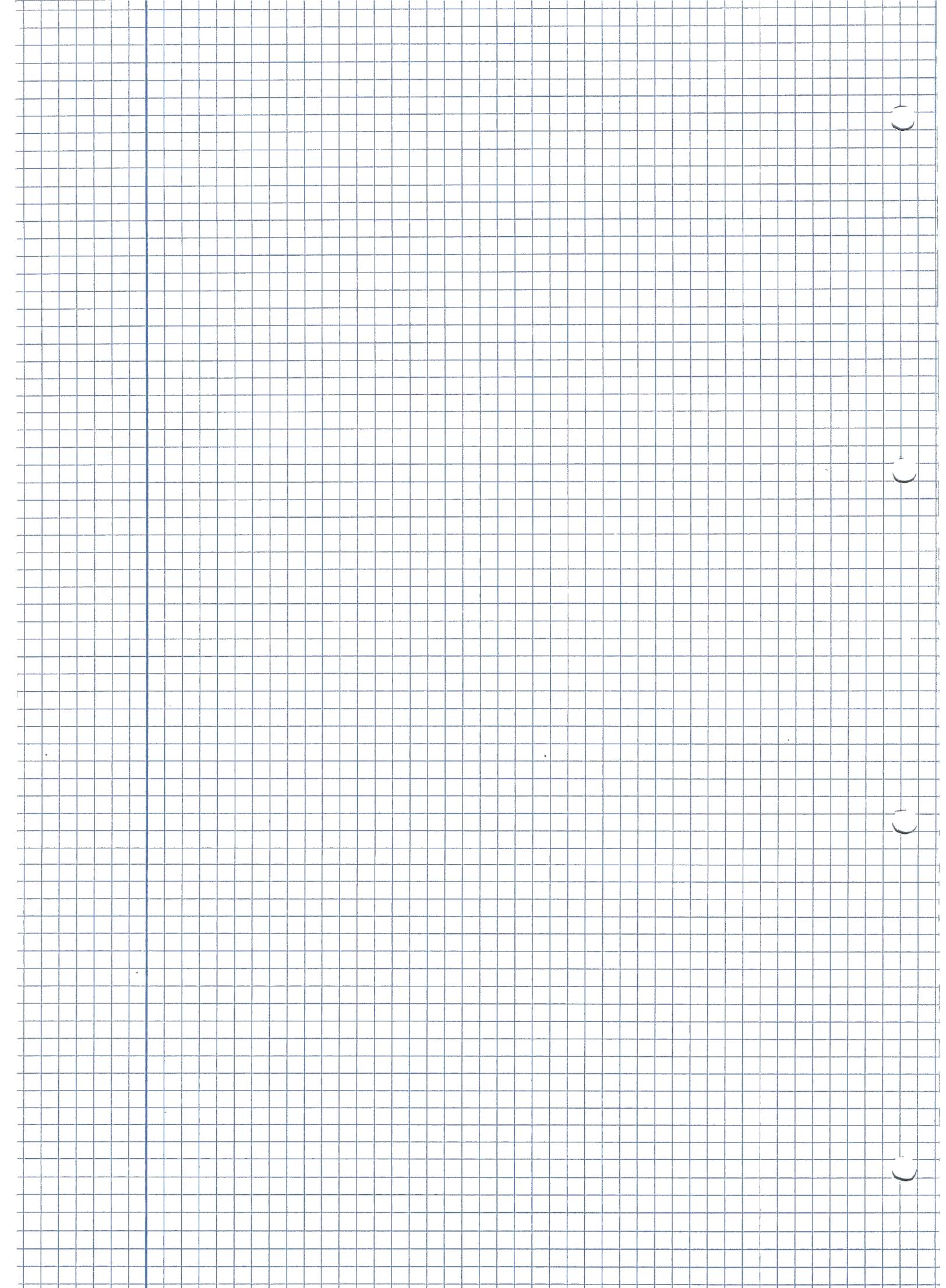
$$-2z^2 + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow z = \pm \sqrt{\frac{1}{8}}$$

Polos:  $1 - \frac{1}{4}z^2 = 0$

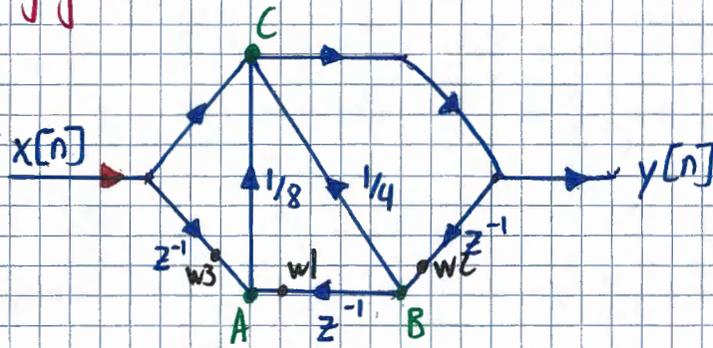
$$z^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$z^2 = \frac{1}{4} \rightarrow z = \pm \frac{1}{2}$$





## Flujograma Z



A las puntas de las flechas de  $z^{-1}$  se llama  $w_i$  (registros)

$$\left. \begin{aligned} y[n] &= C & (1) \\ B &= y[n-1] & (2) \\ A &= B[n-1] + x[n-1] & (3) \\ C &= x[n] + \frac{1}{8}A + \frac{1}{4}B & (4) \end{aligned} \right\}$$

(1), (2), (3) en (4)

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{8}[B[n-1] + x[n-1]] + \frac{1}{4}y[n-1]$$

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{8}[y[n-2] + x[n-1]] + \frac{1}{4}y[n-1]$$

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] + x[n-1]$$

$$Y(z)[1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}] = X(z)[1 + \frac{1}{8}z^{-1}]$$

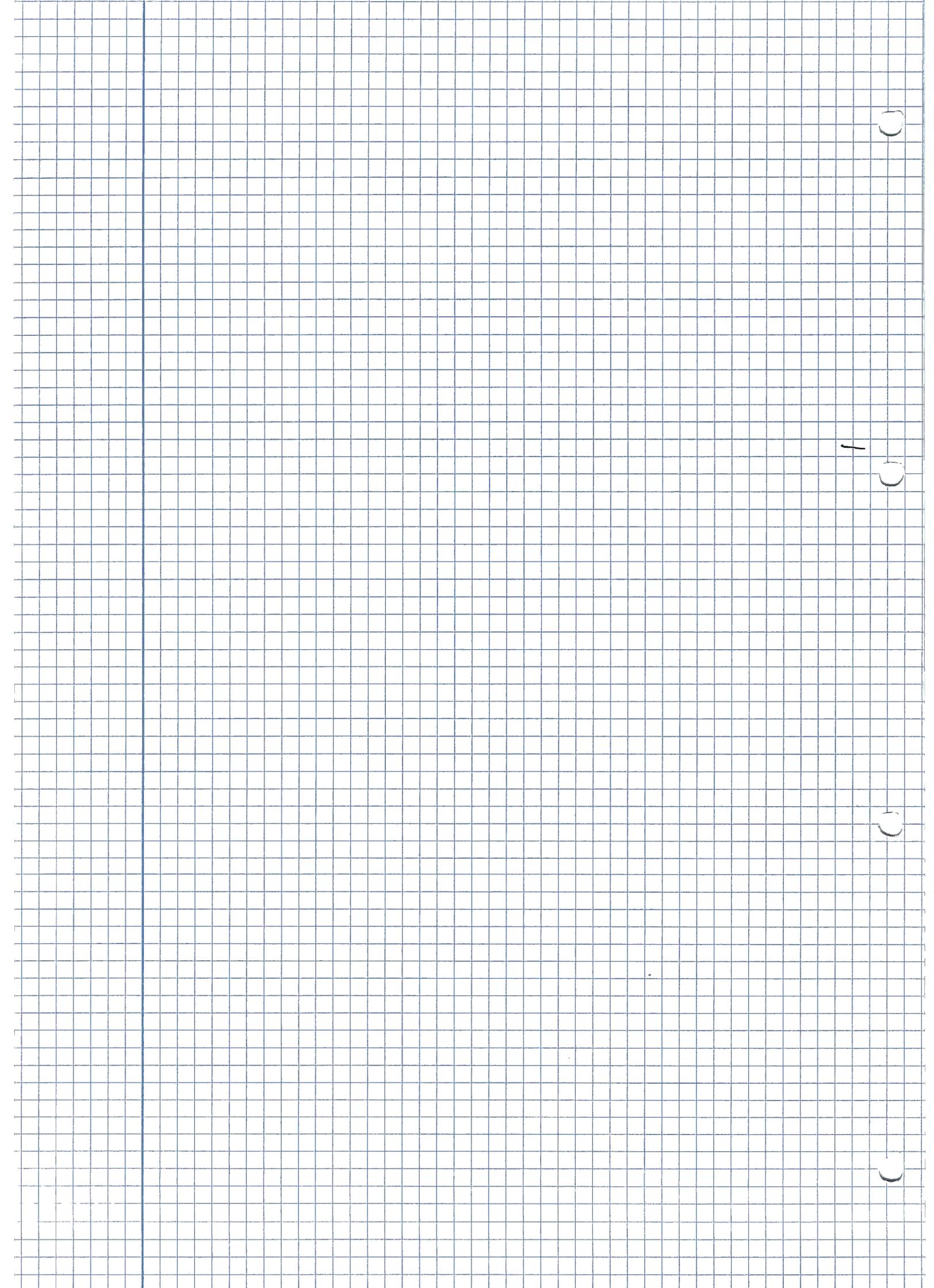
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{8}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$$

Programar Matlab:

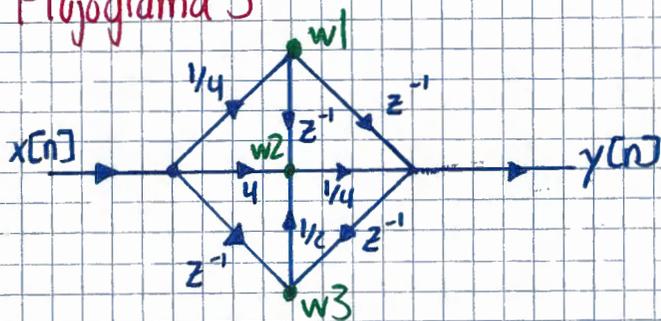
```

function [y, cf] = filtroz(x, ci)
    cf = ci;
    y = zeros(size(x));
    for k=1:length(x)
        % A = w1 + w3
        A = cf(1) + cf(3);
        C = x(k) + (1/8)*A + (1/4)*cf(2);
        y(k) = C;
        cf(2) = y(k);
        cf(3) = x(k);
        cf(1) = cf(2);
    end
end
    
```

*condiciones finales* (pointing to  $ci(1), ci(2), ci(3)$ )  
*condiciones iniciales* (pointing to  $cf(1), cf(2), cf(3)$ )



## Flujograma 3



$$Y(z) = w1 z^{-1} + \frac{1}{4} w2 \quad (1)$$

$$w1(z) = \frac{1}{4} X(z) \quad (2)$$

$$w2(z) = w1 z^{-1} + 4X(z) + \frac{1}{2} w3(z) \quad (3)$$

$$w3(z) = X(z) z^{-1} + Y(z) z^{-1} \quad (4)$$

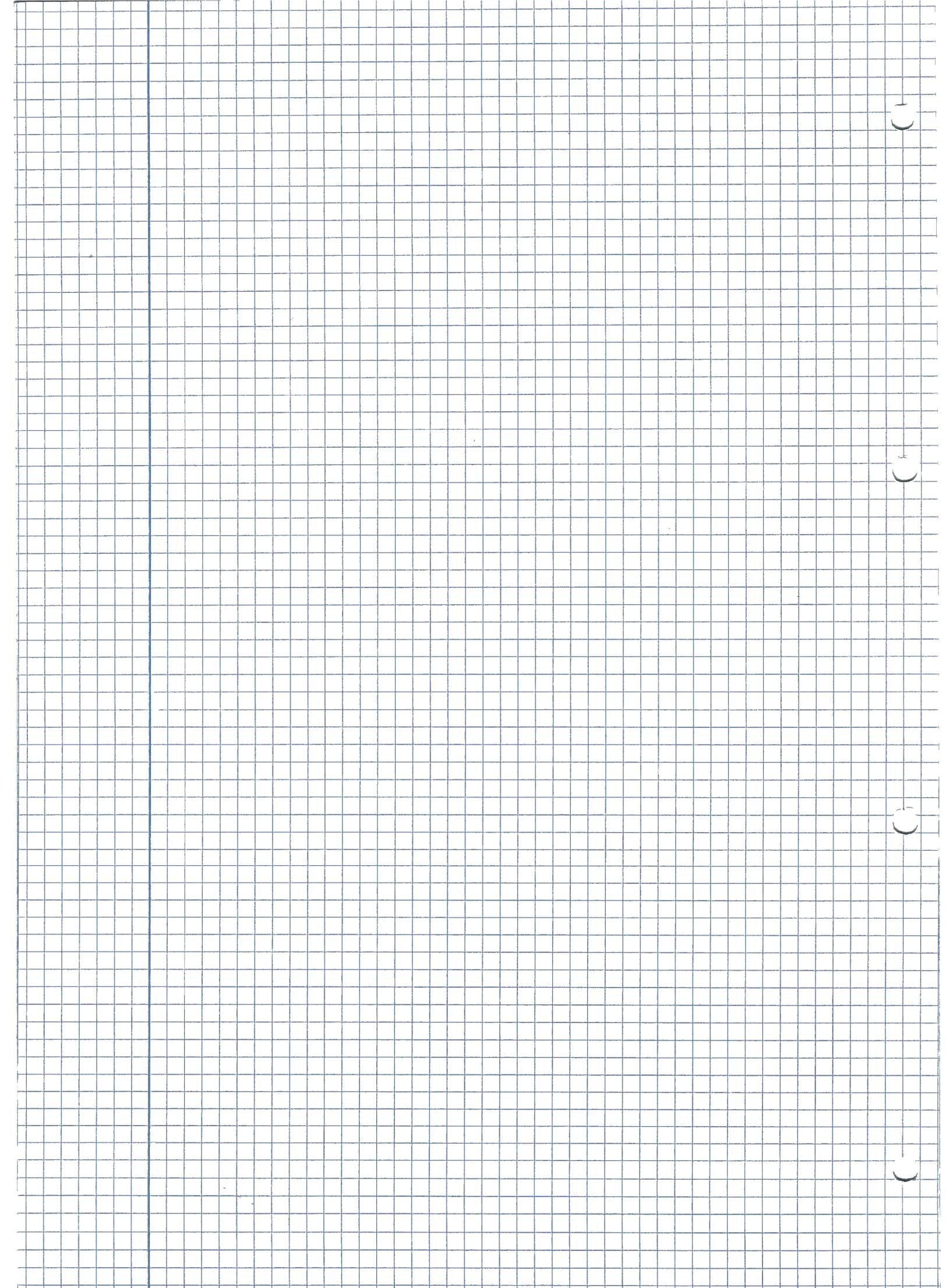
(4) y (2) en (3) y luego (3) en (1)

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{1}{4} X(z) z^{-1} + \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{4} X(z) z^{-1} + 4X(z) + \frac{1}{2} (X(z) z^{-1} + Y(z) z^{-1}) \right]$$

$$Y(z) = X(z) \left[ \frac{1}{4} z^{-1} + \frac{1}{16} z^{-1} + 1 + \frac{1}{8} z^{-1} \right] + \frac{1}{8} Y(z) z^{-1}$$

$$Y(z) \left[ 1 - \frac{1}{8} z^{-1} \right] = X(z) \left[ \frac{7}{16} z^{-1} + 1 \right]$$

$$\underline{\underline{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{7/16 z^{-1} + 1}{1 - 1/8 z^{-1}}}}$$



# TEORIA 1 25/01/2003

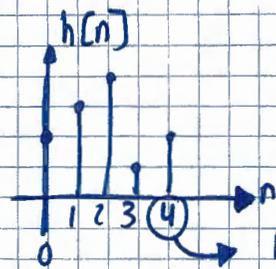
$h[n]$  es real

$h[n] = 0 \quad n < 0 \text{ y } n > 4$

$H(z) = \text{TZ}(h[n])$

cero en  $z_1 = \frac{1}{\sqrt{z}} e^{j\pi/4}$

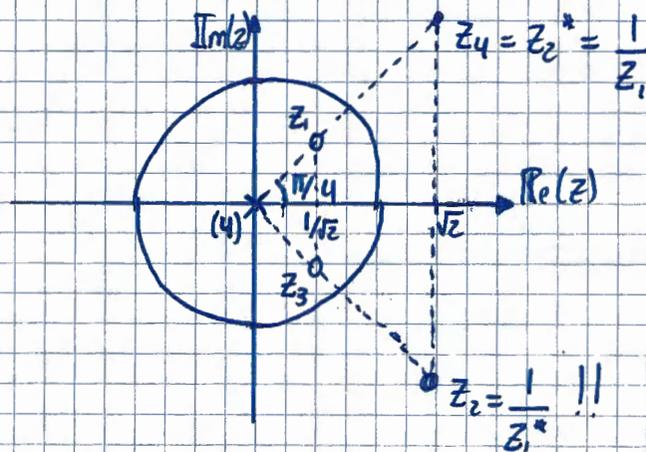
$z_2 = \sqrt{z} \cdot e^{-j\pi/4}$



$M = \text{orden} = 4 \text{ ceros} = 4 \text{ polos}$

a) Par ser  $h[n]$  real ceros:  $\begin{cases} z_3 = z_1^* = \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot e^{-j\pi/4} \\ z_4 = z_2^* = \sqrt{z} \cdot e^{j\pi/4} \end{cases}$  Polos en  $|z|=0$

DATO:  $H(z)|_{z=1} = 1$



F.I.R  
FASE LINEAL  
GENERALIZADA

$H(z) = (1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})(1 - z_3 z^{-1})(1 - z_4 z^{-1}) =$

$= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{z}} e^{j\pi/4} z^{-1}\right) \left(1 - \sqrt{z} e^{-j\pi/4} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-j\pi/4} z^{-1}\right) \left(1 - \sqrt{z} e^{j\pi/4} z^{-1}\right)$

$= \left\{ \begin{aligned} &1 - 2\text{Re}(z_1) \cdot z^{-1} + \sqrt{\text{Re}(z_1)^2 + \text{Im}(z_1)^2} \cdot z^{-2} \\ &= (1 - z_1 z^{-1})(1 - z_1^* z^{-1}) \end{aligned} \right\} = \text{Hagamoslo a lo bruto:}$

$= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{z}} e^{j\pi/4} z^{-1} - \sqrt{z} e^{-j\pi/4} z^{-1} + \frac{1}{\sqrt{z}} e^{j\pi/4} \cdot \sqrt{z} e^{-j\pi/4} z^{-2}\right) \cdot$

$\left(1 - \sqrt{z} e^{j\pi/4} z^{-1} - \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-j\pi/4} z^{-1} + \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-j\pi/4} z^{-1} \cdot \sqrt{z} e^{j\pi/4} z^{-1}\right) =$

$= \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{z}} e^{j\pi/4} + \sqrt{z} e^{-j\pi/4}\right) z^{-1} + z^{-2}\right) \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{z}} e^{-j\pi/4} + \sqrt{z} e^{j\pi/4}\right) z^{-1} + z^{-2}\right) =$

$= \text{Operando ...} = \text{Tenemos en cuenta que } \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2} = \cos \omega \quad \text{!!!!} = \dots$

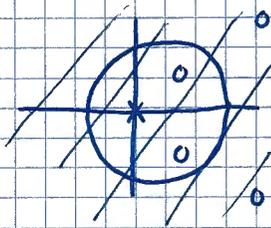
$$= 1 - 3z^{-1} + \frac{5}{2}z^{-2} - 3z^{-3} + z^{-4}$$

Haciendo cálculos me sale en vez de  $\frac{5}{2}$ ,  $\frac{9}{2}$  y  $k=2$

$$H(z=1) = 1 \Rightarrow K(1 - 3z^{-1} + \frac{5}{2}z^{-2} - 3z^{-3} + z^{-4}) = 1$$

$$K = \frac{1}{1 - 3 + \frac{5}{2} - 3 + 1} = -\frac{2}{3}$$

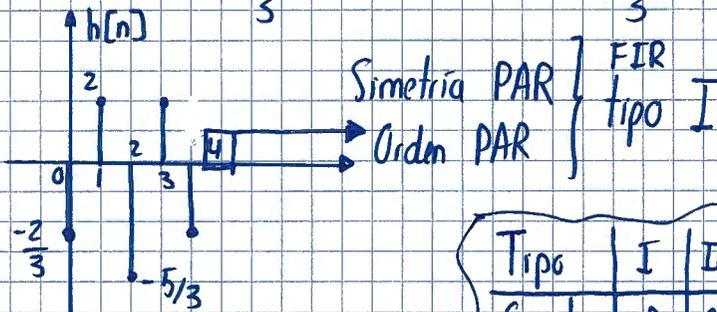
Por tanto: 
$$H(z) = \frac{-2}{3} + 2z^{-1} - \frac{5}{3}z^{-2} + 2z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4}$$



ROC  $|z| > 1 \rightarrow$  Causal  
 $\rightarrow$  Estable

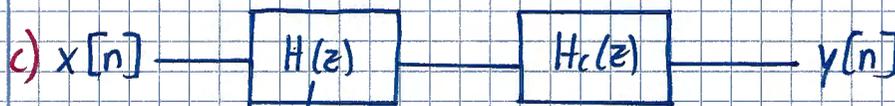
F. Lineal Generalizada

b) 
$$h[n] = \frac{-2}{3}\delta[n] + 2\delta[n-1] - \frac{5}{3}\delta[n-2] + 2\delta[n-3] - \frac{2}{3}\delta[n-4]$$



Fase Lineal Generalizada

Tipo	I	II	III	IV
Simetría	P	P	I	I
Orden	P	I	P	I



apartado

iii)

causal y estable

$dH_c(z)?$

$$|Y(\omega)| = |X(\omega)|$$

$$H(z) = \frac{-2}{3} + 2z^{-1} - \frac{5}{3}z^{-2} + 2z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4}$$

$$H(z) \cdot H_c(z) = 1 \Rightarrow H_c(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{-\frac{2}{3} + 2z^{-1} - \frac{5}{3}z^{-2} + 2z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4}}$$

NO cumple que sea causal y estable

NO vale

## Tratamiento Digital de Señales


Apellidos: \_\_\_\_\_ Nombre: \_\_\_\_\_

D.N.I.: \_\_\_\_\_ Curso: \_\_\_\_\_ Firma: \_\_\_\_\_

### Teoría 1 (2 puntos)

$h(n)$  es la respuesta impulsiva de un sistema LTI. De ella se sabe que:

- i)  $h(n)$  es real.
- ii)  $h(n) = 0$ , para  $n < 0$  y  $n > 4$ .
- iii)  $H(z)$ , la transformada  $z$  de  $h(n)$ , tiene un cero en  $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4}$  y  $z_2 = \sqrt{2} e^{-j\pi/4}$ .

Basándose en esa información:

- a) Obtenga  $H(z)$ , dibuje el diagrama cero-polo y señale su región de convergencia ¿Es estable el sistema? ¿Es causal? (suponga que  $H(z)|_{z=1} = 1$ ).
- b) Calcule y dibuje la respuesta impulsiva  $h(n)$ . A la vista de la secuencia  $h(n)$  ¿qué se podría decir de la fase de  $H(\omega)$ ?
- c) Considere el siguiente diagrama de bloques: (\*)
- d) Se define  $H_{eq}(z) = H(z)H_c(z)$ . Dibuje aproximadamente el módulo y la fase de  $H_{eq}(\omega)$ .



$H(z)$  definido en iii

$H_c(z)$  causal y estable

d)  $H_c(z)$ , de orden mínimo para  $|Y(\omega)| = |X(\omega)|$ ?

**Problema 1** (3 puntos)

La respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante es:

$$h(n) = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

- Dibuje el flujograma de una realización del sistema en forma directa no recursiva.
- Demuestre que la función de transferencia correspondiente puede expresarse como:

$$H(z) = \frac{1 - a^4 z^{-4}}{1 - az^{-1}}; \quad |z| > |a|$$

- Obtenga la ecuación en diferencias y el diagrama de polos y ceros a partir de la función de transferencia del apartado b).
- Dibuje el flujograma de una realización del sistema en la forma directa II traspuesta.

do que tenemos que hacer entonces es:

$$H_c(z) = \frac{1}{H_{\min}(z)} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} H(z) \cdot H_c(z) = H_{\text{ap}}(z) \\ H(z) = H_{\min}(z) \cdot H_{\text{ap}}(z) \end{array}$$

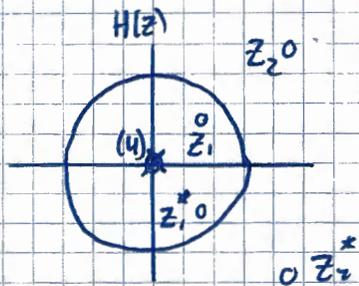
**IMPORTANTE:** Las dos ROC  $H(z)$  y  $1/H_c(z)$  tienen que tener zona común:  
 $\text{ROC } H(z) \cap \text{ROC } 1/H_c(z)$

$$X(z) \cdot H(z) \cdot \frac{1}{H_{\min}(z)} \stackrel{?}{=} X(z) \cdot H_{\text{ap}}(z)$$

$\Rightarrow$  En vez de quedarme con  $X(z)$  no quedo con  $X(z) \times \text{etc}$ ,

$$H(z) = H_{\min}(z) \cdot H_{\text{ap}}(z)$$

• Calculamos  $H_{\min}(z)$  para hacer  $H_c(z) = 1/H_{\min}(z)$



$z_2$  y  $z_2^* \Rightarrow$  calculamos sus paraconjugados

$$1/z_2 = 1/\sqrt{2} \cdot e^{j\pi/4}$$

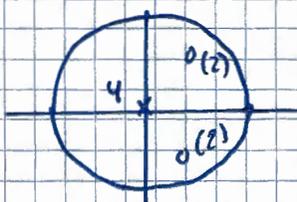
$$1/z_2^* = 1/\sqrt{2} \cdot e^{-j\pi/4}$$

$$H(z) = \frac{-2}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/4} z^{-1}\right) \left(1 - \sqrt{2} e^{j\pi/4} z^{-1}\right) \left(1 - \sqrt{2} e^{-j\pi/4} z^{-1}\right) \cdot$$

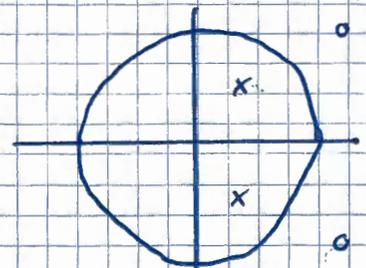
$$\frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/4} z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/4} z^{-1}\right)} \quad H_{\min}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{-2}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4} z^{-1}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/4} z^{-1}\right)^2 \frac{\left(1 - \sqrt{2} e^{j\pi/4} z^{-1}\right) \left(1 - \sqrt{2} e^{-j\pi/4} z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/4} z^{-1}\right)}$$

dentro de  $|z|=1$   
 $H_{\min}(z)$



ceros y polos paraconjugados



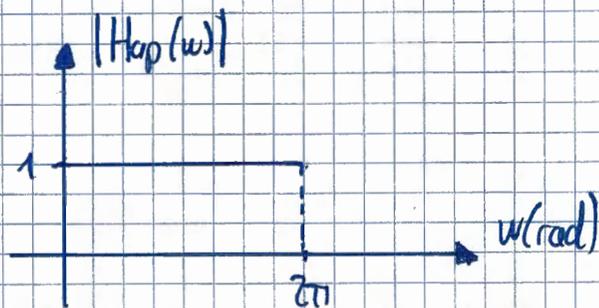
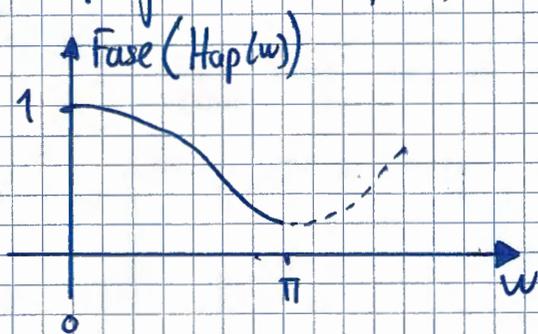
$$H(z) = H_{\min}(z) \cdot H_{\text{ap}}(z)$$

$$H(z) \cdot H_c(z) = H_{\min}(z) \cdot H_{\text{ap}}(z) \cdot \frac{1}{H_{\min}(z)} = H_{\text{ap}}(z)$$

$$H_c(z) = \frac{1}{H_{\min}(z)} = \frac{-3}{2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4} z^{-1}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/4} z^{-1}\right)^2}$$

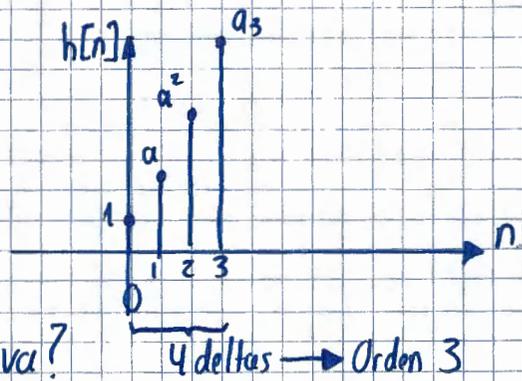
$$d) H_{\text{eq}}(z) = H(z) \cdot H_c(z) = H_{\min}(z) \cdot H_{\text{ap}}(z) \cdot \frac{1}{H_{\min}(z)} = H_{\text{ap}}(z)$$

Módulo y fase de  $H_{\text{eq}}(w)$



# Problema 1 06/09/2002

$$h[n] = \begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



a) ¿Flujograma en forma directa no recursiva?

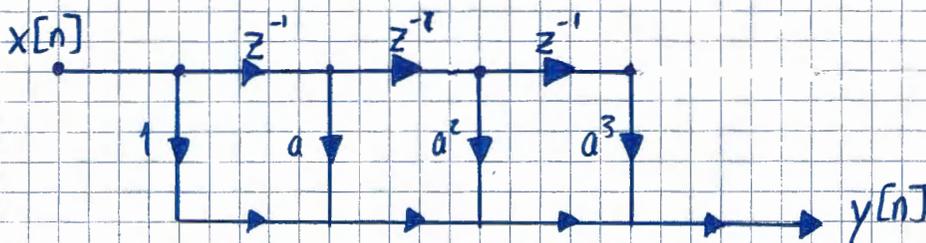
$h[n]$  es FIR es finita, por tanto, ya sabemos que NO es recursiva. No tiene denominador  $H(z)$ !

$$h[n] = \delta[n] + a\delta[n-1] + a^2\delta[n-2] + a^3\delta[n-3]$$

$$H(z) = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} \xrightarrow{\substack{\text{multiplicamos} \\ \text{y dividimos} \\ \text{por } z^3/z^3 \text{ para} \\ \text{conseguir en los polos}}} H(z) = \frac{z^3}{z^3} (1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3}) = \frac{z^3 + az^2 + a^2z + a^3}{z^3}$$

Para sacar los ceros: ①  $z^3 + az^2 + a^2z + a^3 = 0$   
 $\hookrightarrow c_1, c_2, c_3$

② Ceros<sub>k</sub> =  $a^k z^{-k}$   $k=0, 1, 2, 3$ .



b)  $H(z) = \frac{1 - a^4 z^{-4}}{1 - az^{-1}} \quad |z| > a$

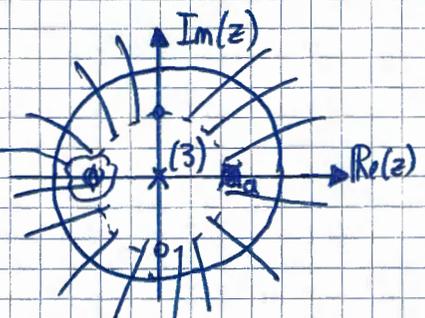
$$h[n] = a^n \quad ; \quad n = 0, 1, 2, 3. \quad \rightarrow \quad H(z) = \sum_{k=0}^3 a^k \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^3 (az^{-1})^k =$$

$$= \left[ \frac{1 - \text{último x razón}}{1 - \text{razón}} \right] \xrightarrow{\substack{\text{Serie geométrica} \\ \text{finita}}} = \frac{1 - (az^{-1})^3 (az^{-1})}{1 - (az^{-1})} = \frac{1 - a^4 z^{-4}}{1 - az^{-1}} \quad \text{c.g.d}$$

c) Ec. en diferencias. Diagrama Polos-Ceros

$$H(z) = \frac{1 - a^4 z^{-4}}{1 - az^{-1}}$$

$$|z| > a$$



Polos:  $1 - az^{-1} = 0 \rightsquigarrow z - a = 0 \rightsquigarrow z = a$

Ceros:  $1 - a^4 z^{-4} = 0 \rightsquigarrow z = a \cdot a^{j\pi/2 k} \quad k=0,1,2,3 \rightarrow$

$$\begin{cases} C_1 = a \cdot e^0 = a \\ C_2 = a \cdot e^{j\pi/2} \\ C_3 = a \cdot e^{j\pi} = a \cdot e^{j\pi} \\ C_4 = a \cdot e^{j3\pi/2} = a \cdot e^{j3\pi/2} \end{cases}$$

OTRA FORMA ☺

$$H(z) = \frac{z^4}{z^4} \cdot \frac{1 - a^4 z^{-4}}{1 - az^{-1}} = \frac{z^4 - a^4}{z^4 - az^3} = \frac{z^4 - a^4}{z^3(z-a)}$$

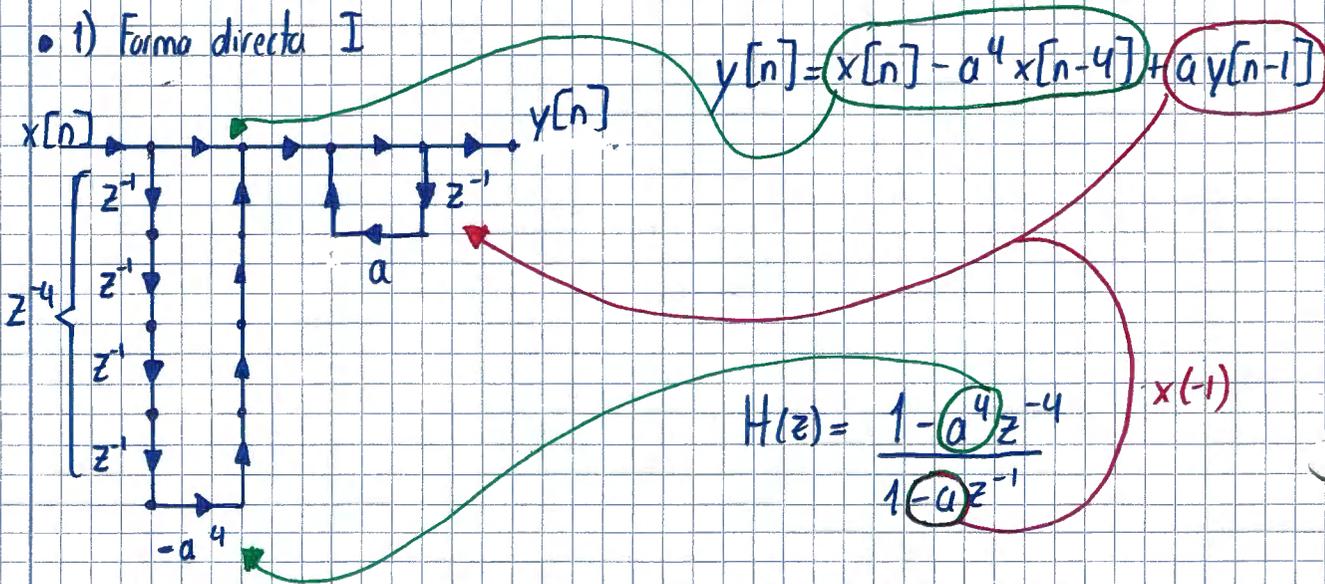
Polos:  $z=a$   
Polo en  $z=0$  triple

$$H(z) = \frac{1 - a^4 z^{-4}}{1 - az^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \rightarrow (1 - a^4 z^{-4}) X(z) = (1 - az^{-1}) Y(z)$$

$$\begin{aligned} X(z) - a^4 z^{-4} X(z) &= Y(z) - az^{-1} Y(z) \\ \text{IZ} \rightarrow x[n] - a^4 x[n-4] &= y[n] - ay[n-1] \end{aligned}$$

d) Forma directa II traspuesta

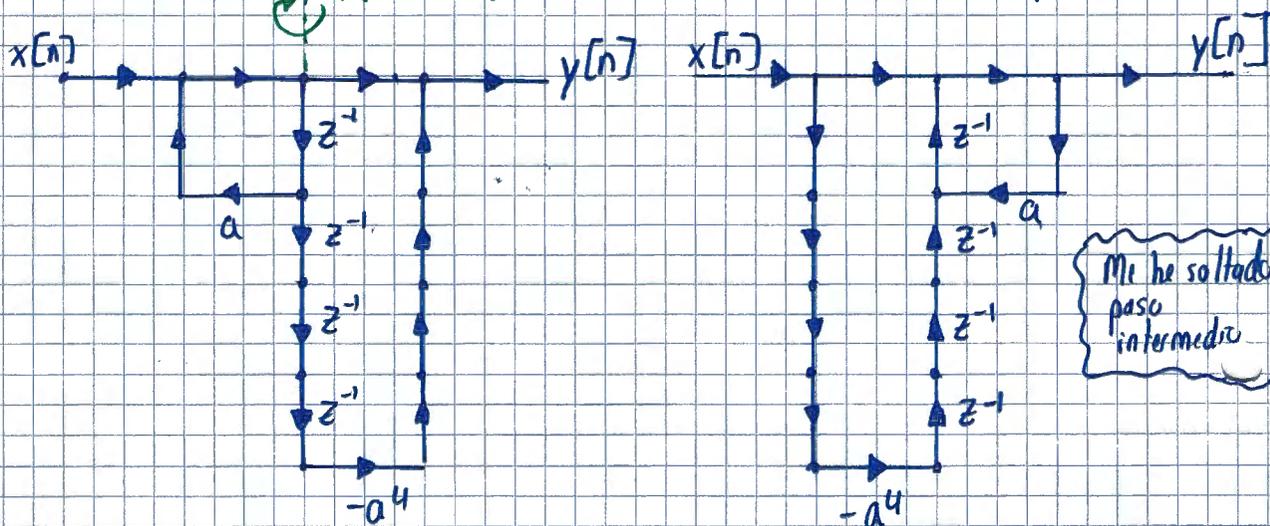
• 1) Forma directa I



Forma directa II

espejo [Ver hoja teoria]

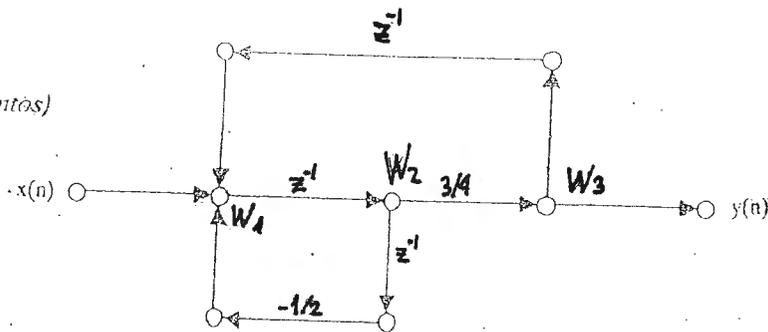
Forma directa II traspuesta



Febrero 2002

Teoría 2 (2 puntos)

Dado el siguiente grafo:



- a) Calcular  $H(z)$
- b) Dibujar el grafo de  $H(z)$  en forma directa II
- c) Escribir un programa en pseudocódigo que realice el grafo del apartado b)
- d) Dibujar el grafo transpuesto del apartado b)
- e) Escribir un programa en pseudocódigo que realice el grafo del apartado d)

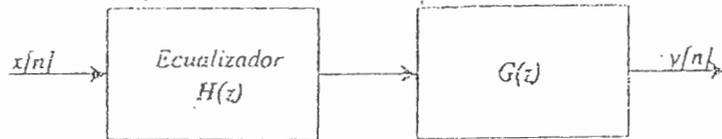
Tratamiento Digital de Señales

Apellidos: \_\_\_\_\_ Nombre: \_\_\_\_\_

D.N.I.: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_ Firma: \_\_\_\_\_

**Problema 1** (3 puntos)

El esquema de la figura representa un modelo discreto simplificado de un ecualizador acústico. El modelo acústico de la sala es el filtro  $G(z)$  y el ecualizador  $H(z)$ . El objetivo ideal del ecualizador es conseguir que  $G(z)H(z)=I$ , que se podrá conseguir dependiendo de las características de  $G(z)$ .



a) Considere  $G(z) = 1 + z^{-1} + 0.5z^{-2}$ .

i) Calcule la función de transferencia  $H(z)$  del ecualizador.

ii) Dibuje su diagrama de polos y ceros y región de convergencia, suponiendo una solución para el ecualizador estable y causal.

b) Considere ahora  $G(z) = 1 + 2z^{-1} + 2z^{-2}$ .

i) ¿Es posible en este caso una solución similar a la del apartado a)? Razone su respuesta.

ii) Calcule  $H(z)$ , causal y estable, tal que  $|H(e^{j\omega}) \cdot G(e^{j\omega})| = 1$

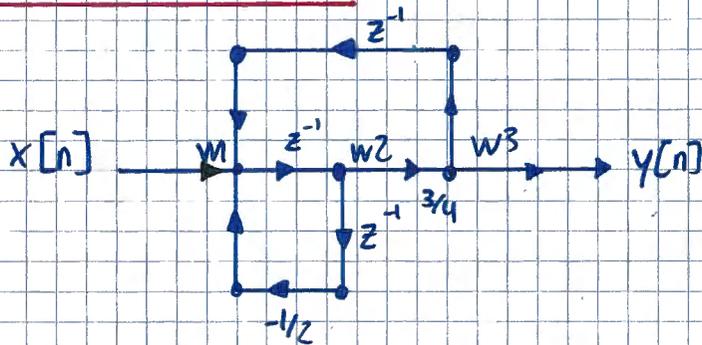
iii) Calcule  $H(z) \cdot G(z)$ . Dibuje  $|H(e^{j\omega}) \cdot G(e^{j\omega})|$

c) Suponga  $H(z) = \frac{k}{1 + z^{-1} + 0.5 \cdot z^{-2}}$  donde  $k$  es una constante.

i) Dibuje el grafo del sistema.

ii) Escriba un programa en pseudocódigo que realice el grafo.

Febrero 2002 Teoría 2



a)  $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

$$w1 = x[n] + w3[n-1] - \frac{1}{2} w2[n-1]$$

$$w2 = w1[n-1]$$

$$w3[n] = \frac{3}{4} w2[n]$$

$$y[n] = w3[n] = \frac{3}{4} w2[n] = \frac{3}{4} [w1[n-1]] = \frac{3}{4} [x[n-1] + \underbrace{w3[n-2]}_{y[n-2]} - \frac{1}{2} w2[n-2]]$$

$$= \frac{3}{4} [x[n-1] + y[n-2] - \frac{1}{2} w2[n-2]] = \left\{ w3 = y - \frac{3}{4} w2 \rightarrow w2 = \frac{4}{3} y \right\}$$

$$= \frac{3}{4} x[n-1] + \frac{3}{4} y[n-2] - \frac{1}{2} \frac{4}{3} y[n-2]$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} x[n-1] + \left( \frac{3}{4} - \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 3} \right) y[n-2]$$

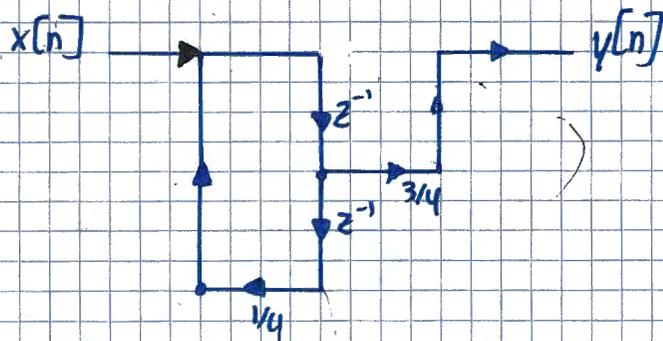
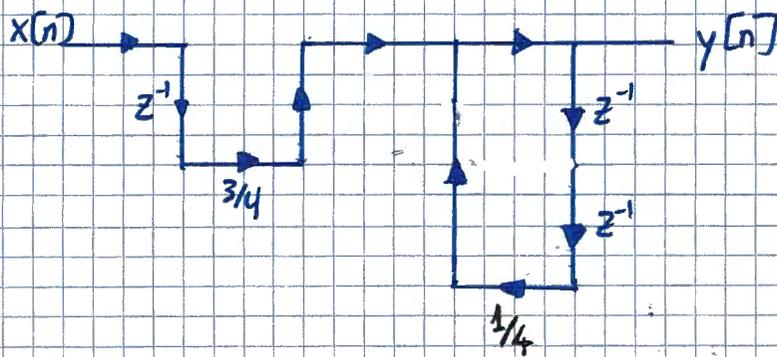
$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{3}{4} x[n-1] + \frac{1}{4} y[n-2]}}$$

$$y[n] - \frac{1}{4} y[n-2] = \frac{3}{4} x[n-1] \rightarrow Y(z) \left( 1 - \frac{1}{4} z^{-2} \right) = \frac{3}{4} X(z) z^{-1}$$

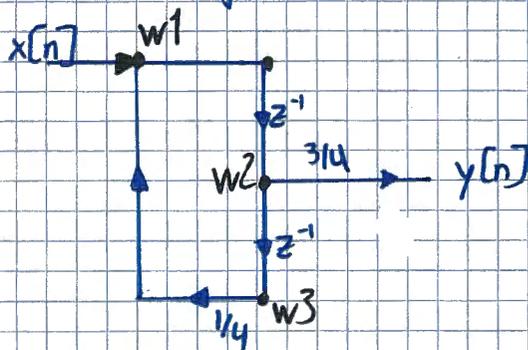
$$\Rightarrow \underline{\underline{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3/4 z^{-1}}{1 - 1/4 z^{-2}}}}$$

b) Grafo en Forma Directa II

$$H(z) = \frac{3/4 z^{-1}}{1 - 1/4 z^{-2}} \rightarrow y[n] = \frac{3}{4} x[n-1] + \frac{1}{4} y[n-2]$$



Finalmente la forma directa II



c) Programa

Inicializamos  $w2 = 0$

$w3 = 0$

for  $n \dots xlength$

$$w1 = x[n] + \frac{1}{4} w3$$

$$y[n] = \frac{3}{4} w2$$

} NO son punto de un  $z^{-1}$

Actualización

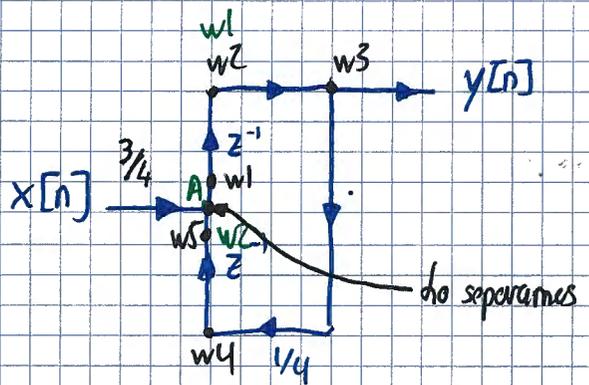
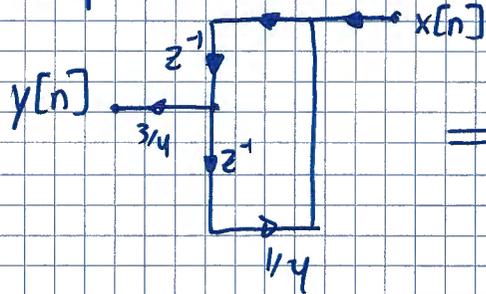
$$w3 = w2$$

$$w2 = w1$$



end

d) Traspuesta  $\Rightarrow$  Forma Directa 4



e) Inicializaciones

$$\left. \begin{array}{l} w_5 = 0 \\ w_2 = 0 \end{array} \right\} \text{dos puntas de los } z^{-1}$$

for bucle.....

$$w_1 = 3/4 x[n] + w_5$$

$$w_4 = 1/4 w_3$$

$$w_3 = w_2$$

$$y[n] = w_3$$

} Nodos

Actualizaciones

$$w_2 = w_1$$

$$w_5 = w_4$$

} Registros

end

Otra forma mejor

$$w_1 = 0$$

$$w_2 = 0$$

for 0... to x length x

$$y = w_1$$

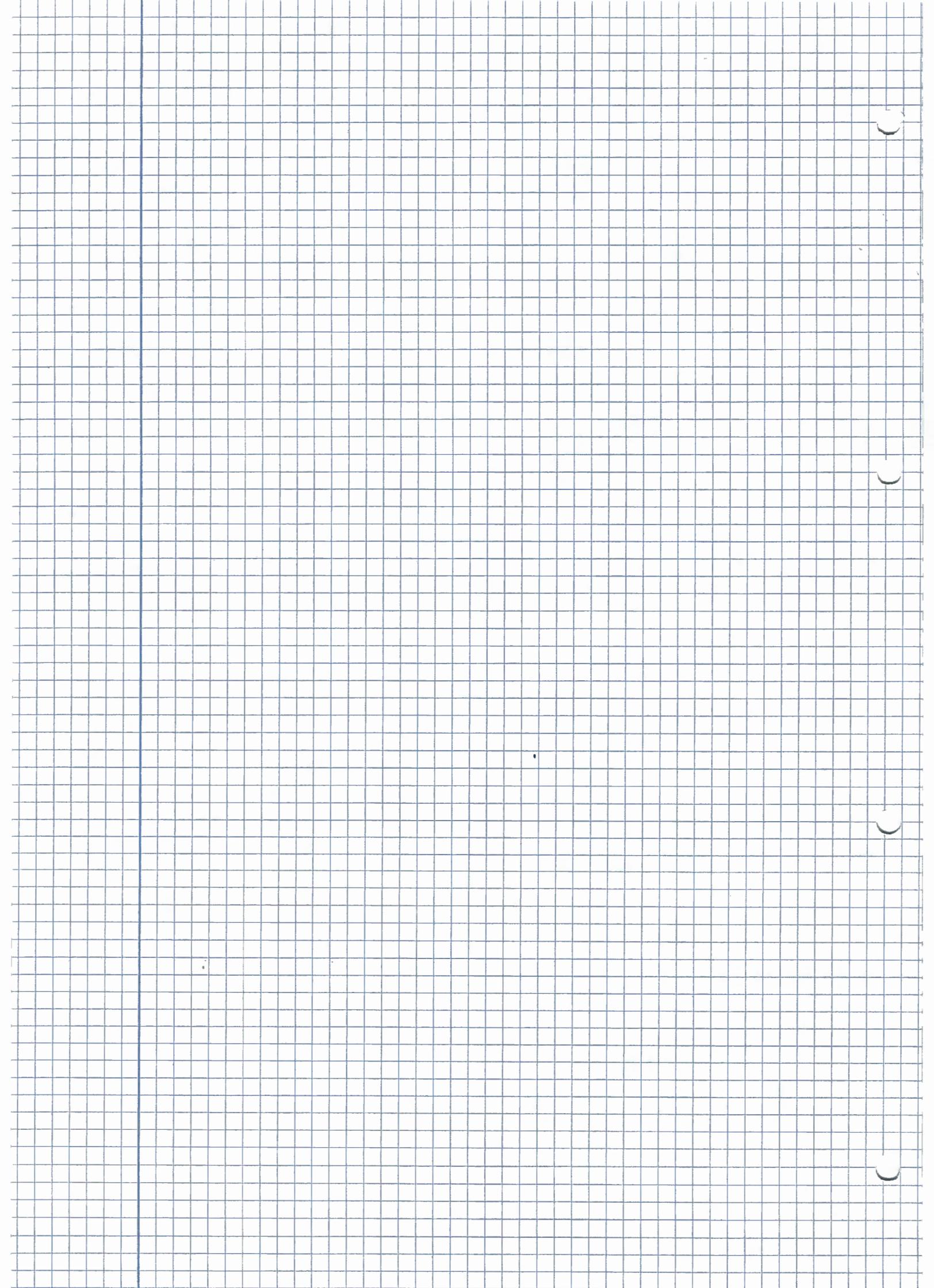
$$A = w_2 + 3/4 x$$

% Actualizaciones

$$w_2 = 1/4 y$$

$$w_1 = A$$

end;



Febrero 2004 Problema 1 [PEDIR A RAQUEL]

$G(z) \cdot H(z) = 1$



a)  $G(z) = 1 + z^{-1} + 0.5z^{-2}$

i) Si  $H(z) \cdot G(z) = 1$  por tanto  $H(z) = \frac{1}{1 + z^{-1} + 0.5z^{-2}}$

ii) Diagrama de polos y ceros suponiendo causal y estable

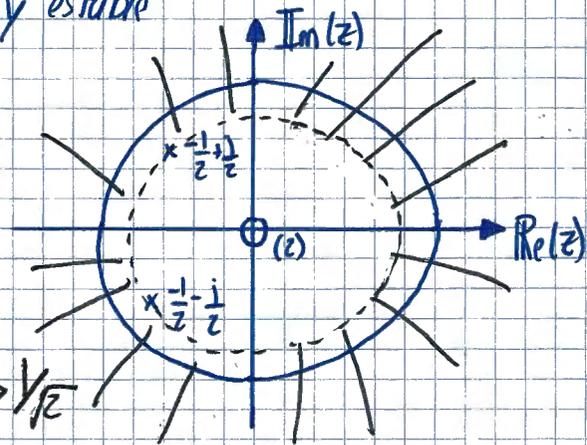
$1 + z^{-1} + 0.5z^{-2} = 0$

$z^2 + z + 0.5 = 0$

$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 0.5}}{2}$

$z = -\frac{1}{2} + \frac{j}{2}$   
 $z = -\frac{1}{2} - \frac{j}{2}$

ROC causal y estable  $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$



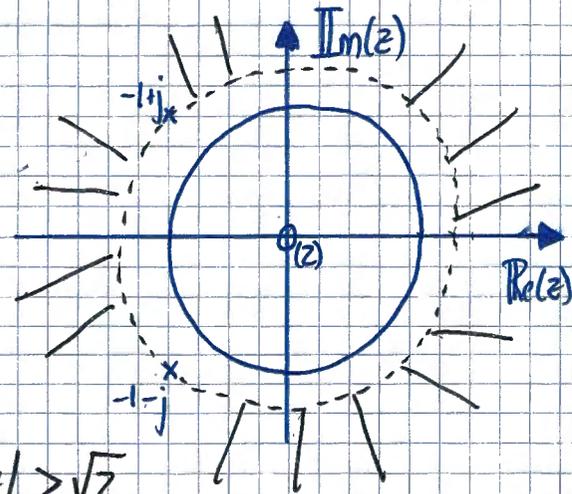
b)  $G(z) = 1 + 2z^{-1} + 2z^{-2}$

i)  $H(z) = \frac{1}{G(z)} = \frac{1}{1 + 2z^{-1} + 2z^{-2}}$

$z^2 + 2z + 2 = 0$

$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} \rightarrow z = \frac{-2 \pm j2}{2} \rightarrow z = -1 \pm j$

No causal y estable simultaneamente  $|z| > \sqrt{2}$



ii) Calcule  $H(z)$  causal y estable tal que  $|H(e^{j\omega}) \cdot G(e^{j\omega})| = 1$

Tenemos que meter los polos dentro de  $|z|=1 \Rightarrow$  ESTABLE, haciendo los inversos

$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{-1+j} = -0.5 + 0.5j$

$\frac{1}{p_2} = \frac{1}{-1-j} = -0.5 - 0.5j$

Ya están dentro de la circunferencia unidad.

$\Rightarrow H(z) = \frac{K}{(1 - (-0.5 + 0.5j)z^{-1}) \cdot (1 - (-0.5 - 0.5j)z^{-1})}$

nosotros en teoría lo llamamos  $H_{inv}(z)$

Operando:  $H(z) = \frac{K}{1 - (-0.5 - 0.5j)z^{-1} - (-0.5 + 0.5j)z^{-1} + (0.5 + 0.5j)z^{-1}(-0.5 - 0.5j)z^{-1}}$

$$= \frac{K}{\underbrace{1 - (-0.5) \cdot 2z^{-1}}_{-2\text{Re}(p_1) \cdot z^{-1}} + \underbrace{(0.5)^2 - (0.5)^2 \cdot (-1)^2 \cdot z^{-2}}_{\text{Re}(p_1)^2 + \text{Im}(p_1)^2}} = \frac{K}{1 + z^{-1} + 0.5 \cdot z^{-2}}$$

Ya tiene los polos dentro de  $|z|=1$   
 $-\frac{1}{2} \pm \frac{j}{2}$

$$H(z) \Big|_{z=1}^{(i)} = \frac{1}{1+2 \cdot 1 + 2 \cdot 1} = \frac{1}{5}$$

$$H(z) \Big|_{z=1}^{(ii)} = \frac{K}{1+1+0.5 \cdot 1} = \frac{K}{2.5}$$

$\Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{K}{2.5} \Rightarrow K = \frac{2.5}{5} = \frac{1}{2}$

$$H(z) = \frac{1/2}{1 + z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

RCC causal y estable  $|z| > 1/\sqrt{2}$

iii) Calcule  $H(z)$ ,  $G(z)$ , Dibuje  $|H(e^{j\omega})|$ ,  $G(e^{j\omega})$

$$H(z) \cdot G(z) \cdot H_{op}(z) = 1$$

$$H(z) \cdot G(z) = \frac{1}{H_{op}(z)}$$

$$G(z) \cdot G_{inv}(z) = 1$$

$\rightarrow G_{min}(z) \cdot G_{op}(z) = \frac{1}{G_{min}(z)}$

Llamaron en el enunciado a  $G_{inv}(z) \rightarrow H(z)$

$$H(z) = \frac{1/2}{1 + z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

causal, estable y fase mínima

Queríamos  $H(z) = \frac{1}{G(z)} = G_{inv}(z)$  NO pudimos porque no era estable  $\Rightarrow$  metimos los polos dentro de  $|z|=1$  para que fuera estable y era de fase mínima (ceros en  $|z|=0$ )

$$G_{inv}(z) = \frac{1}{G(z)} = \frac{1}{H(z)}$$

(ii)  $G_{min}(z) \cdot H(z)$

TEORIA

$$H(z) \cdot H_{inv}(z) = 1$$

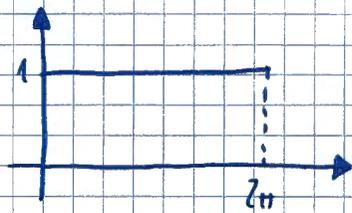
$\rightarrow H_{inv}(z) = \frac{1}{H_{min}(z)}$

$\rightarrow H(z) = H_{min}(z) \cdot H_{op}(z)$

Tenemos entonces que:  $H(z) \cdot G(z) = \frac{1}{H_{op}(z)} \rightarrow H_{op}(z) = \frac{1}{H(z) \cdot G(z)}$

$$\Rightarrow H_{op}(z) = \frac{1}{\underbrace{\frac{0.5}{1+z^{-1}+0.5z^{-2}}}_{H(z)} \cdot \underbrace{(1+2z^{-1}+2z^{-2})}_{G(z)}} = \frac{1+z^{-1}+0.5z^{-2}}{0.5+z^{-1}+z^{-2}}$$

$$\Rightarrow |H(e^{j\omega}) \cdot G(e^{j\omega})| = \frac{1}{|H_{op}(e^{j\omega})|}$$



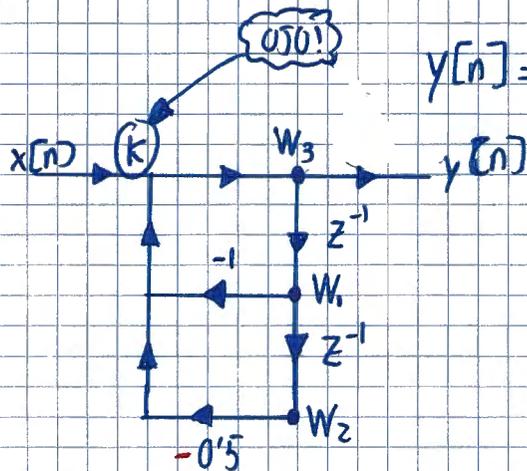
$$d) H(z) = \frac{k}{1+z^{-1}+0.5z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$i) \text{ Dibuja el grafo } k \cdot X(z) = Y(z) (1+z^{-1}+0.5z^{-2})$$

$$kX(z) = Y(z) + Y(z)z^{-1} + 0.5Y(z)z^{-2}$$

$$kx[n] = y[n] + y[n-1] + 0.5y[n-2]$$

$$y[n] = kx[n] - y[n-1] - 0.5y[n-2]$$



ii) Pseudocódigo que realice el grafo

$w1=0$   
 $w2=0$  } Inicializo la "punta" del registro  $z^{-1}$

$n=0$

for  $n=0 : \text{length}(x)$  → recorremos todas las muestras de la secuencia  $x[n]$

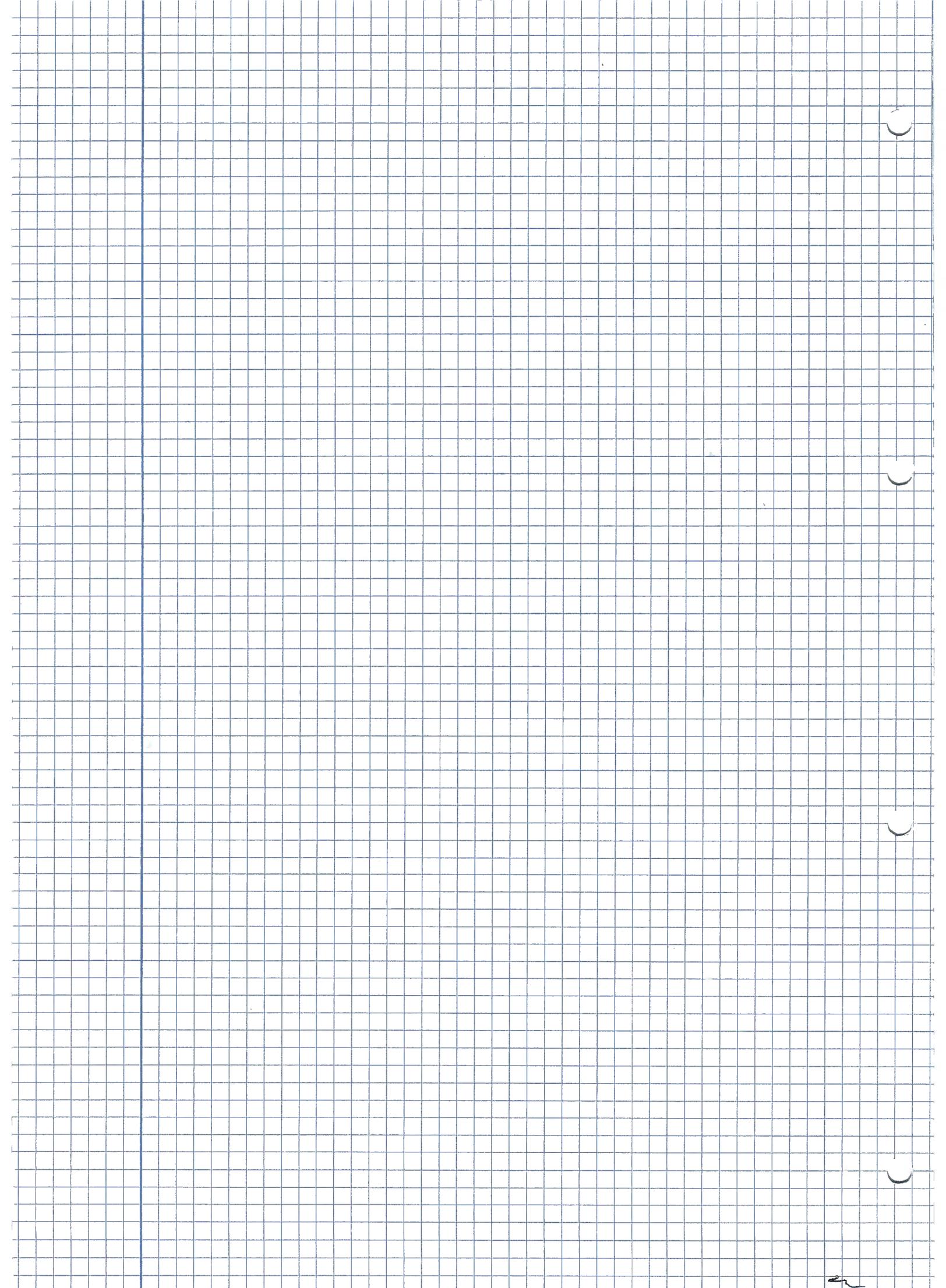
$w3 = x[n] - w1 - 0.5w2$  } Pongo las ecuaciones de los nodos que no son "punta" de los registros  $z^{-1}$

$y[n] = kw3$

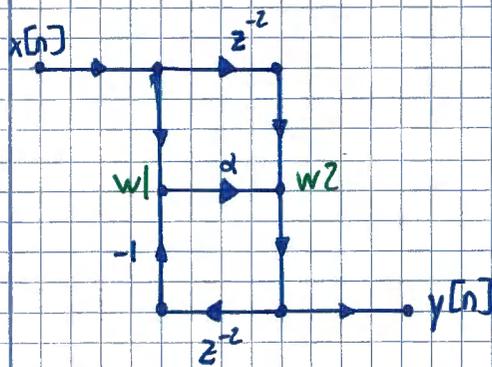
$w2 = w1$

$w1 = w3$  } Actualizamos los registros, cada uno con el que le apunta antes del  $z^{-1}$

end



Junio 2011 Problema 1



a) Función de transferencia  $H(z)$

$$\begin{cases} y[n] = w_2[n] & \textcircled{1} \\ w_2[n] = x[n-2] + a w_1 & \textcircled{2} \\ w_1[n] = x[n] - y[n-2] & \textcircled{3} \end{cases}$$

De  $\textcircled{1}$ :  $y[n] = x[n-2] + a w_1 = x[n-2] + a x[n] - a y[n-2]$

↓ TZ

$$Y(z) = X(z)z^{-2} + a X(z) - a Y(z)z^{-2}$$

$$Y(z)[1 + a z^{-2}] = X(z)[a + z^{-2}]$$

$$\underline{\underline{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a + z^{-2}}{1 + a z^{-2}}}}$$

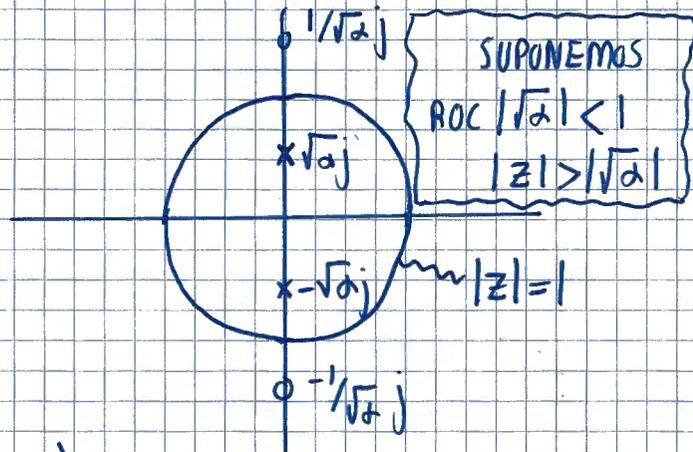
b) Diagrama Polo-ero

- ¿ Fase Lineal o no?
- ¿ Paso Todo o no?
- ¿ Fase mínima o máxima?

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a + z^{-2}}{1 + a z^{-2}}$$

• polos:  $1 + a z^{-2} = 0$   
 $z^2 + a = 0$   
 $\underline{\underline{z = \pm \sqrt{-a} = \pm j\sqrt{a}}}$

• ceros:  $a + z^{-2} = 0$   
 $z^2 a + 1 = 0$   
 $z^2 = -1/a$   
 $\underline{\underline{z = \pm j\sqrt{1/a}}}$



Fase máxima si es estable

No fase lineal ( $C_i, C_i^*, 1/C_i, 1/C_i^*$  F.L.G)

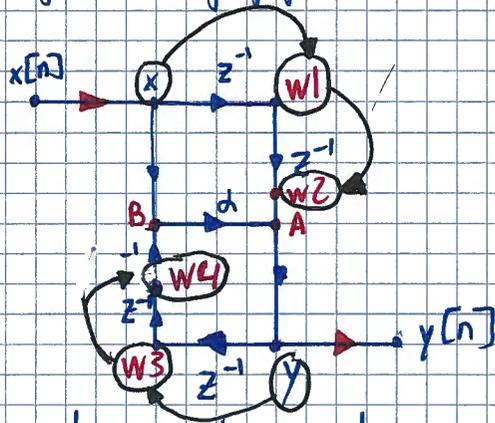
Es Paso Todo ( $C_i, C_i^*, p_i = 1/C_i, p_i^* = 1/C_i^*$ )

c) Valores de  $\alpha$  para que sea estable?

$$|\sqrt{\alpha}| < 1 \rightarrow |\alpha| < 1 \quad \alpha \in (-1, 1)$$

$$|\sqrt{\alpha}|^2 < 1$$

d) Programar el flujoograma:



Inicializamos los registros:

$$w1 \leftarrow 0$$

$$w2 \leftarrow 0$$

$$w3 \leftarrow 0$$

$$w4 \leftarrow 0$$

for  $i=1 \dots \text{length}(\text{trama})$

$$y[n] = A$$

$$A = w2 + \alpha B$$

$$B = x - w4$$

$$\Rightarrow y[n] = w2 + \alpha(x - w4)$$

$$B = x[n] - w4$$

$$A = w2 + \alpha B$$

$$y[n] = A$$

Actualizamos con los registros

$$w2 \leftarrow w1$$

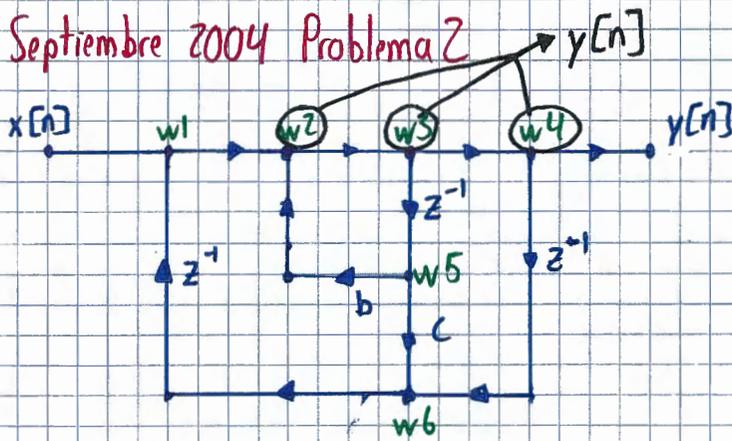
$$w1 \leftarrow x$$

$$w4 \leftarrow w3$$

$$w3 \leftarrow y$$

end

Septiembre 2004 Problema 2



- a) Función de transferencia:
- $$\begin{cases} \textcircled{1} y[n] = w4[n] = w3[n] = w2[n] = w1[n] + bw5[n] \\ \textcircled{2} w1[n] = x[n] + w6[n-1] \\ \textcircled{3} w5[n] = w3[n-1] = y[n-1] \\ \textcircled{4} w6[n] = (w5[n] + w4[n-1]) = (w5[n] + y[n-1]) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \textcircled{3} \text{ en } \textcircled{4} \Rightarrow w6[n] = c y[n-1] + y[n-1] = y[n-1] (c+1)$$

$$\Rightarrow \text{en } \textcircled{2} \Rightarrow w1[n] = x[n] + y[n-2] (c+1)$$

$$\text{Sustituyendo todo en } \textcircled{1} \Rightarrow y[n] = x[n] + y[n-2] (c+1) + b y[n-1]$$

$$\Downarrow$$

$$Y(z) = X(z) + Y(z) z^{-2} [c+1] + b Y(z) z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - b z^{-1} - (c+1) z^{-2}}$$

b) ¿c? ¿b? Para que sea el siguiente flujograma:

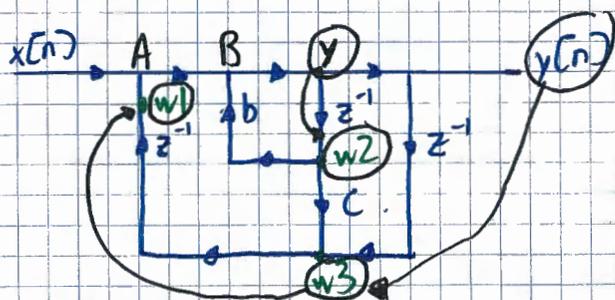


Calculamos la función de transferencia:

$$Y(z) = X(z) + Y(z) z^{-1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \\ H(z) = \frac{1}{1 - b z^{-1} - (c+1) z^{-2}} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{b=1 \text{ y } c=-1}$$

c) Programe el flujograma



Inicializamos  $w1, w2, w3 = 0$  (Suponemos que parten del repaso inicial)

for  $i=1 \dots \text{length}(\text{datos})$

$$y[n] = B$$

$$B = bw2 + A$$

$$A = x + w1$$

Actualizamos los registros

$$w2 \leftarrow y$$

$$w3 \leftarrow y$$

$$w1 \leftarrow cw2 + w3$$

end

$$y[n] = bw2 + x + w1$$

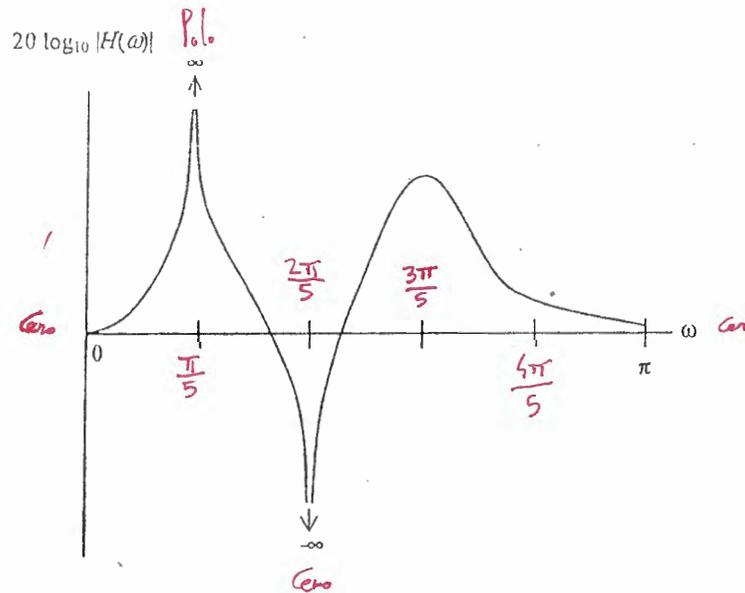
## Tratamiento Digital de Señales


Apellidos: \_\_\_\_\_ Nombre: \_\_\_\_\_

D.N.I.: \_\_\_\_\_ Curso: \_\_\_\_\_ Firma: \_\_\_\_\_

### Teoría 1 (2 puntos)

Considere un sistema causal y LTI con función del sistema  $H(z)$  y respuesta al impulso  $h(n)$  real. La respuesta en frecuencia  $H(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$  se muestra en la figura.



- Dibuje el diagrama cero-polo para  $H(z)$  tan completo como pueda.
- ¿Qué se puede decir acerca de la longitud de la respuesta al impulso?
- Diga si el sistema es de fase lineal.
- Diga si el sistema es estable.

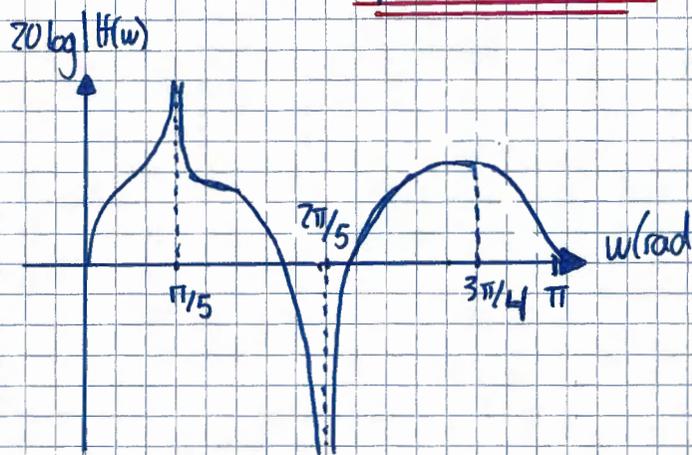
)

b

)

)

Septiembre 2003

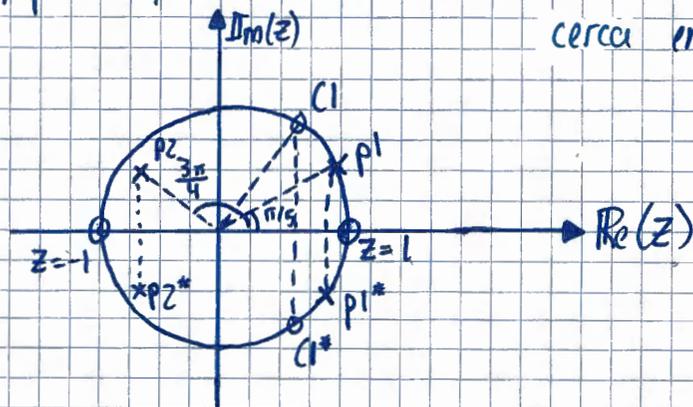


$H(z)$  LTI causal  
 $h[n]$  real  
 $H(w) = H(z) \Big|_{z=e^{jw}}$

a) Diagrama polo-cero tan completo como pueda.

Función real  $\rightarrow$  pares conjugados.

- $\begin{cases} w=0 \\ w=\pi \end{cases}$  da función se hace 0  $\Rightarrow$   $w=0$   $w=\pi$  (ceros)
- $w = \pi/5$  da función se va a  $+\infty \rightarrow$  polo en  $w=\pi/5$  sobre  $|z|=1$
- $w = 2\pi/5$  da función se va a  $-\infty \rightarrow$  cero en  $w=2\pi/5$  pero sobre  $|z|=1$ .
- $w = 3\pi/4$  Hay una resonancia  $\rightarrow$  Tenemos un polo (~~y un cero~~) muy cerca en el mismo radio.

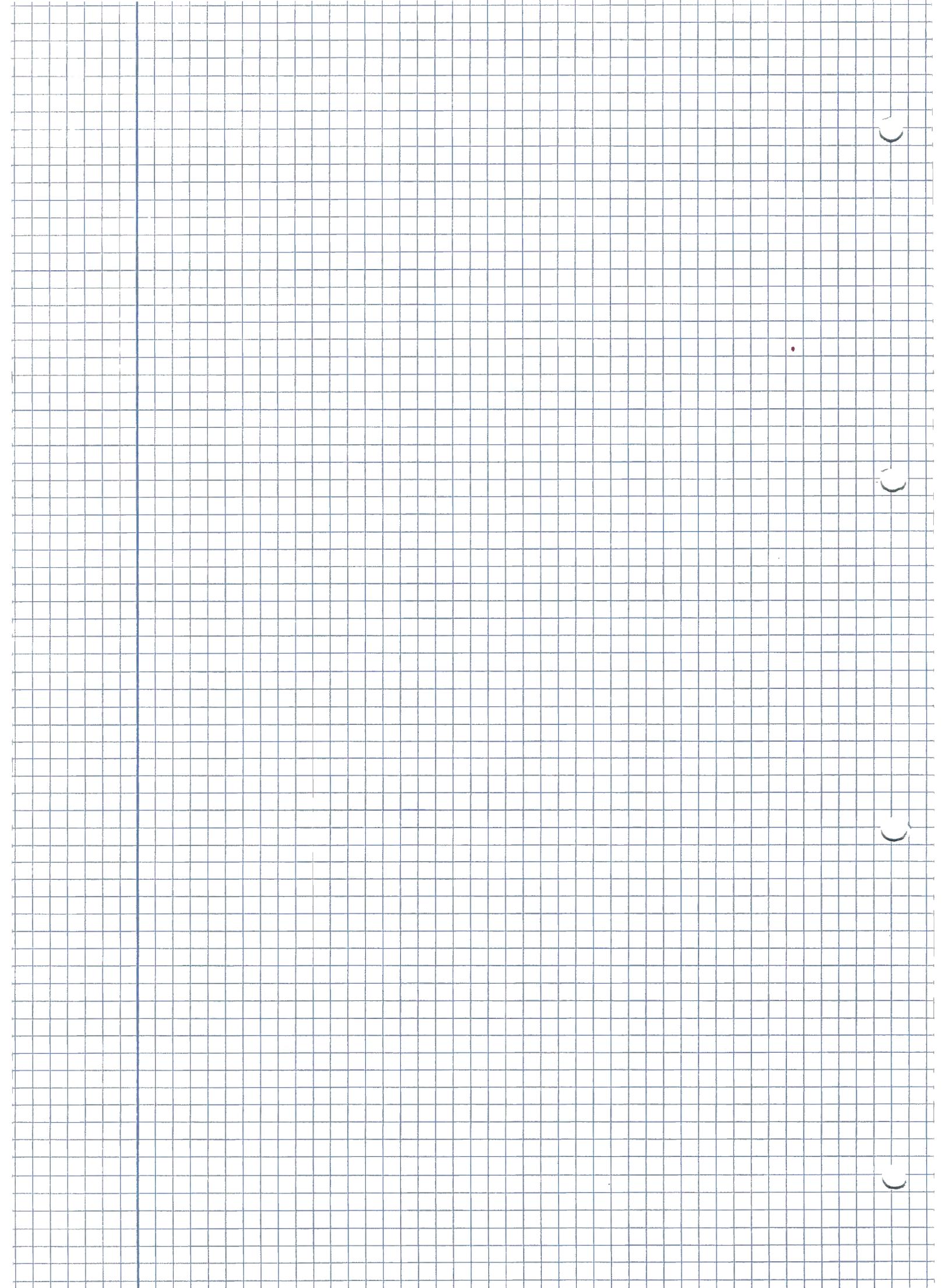


b) longitud de  $h[n]$ ?

IIR  $\rightarrow$  da  $h[n]$  es infinita

c) Fase lineal?

No tiene fase lineal, es un IIR...



---

**IMPORTANTE:**

La entrega del test consiste en:

- Un fichero con código Matlab que resuelva el problema que se plantea a continuación
- Llame test2.m al fichero y no olvide escribir en un comentario su nombre y apellidos

Para entregar el fichero Matlab:

- Envíe el fichero test2.m por correo electrónico a jose.parera@upm.es indicando como asunto su nombre y apellidos
- La fecha límite de entrega es el viernes día 12/12/2014

Notas:

- Puede “adornar” la solución como quiera (gráficas, comentarios, mensajes...)
  - Si tiene alguna duda póngase en contacto con el profesor en clase o por correo en la dirección indicada
- 

**Problema**

Se sabe que la señal  $x(n)$  ha sufrido un proceso de distorsión a causa del cual sólo se conoce la señal  $y(n)$ . Las señales  $x(n)$  e  $y(n)$  están relacionadas por la ecuación en diferencias:

$$y(n) = x(n-2) - 3x(n-3) + \frac{1}{2}y(n-1)$$

Se quiere obtener una señal  $r(n)$  que compense la distorsión de amplitud del espectro de  $x(n)$  mediante un sistema estable que responda a la siguiente ecuación en diferencias:

$$r(n) = ay(n) + by(n-1) + cy(n-2) + dy(n-3) + er(n-1) + fr(n-2)$$

Calcule los coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  y  $f$  de la ecuación en diferencias.

Nota: ambas ecuaciones en diferencias se calculan desde la condición de reposo inicial.

1

2

3

4

# Test 2 TDSN

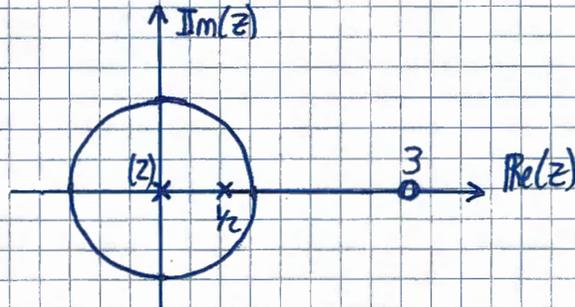
$$y[n] = x[n-2] - 3x[n-3] + \frac{1}{2}y[n-1] \Rightarrow Y(z)(1 - \frac{1}{2}z^{-1}) = X(z)(z^{-2} - 3z^{-3})$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-2} - 3z^{-3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

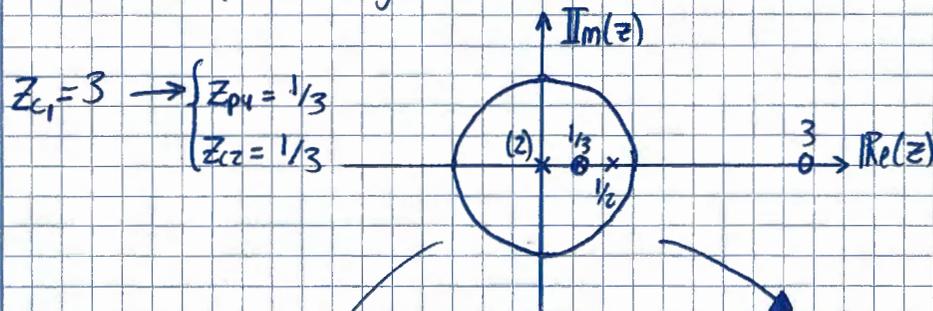
Para calcular los ceros y polos mejor ponemos  $H(z)$  en  $Z$  positivas para ello:

$$H_1(z) = \frac{z^{-2} - 3z^{-3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{z^3}{z^3} = \frac{z - 3}{z^3 - \frac{1}{2}z^2} = \frac{z - 3}{z^2(z - \frac{1}{2})}$$

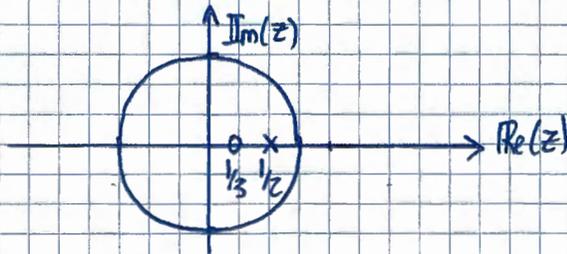
Cero en  $z_1 = 3$   
 Polos en  $z_{p1,2} = 0$  (doble)  
 $z_{p3} = \frac{1}{2}$



Para descomponer una función  $H(z)$  en una parte fase mínima  $H_{min}(z)$  y una parte paso-todo  $H_{ap}(z)$  es necesario reflejar los ceros externos al círculo unidad introduciendo para cada uno de ellos un cero y un polo con el mismo ángulo que el cero externo y con magnitud inversa. En nuestro caso

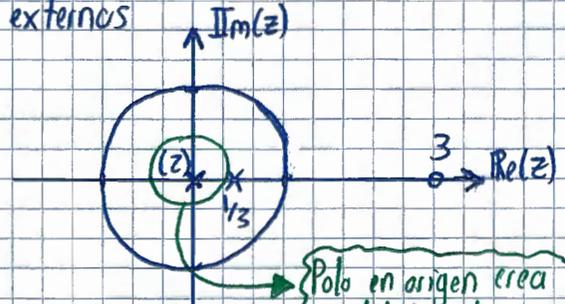


Fase Mínima: Ceros reflejados y los dentro del círculo unidad



$$H_{min}(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot A$$

Paso Todo: Polos reflejados y ceros externos



$$H_{ap}(z) = \frac{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})z^2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} \cdot B$$

Polo en origen crea inestabilidad

Las constantes  $A$  y  $B$  permiten ajustar la ganancia en frecuencia de la parte paso-todo a la unidad. Se cumple  $A = B^{-1}$

$$H(z) = \left[ A \cdot \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \right] \cdot \left[ B \frac{z^2(1 - 3z^{-1})}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} \right]$$

Para calcular A y B se fuerza que la transformada de Fourier de la parte pass todo tenga ganancia unidad y fase nula en  $\omega=0$  (correspondiente a  $z=1$ )

$$H_{op}(z) \Big|_{z=1} = 1 \Rightarrow B \cdot \frac{1^2(1-3)}{1-1/3} = 1 \rightarrow B = \frac{2/3}{-2} = -\frac{1}{3}$$

Sistema Compensador

$$\underline{B = -1/3} \quad \text{y} \quad \underline{A = -3}$$

$$H_c(z) = \frac{1}{H_{min}(z)} = \frac{(1-1/2z^{-1})}{-3(1-1/3z^{-1})} = \frac{(-\frac{1}{3} + 1/6z^{-1})}{(1-1/3z^{-1})}$$

Diapositiva 39

Diapositiva 44

$H_{op}(z) \equiv$  "Lo que no se puede compensar"  
 ↳ Distorsión residual

Para compensar la distorsión tenemos la siguiente ecuación en diferencias

$$r[n] = ay[n] + by[n-1] + cy[n-2] + d y[n-3] + er[n-1] + fr[n-2]$$

$$R(z)(1 - ez^{-1} - fz^{-2}) = Y(z)(a + bz^{-1} + cz^{-2} + dz^{-3})$$

$$H_z(z) = \frac{R(z)}{Y(z)} = \frac{a + bz^{-1} + cz^{-2} + dz^{-3}}{1 - ez^{-1} - fz^{-2}}$$

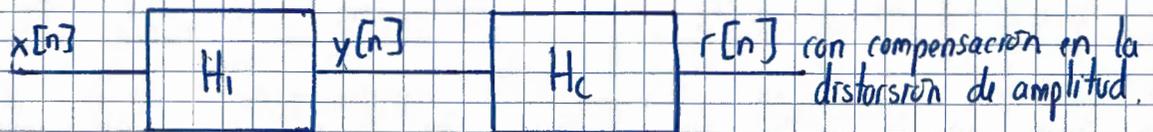
Igualando  $H_z(z)$  con  $H_c(z)$  obtenemos los coeficientes:

$$\underline{a = -1/3}$$

$$\underline{b = 1/6}$$

$$\underline{c = d = f = 0}$$

$$\underline{e = +1/3}$$



### Problema 5.8

Un sistema LTI causal está descrito por la ecuación en diferencias

$$y(n] = \frac{3}{2}y[n-1] + y[n-2] + x[n-1]$$

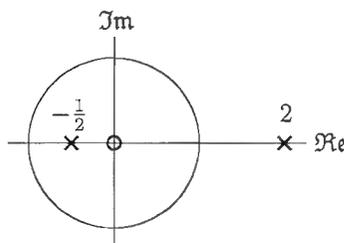
- (a) Determine la función del sistema  $H(z)$ . Dibuje los polos y ceros de  $H(z)$  e indique la región de convergencia.
- (b) Determine la respuesta al impulso del sistema.
- (c) Debe haber concluido que el sistema es inestable. Determine una respuesta al impulso estable (no causal) que satisfaga la ecuación en diferencias.

(a)  $H(z)$

- Tomando transformada  $z$  de la ecuación en diferencias:  $Y(z) = \frac{3}{2}z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) + z^{-1}X(z)$
- Despejando:  $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}} = \frac{z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})}$

▪ Diagrama de polos y ceros:

Polos en  $z_{p1} = -\frac{1}{2}$  y  $z_{p2} = 2$ . Ceros en  $z_{c1} = 0$  y  $z_{c2} = \infty$ .



$$\frac{A}{(1 - 2z^{-1})} + \frac{B}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})}$$

$$A = H(z) \cdot (1 - 2z^{-1})$$

- La ROC es:  $|z| > 2$  porque el sistema es causal.
- El sistema es inestable porque la ROC no contiene el círculo unidad.

(b)  $h(n)$

- Separando en fracciones simples:  $H(z) = \frac{2}{5} \frac{1}{(1 - 2z^{-1})} - \frac{2}{5} \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})}$
- Tomando transformada  $z$  inversa:  $h(n) = \frac{2}{5} \left[ (2)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] u(n)$

(c) **Sistema estable**

- De las tres posibles ROCs, la única que contiene el círculo unidad es:  $\frac{1}{2} < |z| < 2$ . Esta ROC da lugar a una respuesta impulsiva bilateral.
- Tomando transformada  $z$  inversa:  $h(n) = -\frac{2}{5} \left[ (2)^n u(-n-1) + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) \right]$

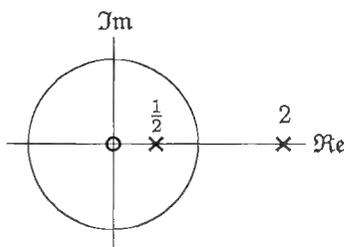
### Problema 5.9

Considere un sistema LTI con entrada  $x(n]$  y salida  $y(n]$  para el que

$$y(n - 1) - \frac{5}{2}y(n) + y(n + 1) = x(n)$$

El sistema podría ser o no causal o estable. Determine tres posibles opciones para la respuesta al impulso del sistema considerando el patrón de polos y ceros asociados con la ecuación en diferencias. Demuestre que cada opción satisface la ecuación en diferencias. Indique qué opción se corresponde con un sistema estable y qué opción se corresponde con un sistema causal.

- Tomando transformada  $z$  de la ecuación en diferencias:  $z^{-1}Y(z) - \frac{5}{2}Y(z) + zY(z) = X(z)$
- Despejando:  $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{(z - \frac{5}{2} + z^{-1})} = \frac{z^{-1}}{(1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2})} = \frac{2}{3} \frac{1}{(1 - 2z^{-1})} - \frac{2}{3} \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}$
- Diagrama de polos y ceros:   
 Polos en  $z_{p1} = \frac{1}{2}$  y  $z_{p2} = 2$ . Ceros en  $z_{c1} = 0$  y  $z_{c2} = \infty$ .



- Posibles regiones de convergencia y sus respuestas impulsivas asociadas:
  - $|z| > 2 \Rightarrow$  causal, no estable

$$h_1(n) = \frac{2}{3} \left[ (2)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] u(n)$$

- $\frac{1}{2} < |z| < 2 \Rightarrow$  no causal, estable

$$h_2(n) = \frac{2}{3} \left[ -(2)^n u(-n - 1) - \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) \right]$$

- $|z| < \frac{1}{2} \Rightarrow$  anticausal, no estable

$$h_3(n) = \frac{2}{3} \left[ -(2)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] u(-n - 1)$$

- Las tres respuestas impulsivas se han obtenido a partir de la misma función  $H(z)$  por lo que responden a la misma ecuación en diferencias.
- La respuesta de un sistema causal es  $h_1(n)$ ; la respuesta de un sistema estable es  $h_2(n)$ .

### Problema 5.36

Considere un sistema LTI cuya respuesta al impulso es

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

$$x(n) = 0; n < 0$$

La entrada  $x(n)$  es cero para  $n < 0$ , pero en general, puede no ser cero para  $0 \leq n \leq \infty$ . Se desea calcular la salida  $y(n)$  para  $0 \leq n \leq 10^9$ , y en particular, se desea comparar el uso de un filtro FIR o IIR para obtener  $y(n)$  en este intervalo.

- Determine la ecuación en diferencias para el sistema IIR que relaciona  $x(n)$  e  $y(n)$ .
- Determine la respuesta al impulso  $h_1(n)$  del filtro LTI FIR de longitud mínima cuya salida  $y_1(n)$  sea idéntica a la salida  $y(n)$  en el intervalo  $0 \leq n \leq 10^9$ .
- Especifique la ecuación en diferencias asociada con el filtro FIR del apartado (b).
- Compare el número de operaciones aritméticas (multiplicaciones y sumas) necesarias para calcular  $y(n)$  para  $0 \leq n \leq 10^9$  usando las ecuaciones en diferencias de los apartados (a) y (c).

#### (a) Ecuación en diferencias

- Transformada  $z$  de  $h(n)$ :  $H(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{2 - \frac{5}{6}z^{-1}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$

- Ecuación en diferencias:  $y(n) - \frac{5}{6}y(n-1) + \frac{1}{6}y(n-2) = 2x(n) - \frac{5}{6}x(n-1)$  IIR

#### (b) $h_1(n)$

- Para que la salida  $y_1(n)$  del filtro FIR sea igual en un determinado intervalo, su respuesta impulsiva debe ser igual a la del filtro IIR en el mismo intervalo:  $h_1(n) = h(n)$ ,  $0 \leq n \leq 10^9$ .

#### (c) Ecuación en diferencias de $h_1(n)$

- Los filtros FIR responden a la ecuación en diferencias  $y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(n-k)$ , donde  $N$  es la longitud del filtro (número de muestras de la respuesta al impulso distintas de 0) y los coeficientes  $b_k$  son las correspondientes muestras  $h(k)$ .
- En este caso:

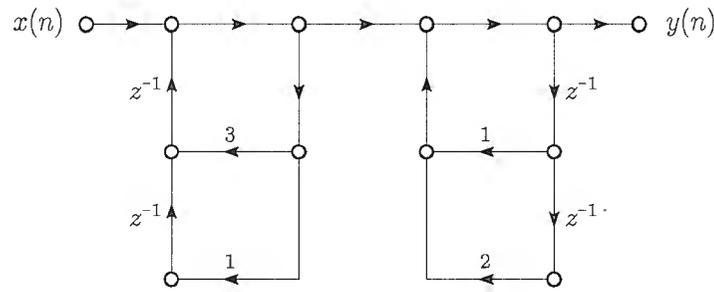
$$y(n) = \sum_{k=0}^{10^9} h_1(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{10^9} h(k)x(n-k) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + \dots + h(10^9-1)x(n-(10^9-1)) \quad \left. \vphantom{\sum_{k=0}^{10^9}} \right\} \text{FIR}$$

#### (d) Operaciones

- En el caso IIR cada muestra se calcula con 4 multiplicaciones y 3 sumas.
- En el caso FIR cada muestra se calcula con  $10^9$  multiplicaciones y  $10^9 - 1 \approx 10^9$  sumas.

### Problema 6.5

Un sistema LTI se implementa con el flujograma de la figura

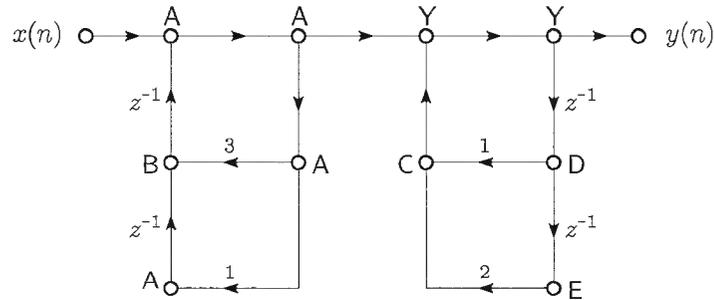


- (a) Escriba la ecuación en diferencias que relaciona  $x(n)$  e  $y(n)$  para este flujograma.
- (b) Determine la función del sistema  $H(z)$ .
- (c) En la realización de la figura ¿cuántas multiplicaciones y sumas reales son necesarias para calcular cada muestra de la salida? Suponga que  $x(n)$  es real y que la multiplicación por 1 no se contabiliza.
- (d) La realización de la figura requiere cuatro registros de memoria (elementos de retardo). ¿Es posible reducir el número de registros usando una estructura diferente? Si es así, dibuje el flujograma; si no, explique por qué.

Nota: en este problema se describen detalladamente los procedimientos para obtener las soluciones; úsese como referencia de los mismos para el resto de problemas.

#### (a) Ecuación en diferencias

1. Etiquetar nodos; por ejemplo, los indicados en rojo en el flujograma.



2. Escribir las ecuaciones de los nodos, teniendo en cuenta que  $z^{-1}$  equivale a un retardo unitario.

$$\begin{aligned}
 a(n) &= x(n) + b(n-1) \\
 b(n) &= a(n-1) + 3a(n) \\
 c(n) &= d(n) + 2e(n) \\
 d(n) &= y(n-1) \\
 e(n) &= d(n-1) \\
 y(n) &= a(n) + c(n)
 \end{aligned}$$

3. Eliminar las variables de nodos, excepto los nodos fuente  $x(n)$  y sumidero  $y(n)$ .

Nota: trabajando con las ecuaciones en el dominio  $n$  (tiempo), no siempre es fácil o posible eliminar todas las variables, debido a la recurrencia.

En este caso una solución es:

$$\begin{cases} y(n) = a(n) + y(n-1) + 2y(n-2) \\ a(n) = x(n) + 3a(n-1) + a(n-2) \end{cases}$$

Manipulando un poco más las ecuaciones se llega a:

$$y(n) - 4y(n-1) + 7y(n-3) + 2y(n-4) = x(n)$$

Nótese que el enunciado no dice explícitamente que el sistema sea causal pero sí presenta un flujograma como representación del sistema, lo que supone implícitamente que el sistema sí es causal. La solución completa sería:

$$\begin{cases} y(n) - 4y(n-1) + 7y(n-3) + 2y(n-4) = x(n) \\ \text{condiciones auxiliares: reposo inicial} \end{cases}$$

Esta solución se obtiene más fácilmente calculando la función del sistema  $H(z)$  como pide el siguiente apartado.

**(b)  $H(z)$**

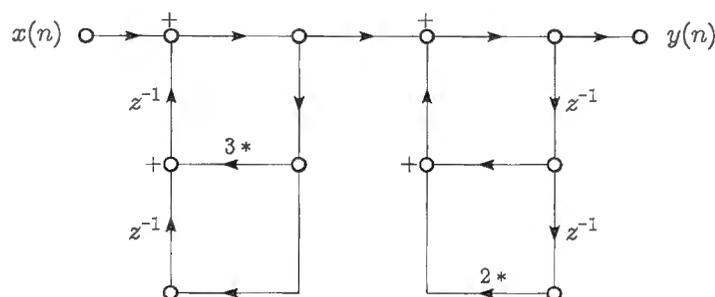
- El proceso es el mismo que el apartado anterior pero planteando las ecuaciones de los nodos en términos de transformada  $z$

$$\begin{aligned} A(z) &= X(z) + z^{-1}B(z) \\ B(z) &= z^{-1}A(z) + 3A(z) \\ C(z) &= D(z) + 2E(z) \\ D(z) &= z^{-1}Y(z) \\ E(z) &= z^{-1}D(z) \\ Y(z) &= A(z) + C(z) \end{aligned}$$

- En este caso resulta más fácil eliminar las variables de nodos porque los retardos son ahora multiplicaciones por  $z^{-1}$ .
- Manipulando las ecuaciones se obtiene:  $H(z) = \frac{1}{1 - 4z^{-1} + 7z^{-3} + 2z^{-4}}$
- El sistema resultante tiene un cero cuádruple en  $z_c = 0$  y polos en  $z_{p1} = 3,3028$ ,  $z_{p2} = 2$ ,  $z_{p3} = -1$  y  $z_{p4} = 0,3038$ .
- La ROC será  $|z| > 3,3028$  porque el sistema es causal.
- El sistema no es estable porque la ROC no contiene el círculo unidad.

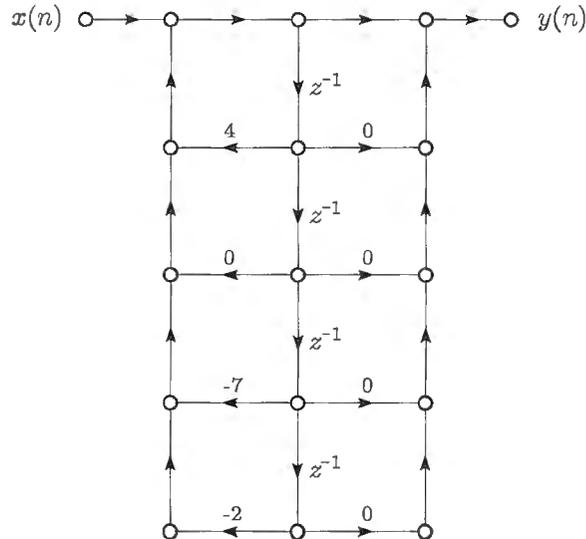
**(c) Operaciones**

- A partir de la ecuación en diferencias serían necesarias 3 multiplicaciones y 3 sumas por muestra.
- Calculando la salida con el flujograma se observa que son necesarias 2 multiplicaciones (las multiplicaciones por 1 no cuentan) y 4 sumas. En la figura siguiente se han marcado en azul las operaciones indicadas:



**(d) Registros**

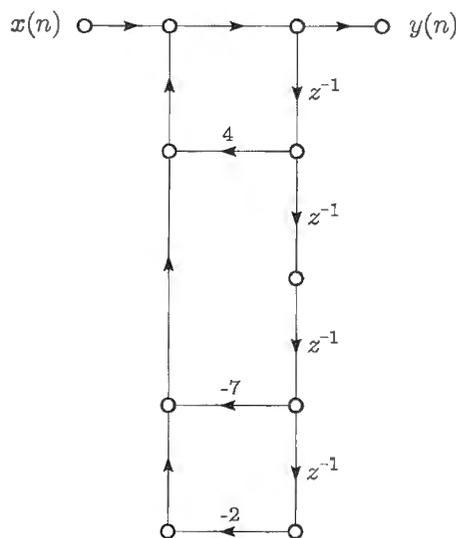
- Los registros necesarios son el número de arcos con  $z^{-1}$ ; el flujograma necesita, por tanto, 4 registros de memoria.
- La forma canónica respecto al número de registros de memoria es la forma directa II (o su transpuesta), que necesitan también 4 registros.
- Por tanto, no es posible reducir el número de registros.
- Nota: el enunciado no pide dibujar la forma directa II del sistema, pero ésta es:



- Para escribir las transmitancias, recuérdese que la función del sistema debe expresarse como

$$H(z) = \frac{\sum b_k z^{-k}}{1 - \sum a_k z^{-k}}$$

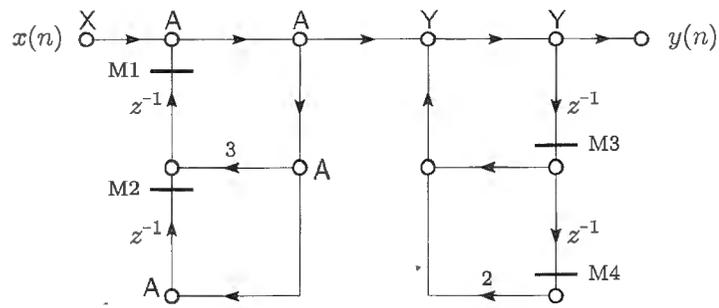
- En el problema,  $H(z) = \frac{1}{1 - (4z^{-1} - 7z^{-3} - 2z^{-4})}$ , de donde  $a_1 = 4$ ,  $a_3 = -7$  y  $a_4 = -2$ .
- Esta representación de la forma directa II no es la más adecuada porque aparecen arcos con transmitancia 0, que pueden desaparecer, ya que no aportan nada al cálculo. Una representación más adecuada es la siguiente:



- Los retardos centrales podrían haberse combinado en un único arco con transmitancia  $z^{-2}$ ; sin embargo, no es habitual.

**(e) Programa (el enunciado no lo pide)**

- En la siguiente figura se muestran las variables auxiliares y los registros de memoria:



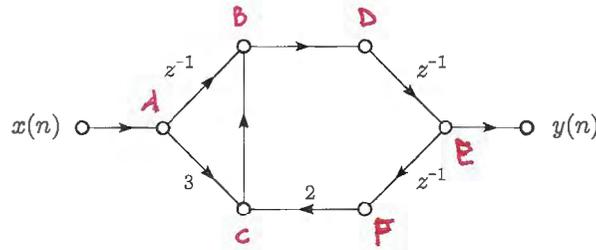
- El programa es:

```
// condiciones iniciales (reposo)
M1 = M2 = M3 = M4 = 0
// bucle
para cada muestra i
    // entrada
    X = x(i)
    // suma de productos
    A = X + M1
    Y = A + M3 + 2*M4
    // salida
    y(i) = Y
    // actualización de memoria interna
    M1 = 3*A + M2
    M2 = A
    M4 = M3
    M3 = Y
end
```

- Nótese que aunque el programa es correcto, no tiene sentido implementar un sistema no estable como el del enunciado; la salida no estará acotada y, por tanto, tenderá a  $\infty$ .

**Problema 6.8**

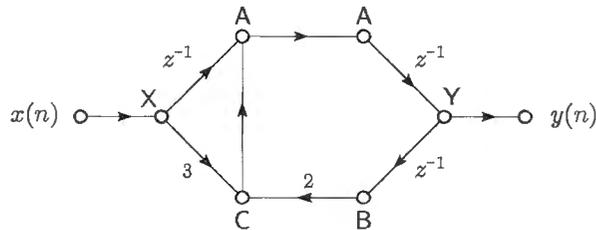
El flujograma de la figura representa un sistema LTI. Determine una ecuación en diferencias que relacione la entrada  $x(n]$  y la salida  $y(n]$  del sistema.



Nota: el enunciado de este problema sólo pide la ecuación en diferencias pero se añaden otros cálculos para ilustrar los procedimientos para solucionar problemas similares.

**(a)  $H(z)$**

- Las ecuaciones de los nodos etiquetados de la figura son:



$$\begin{aligned} A(z) &= z^{-1}X(z) + C(z) \\ B(z) &= z^{-1}Y(z) \\ C(z) &= 3X(z) + 2B(z) \\ Y(z) &= z^{-1}A(z) \end{aligned}$$

- Eliminando variables auxiliares:  $Y(z)(1 - 2z^{-2}) = X(z)(3z^{-1} + z^{-2})$ , de donde

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2z^{-2}}$$

**(b) Ecuación en diferencias**

- A partir de  $H(z)$ :  $y(n) = 2y(n - 2) + 3x(n - 1) + x(n - 2)$

**(c) Operaciones**

- A partir de la ecuación en diferencias serían necesarias 2 multiplicaciones y 2 sumas por muestra.
- Calculando la salida con el flujograma se observa que son necesarias 2 multiplicaciones y 2 sumas por muestra.

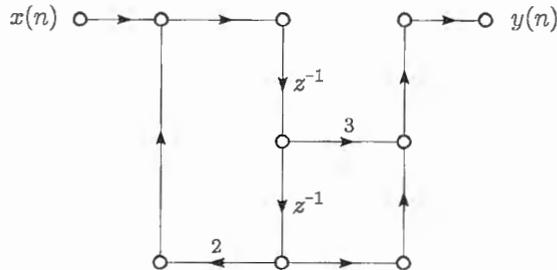
**(d) Registros**

- El flujograma usa 3 registros (número de arcos con transmitancia  $z^{-1}$ ).
- El sistema es de segundo orden así que la forma directa II sólo necesitaría 2 registros.

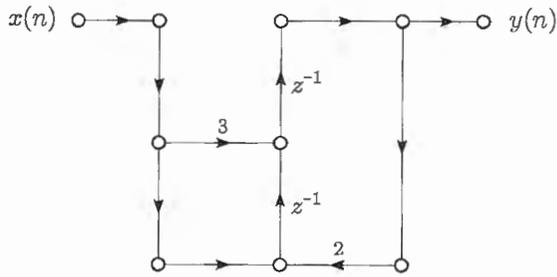
**(e) Forma directa II y forma directa transpuesta II**

- A partir de  $H(z) = \frac{3z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2z^{-2}} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}}$ , se obtienen  $b_0 = 0, b_1 = 3, b_2 = 1, a_1 = 0$  y  $a_2 = 2$ .

- La forma directa II (una vez eliminados los arcos con transmitancia nula) es:

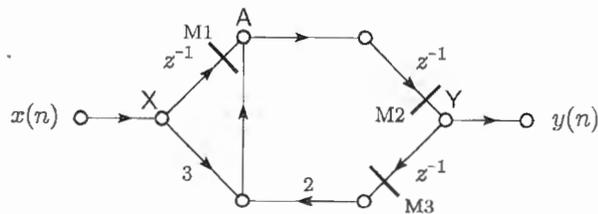


- Para calcular la forma transpuesta se invierten las direcciones de las flechas y se cambian la entrada por la salida y viceversa. El resultado es:



**(f) Programa**

- Para programar el flujograma se añaden los registros de memoria de la figura:



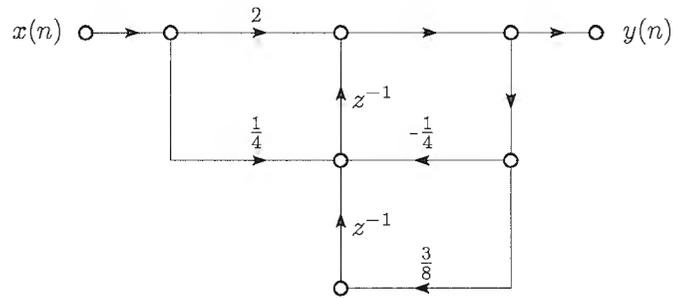
- El programa es:

```
// condiciones iniciales (reposo)
M1 = M2 = M3 = 0
// bucle
para cada muestra i
    // entrada
    X = x(i)
    // suma de productos
    A = 3*X + M1 + 2*M3
    Y = M2
    // salida
    y(i) = Y
    // actualización de memoria interna
    M1 = X
    M3 = M2 // o M3 = Y
    M2 = A
end
```

end

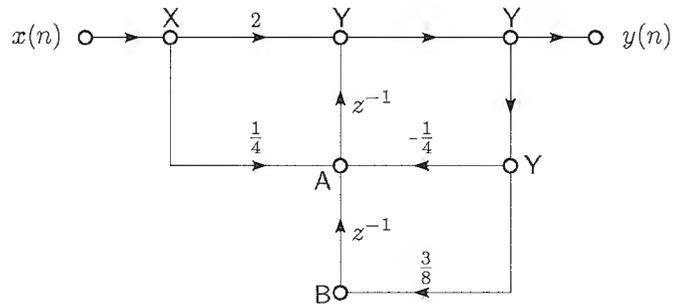
**Problema 6.4**

Considere el sistema de la figura



(a) Determine la función del sistema  $H(z)$ .

(b) Escriba la ecuación en diferencias que relaciona la entrada  $x(n)$  y la salida  $y(n)$ .



(a)  $H(z)$

- Ecuaciones de los nodos:

$$A(z) = \frac{1}{4}X(z) + z^{-1}B(z) - \frac{1}{4}Y(z)$$

$$B(z) = \frac{3}{8}Y(z)$$

$$Y(z) = 2X(z) + z^{-1}A(z)$$

- Eliminando las variables auxiliares:  $Y(z) \left(1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}\right) = X(z) \left(2 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)$ , de donde

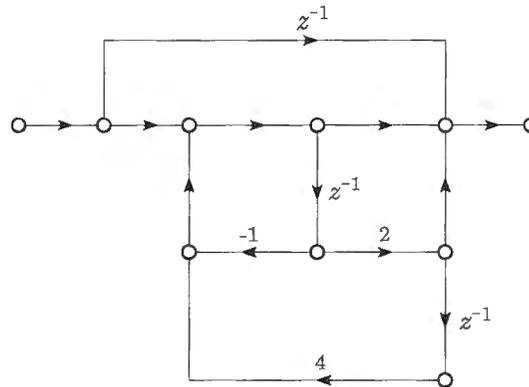
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}}$$

(b) Ecuación en diferencias

- Tomando transformada  $z$  inversa:  $y(n) + \frac{1}{4}y(n-1) - \frac{3}{8}y(n-2) = 2x(n) + \frac{1}{4}x(n-1)$

### Problema 6.9

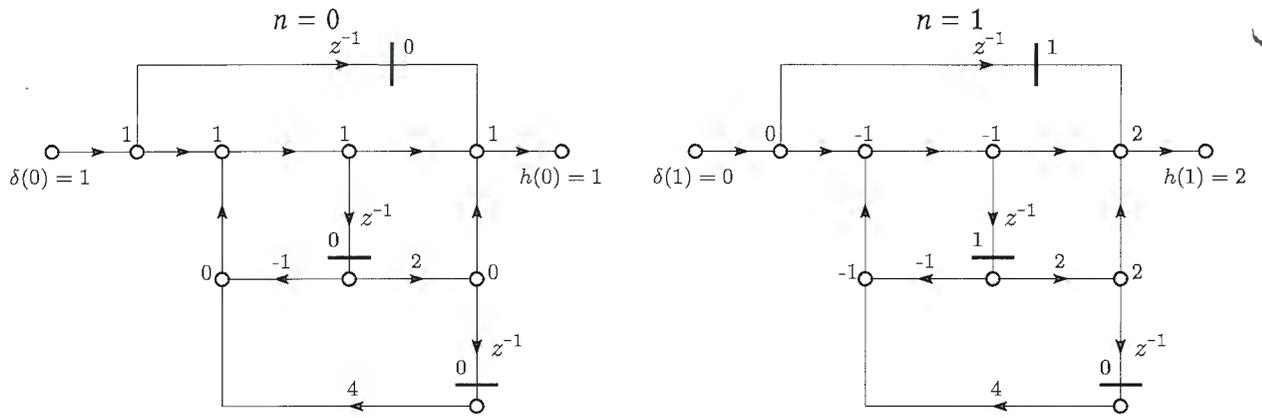
La figura muestra un flujograma para un sistema LTI causal.



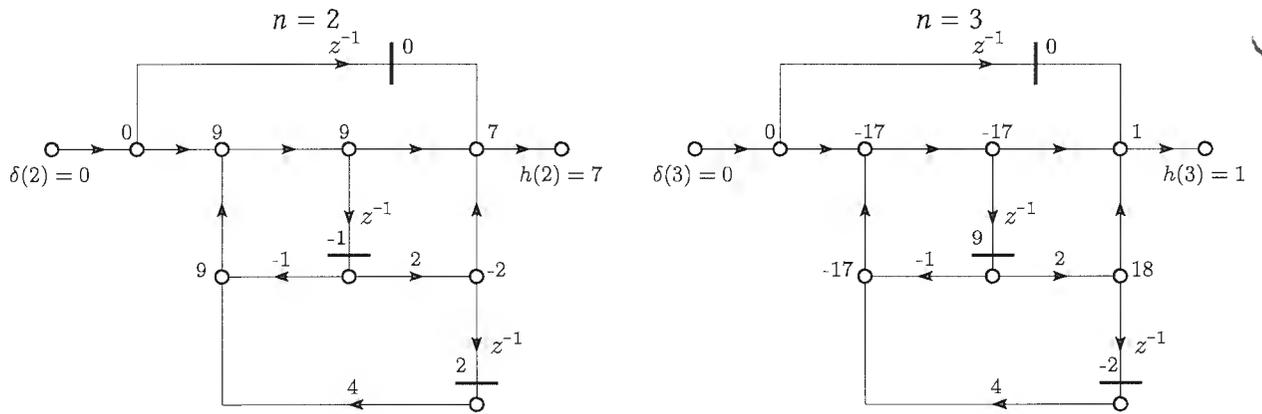
- (a) Determine  $h(1)$ , la respuesta al impulso en  $n = 1$ , mediante el trazado de un impulso a través del flujograma.
- (b) Determine la ecuación en diferencias que relaciona la entrada  $x(n)$  y la salida  $y(n)$ .

(a)  $h(1)$

- La solución estándar pasaría por calcular la función del sistema  $H(z)$  y:
  - calcular su transformada inversa para obtener  $h(n)$  y así calcular el valor pedido  $h(1)$ , o
  - obtener la ecuación en diferencias y calcular recursivamente la salida para  $x(n) = \delta(n)$ .
- Otras formas de encontrar la solución son:
  - hacer un programa y “ejecutarlo” con entrada  $x(n) = \delta(n)$  para  $n = 0, 1$ , o
  - “computar” el flujograma directamente. Esta es la estrategia elegida.
- Para computar el flujograma hay que calcular instantáneas del mismo en el que se indiquen los valores de la señal en todos los nodos, siguiendo el procedimiento:
  1. *Establecer los valores de los registros de memoria interna.*  
En la instantánea inicial,  $n = 0$ , los registros de memoria tienen los valores de las condiciones auxiliares,  $= 0$  si se parte de reposo inicial; en las instantáneas siguientes,  $n > 0$ , tendrán los valores que se calculen en el flujograma.
  2. *Calcular los nodos desde la entrada hacia la salida.*  
Recuérdese que un nodo suma los valores de todas sus entradas y que los valores se multiplican por las transmitancias de las flechas, excepto cuando éstas son  $z^{-1}$ , cuya interpretación es la de retardar el valor en la cola de la flecha.
- En el problema:  
Situación inicial: registros de memoria (en azul) con valor 0, porque el sistema es causal; es decir, parte de reposo inicial.

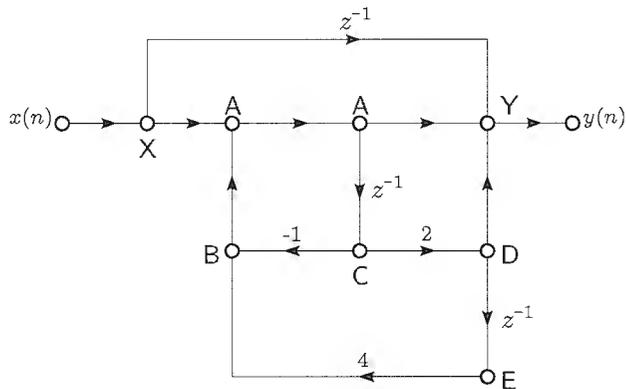


Aunque no lo pide el enunciado, se calculan también la salida para  $n = 2$  y  $n = 3$  para ilustrar el procedimiento.



**(b) Ecuación en diferencias**

- Ecuaciones de los nodos de la figura:



$$\begin{aligned}
 A(z) &= X(z) + B(z) \\
 B(z) &= -C(z) + 4E(z) \\
 C(z) &= z^{-1}A(z) \\
 D(z) &= 2C(z) \\
 E(z) &= z^{-1}D(z) \\
 Y(z) &= z^{-1}X(z) + A(z) + D(z)
 \end{aligned}$$

- Eliminando variables:  $H(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + z^{-2} - 8z^{-3}}{1 + z^{-1} - 8z^{-2}}$

- Ecuación en diferencias:

$$\begin{cases} y(n) = -y(n-1) + 8y(n-2) + x(n) + 3x(n-1) + x(n-2) - 8x(n-3) \\ \text{condiciones auxiliares : reposo inicial} \end{cases}$$

- Con la ecuación en diferencias se puede verificar que el cálculo de  $h(1)$  es correcto:

$$\begin{aligned} h(n) &= 0, n < 0 \\ h(0) &= -0 + 0 + 1 + 0 + 0 - 0 = 1 \\ h(1) &= -1 + 0 + 0 + 3 + 0 - 0 = 2 \\ h(2) &= -2 + 8 + 0 + 0 + 1 - 0 = 7 \\ h(3) &= -7 + 16 + 0 + 0 + 0 - 8 = 1 \end{aligned}$$

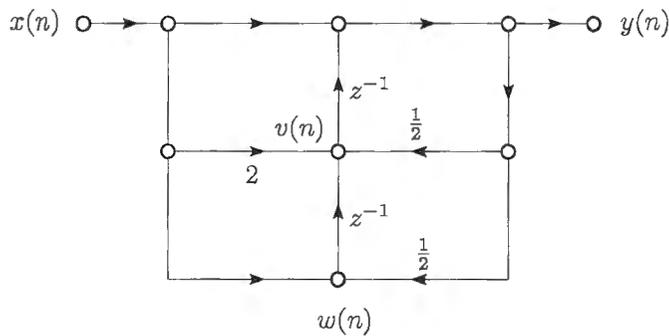
- También podría calcularse la transformada  $z$  inversa de  $H(z)$ :

$$h(n) = \delta(n-1) + [0,2389 (-3,3723)^n + 0,7611 (2,3723)^n] u(n)$$

y calcular los valores de  $h(n)$  para  $n = 0 \dots 3$ , que resultan, evidentemente, los mismos.

**Problema 6.10**

Considere el flujograma de la figura



- (a) Usando las variables de nodo indicadas, escriba la ecuación en diferencias que representa este grafo.
- (b) Dibuje el flujograma de un sistema equivalente formado por dos sistemas de 1er orden en cascada.
- (c) El sistema, ¿es estable?

**(a) Ecuación en diferencias**

- El enunciado dice expresamente que se usen las variables de nodo de la figura. Así que:

$$\begin{aligned} w(n) &= x(n) + \frac{1}{2}y(n) \\ v(n) &= 2x(n) + \frac{1}{2}y(n) + w(n-1) \\ y(n) &= x(n) + v(n-1) \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{cases} y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + \frac{1}{2}y(n-2) + x(n) + 2x(n-1) + x(n-2) \\ \text{condiciones auxiliares : reposo inicial} \end{cases}$$

**(b) Flujograma en cascada de secciones de primer orden**

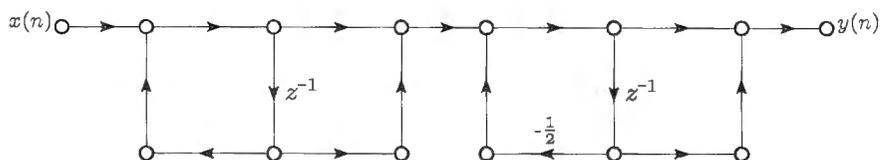
- De la ecuación en diferencias:

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}$$

- El sistema tiene polos en  $z_{p1} = 1$  y  $z_{p2} = -\frac{1}{2}$  y un cero doble en  $z_c = -1$ . Factorizando y separando en dos sistemas de primer orden en cascada:

$$H(z) = \frac{(1 + z^{-1})(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})} \cdot \frac{(1 + z^{-1})}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

- Una posible solución:



Nótese que la solución no es única, ya que se pueden ordenar las secciones al revés, usar formas transpuestas, mezclar una forma directa y una transpuesta...

**(c) Estabilidad**

- El sistema tiene un polo en la circunferencia unidad por lo que no es estable.

**Problema 6.11**

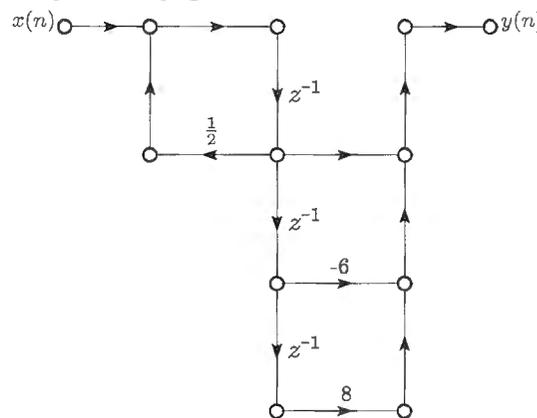
Considere un sistema LTI causal con respuesta al impulso  $h(n)$  y función del sistema

$$H(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})(1 - 4z^{-1})}{z(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}$$

- (a) Dibuje el flujograma de la forma directa II del sistema.
- (b) Dibuje la forma transpuesta del flujograma del apartado (a).

**(a) Flujograma en forma directa II**

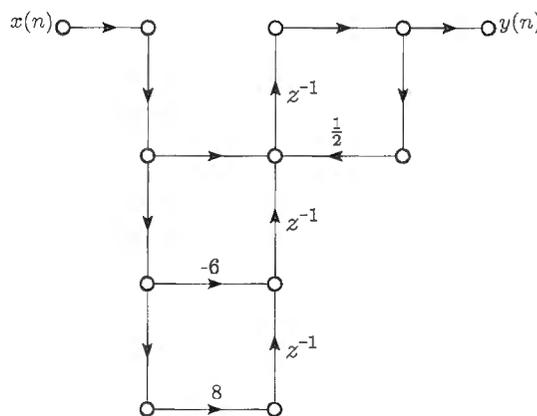
- La función del sistema puede reescribirse, desarrollando, como  $H(z) = \frac{z^{-1} - 6z^{-2} + 8z^{-3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$ . A partir de esta expresión se puede dibujar el flujograma:



Nótese que se han eliminado los arcos cuya transmitancia es nula.

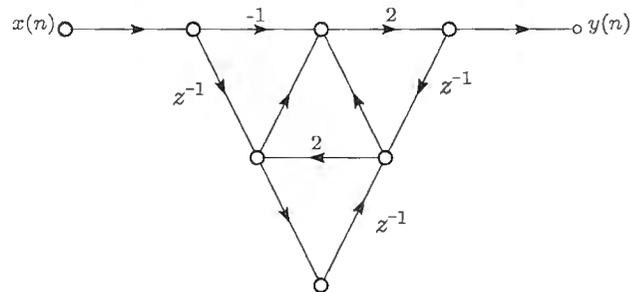
**(b) Flujograma transpuesto**

- Puede aplicarse la regla general para obtener una forma transpuesta de otra: cambiar el sentido de las flechas de los arcos, manteniendo sus transmitancias y cambiar la entrada por la salida.
- Pero en este caso, si se transpone la forma directa II se obtiene la forma directa transpuesta II, que puede dibujarse directamente:

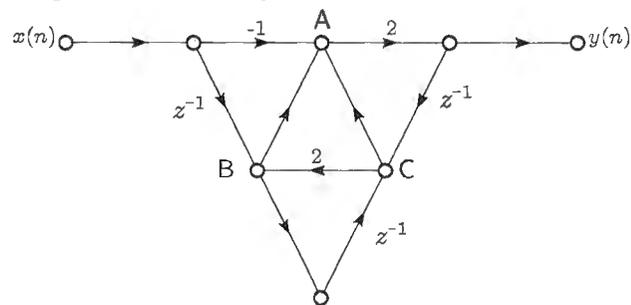


### Problema 6.12

Determine la ecuación en diferencias que relaciona la entrada  $x(n]$  y la salida  $y(n]$  del sistema LTI descrito por el flujograma de la figura.



- Ecuaciones de los nodos etiquetados en la figura:



$$\begin{aligned} A(z) &= -X(z) + B(z) + C(z) \\ B(z) &= z^{-1}X(z) + 2C(z) \\ C(z) &= z^{-1}B(z) + z^{-1}Y(z) \\ Y(z) &= 2A(z) \end{aligned}$$

- Eliminando variables:

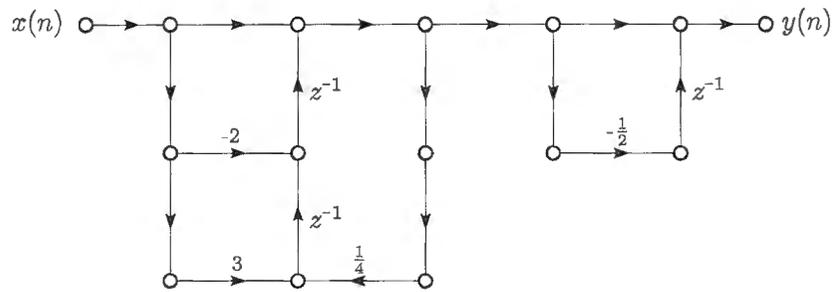
$$H(z) = \frac{-2 + 6z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - 8z^{-1}}$$

- Tomando transformada  $z$  inversa:

$$y(n) = 8y(n - 1) - 2x(n) + 6x(n - 1) + 2x(n - 2)$$

**Problema 6.16**

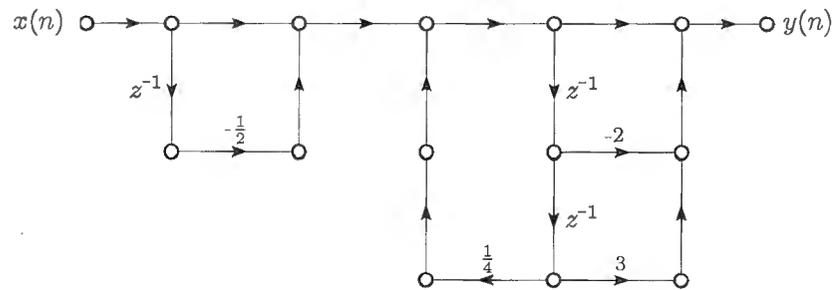
Considere el flujograma mostrado en la figura



- (a) Dibuje el flujograma que resulta de aplicar el teorema de transposición a este flujograma.
- (b) Confirme que el flujograma transpuesto obtenido en el apartado (a) tiene la misma función del sistema  $H(z)$  que el sistema original de la figura.

**(a) Flujograma transpuesto**

- Invertiendo flechas y cambiando el papel de la entrada y la salida se obtiene:



**(b)  $H(z)$  del grafo transpuesto**

- El flujograma original está compuesto por dos flujogramas en forma directa transpuesta II en cascada, así que:

$$H_1(z) = \frac{(1 - 2z^{-1} + 3z^{-2})}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} \cdot (1 - \frac{1}{2}z^{-1})$$

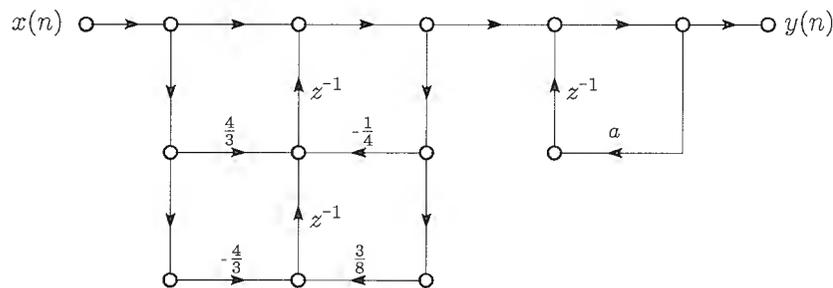
- El flujograma transpuesto está compuesto por dos flujogramas en forma directa II en cascada, así que:

$$H_2(z) = (1 - \frac{1}{2}z^{-1}) \cdot \frac{(1 - 2z^{-1} + 3z^{-2})}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}$$

- Evidentemente, las funciones de transferencia son iguales.

### Problema 6.18

Para algunos valores del parámetro  $a$ , el flujograma de la figura puede reemplazarse por un flujograma en forma directa II de segundo orden que implementa la misma función del sistema  $H(z)$ . Calcule uno de estos valores de  $a$  y la función del sistema  $H(z)$  resultante.



- El flujograma está compuesto por dos flujogramas en forma directa transpuesta II en cascada, así que:

$$H(z) = \frac{\left(1 + \frac{4}{3}z^{-1} - \frac{4}{3}z^{-2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}\right)} \cdot \frac{1}{(1 - az^{-1})}$$

- Como puede observarse, el sistema tiene 3 polos; por lo que si se quiere cambiar por un sistema de segundo orden el polo debido al factor  $1 - az^{-1}$  debe cancelarse con un cero, o anularse haciendo  $a = 0$ .
- Los ceros del sistema son  $z_{c1} = -2$  y  $z_{c2} = \frac{2}{3}$ , así que las otras opciones son  $a = -2$  y  $a = \frac{2}{3}$ .
- Eligiendo  $a = 0$  se obtiene:

$$H(z) = \frac{\left(1 + \frac{4}{3}z^{-1} - \frac{4}{3}z^{-2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}\right)}$$

- Eligiendo  $a = -2$  se obtiene:

$$H(z) = \frac{\left(1 - \frac{2}{3}z^{-1}\right)}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}\right)}$$

- Eligiendo  $a = \frac{2}{3}$  se obtiene:

$$H(z) = \frac{\left(1 + 2z^{-1}\right)}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}\right)}$$

### Problema 6.38

La respuesta al impulso de un sistema LTI es

$$h(n) = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq 7, \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

- (a) Dibuje el flujograma de una implementación no recursiva del sistema.
- (b) Demuestre que la correspondiente función del sistema puede expresarse como

$$H(z) = \frac{1 - a^8 z^{-8}}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

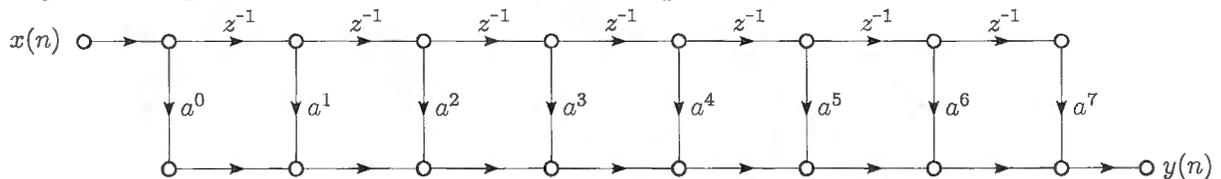
- (c) Dibuje el flujograma de una implementación de  $H(z)$  tal y como se expresa en el apartado (b), correspondiente a un sistema FIR (numerador) en cascada con un sistema IIR (denominador).
- (d) La implementación del apartado (c), ¿es recursiva o no? El sistema, ¿es FIR o IIR?

#### (a) Flujograma de una forma directa no recursiva

- La transformada  $z$  de la respuesta al impulso es

$$H(z) = \sum_{k=0}^7 a^k z^{-k} = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + a^4 z^{-4} + a^5 z^{-5} + a^6 z^{-6} + a^7 z^{-7}$$

- Expresada de esta forma, la función del sistema sólo tiene ceros y, por tanto, puede usarse un flujograma de tipo cadena de retardos con grifos (*tapped delay-line*), no recursivo



#### (b) $H(z)$ en forma recursiva

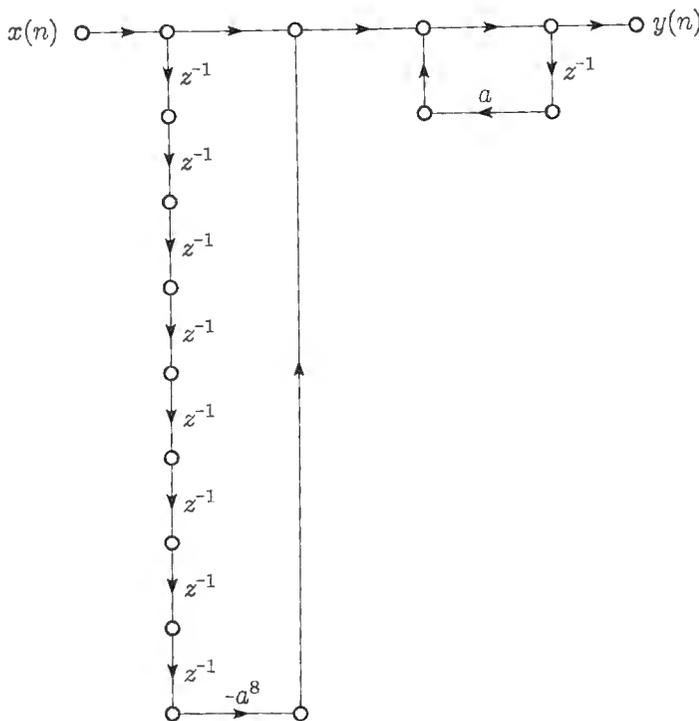
- La transformada  $z$  de  $h(n)$  tiene la forma de una serie geométrica finita de razón  $r = az^{-1}$  que puede sumarse fácilmente, resultando:

$$H(z) = \frac{1 - (a^7 z^{-7})(az^{-1})}{1 - az^{-1}} = \frac{1 - a^8 z^{-8}}{1 - az^{-1}}$$

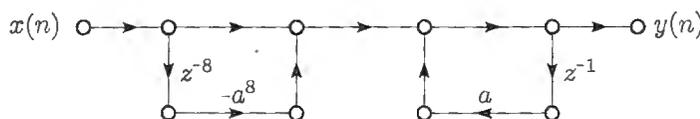
- Como el sistema es FIR (aunque en esta forma parece tener un polo en  $z = a$ , que no es tal porque se cancela con un cero), la ROC será  $|z| > 0$ . El enunciado dice que la ROC es  $|z| > |a|$  lo cual no es correcto, toda vez que la suma es finita y no es necesaria ninguna condición para que converja.

#### (c) Flujograma en cascada del numerador y denominador

- Usando, por ejemplo, la forma directa I resulta:



- Dibujada colapsando los retardos



(d) FIR o IIR

- El sistema es FIR porque la respuesta al impulso  $h(n)$  sólo tiene un número finito de muestras distintas de 0.
- La implementación del apartado (a) es no recursiva; la del apartado (c) es recursiva. No se trata ni de una contradicción ni de un error, pues cualquier función  $H(z)$  puede tomar infinitas formas equivalentes. En el caso recursivo el denominador se cancela con un cero del numerador, resultando la misma función  $H(z)$ .
- Los ceros son:  $z_{ck} = ae^{j\frac{2\pi}{8}k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 7$ . Para  $k = 0$ , el cero es  $z_{c0} = a$ , por tanto:

$$H(z) = \frac{(1 - az^{-1})(1 - ae^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}) \dots (1 - ae^{j\frac{7\pi}{4}}z^{-1})}{(1 - az^{-1})}$$

- El resultado, aunque un poco tedioso de calcular, es, naturalmente:

$$H(z) = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + a^4z^{-4} + a^5z^{-5} + a^6z^{-6} + a^7z^{-7} = \sum_{k=0}^7 a^k z^{-k}$$

### Problema 5.12

Un sistema en tiempo discreto LTI causal tiene como función del sistema

$$H(z) = \frac{(1 + 0,2z^{-1})(1 - 9z^{-2})}{(1 + 0,81z^{-2})}$$

(a) El sistema, ¿es estable?

(b) Determine las expresiones de un sistema de fase mínima  $H_1(z)$  y un sistema paso todo  $H_{ap}(z)$  tales que

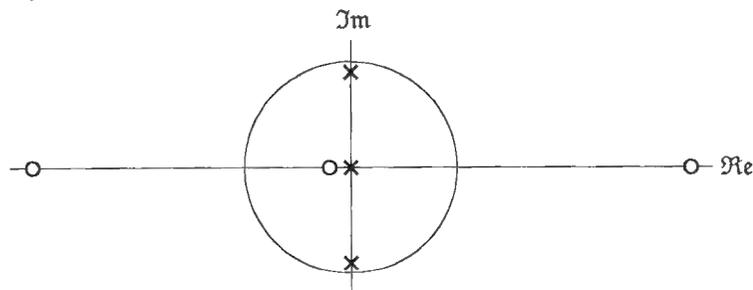
$$H(z) = H_1(z)H_{ap}(z)$$

#### (a) Estabilidad

- Para estudiar la estabilidad basta con calcular los polos del sistema; sin embargo siempre es útil representar el diagrama de polos y ceros completo. Además, es necesario para el segundo apartado.
- No es necesario, pero suele ser conveniente reescribir la función del sistema en potencias de  $z$  para identificar más fácilmente las raíces de los polinomios:

$$H(z) = \frac{(1 + 0,2z^{-1})(1 - 9z^{-2})}{(1 + 0,81z^{-2})} = \frac{(z + 0,2)(z^2 - 9)}{z(z^2 + 0,81)}$$

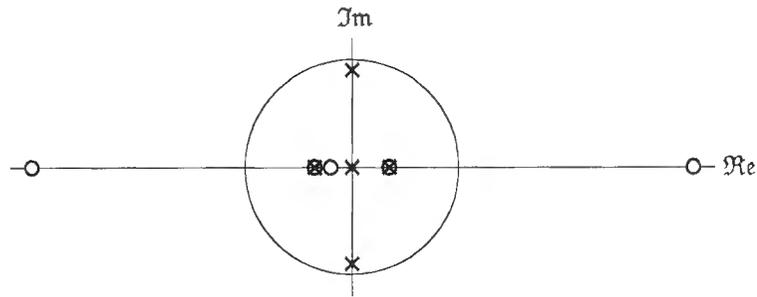
- Los polos están en  $z_{p1} = 0$ ,  $z_{p2} = j0,9$  y  $z_{p3} = -j0,9$
- Los ceros están en  $z_{c1} = -0,2$ ,  $z_{c2} = 3$  y  $z_{c3} = -3$
- El diagrama de polos y ceros es:



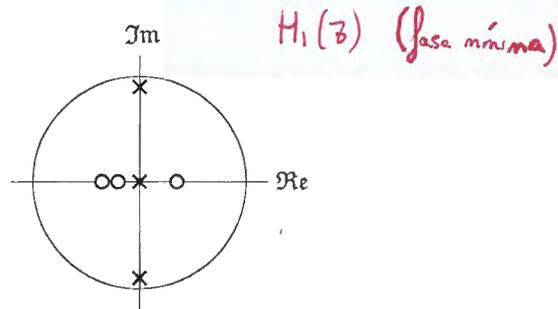
- La ROC es  $|z| > 0,9$  ya que el sistema es causal
- La ROC incluye la circunferencia unidad así que el sistema es estable

#### (b) Descomposición $H(z) = H_1(z)H_{ap}(z)$

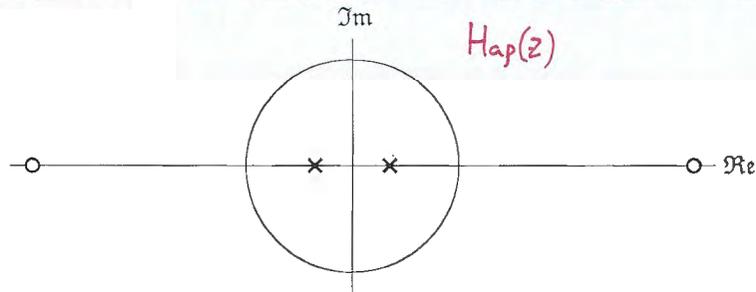
- Para descomponer una función  $H(z)$  en una parte de fase mínima  $H_1(z)$  y una parte paso-todo  $H_{ap}(z)$  es necesario reflejar los ceros externos al círculo unidad introduciendo para cada uno de ellos un cero y un polo con el mismo ángulo que el cero externo y con magnitud inversa.
- En este caso hay que reflejar los ceros  $z_{c2} = 3$  y  $z_{c3} = -3$
- Para reflejar  $z_{c2} = 3 = 3e^{j0}$  se añaden el polo  $z_{p4} = \frac{1}{3}$  y el cero  $z_{c4} = \frac{1}{3}$
- Para reflejar  $z_{c3} = -3 = 3e^{j\pi}$  se añaden el polo  $z_{p5} = -\frac{1}{3}$  y el cero  $z_{c5} = -\frac{1}{3}$
- El diagrama de polos y ceros resultante (con los polos y ceros añadidos en azul) es:



- Una vez añadidos los polos y ceros reflejados hay que separar el diagrama en dos partes:
  - la primera (de fase mínima) contiene los polos y ceros en el círculo unidad del sistema original más los ceros reflejados:



- la segunda (paso-todo) contiene los ceros externos originales más los polos reflejados:



- A continuación se “reconstruye” la  $H(z)$  a partir de los diagramas de polos y ceros como el producto de las partes de fase mínima y paso-todo añadiendo las constantes  $A$  y  $B$  que permitan ajustar la ganancia en frecuencia de la parte paso-todo a la unidad. Es evidente que para mantener la igualdad con la  $H(z)$  original las constantes deben cumplir  $A = B^{-1}$ :

$$H(z) = \underbrace{\left[ A \frac{(1 + 0,2z^{-1}) (1 - \frac{1}{3}z^{-1}) (1 + \frac{1}{3}z^{-1})}{(1 + 0,81z^{-2})} \right]}_{H_1(z)} \underbrace{\left[ B \frac{(1 - 9z^{-2})}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1}) (1 + \frac{1}{3}z^{-1})} \right]}_{H_{ap}(z)}$$

En la ecuación se han marcado en azul los factores añadidos.

- Para calcular las constantes se fuerza a que la transformada de Fourier de la parte paso-todo tenga ganancia unidad y fase nula en  $\omega = 0$ , correspondiente a  $z = 1$ .

$$H_{ap}(z)|_{z=1} = 1 = B \frac{(1 - 9z^{-2})}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1}) (1 + \frac{1}{3}z^{-1})} = B \frac{(1 - 9)}{(1 - \frac{1}{9})} = -9B$$

de donde  $B = -\frac{1}{9}$  y, por tanto,  $A = -9$ .

Nota: esta forma de calcular las constantes  $A$  y  $B$  es válida siempre y cuando la respuesta al impulso del filtro paso-todo  $h_{ap}(n)$  sea real; es decir, que los polos y ceros de  $H_{ap}(z)$  estén en posiciones reales o en pares complejos conjugados. Al final del problema se aborda el caso general.

- La parte paso todo es:  $H_{ap}(z) = -\frac{1}{9} \frac{(1 - 9z^{-2})}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1}) (1 + \frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{(1 - 9z^{-2})}{(z^{-2} - 9)}$ ,  $|z| > \frac{1}{3}$

- La parte de fase mínima es:  $H_1(z) = -9 \frac{(1 + 0,2z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 + \frac{1}{3}z^{-1})}{(1 + 0,81z^{-2})}$ ,  $|z| > 0,9$

Esta expresión, aunque válida, suele reescribirse introduciendo el factor de escala  $A$  en los términos añadidos correspondientes a los ceros:

$$H_1(z) = \frac{(1 + 0,2z^{-1})(z^{-2} - 9)}{(1 + 0,81z^{-2})}$$

De esta forma resulta más evidente que  $H(z) = H_1(z)H_{ap}(z)$ .

### Cálculo de las constantes de la descomposición

- Un filtro IIR paso-todo causal y estable tiene, por definición, una respuesta en frecuencia con magnitud unidad para todas las frecuencias y una fase monótona decreciente. Para conseguir esta respuesta en frecuencia, sus polos y ceros deben aparecer relacionados de una forma particular; en concreto, cada polo en  $z_{pi} = r_i e^{j\theta_i}$  debe ir acompañado de un cero en  $z_{ci} = 1/z_{pi}^* = 1/(r_i e^{-j\theta_i}) = (1/r_i) e^{j\theta_i}$ , es decir, con magnitud inversa y mismo ángulo.

- Cada pareja de polo y cero relacionados se combina para formar un filtro de primer orden  $H_{ap1}(z)$  cuya respuesta al impulso es, en general, compleja. El filtro completo estará formado por la combinación de filtros de primer orden:  $H_{ap}(z) = \prod_{i=1}^N H_{ap1i}(z)$ .

- Si se construye un filtro de primer orden a partir de una pareja polo y cero usando la expresión  $H_1(z) = \frac{(1 - z_{c1}z^{-1})}{(1 - z_{p1}z^{-1})}$  el resultado no es un filtro paso-todo puesto que la ganancia en frecuencia, aunque constante, no es la unidad; es necesario multiplicar por una constante que asegure la ganancia en frecuencia unitaria; es decir  $H_{ap1}(z) = B_1 \frac{(1 - z_{c1}z^{-1})}{(1 - z_{p1}z^{-1})}$ .

- Manipulando la expresión  $H_1(z)$  se puede obtener el valor de la constante  $B_1$ . En efecto, sacando  $-z_{c1}$  como factor común en el numerador queda  $H_1(z) = \frac{(1 - z_{c1}z^{-1})}{(1 - z_{p1}z^{-1})} = -z_{c1} \frac{(z^{-1} - \frac{1}{z_{c1}})}{(1 - z_{p1}z^{-1})}$ , pero teniendo en cuenta que  $z_{c1} = \frac{1}{z_{p1}^*}$ , resulta  $H_1(z) = -z_{c1} \frac{(z^{-1} - z_{p1}^*)}{(1 - z_{p1}z^{-1})}$ .

- La magnitud de la respuesta en frecuencia del cociente  $\frac{(z^{-1} - z_{p1}^*)}{(1 - z_{p1}z^{-1})}$  sí es la unidad ya que

$$\left| \frac{(e^{-j\omega} - z_{p1}^*)}{(1 - z_{p1}e^{-j\omega})} \right| = \left| e^{-j\omega} \frac{(1 - z_{p1}^* e^{j\omega})}{(1 - z_{p1}e^{-j\omega})} \right| = |e^{-j\omega}| \cdot \left| \frac{(1 - z_{p1}^* e^{j\omega})}{(1 - z_{p1}e^{-j\omega})} \right| = 1$$

porque ambos factores valen 1; el primero por ser el módulo de un número complejo de magnitud 1 y el segundo por ser el cociente de los módulos de dos números complejos conjugados.

- Así pues,  $H_1(z) = -z_{c1}H_{ap1}(z) = \frac{(1 - z_{c1}z^{-1})}{(1 - z_{p1}z^{-1})}$ , de donde  $H_{ap1}(z) = \left(-\frac{1}{z_{c1}}\right) \frac{(1 - z_{c1}z^{-1})}{(1 - z_{p1}z^{-1})}$  y, por tanto,  $B_1 = -\frac{1}{z_{c1}}$ .

- Para un filtro de orden  $N$ , basta con multiplicar todas las constantes  $B_i$ :

$$B = \prod_{i=1}^N B_i = \prod_{i=1}^N \left(-\frac{1}{z_{ci}}\right)$$

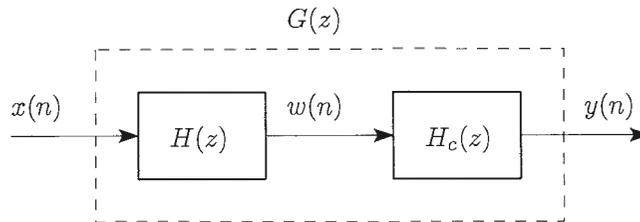
▪ La constante  $A$ , inversa de  $B$ , resulta:  $A = \prod_{i=1}^N (-z_{ci})$ .

▪ En el problema  $z_{c1} = -3$  y  $z_{c2} = 3$ , por lo que  $A = (+3)(-3) = -9$  y  $B = \frac{1}{A} = -\frac{1}{9}$ .

**Problema 5.70**

No es posible obtener un sistema inverso causal y estable (un compensador perfecto) para un sistema de fase no mínima. En este problema se estudia un método para compensar sólo la magnitud de la respuesta en frecuencia de un sistema de fase no mínima.

Suponga que un sistema en tiempo discreto LTI estable de fase no mínima con una función del sistema racional  $H(z)$  se pone en cascada con un sistema compensador  $H_c(z)$  como muestra la figura



- (a) ¿Cómo debe elegirse  $H_c(z)$  para que sea estable y causal de forma que la magnitud de respuesta en frecuencia del sistema conjunto sea la unidad? (Recuerde que  $H(z)$  siempre se puede representar como  $H(z) = H_{ap}(z)H_{min}(z)$ , siempre y cuando no existan polos y/o ceros en la circunferencia unidad).
- (b) ¿Cuáles son las correspondientes funciones  $H_c(z)$  y  $G(z)$ ?
- (c) Suponga que

$$H(z) = (1 - 0,8e^{j0,3\pi}z^{-1}) (1 - 0,8e^{-j0,3\pi}z^{-1}) (1 - 1,2e^{j0,7\pi}z^{-1}) (1 - 1,2e^{-j0,7\pi}z^{-1})$$

Determine  $H_{min}(z)$ ,  $H_{ap}(z)$ ,  $H_c(z)$  y  $G(z)$  para este caso y dibuje los correspondientes diagramas de polos y ceros.

**(a)  $H_c(z)$  para compensar la magnitud de la respuesta en frecuencia**

- Se pretende obtener  $|H(\omega)H_c(\omega)| = 1$ , con  $H_c(z)$  causal y estable y  $H(z)$  de fase no mínima, así que  $|H_{ap}(\omega)H_{min}(\omega)H_c(\omega)| = 1$
- $|H_{ap}(\omega)| = 1$  por definición, por lo que  $|H_{min}(\omega)H_c(\omega)| = 1$ , que se obtiene tomando  $H_c(z) = \frac{1}{H_{min}(z)}$
- $H_c(z)$  es causal y estable porque sus polos (ceros) son los ceros (polos) de  $H_{min}(z)$ , todos ellos dentro del círculo unidad.

**(b)  $H_c(z)$  y  $G(z)$**

- $H_c(z) = \frac{1}{H_{min}(z)}$
- $G(z) = H(z)H_c(z) = H_{ap}(z)H_{min}(z)H_c(z) = H_{ap}(z)$

**(c) Particularización**

- $H(z)$  es un sistema FIR con ceros en  $z_{c1} = 0,8e^{j0,3\pi}$ ,  $z_{c2} = 0,8e^{-j0,3\pi}$ ,  $z_{c3} = 1,2e^{j0,7\pi}$  y  $z_{c4} = 1,2e^{-j0,7\pi}$ ; los dos primeros dentro y los dos últimos fuera del círculo unidad.
- Reflejando los ceros externos se añaden polos y ceros en  $z = (1/1,2)e^{j0,7\pi}$  y  $z = (1/1,2)e^{-j0,7\pi}$ .
- La parte de fase mínima resulta:

$$H_{min}(z) = (1,2)^2 (1 - 0,8e^{j0,3\pi}z^{-1}) (1 - 0,8e^{-j0,3\pi}z^{-1}) \left(1 - \frac{1}{1,2}e^{j0,7\pi}z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{1,2}e^{-j0,7\pi}z^{-1}\right)$$

- La parte paso-todo resulta:

$$H_{ap}(z) = G(z) = \frac{1}{(1,2)^2} \cdot \frac{(1 - 1,2e^{j0,7\pi}z^{-1})(1 - 1,2e^{-j0,7\pi}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{1,2}e^{j0,7\pi}z^{-1})(1 - \frac{1}{1,2}e^{-j0,7\pi}z^{-1})}$$

- El filtro compensador resulta:

$$\frac{1}{H_{mi}(z)} = H_c(z) = \frac{1}{(1,2)^2 (1 - 0,8e^{j0,3\pi}z^{-1})(1 - 0,8e^{-j0,3\pi}z^{-1})(1 - \frac{1}{1,2}e^{j0,7\pi}z^{-1})(1 - \frac{1}{1,2}e^{-j0,7\pi}z^{-1})}$$

- Para determinar el valor de las constantes, véase la discusión en el ejercicio 5.12. En este caso resultan  $A = (-z_{c3})(-z_{c4}) = (-1,2e^{j0,7\pi})(-1,2e^{-j0,7\pi}) = (1,2)^2$  y  $B = \frac{1}{A} = \frac{1}{(1,2)^2}$ .

### Problema 5.35

Una secuencia  $x(n]$  es la salida de un sistema LTI cuya entrada es  $s(n]$ . Este sistema está descrito por la ecuación en diferencias

$$x(n] = s(n] - e^{-8\alpha} s(n - 8]$$

con  $0 < \alpha]$ .

(a) Encuentre la función del sistema

$$H_1(z) = \frac{X(z)}{S(z)}$$

y dibuje su diagrama de polos y ceros. Indique la región de convergencia.

(b) Se quiere recuperar  $s(n]$  a partir de  $x(n]$  mediante un sistema LTI. Encuentre la función del sistema

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

tal que  $y(n] = s(n]$ . Encuentre todas las posibles regiones de convergencia de  $H_2(z]$  y para cada una de ellas indique si el correspondiente sistema es causal y/o estable.

(c) Encuentre todas las respuestas al impulso  $h_2(n]$  posibles tales que

$$y(n] = h_2(n] * x(n] = s(n]$$

(d) Para las soluciones del apartado (c), demuestre, mediante cálculo explícito de la convolución, que cuando  $s(n] = \delta(n]$ ,  $y(n] = \delta(n]$ .

Nota: La ecuación en diferencias del problema representa un modelo simple de un canal multitrayecto. Los sistemas determinados en los apartados (b) y (c), se corresponden, por tanto, con sistemas compensadores para corregir la distorsión multitrayecto.

(a)  $H_1(z]$  y diagrama de polos y ceros

- Tomando transformada  $z]$ :

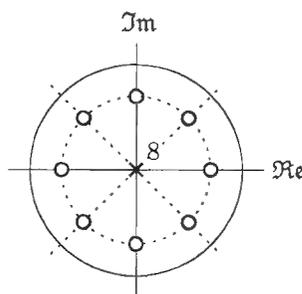
$$X(z) = S(z) - e^{-8\alpha} z^{-8} S(z) = S(z) (1 - e^{-8\alpha} z^{-8}) \text{ y } H_1(z) = \frac{X(z)}{S(z)} = 1 - e^{-8\alpha} z^{-8} = \frac{z^8 - e^{-8\alpha}}{z^8}$$

- Se trata de un sistema FIR con un polo de orden 8 en  $z = 0]$ . La ROC es  $|z| > 0]$
- Para calcular los ceros hay que calcular las raíces del numerador:

$$z^8 = e^{-8\alpha} \Rightarrow z_{ck} = \sqrt[8]{e^{-8\alpha}} = e^{-\alpha} e^{j\frac{2\pi}{8}k} = e^{-\alpha} e^{j\frac{\pi}{4}k}, \quad k = 0, 1, \dots, 7$$

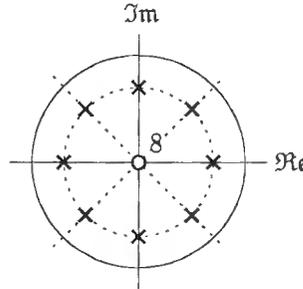
Son 8 ceros con magnitud  $|z_{ck}| = e^{-\alpha} < 1]$  (porque  $\alpha > 0]$ ) y fases  $\angle z_{ck} = \frac{\pi}{4}k]$

- El diagrama de polos y ceros es:



**(b) Recuperar  $s(n)$  a partir de  $x(n)$**

- El sistema  $H_1(z)$  actúa como una distorsión de la señal  $s(n)$ ; en concreto le suma una copia atenuada y retrasada 8 muestras: es un modelo sencillo de un canal multitrayecto.
- Como el sistema distorsionador es FIR y no presenta ceros en la circunferencia unidad, se puede hacer una compensación perfecta con  $H_2(z) = \frac{1}{H_1(z)}$ , resultando  $H_1(z)H_2(z) = 1$  o, lo que es lo mismo,  $y(n) = s(n)$ .
- El diagrama de polos y ceros de  $H_2(z)$  es:



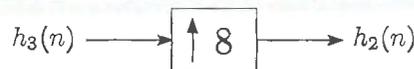
- Las posibles regiones de convergencia son:
  - $|z| > e^{-\alpha}$ , que da lugar a un sistema causal y estable
  - $|z| < e^{-\alpha}$ , que da lugar a un sistema anticausal e inestable

**(c)  $h_2(n)$**

- Hay dos posibles respuestas al impulso  $h_2(n)$ , una para el sistema causal  $h_{2a}(n)$  y otra para el anticausal  $h_{2b}(n)$ .
- El cálculo tradicional de las respuestas exigiría separar  $H_2(z)$  en fracciones simples para lo cual habría que calcular los residuos en los 8 polos y generar como transformada inversa la suma de 8 exponenciales. No es imposible, pero sí largo y tedioso.
- Una forma más sencilla de calcular la transformada inversa de  $H_2(z)$  consiste en percatarse de que si se sustituye  $z^{-8}$  por  $z^{-1}$ , la función resultante tiene una inversa sencilla:

$$H_2(z) = H_3(z^8) = \frac{1}{1 - e^{-8\alpha}z^{-1}} \Rightarrow \begin{cases} h_{3a}(n) = e^{-8\alpha n}u(n) & |z| > e^{-\alpha} \\ h_{3b}(n) = -e^{-8\alpha n}u(-n-1) & |z| < e^{-\alpha} \end{cases}$$

- Para obtener  $h_{2a}(n)$  y  $h_{2b}(n)$  se recurre a una expansión por 8:



en el que se cumple:  $H_2(\omega) = H_3(8\omega)$  pero que puede extenderse a todo el plano  $z$  porque la transformada  $z$  es una serie de Laurent que genera una función analítica en toda la región de convergencia. Analizando la expansión de esta forma se obtiene  $H_2(z) = H_3(z^8)$ , resultado válido en la región de convergencia aunque ésta no contenga la circunferencia unidad.

- Aplicando la expansión resultan:

$$h_{2a}(n) = \begin{cases} h_{3a}\left(\frac{n}{8}\right) & \frac{n}{8} \text{ entero} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-8\alpha k} \delta(n - 8k)$$

$$h_{2b}(n) = \begin{cases} h_{3b}\left(\frac{n}{8}\right) & \frac{n}{8} \text{ entero} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} = -\sum_{k=-\infty}^{-1} e^{-8\alpha k} \delta(n - 8k)$$

en las que se han sustituido los escalones por los sumatorios de  $\delta(n)$  desplazadas  $8k$  para que aparezcan los ceros insertados.

**(d) Cálculo explícito de la convolución**

- El cálculo de  $y(n) = x(n) * h_2(n) = (s(n) - e^{-8\alpha}s(n-8)) * (\sum_{k=0}^{\infty} e^{-8\alpha k}\delta(n-8k))$  es demasiado intrincado para abordarlo directamente, así que conviene aplicar algunas propiedades de la convolución.
- En primer lugar, sea  $\beta = e^{-8\alpha}$ ; esta sustitución aporta un poco más de claridad.
- Del apartado (a) también sabemos que  $h_1(n) = \delta(n) - \beta\delta(n-8)$ , transformada inversa de  $H_1(z) = 1 - \beta z^{-8}$ , y que  $x(n) = s(n) * h_1(n)$ . Por tanto:  $y(n) = (s(n) * h_1(n)) * h_2(n) = s(n) * (h_1(n) * h_2(n)) = s(n) * h(n)$ .
- El cálculo de  $h(n) = h_1(n) * h_2(n)$  no es demasiado complicado:

$$\begin{aligned}
 h_a(n) &= (\delta(n) - \beta\delta(n-8)) * h_{2a}(n) = \\
 &= h_{2a}(n) - \beta h_{2a}(n-8) = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \delta(n-8k) - \beta \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \delta(n-8-8k) = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \delta(n-8k) - \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{k+1} \delta(n-8(k+1)) = (\text{cambio de variable } p = k+1) = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \delta(n-8k) - \sum_{p=1}^{\infty} \beta^p \delta(n-8p) = (\text{cambio de variable } p = k) = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \delta(n-8k) - \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k \delta(n-8k) = \\
 &= \beta^0 \delta(n) = \delta(n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_b(n) &= (\delta(n) - \beta\delta(n-8)) * h_{2b}(n) = \\
 &= h_{2b}(n) - \beta h_{2b}(n-8) = \\
 &= - \sum_{k=-\infty}^{-1} \beta^k \delta(n-8k) + \beta \sum_{k=-\infty}^{-1} \beta^k \delta(n-8-8k) = \\
 &= - \sum_{k=-\infty}^{-1} \beta^k \delta(n-8k) + \sum_{k=-\infty}^{-1} \beta^{k+1} \delta(n-8(k+1)) = (\text{cambio de variable } p = k+1) = \\
 &= - \sum_{k=-\infty}^{-1} \beta^k \delta(n-8k) + \sum_{p=-\infty}^0 \beta^p \delta(n-8p) = (\text{cambio de variable } p = k) = \\
 &= - \sum_{k=-\infty}^{-1} \beta^k \delta(n-8k) + \sum_{k=-\infty}^0 \beta^k \delta(n-8k) = \\
 &= \beta^0 \delta(n) = \delta(n)
 \end{aligned}$$

Así pues  $h(n) = h_1(n) * h_{2a}(n) = h_1(n) * h_{2b}(n) = \delta(n)$ ; es decir el resultado de la convolución de  $h_1(n)$  con sus inversas causal  $h_{2a}(n)$  y anticausal  $h_{2b}(n)$  es  $\delta(n)$ ; resultado esperado porque el producto de sus transformadas es la unidad  $H_1(z)H_2(z) = 1$ .

- Llevando este resultado a la convolución que queda aún pendiente:  $y(n) = s(n) * h(n) = s(n) * \delta(n) = s(n)$ , qed.

### Problema 5.38

Un sistema discreto LTI causal tiene como función del sistema

$$H(z) = \frac{(1 - 0,5z^{-1})(1 + 4z^{-2})}{(1 - 0,64z^{-2})}$$

(a) Encuentre las expresiones de un sistema de fase mínima  $H_1(z)$  y un sistema paso todo  $H_{ap}(z)$  tales que

$$H(z) = H_1(z)H_{ap}(z)$$

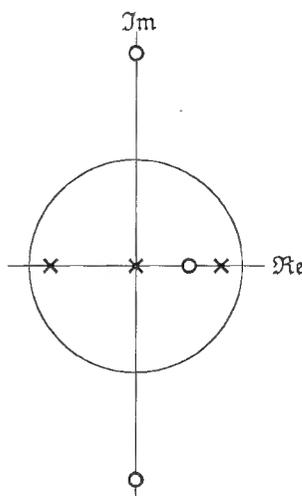
(b) Encuentre la expresión de un sistema de fase mínima diferente  $H_2(z)$  y un sistema FIR de fase lineal generalizada  $H_{lin}(z)$  tales que

$$H(z) = H_2(z)H_{lin}(z)$$

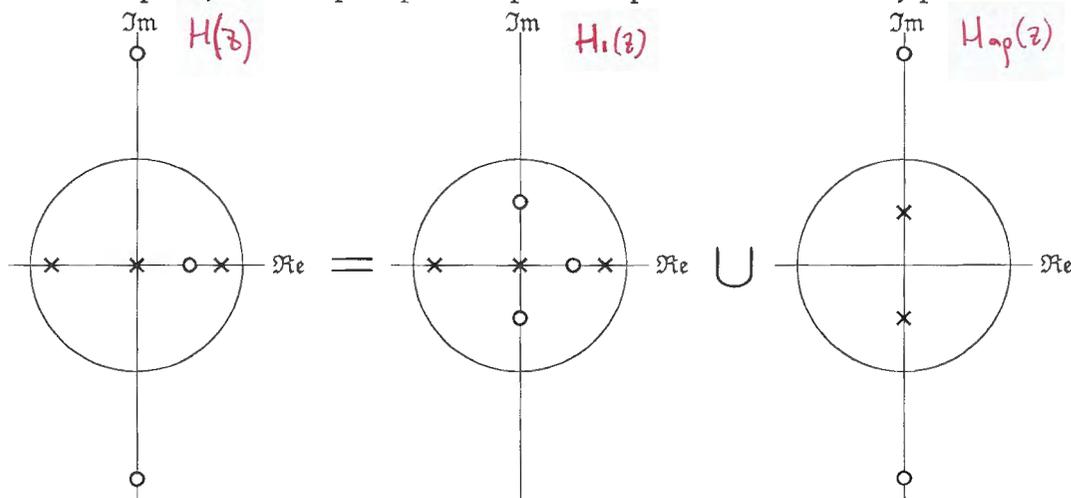
#### (a) Descomposición en sistemas de fase mínima y paso-todo

Nota: para una descripción detallada del proceso véase el problema 5.12

- Los polos de  $H(z)$  son  $z_{p1} = 0$ ,  $z_{p2} = 0,8$  y  $z_{p3} = -0,8$
- Los ceros son  $z_{c1} = 0,5$ ,  $z_{c2} = 2j$  y  $z_{c3} = -2j$
- El diagrama de polos y ceros es:



- Para obtener la descomposición buscada hay que reflejar los ceros exteriores al círculo unidad introduciendo un polo y un cero para poder separar las partes de fase lineal y paso-todo:



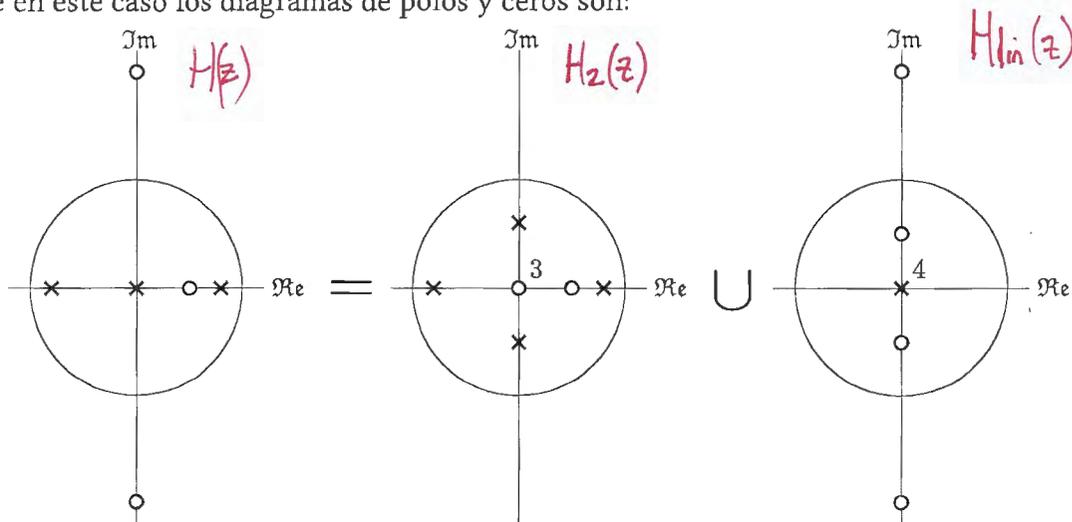
- La parte de fase mínima es:  $H_1(z) = 4 \cdot \frac{(1 - 0,5z^{-1})(1 + \frac{1}{4}z^{-2})}{(1 - 0,64z^{-2})} = \frac{(1 - 0,5z^{-1})(z^{-2} + 4)}{(1 - 0,64z^{-2})}$

$$\frac{5}{4} : \frac{20}{5} = 4A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{4}$$

- La parte paso-todo es:  $H_{ap}(z) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(1 + 4z^{-2})}{(1 + \frac{1}{4}z^{-2})} = \frac{(1 + 4z^{-2})}{(z^{-2} + 4)}$
- Para determinar el valor de las constantes, véase la discusión en el ejercicio 5.12. En este caso resultan  $A = (-2j)(+2j) = -4j^2 = 4$  y  $B = \frac{1}{A} = \frac{1}{4}$ .

**(b) Descomposición sistemas de fase mínima y de fase lineal**

- La técnica es similar salvo que los sistemas de fase lineal generalizada son de tipo FIR, sus ceros tienen que estar agrupados en cuartetos  $\{z_0, z_0^*, 1/z_0, 1/z_0^*\}$  y que no es necesario que el módulo de su transformada de Fourier tengan ganancia unidad.
- Así que en este caso los diagramas de polos y ceros son:



- Nótese que ahora hay que tener en cuenta los 4 polos en  $z = 0$  que aparecen en el sistema de fase lineal y que deben compensarse con los tres ceros en  $z = 0$  en el sistema de fase mínima. Como se ve a continuación, estos polos y ceros aparecen sin más que manipular las expresiones de  $H_2(z)$  y  $H_{lin}(z)$ .

- La parte de fase mínima es:  $H_2(z) = \frac{(1 - 0,5z^{-1})}{(1 - 0,64z^{-2})(1 + \frac{1}{4}z^{-2})}$

- La parte de fase lineal es:  $H_{lin}(z) = (1 + 4z^{-2})(1 + \frac{1}{4}z^{-2})$

- Aunque no se pide, es fácil calcular la respuesta al impulso del filtro de fase lineal para comprobar que sus muestras presentan simetría:  $h_{lin}(n) = \delta(n) + \frac{17}{4}\delta(n - 2) + \delta(n - 4)$ . Teniendo en cuenta que la longitud es  $M + 1 = 5 \Rightarrow M = 4$ , par y la simetría es par, el filtro de fase lineal resultante es de tipo I.

**Problema 5.59**

(a) Un sistema de fase mínima específico tiene como función del sistema  $H_{min}(z)$  tal que

$$H_{min}(z)H_{ap}(z) = H_{lin}(z)$$

donde  $H_{ap}(z)$  es un sistema paso todo y  $H_{lin}(z)$  es un sistema causal de fase lineal generalizada. ¿Qué le dice esta información acerca de los polos y ceros de  $H_{min}(z)$ ?

(b) Un sistema FIR de fase lineal generalizada tiene una respuesta al impulso con valores reales y  $h(n) = 0$  para  $n < 0$  y  $n \geq 8$ , y  $h(n) = -h(7 - n)$ . Su función del sistema  $H(z)$  tiene un cero en  $z = 0,8e^{j\pi/4}$  y otro cero en  $z = -2$ . Calcule  $H(z)$ .

*Recíproco = inverso*

(a) **Polos y ceros de  $H_{min}(z)$**

**IMP**

- Los sistemas de fase mínima tienen todos sus polos y ceros dentro del círculo unidad.
- Los sistemas paso todo tienen sus polos y ceros en parejas polo-cero en posiciones recíprocas conjugadas.
- Los sistemas de fase lineal generalizada tienen sus ceros en cuartetos en posiciones conjugadas y recíprocas conjugadas.
- Para que se cumpla  $H_{min}(z)H_{ap}(z) = H_{lin}(z)$  el sistema de fase mínima sólo debe tener ceros y éstos deben ser dobles y conjugados.

(b)  $H(z)$

- $h(n)$  es de longitud 8 y, por tanto,  $H(z)$  tiene 7 ceros.
- ? ▪  $h(n)$  tiene simetría impar y longitud par, por lo que es de tipo IV.
- El cero en  $z = -2$  debe ir acompañado de otro cero en  $z = -1/2$  (recíproco, sin conjugados porque son reales).
- El cero en  $z = 0,8e^{j\pi/4}$  debe ir acompañado de otros ceros en  $z = (1/0,8)e^{-j\pi/4}$  (recíproco),  $z = 0,8e^{-j\pi/4}$  (conjugado) y  $z = (1/0,8)e^{j\pi/4}$  (recíproco conjugado).   
*Handwritten notes:  $\frac{1}{0,8} \cdot e^{j\pi/4} \rightarrow \text{acuerdate !!!}$  and  $\frac{1}{z_0^*}$*
- El número de ceros de los dos últimos párrafos suman 6; el séptimo está en  $z = 1$  porque es de tipo IV.
- Juntando todo

$$H(z) = (1 - z^{-1}) (1 + 2z^{-1}) \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right) (1 - 0,8e^{j\pi/4}z^{-1}) (1 - 0,8e^{-j\pi/4}z^{-1}) \left(1 - \frac{1}{0,8}e^{j\pi/4}z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{0,8}e^{-j\pi/4}z^{-1}\right)$$

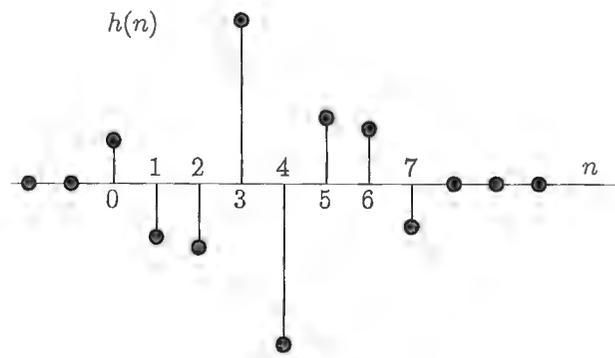
▪ Operando (con Matlab)

$$H(z) = 1 - 1,3991z^{-1} - 1,6462z^{-2} + 6,7533z^{-3} - 6,7533z^{-4} + 1,6462z^{-5} + 1,3991z^{-6} - z^{-7}$$

cuya transformada inversa es

$$h(n) = \delta(n) - 1,3991\delta(n - 1) - 1,6462\delta(n - 2) + 6,7533\delta(n - 3) - 6,7533\delta(n - 4) + 1,6462\delta(n - 5) + 1,3991\delta(n - 6) - \delta(n - 7)$$

▪ Como se aprecia en la gráfica

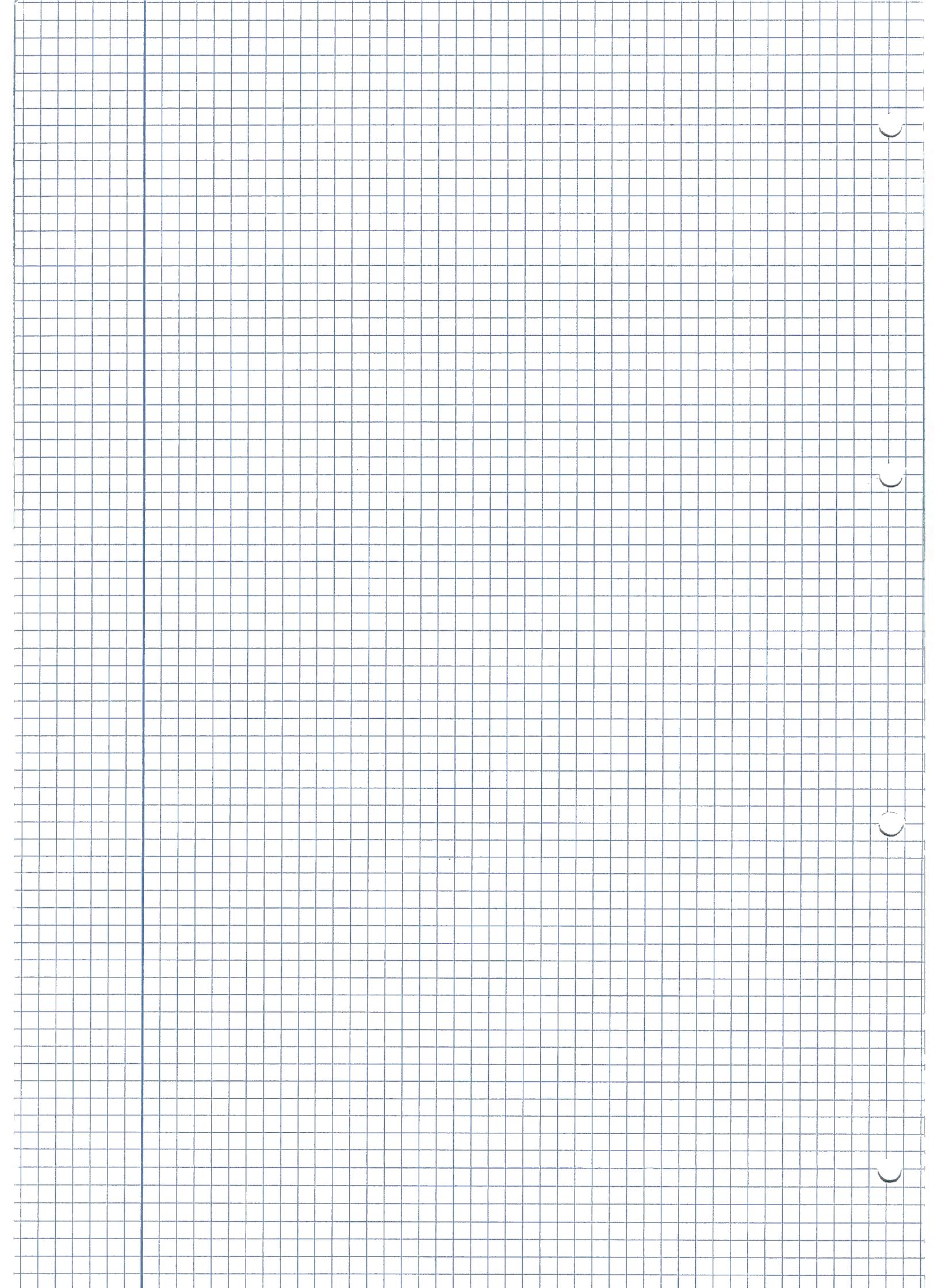


la respuesta al impulso cumple con las condiciones del enunciado: longitud 8 (par) y antisimétrica respecto del eje  $x = 3,5$  (simetría impar).

TEMA 4

DFT

(DISCRETE FOURIER TRANSFORM)



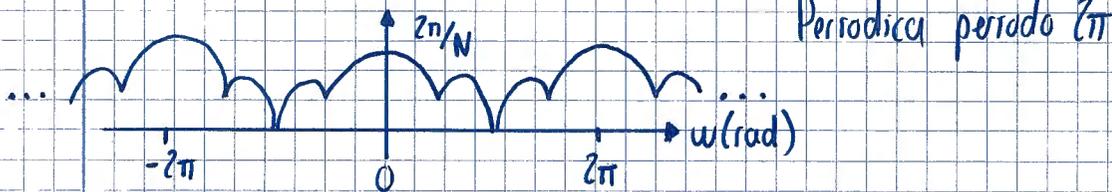
# Tema 4 DFT (Discrete Fourier Transform)

- 1) Introducción y propiedades
- 2) Convolución circular
- 3) Enventanado y resolución espectral (fotocaprado)

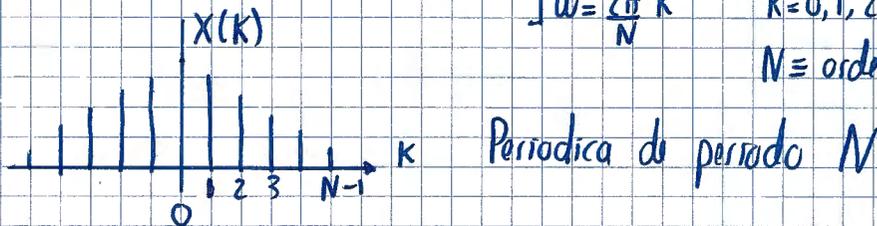
## 1) Introducción y propiedades

i)  $X(j\omega) = TF(x(t))$

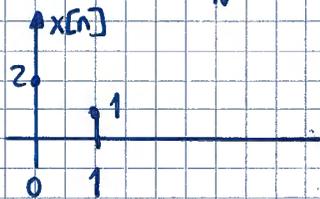
$X(e^{j\omega}) = TFD(x[n])$



•  $DFT(x[n]) = X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}$   $k=0, 1, 2, \dots, N-1$   
 $N \equiv \text{orden DFT}$



•  $X(k) = DFT_N(x[n]) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$   $k=0, 1, 2, \dots, N-1$

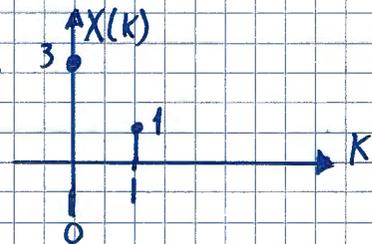


Par ejemplo:  $X(k) = DFT_2(x[n]) = \sum_{n=0}^{2-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{2}kn}$   $k=0, 1, \dots, N-1$

$X(k) = x[0] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{2}k \cdot 0} + x[1] e^{-j\frac{2\pi}{2}k \cdot 1} = 2 \cdot e^0 + 1 \cdot e^{-j\pi k}$  ;  $k=0, 1$

$x(k=0) = 2 + e^0 = 3$

$x(k=1) = 2 + e^{-j\pi} = 2 + (-1) = 1$



$N \geq \text{dur}(x[n]) \implies DFT_N(x[n]) = X(k)$  NO hay solapamiento

•  $x'[n] = \text{DFT}_N^{-1}(X(k)) = \text{IDFT}_N(X(k)) \neq x[n]$

• Si  $N \geq \text{dur}(x[n]) \rightarrow x'[n] = x[n]$

• Si  $N < \text{dur}(x[n]) \rightarrow x'[n] \neq x[n]$  hay solapamiento

$$x'[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+rN]$$
 Hay pérdida de información

•  $x'[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j \frac{2\pi}{N} nk}$   $n=0,1, \dots, N-1$  (ec. de síntesis)

Propiedades

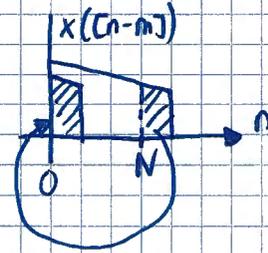
•  $x_1[n] \rightarrow X_1(k)$   
 $x_2[n] \rightarrow X_2(k)$  } Linealidad  $y[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$   
 $Y(k) = aX_1(k) + bX_2(k)$

•  $x_1[n] * x_2[n] \rightarrow X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$  Convolución Lineal

•  $x_1[n] \otimes_N x_2[n] \rightarrow X_1(k) \cdot X_2(k)$  Convolución Circular

• Módulo N desplazamiento  $x[(n-m)]_N$

$X(k) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} km}$



2) Convolución Circular

$x[n] \xrightarrow{\text{TFD}} X(e^{j\omega})$

$h[n] \xrightarrow{\text{TFD}} H(e^{j\omega})$

$x[n] \rightarrow h[n] \rightarrow y_c[n] = x[n] * h[n]$

$X(e^{j\omega}) \rightarrow H(e^{j\omega}) \rightarrow Y_c(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$  (via  $\text{TFD}^{-1}$ )

$x[n] \xrightarrow{\text{DFT}_N} X(k)$

$h[n] \xrightarrow{\text{DFT}_N} H(k)$

$\text{DFT}_N^{-1} \left\{ \begin{aligned} y_c[n] &= x[n] \otimes h[n] \\ Y_c(k) &= X_c(k) \cdot H(k) \end{aligned} \right.$

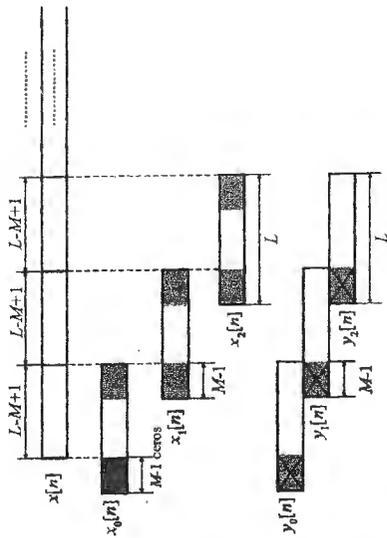
$y_c[n] = y_c[n] \iff N \geq \text{dur}(y_c[n]) = \text{dur}(x[n]) + \text{dur}(h[n]) - 1$

• Si  $N < \text{dur}(y_c[n]) \implies y_c[n] \neq y_c[n]$  Hay solapamiento

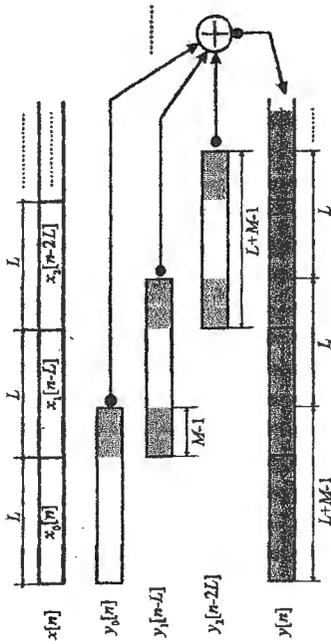
$y_c[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} y_c[n+rN]$

{ Ocurre lo mismo que en la prop. Módulo N desplazamiento

### Esquema del algoritmo overlap-save



### Esquema del algoritmo overlap-add



El método overlap-add se aplica realizando convoluciones circulares de longitud  $N = L + M - 1$ .

### Método overlap-save

- Concebido para aplicarse con la convolución circular.
- Se preservan las muestras de las soluciones parciales que coinciden con la convolución circular.

Sean  $L$  y  $M$  las longitudes de  $x[n]$  y  $h[n]$ . La convolución lineal y circular:

$$y[n] = x[n] * h[n], \quad y_c[n] = x[n] \otimes h[n].$$

donde:

$$y_c[n] = \begin{cases} \sum_{r=-\infty}^{\infty} y[n-rL], & 0 \leq n \leq L, \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

FFT Goertzel

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{kn}$$

Def.  $W_N^{kn} = e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = \Delta$

$$W_N^{-k0} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{-k(N-n)} \leftarrow X(k)$$

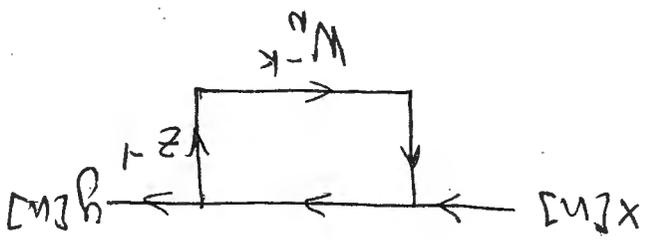
Def.  $h[n] = W_N^{-kn} \cdot w[n]$   
 $y[k] = x[n] * h[n] = \sum_{m=0}^{n-k} x[m] \cdot W_N^{-k(n-m)} \cdot u[n-m]$

$$X(k) = y[k] \Big|_{n=N}$$

$$X(k) = \sum_{m=0}^{N-k} x[m] \cdot W_N^{-k(N-m)} \cdot u[N-m]$$

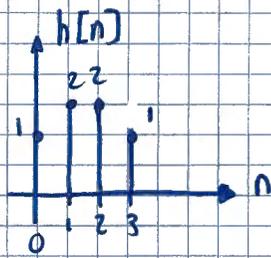
DFT  $\rightarrow$

$$H(z) = \frac{1 - W_N^{-k} \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$



# Problema DFT

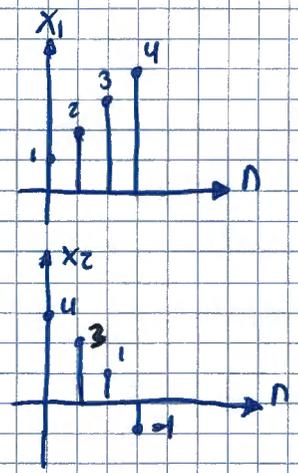
$$h = [1, 2, 2, 1]^T$$



$$X = [X_1^T, X_2^T, X_3^T]$$

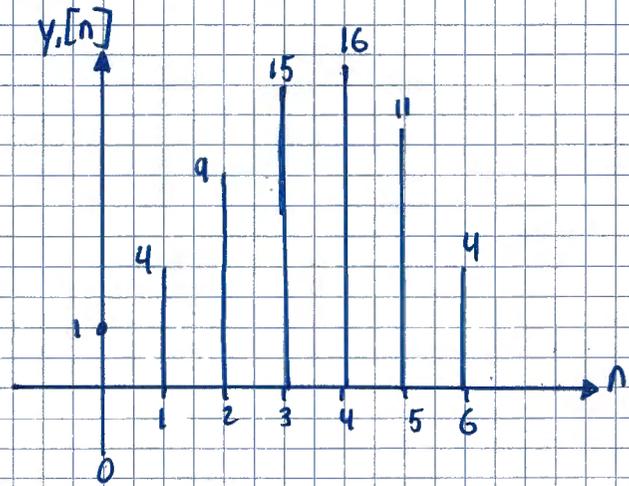
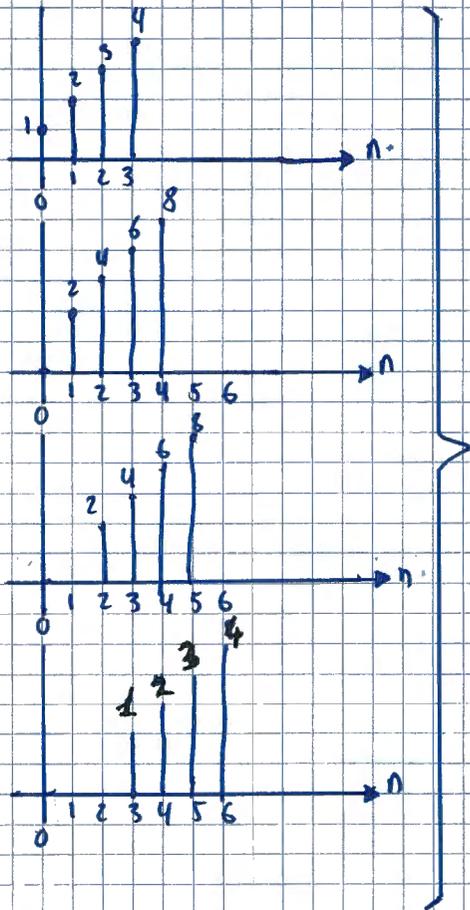
$$X_1 = [1, 2, 3, 4]^T$$

$$X_2 = [4, 3, 1, -1]^T$$



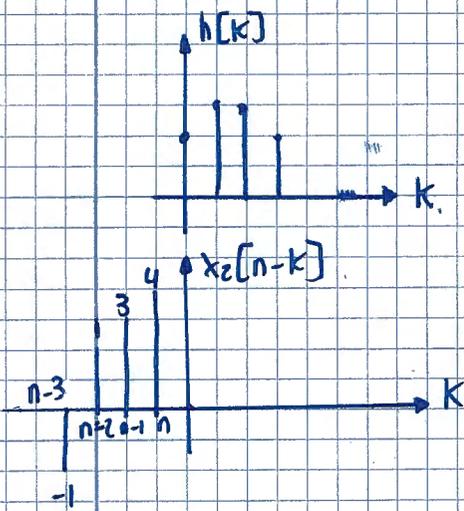
a)  $y_r[n] = x_r[n] * h[n]$   
 $y_c[n] = x_c[n] \otimes h[n]$

•  $y_r[n] = x_r[n] * (\delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \delta[n-3]) =$   
 $= x_r[n] + 2x_r[n-1] + 2x_r[n-2] + x_r[n-3]$  (Graficamente):

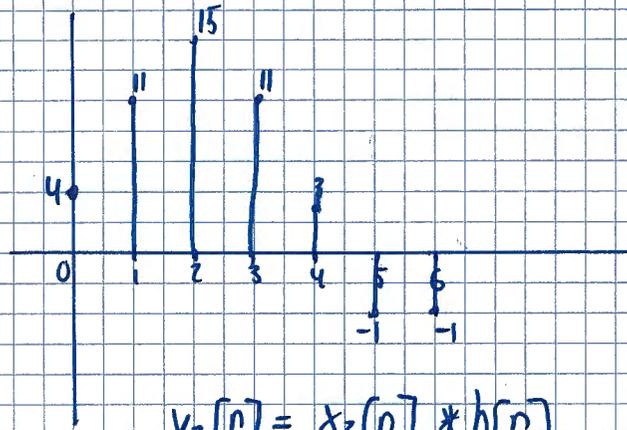


$$\text{dur}(y_r[n]) = 7 = \text{dur}(x_r[n]) + \text{dur}(h[n]) - 1$$

$$4 + 4 - 1 = 7$$



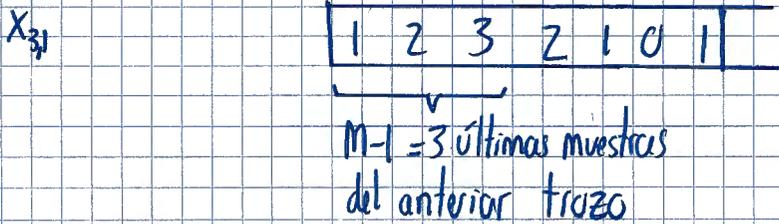
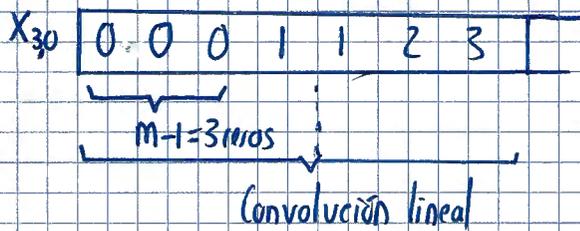
$$\begin{aligned}
 n < 0 &\rightarrow y_2[n] = 0 \\
 n = 0 &\rightarrow y_2[n] = 4 \cdot 1 = 4 \\
 n = 1 &\rightarrow y_2[n] = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 11 \\
 n = 2 &\rightarrow y_2[n] = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 15 \\
 n = 3 &\rightarrow y_2[n] = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 11 \\
 n = 4 &\rightarrow y_2[n] = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 = 3 \\
 n = 5 &\rightarrow y_2[n] = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = -1 \\
 n = 6 &\rightarrow y_2[n] = (-1) \cdot 1 = -1
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 y_2[n] &= x_2[n] * h[n] \\
 N \geq \text{dur}(y_2[n]) &= 7
 \end{aligned}$$

$$Y_{\text{circular}} = y_2[n]$$

b)  $x_3[n] = [1, 1, 2, 3, 2, 1, 0, 1]$   
 $h[n] = [1, 2, 2, 1]$   
 Overlap-save  
 $\text{dur}(h[n]) = M = 4$



Otro ejemplo  
 • Si  $x_3$  fuese más corta  
 $x_3[n] = [1, 1, 2, 3, 2, 1, 0]$  dur 7  
 $X_{30} = [000 \ 11 \ 23]$   
 $X_{31}[n] = [1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0]$   
 rellenamos con ceros

Otro ejemplo

⊗ Esto más claro.

• si  $x_3$  fuese más larga

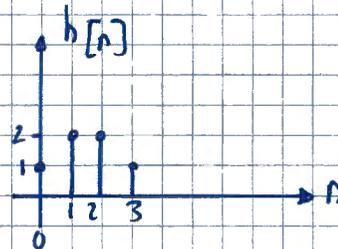
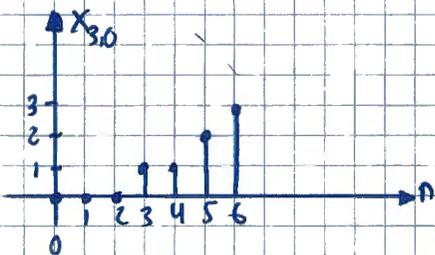
$$x_3[n] = [1, 1, 2, 3, 2, 1, 0, 1, 1, 2] \text{ dur } 10$$

$$x_{3,0} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3]$$

$$x_{3,1} = [1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1]$$

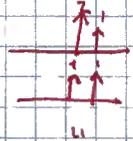
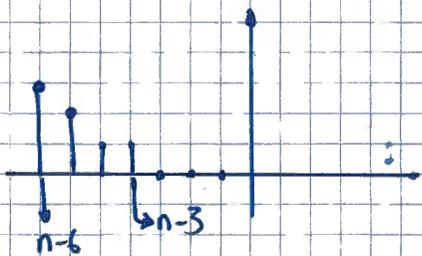
$$x_{3,2} = [1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 0 \ 0]$$

$$y_0 = x_{3,0} * h[n] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3] * [1, 2, 2, 1]$$



$$x_{3,0}[\cdot(n-k)] = x_{3,0}[-(k-n)]$$

⊗ Es suma y multiplicación de cada banda



$$n < 3 \rightarrow 0$$

$$n = 3 \rightarrow 1$$

$$n = 4 \rightarrow 2 + 1 = 3$$

$$n = 5 \rightarrow 2 + 2 + 2 = 6$$

$$n = 6 \rightarrow 1 + 2 + 4 + 3 = 10$$

$$n = 7 \rightarrow 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 11$$

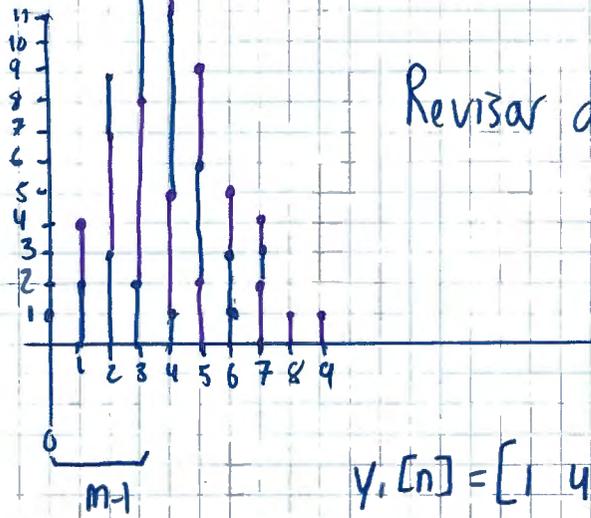
$$n = 8 \rightarrow 2 + 3 \cdot 2 = 8$$

$$n = 9 \rightarrow 3 \cdot 1 = 3$$

$$n = 10 \rightarrow 0$$

$$y_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 3 \ 6 \ 10 \ 11 \ 8 \ 3]$$

$$\begin{aligned}
 y_1 &= X_{31} * h[n] = [1, 2, 3, 2, 1, 0, 1] * [1, 2, 2, 1] \\
 &= X_{31} * [\delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \delta[n-3]] = \\
 &= X_{31}[n] + 2X_{31}[n-1] + 2X_{31}[n-2] + X_{31}[n-3]
 \end{aligned}$$



$$y_1[n] = [1 \ 4 \ 9 \ 13 \ 13 \ 9 \ 5 \ 3 \ 2 \ 1]$$

Overlap-add

$$y_c[n] = x[n] \otimes h[n]$$

$N \gg$  (dur  $y_c[n]$ )

$$y_c = y_c$$

Overlap-save

$$x[n] = \boxed{\quad} \boxed{\quad} \boxed{\quad}$$

$$\begin{aligned}
 y_0 &= \cancel{0} \ \cancel{0} \ \cancel{0} \ 1 \ 3 \ 6 \ 10 \ \boxed{11 \ 8 \ 3} \\
 y_1 &= \cancel{1} \ \cancel{4} \ \cancel{9} \ 13 \ 13 \ 9 \ 5 \ 3 \ 2 \ 1
 \end{aligned}$$

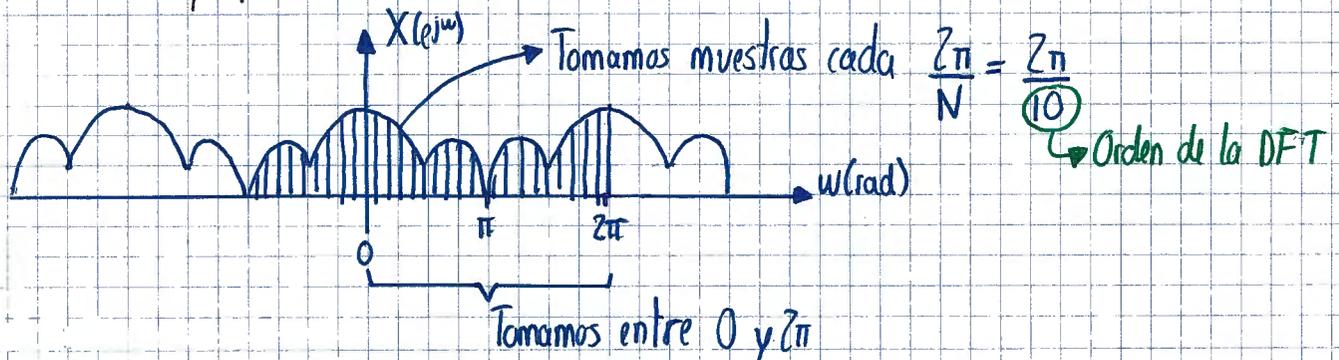
$M-1$  últimos  
 $M-1$  primeros del ss. bloques

~~$$y[n] = [1 \ 3 \ 6 \ 10 \ 13 \ 13 \ 9 \ 5]$$~~

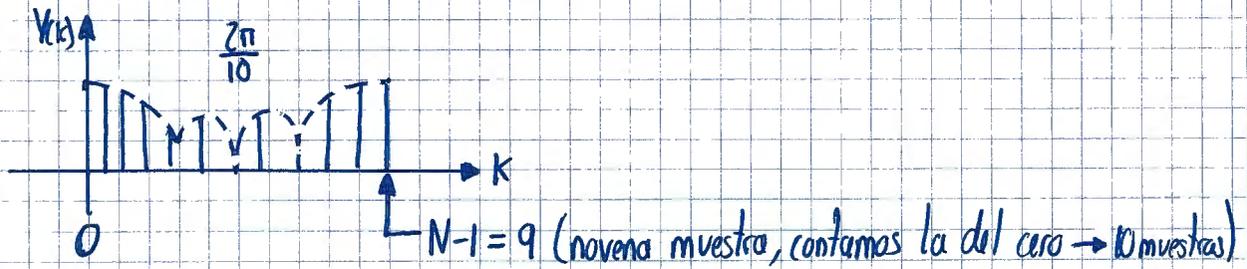
$$y[n] = [1 \ 3 \ 6 \ 10 \ 11 \ 8 \ 3 \ 13 \ 13 \ 9 \ 5 \ 3 \ 2 \ 1]$$

# PROBLEMAS LIBRO OPPENHEIM

(pg 670) **Problema 8.8:** Sea  $X(e^{j\omega})$  la transformada de Fourier de la secuencia  $x[n] = (0.5)^n u[n]$ . Sea  $y[n]$  una secuencia de duración finita de longitud 10. Es decir,  $y[n] = 0, n < 0$  e  $y[n] = 0$  para  $n \geq 10$ . La DFT de 10 puntos de  $y[n]$  denominada  $Y(k)$  corresponde a 10 muestras equispaciadas de  $X(e^{j\omega})$ . Es decir,  $Y(k) = X(e^{j2\pi k/10})$ . Determine  $y[n]$ .



Por tanto la DFT de orden 10 ( $Y(k)$ ) de  $X(e^{j\omega})$  será:



Como  $x[n] = (0.5)^n u[n] \rightarrow$  duración infinita }  $N=10 \geq \text{dur}(x[n]) \rightarrow$  Solapamiento  
 Si queremos hacer la  $DFT_{10}(x[n])$  }  $\downarrow \infty$

## TEORÍA:

Si  $x[n]$  tiene duración finita  $L$

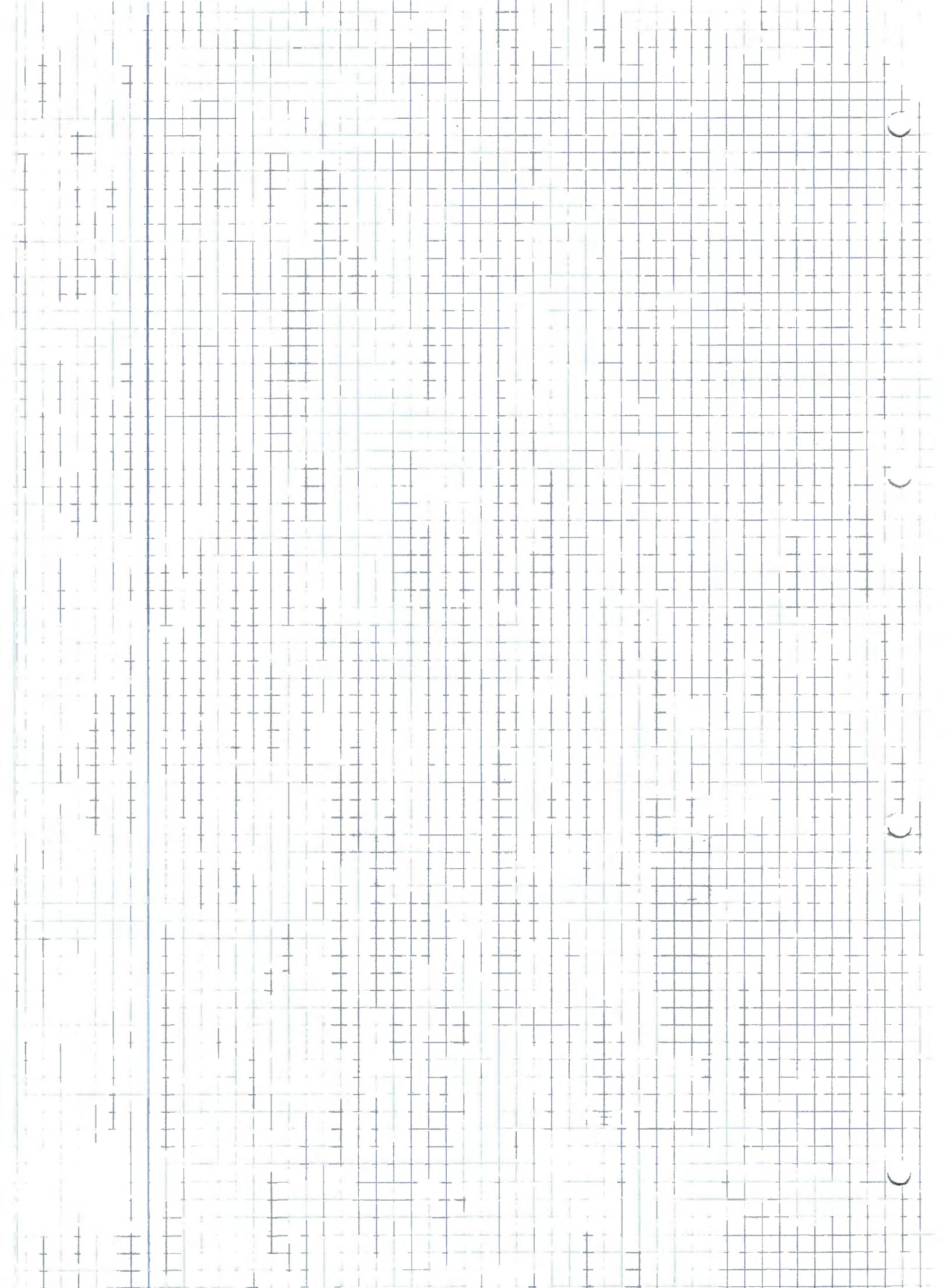
- $N \geq L \rightarrow X(k) = DFT_N(x[n]) = X(e^{j\omega})|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}$  (No hay solapamiento)
- $N < L \rightarrow DFT_N(x'[n])$  siendo  $x'[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+rN]$  (Solapamiento)

Como tenemos solapamiento:  $x'[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+rN] = \sum_{r=0}^{+\infty} x[n+r \cdot 10] = y[n]$

$x[n] = 0.5 \cdot u[n]$  es causal

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{r=0}^{+\infty} x[n+r \cdot 10] = \sum_{r=0}^{+\infty} (0.5)^{n+r \cdot 10} = (0.5)^n \cdot \sum_{r=0}^{+\infty} (0.5)^{10r}$$

$$= (0.5)^n \cdot \frac{1}{1-(0.5)^{10}} \Rightarrow y[n] = (0.5)^n \cdot \frac{1024}{1023} \quad n = [0, 9]$$



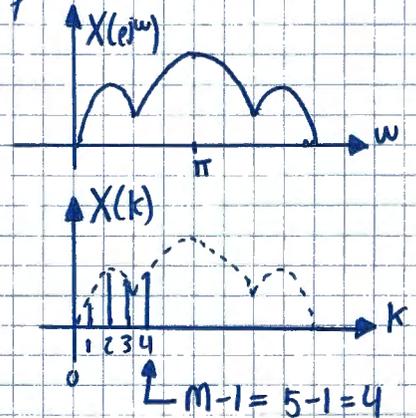
**Problema 8.9:** Considere una secuencia de duración finita  $x[n]$  de 20 puntos de forma que  $x[n] = 0$  para  $n < 0$  y  $n > 19$  y sea  $X(e^{j\omega})$  la transformada de Fourier de  $x[n]$ .

a) Si se desea evaluar  $X(e^{j\omega})$  en  $\omega = 4\pi/5$  calculando la DFT de  $M$  puntos, determine el mínimo valor posible de  $M$  y desarrolle un método para obtener  $X(e^{j\omega})$  en  $\omega = 4\pi/5$  utilizando ese valor de  $M$ .

$$X(k) = \text{DFT}_M(x[n]) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi k}{M}}, \text{ por tanto, } \frac{2\pi k}{M} = \frac{4\pi}{5} \rightarrow \frac{k}{M} = \frac{2}{5}$$

Por tanto sabemos que  $k=2$  y  $M=5$  con lo que tenemos:

$$X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{4\pi}{5}} = X(k=2) = \text{DFT}_5(x'[n])$$



Como  $M=5 < \text{dur}(x[n]) = 20 \rightarrow$  SOLAPAMIENTO

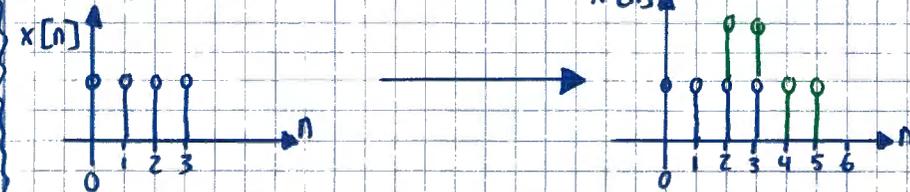
Por consiguiente:

$$x'[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+5r] = \sum_{r=0}^{+\infty} x[n+5r] = \sum_{r=0}^3 x[n+5r] \quad n=0, \dots, 19$$

↳ (causal ya que  $0 \leq n \leq 19$ )



OTRO EJEMPLO:



$$\text{DFT}_2(x'[n]) \rightarrow x'[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+2r] = \sum_{r=0}^{+\infty} x[n+2r] = x[n] + x[n+2], \quad n=0, 1, 2, 3$$

b) Si se desea evaluar  $X(e^{j\omega})$  en  $\omega = 10\pi/27$  calculando una DFT de  $L$  puntos, determine el mínimo valor posible de  $L$  y desarrolle un método para obtener  $X(e^{j\omega})$  utilizando ese valor de  $L$ .

$$X(k) = \text{DFT}_L(x[n]) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi k}{L}}, \text{ por tanto, } \frac{2\pi k}{L} = \frac{10\pi}{27} \rightarrow k=5 \text{ y } L=27$$

Como  $27 \geq \text{dur}(x[n]) = 20 \rightarrow$  NO hay solapamiento, por consiguiente:

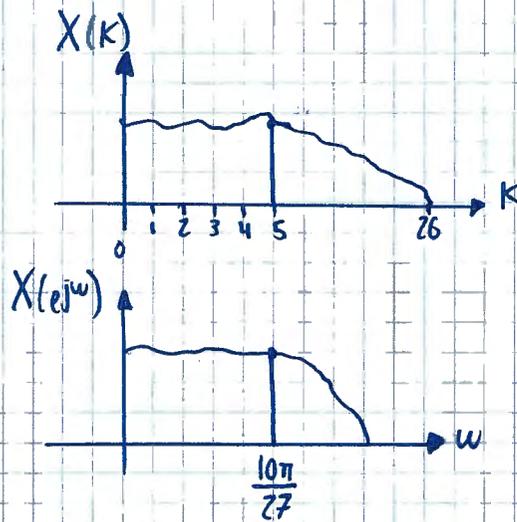
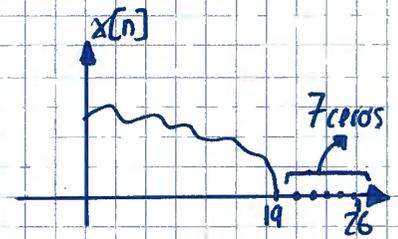
•  $x[n]$  se rellena con  $27-20=7$  ceros

•  $X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{10\pi}{27}} = X(k=5)$

Si nos pudiesen calcular además  $X(k)$ :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{19} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{27}nk}, \quad k=0, \dots, 26$$

$$X(k=5) = \sum_{n=0}^{19} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{27}n \cdot 5}$$



**Problema 8.12:** Suponga que se tienen dos secuencias de cuatro puntos  $x[n]$  y  $h[n]$  cuyos valores son:

$$x[n] = \cos(\pi n/2), \quad n=0,1,2,3$$

$$h[n] = 2^n, \quad n=0,1,2,3$$

a) Calcule la DFT de cuatro puntos  $X(k)$ .

$X(k) = \text{DFT}_4(x[n]) \rightarrow N=4 \geq \text{dur}(x[n])=4 \rightarrow$  NO hay solapamiento, por tanto,

$$X(k) = \text{DFT}_4(x[n]) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^3 \cos(\pi n/2) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}nk}, \quad k=0,1,2,3$$

$$= \cos(0) \cdot e^0 + \cos(\pi/2) \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}k} + \cos(2\pi/2) \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}2k} + \cos(3\pi/2) \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}3k} = 1 - e^{j\pi k}$$

$$\Rightarrow \underline{X(k) = 1 - (-1)^k, \quad k=0,1,2,3}$$

b) Calcule la DFT de cuatro puntos  $H(k)$ .

$H(k) = \text{DFT}_4(h[n]) \rightarrow N=4 \geq \text{dur}(h[n])=4 \rightarrow$  NO hay solapamiento, por tanto,

$$H(k) = \sum_{n=0}^3 h[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}nk} = \sum_{n=0}^3 2^n \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}nk} = 2^0 e^0 + 2^1 e^{-j\frac{\pi}{2}k} + 2^2 e^{-j\frac{\pi}{2}2k} + 2^3 e^{-j\frac{\pi}{2}3k}$$

$$\Rightarrow \underline{H(k) = 1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}k} + 4e^{-j\pi k} + 8e^{-j\frac{3\pi}{2}k}, \quad k=0,1,2,3}$$

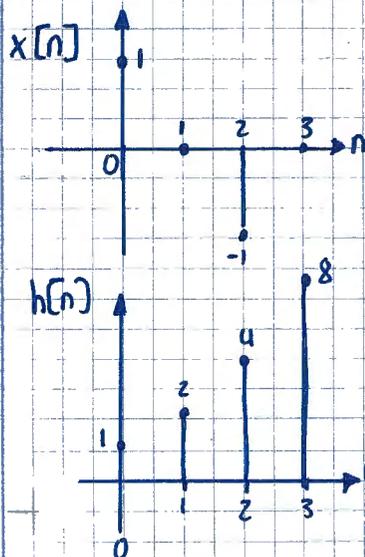
c) Calcule  $y_c[n] = x[n] \textcircled{4} h[n]$  realizando directamente la convolucion circular.

$$y_c[n] = x[n] \textcircled{4} h[n]$$

$$y_L[n] = x[n] * h[n]$$

Como  $\text{dur}(y_L[n]) = 4+4-1 = 7 \rightarrow N=4 < 7 \rightarrow y_c[n] \neq y_L[n]$

$$\Rightarrow \underline{y_c[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} y_L[n+4r]}$$



$$x[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$$

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 4\delta[n-2] + 8\delta[n-3]$$

Hacemos 1º) Convolucion lineal  
2º) Overlap-add

$$y_L[n] = x[n] * h[n] = h[n] * (\delta[n] - \delta[n-2]) = h[n] - h[n-2]$$

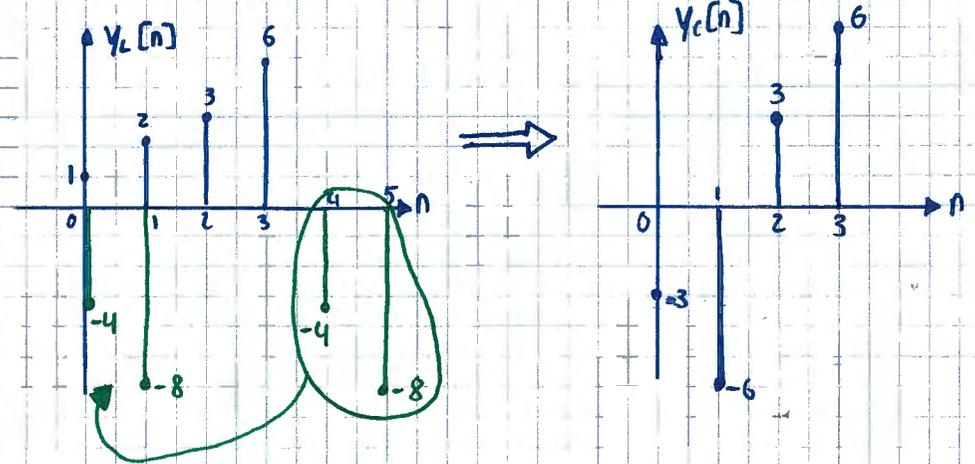
	0	1	2	3	4	5	
h[n]	1	2	4	8			
⊖ h[n-2]			1	2	4	8	
y_L[n]	1	2	3	6	-4	-8	

→ N=4 (convolución circular - Overlap-add)

⊕ solapamiento N>4 -4 -8

$$y_c[n] = -3 \quad -6 \quad 3 \quad 6$$

Gráficamente:



Si hubiera sido un solapamiento mayor:

3	3	3	2						

d) Calcule la secuencia y[n] del apartado (c) multiplicando las DFT de x[n] y h[n] y realizando la DFT inversa.

$$y_c[n] = \text{DFT}^{-1}(Y(k)) \text{ usando DFT}$$

- $\left. \begin{array}{l} x[n] \xrightarrow{\text{DFT}_4} X(k) \\ h[n] \xrightarrow{\text{DFT}_4} H(k) \end{array} \right\} Y(k) = X(k) \cdot H(k) \xrightarrow{\text{DFT}_4^{-1}} y_c[n] \rightarrow \text{Se produce solapamiento}$
- $\left. \begin{array}{l} x[n] \xrightarrow{\text{DFT}_7} X(k) \\ h[n] \xrightarrow{\text{DFT}_7} H(k) \end{array} \right\} Y(k) = X(k) \cdot H(k) \xrightarrow{\text{DFT}_6^{-1}} y_L[n] \rightarrow \text{Así NO se produce solapamiento}$   
 $(\text{dur}(y_L[n]) = 3+4-1=6)$

Como nos piden en el enunciado

$$Y(k) = (1 - e^{-j\pi k}) \cdot (1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}k} + 4e^{-j\pi k} + 8e^{-j\frac{3\pi}{2}k}) = \underbrace{1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}k} + 4e^{-j\pi k} + 8e^{-j\frac{3\pi}{2}k}}_{a)} \cdot \underbrace{(1 - e^{-j\pi k})}_{b)}$$

$$= 1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}k} + 4e^{-j\pi k} + 8e^{-j\frac{3\pi}{2}k} - e^{-j\pi k} - 2e^{-j\frac{3\pi}{2}k} - 4e^{-j2\pi k} - 8e^{-j\frac{5\pi}{2}k} =$$

$$= -3 + 6e^{-j\frac{3\pi}{2}k} + 3e^{-j\pi k} - 6e^{-j\frac{\pi}{2}k}$$

Como sabemos  $y_c[n] = \text{DFT}^{-1}(Y(k)) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) e^{j \frac{2\pi}{N} \cdot k n} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 Y(k) e^{j \frac{2\pi}{4} k n}$

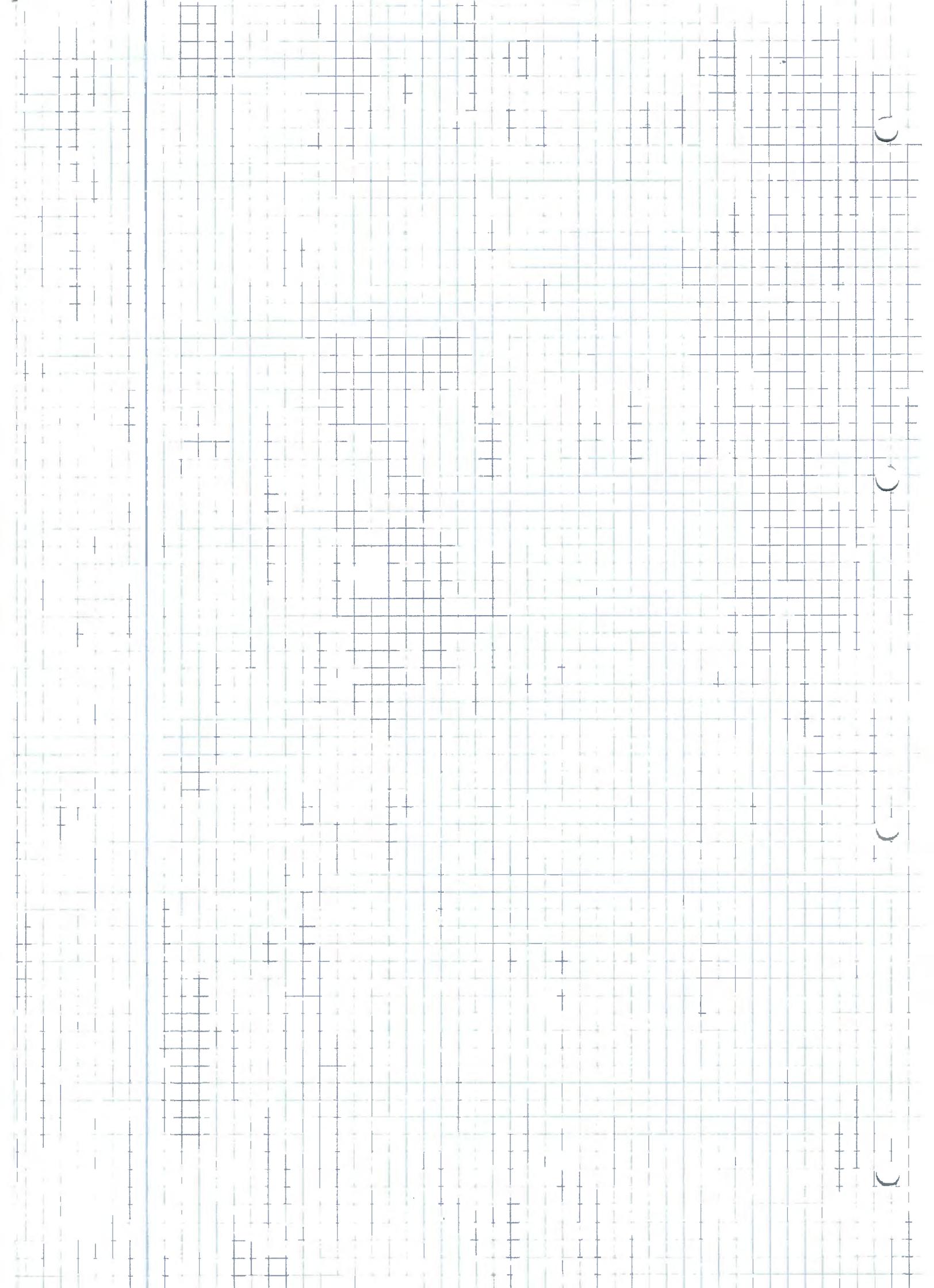
$$\Rightarrow y_c[n] = \frac{1}{4} \left( Y(0) + Y(1) \cdot e^{j \frac{2\pi}{4} n} + Y(2) \cdot e^{j \frac{2\pi}{4} 2n} + Y(3) \cdot e^{j \frac{2\pi}{4} 3n} \right)$$

Otra forma de verlo, mediante la propiedad:  $e^{j \frac{2\pi}{N} n_0 k} \xrightarrow{\omega} \delta[n - n_0]$

$$Y(k) = Y(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N} \cdot k} \xrightarrow{\text{TFD}^{-1}} y_c[n]$$

$$Y(k) = \underbrace{-3}_{n=0} - \underbrace{6e^{-j\frac{\pi}{2}k}}_{n=1} + \underbrace{3e^{-j\frac{2\pi}{4}k}}_{n=2} + \underbrace{6e^{-j\frac{3\pi}{4}k}}_{n=3}$$

$$\Rightarrow \underline{y_c[n] = -3\delta[n] - 6\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 6\delta[n-3]}$$

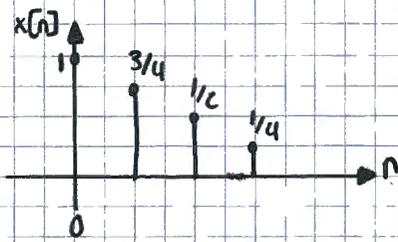


(2ª Edición)

**Problema 8.25:** Considere la secuencia  $x[n]$  de duración finita de la figura. La DFT de cuatro puntos de  $x[n]$  se la denota como  $X(k)$ . Dibuje la secuencia  $y[n]$  cuya

DFT es:

$$Y(k) = W_4^{3k} X(k)$$



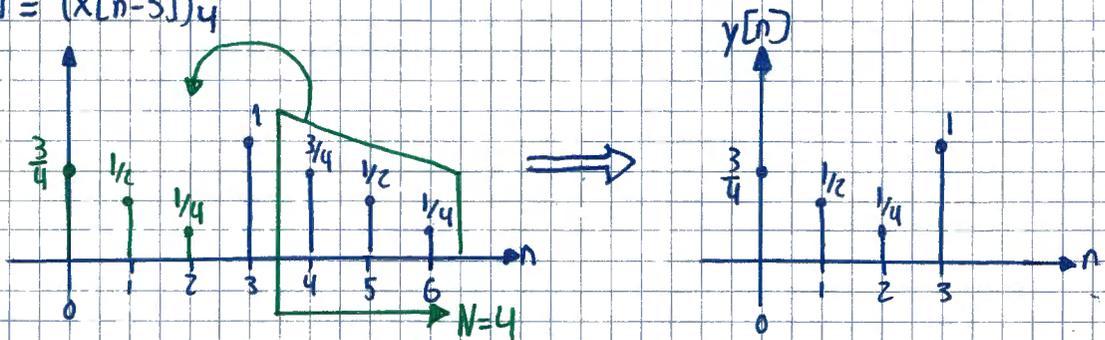
NOTA TEÓRICA:  $X(k) = \text{DFT}_N(x[n]) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} n k} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{nk}$

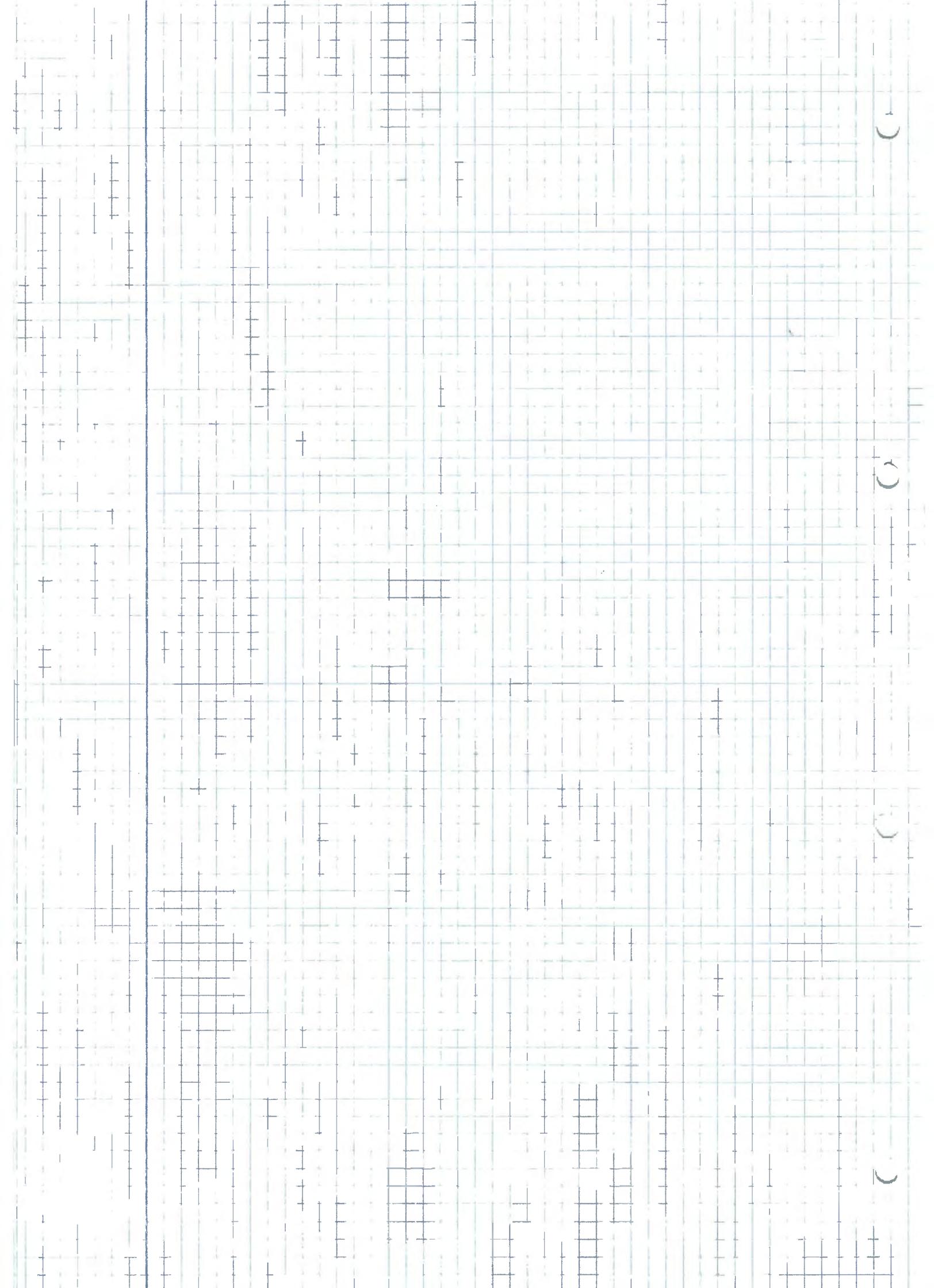
$W_N^{nk}$  es una matriz

$$W_N^{nk} = \begin{matrix} & n: 0, 1, 2, 3, \dots, N-1 & & k: \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ N-1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ (1,1) & (2,1) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (1,2) & (2,2) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix} & & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ N-1 \end{matrix} \end{matrix} \rightsquigarrow X(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ N-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N-1) \times (N-1) \end{bmatrix} W_N^{nk} \cdot \begin{bmatrix} x[n] \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ N-1 \end{bmatrix}$$

$$Y(k) = X(k) \cdot W_4^{3k} = X(k) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{4} 3k} \iff \text{Propiedad} \iff \underline{\underline{y[n] = (x[n-3])_4}}$$

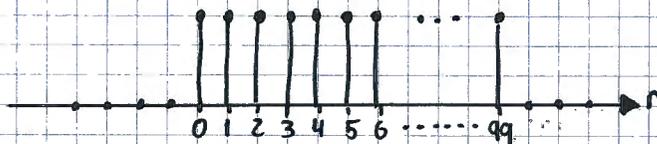
$$y[n] = (x[n-3])_4$$



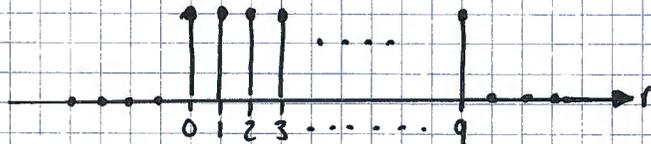


(2ª Edición) Problema 8.27: Dadas las dos secuencias

$$x_1[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 99 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$



$$x_2[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 9 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$



a) Determine y dibuje la convolución lineal  $x_1[n] * x_2[n]$

$$y_L[n] \rightarrow \text{duración}(y_L[n]) = 100 + 10 - 1 = 109$$

⊗ la convolución de dos pulsos da un trapecio (convoluciones Tema 1 SSIT)

$$\bullet n < 0 \rightarrow y_L[n] = 0$$

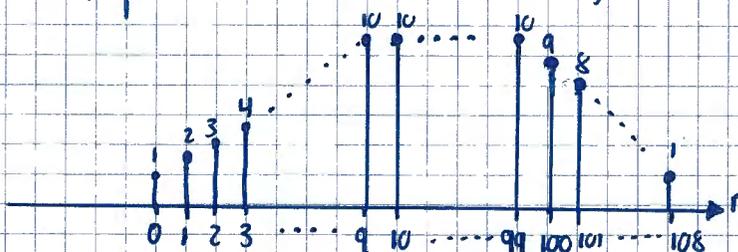
$$\bullet n = 0 \rightarrow y_L[n] = 1$$

$$\bullet n = 1 \rightarrow y_L[n] = 2$$

$$\bullet n = 2 \rightarrow y_L[n] = 3$$

$$\vdots$$

$$\bullet n = 9 \rightarrow y_L[n] = 10$$

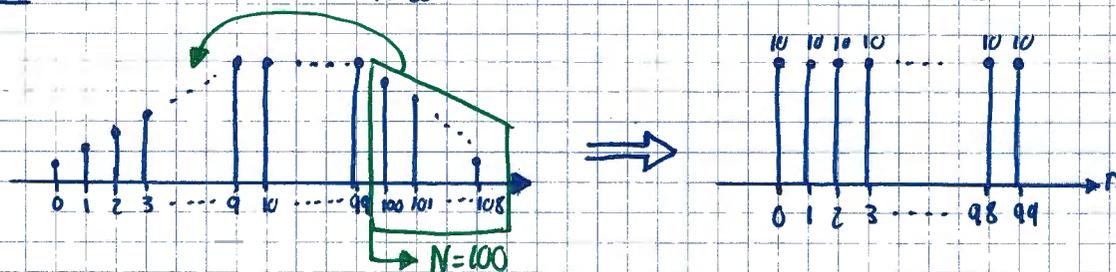


$$y_L[n] = \begin{cases} n+1 & 0 \leq n \leq 9 \\ 10 & 10 \leq n \leq 99 \\ 109-n & 100 \leq n \leq 108 \end{cases}$$

b) Determine y dibuje la convolución circular de 100 puntos  $x_1[n] \circledast x_2[n]$

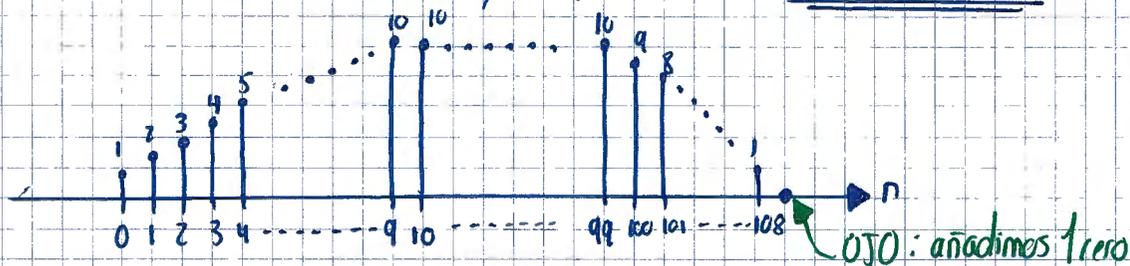
$$N = 100 < \text{dur}(y_L[n]) = 109 \rightarrow \text{Hay solapamiento}$$

$$y_{c1} = x_1[n] \circledast x_2[n] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} y_L[n+100l] = \underline{\underline{10(u[n] - u[n-99])}}$$



c) Determine y dibuje la convolución circular de 110 puntos  $x_1[n] \circledast x_2[n]$

$$N = 110 \geq \text{duración}(y_L[n]) = 109 \rightarrow \text{NO hay solapamiento} \rightarrow \underline{\underline{y_{c2}[n] = y_L[n]}}$$



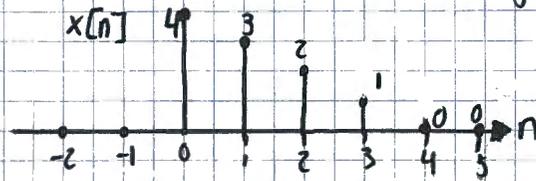
)

)

)

)

(2ª Edición) Problema 8.26: Consider la secuencia real de longitud finita de la figura:

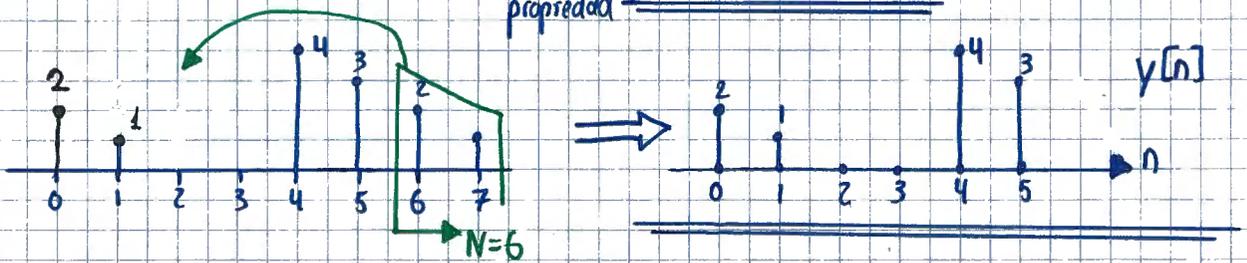


a) Dibuje la secuencia de longitud finita  $y[n]$  cuya DFT de seis puntos es:

$$Y(k) = W_6^{4k} X(k)$$

donde  $X(k)$  es la DFT de seis puntos de  $x[n]$

$$Y(k) = W_6^{4k} X(k) = X(k) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{6} 4k} \xLeftrightarrow{\text{propiedad}} \underline{y[n] = (x[n-4])_6}$$



b) Dibuje la secuencia de longitud finita  $w[n]$  cuya DFT de seis puntos es  $W(k) = \text{Re}\{X(k)\}$

Toda señal  $x[n]$  se puede expresar como  $x[n] = X_{ep}[n] + X_{op}[n]$

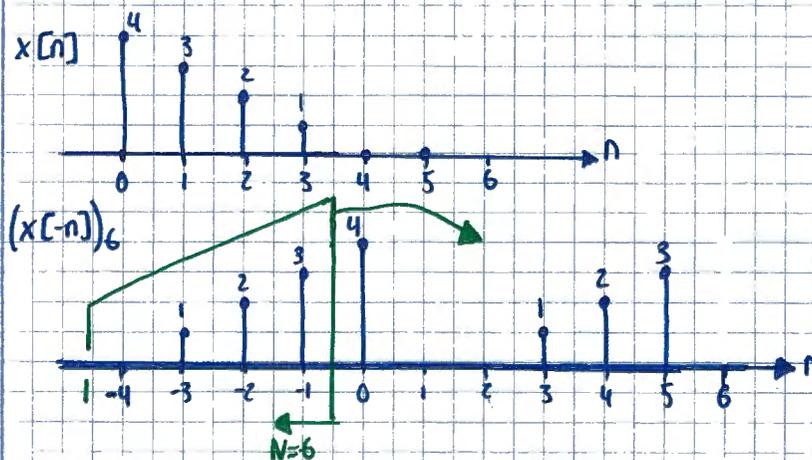
ep = even periodicity  
op = odd periodicity

↓ DFT

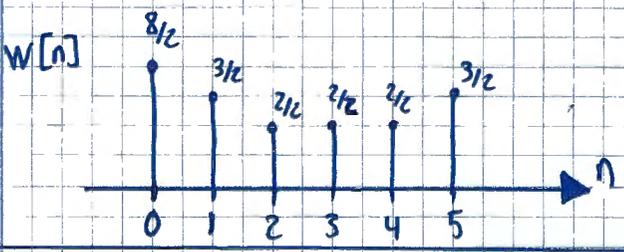
$$X(k) = \text{Re}\{X(k)\} + j \text{Im}\{X(k)\}$$

$$\text{Re}\{X(k)\} = W(k) = \text{DFT}_6\{w[n]\} \rightarrow w[n] = X_{ep}[n] = \frac{1}{2}(x[n] + (x[-n])_N)$$

$N=6$



⊕



c) Dibuje la secuencia de longitud finita  $q[n]$  cuya DFT de 3 puntos es:

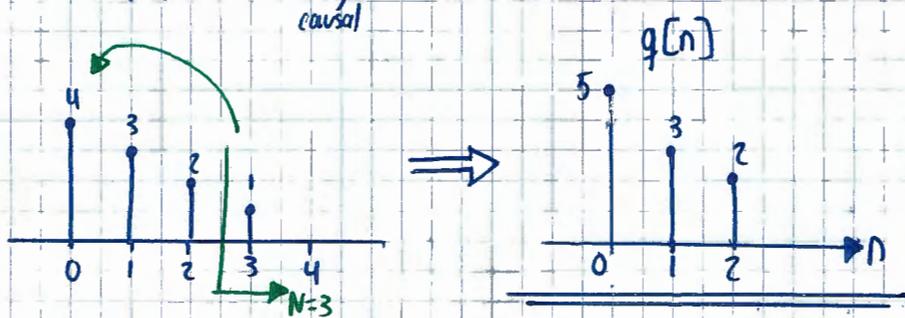
$$Q(K) = X(2K) \quad K=0,1,2.$$

Y luego nos quedamos con  $K=0,2,4$

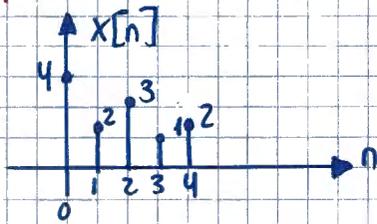
OPCIÓN 1:  $X(K) = \text{DFT}_6\{x[n]\} = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j\frac{2\pi nK}{6}} = 4e^0 + 3e^{j\frac{2\pi K}{6}} + 2e^{-j\frac{2\pi K}{6}} + 1e^{j\frac{2\pi K}{6}}$   $K=0,1,\dots,5$

OPCIÓN 2:  $Q(K) = X(2K) = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{j\frac{2\pi n2K}{6}} = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{j\frac{2\pi nK}{3}} = \text{DFT}_3\{x'[n]\}$

$$q[n] = x'[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+3r] = \sum_{r=0}^{+\infty} x[n+3r]$$



# Septiembre 2010 Problema 3



Notas enunciado:  $X(k) = \text{DFT}^5(x[n])$   
 $W_N^k = e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$

a)  $a[n] / \text{DFT}^5(a[n]) = 0.5 X(k) \cdot W_5^2$  ;  $k = 0, 1, 2, 3, 4$

$A(k) = 0.5 X(k) \cdot e^{j\frac{2\pi}{5}k}$  (2)

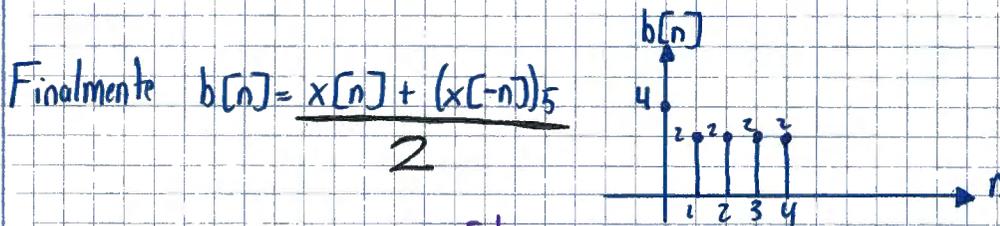
$a[n] = 0.5 x[(n-2)]_5$

b)  $b[n] / \text{DFT}^5(b[n]) = \text{Re}\{X(k)\}$   $k = 0, 1, 2, 3, 4$

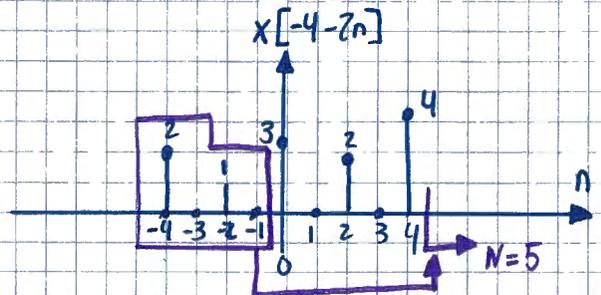
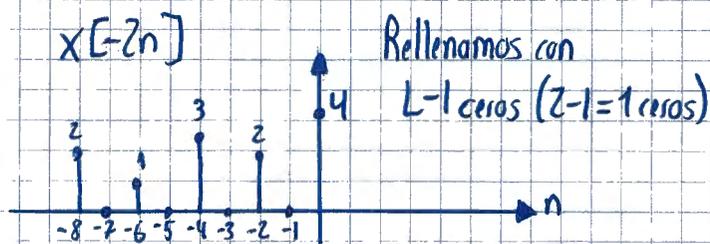
$x_e[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2} \xrightarrow{\text{TFD}} \text{Re}\{X(e^{j\omega})\}$   
even = par  
 $x_o[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{2} \xrightarrow{\text{TFD}} j \text{Im}\{X(e^{j\omega})\}$   
odd = impar

$b[n] = x_e[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2}$

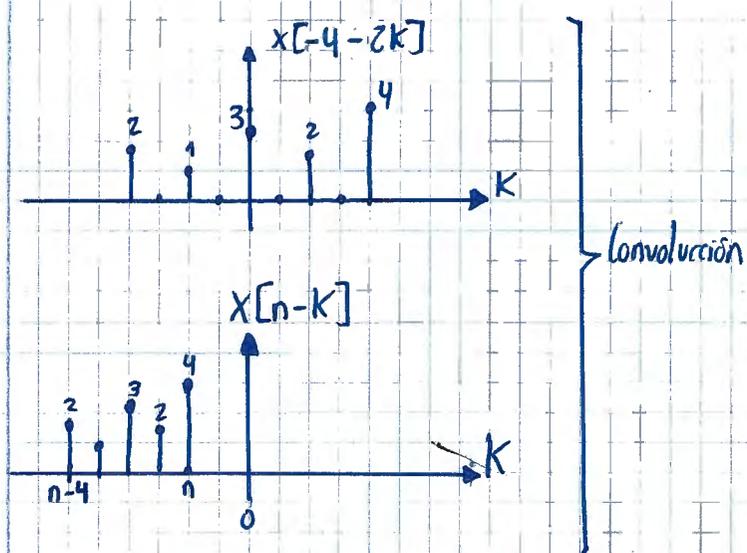
$X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi k}{5}}$



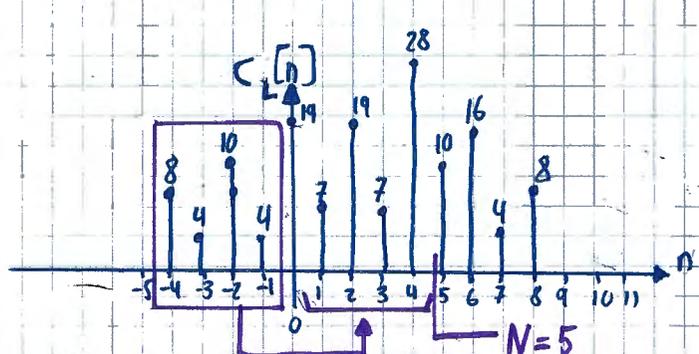
c)  $c[n] = x[n] \otimes x[-2n]$  (5)  $\times$  ~~5~~  $x[-2n]$   
 Este menos no venia en el enunciado.



Haremos la convolución lineal y luego módulo 5 dejando quieta  $x[-4-2n]$  y desplazando  $x[n]$ :

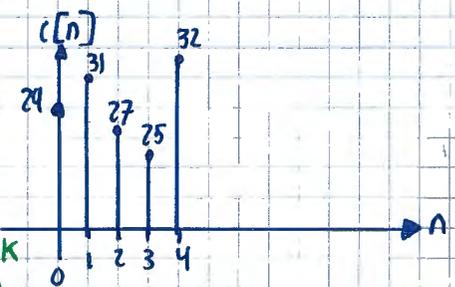


- $n < -4 \rightarrow c[n] = 0$
- $n = -4 \rightarrow c[n] = 4 \cdot 2 = 8$
- $n = -3 \rightarrow c[n] = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4$
- $n = -2 \rightarrow c[n] = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 10$
- $n = -1 \rightarrow c[n] = 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4$
- $n = 0 \rightarrow c[n] = 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 19$
- $n = 1 \rightarrow c[n] = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 7$
- $n = 2 \rightarrow c[n] = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 19$
- $n = 3 \rightarrow c[n] = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 7$
- $n = 4 \rightarrow c[n] = 4 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 28$
- $n = 5 \rightarrow c[n] = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 10$
- $n = 6 \rightarrow c[n] = 3 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 16$
- $n = 7 \rightarrow c[n] = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 4$
- $n = 8 \rightarrow c[n] = 2 \cdot 4 = 8$
- $n \geq 9 \rightarrow c[n] = 0$



Clavel

N=0					N=5							
8	4	10	4	19	7	19	7	28	10	16	4	8
				10	16	4	8					
				8	4	10	4					
				29	31	27	25	32				



d)  $d[n] / \text{DFT}^5(d[n]) = \text{DFT}^3\{x[2n]\} + W_5^k \text{DFT}^3\{x[2n+1]\} \quad k=0,1,2,3,4$

Definición de FFT!!  $e^{j\frac{2\pi}{N}k}$

Propiedad FFT<sup>N</sup>  
 $\text{DFT}^M(x[n]) = \text{DFT}^M\{x[(N-m) \cdot n]\} + W_N^k \text{DFT}^M\{x[(N-m)n+1]\}$

Por definición cogemos la DFT con  $N-2 = 5-2=3$

$N=5$   
 $M=3$

'' FFT<sup>5</sup>(x[n])

FFT(x[n])  
 $d[n] = x[n]$

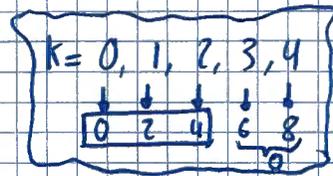
e)  $e[n] / \text{DFT}^3[e[n]] = X(2k) \quad k=0,1,2,3,4$

$X(k) = \text{DFT}_5(x[n]) = \sum_{n=0}^{5-1} x[n] e^{j\frac{2\pi}{5}nk} =$

$= x[0] \cdot e^0 + x[1] e^{j\frac{2\pi}{5}k} + x[2] e^{j\frac{2\pi}{5}2k} + x[3] \cdot e^{j\frac{2\pi}{5}3k} + x[4] e^{j\frac{2\pi}{5}4k}$

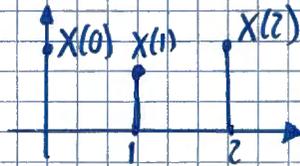
$\Rightarrow X(k) = 4 + 2e^{j\frac{2\pi}{5}k} + 3e^{j\frac{2\pi}{5}2k} + 1e^{j\frac{2\pi}{5}3k} + 2e^{j\frac{2\pi}{5}4k}$

$$\Rightarrow X(2k) = X(k) \text{ en } k=0, 2, 4$$



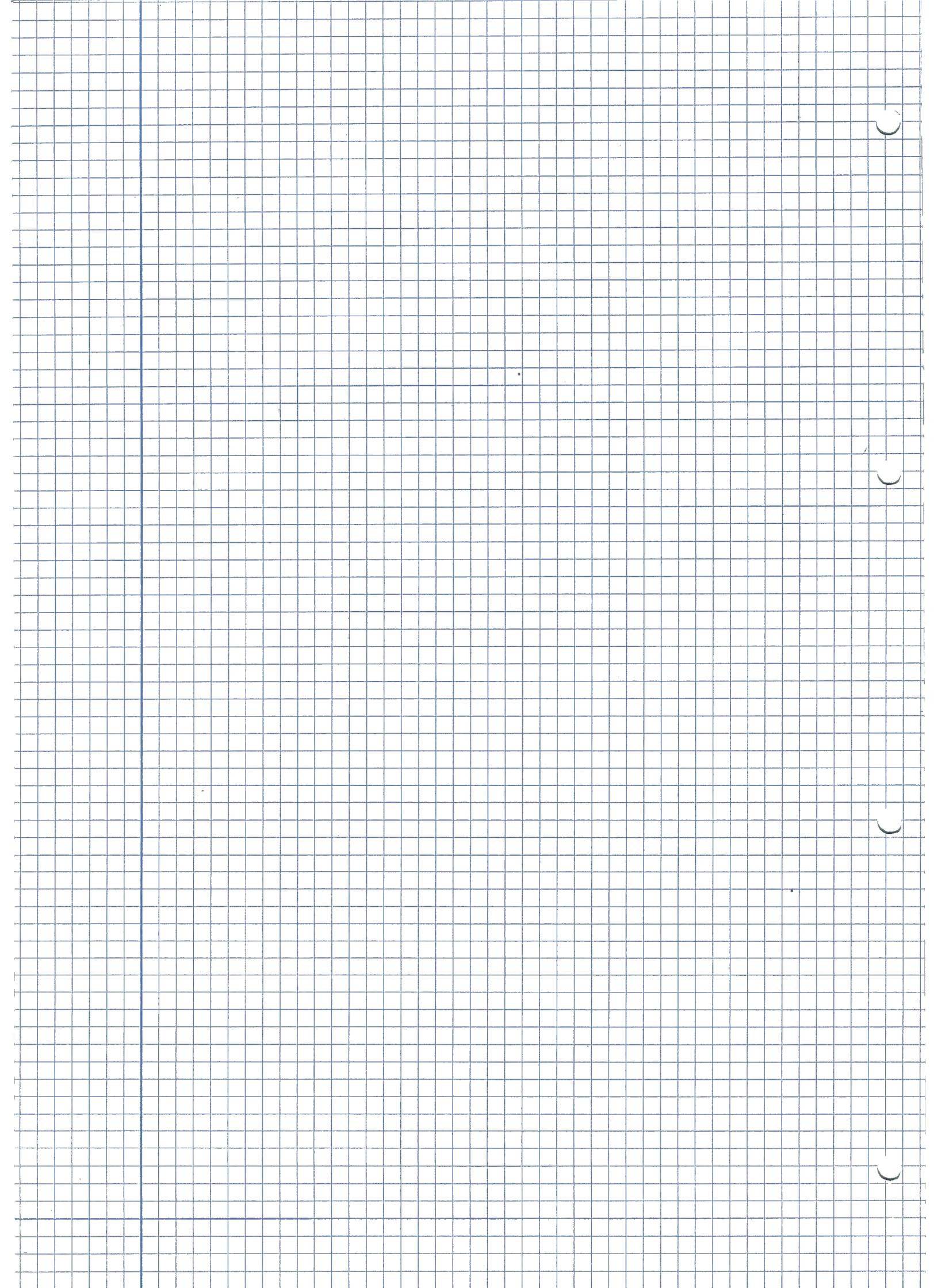
$$X(2k) \begin{cases} \bullet k=0 \rightarrow X(0) = 4 + 2 + 3 + 1 + 2 = 12 \\ \bullet k=1 \rightarrow X(2) = 4 + 2 \cdot e^{-j4\pi/5} + 3 \cdot e^{-j8\pi/5} + e^{-j12\pi/5} + 2 \cdot e^{-j16\pi/5} \\ \bullet k=2 \rightarrow X(4) = 4 + 2 \cdot e^{-j8\pi/5} + 3 \cdot e^{-j16\pi/5} + e^{-j20\pi/5} + 2 \cdot e^{-j24\pi/5} \end{cases}$$

$$E(k) = X(2k) = \text{muestra de } X(k)$$



$$e[n] = \text{DFT}_3^{-1}(E(k)) = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{3-1} E(k) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}kn} \quad n=0, 1, 2$$


---



## Problema 8.49

$$\begin{array}{l} \text{duración } (x_1[n]) \rightarrow \infty \\ \text{Estable} \\ X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{duración } (x_2[n]) = N \\ \text{DFT}_N(x_2[n]) = X_2(k) = X_1(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \quad k=0,1,2,3,\dots,N-1 \\ \text{¿ } x_2[n]? \end{array} \right.$$

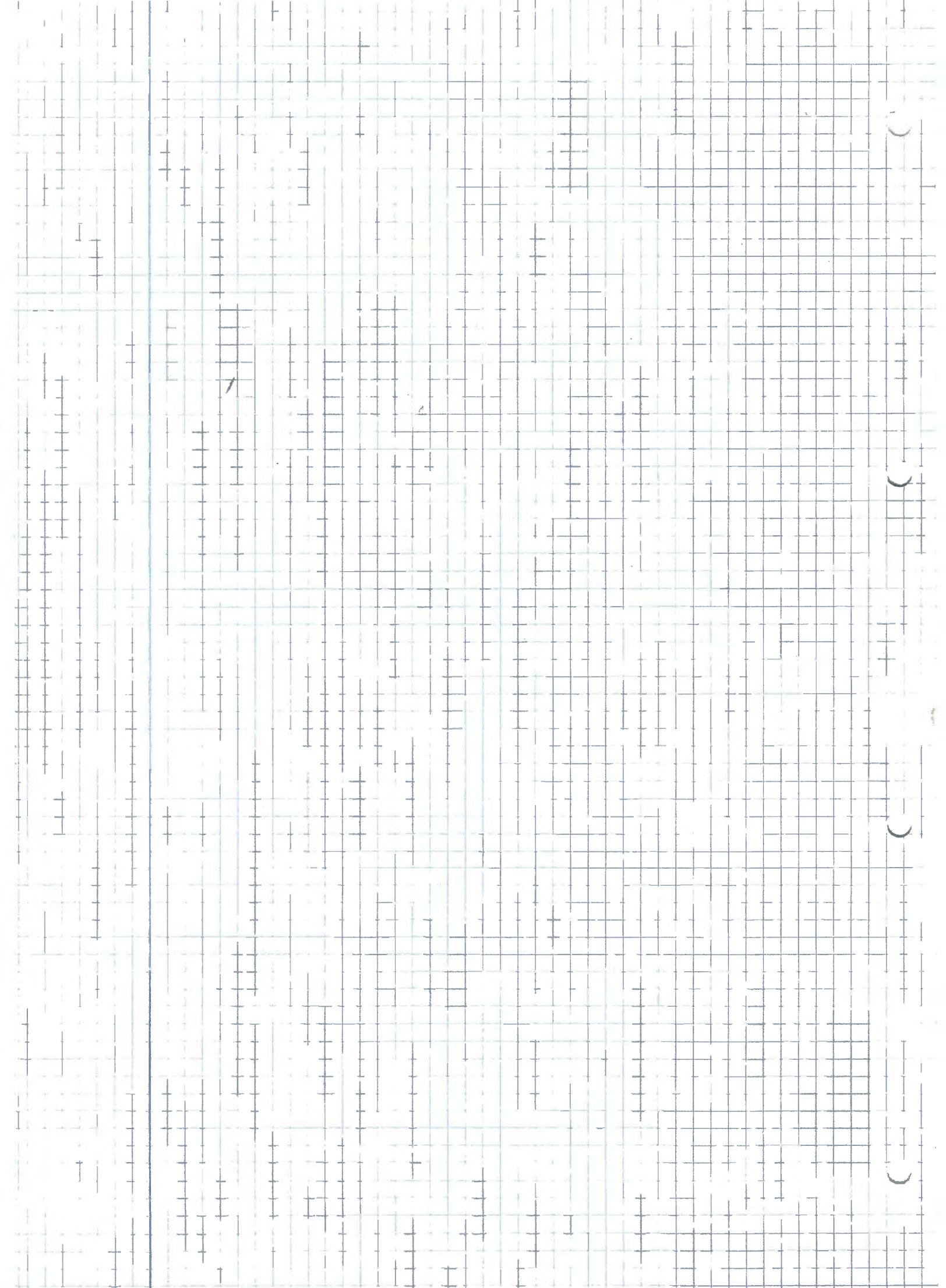
$$x_2[n] = \text{DFT}_N^{-1}(X_2(k))$$

$$X_2(k) = X_1(k) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = X_1\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)$$

$$x_2[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_1[n+rN] \quad \text{DFT de orden } N \text{ de una señal infinita.}$$

$$x_1[n] = \mathcal{I}\mathcal{Z}^{-1}(X_1(z)) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u[n]$$

$$\underline{x_2[n]} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+rN} u[n+rN] = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+rN} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{rN} = \underline{\underline{\left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^N}}}$$



## Problema 10.1

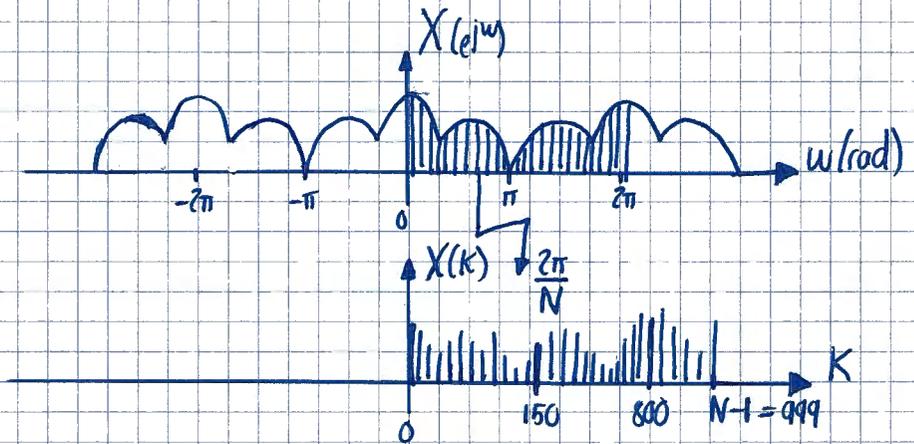
$X_c(t)$  BW = 5 KHz      a)  $K=150$  ¿ $F_k$ ?

$f_s = 10$  Kmuestras/seg      b)  $K=800$  ¿ $F_k$ ?

$x[n] = X_c(nT_s)$

$T_s = 1/f_s$   
DFT  $1000 = N$

$X(k)$



①  
Calculamos la  $\omega$  correspondiente

a)  $\frac{2\pi}{N} K_a = \omega_0 \implies \omega_0 = \frac{2\pi}{1000} \cdot 150 = \underline{0.3\pi \text{ rad}}$

b)  $\frac{2\pi}{N} K_b = \omega_1 \implies \omega_1 = \frac{2\pi}{1000} \cdot 800 = \underline{1.6\pi \text{ rad}}$

②  
Calculamos la  $F_k$

a)  $\underline{\Omega_0} = \frac{\omega_0 \text{ (rad)}}{T_s \text{ (seg)}} = \omega_0 \text{ (rad)} \cdot f_s \text{ (Hz)} = 0.3\pi \cdot 10 \cdot 10^3 = \underline{3\pi \cdot 10^3 \text{ (rad/seg)}}$

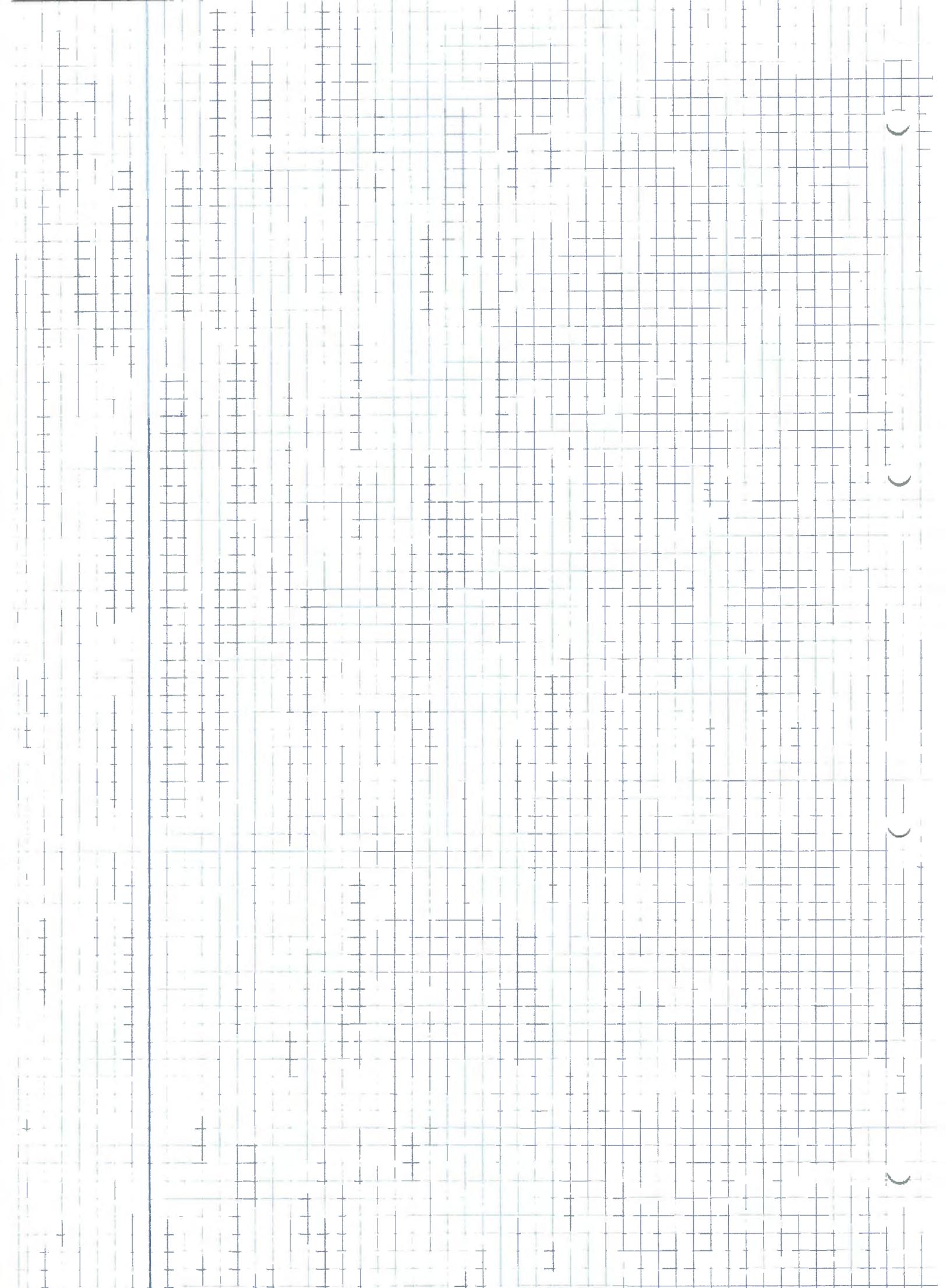
$\underline{f_0} = \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{3\pi \cdot 10^3}{2\pi} = \underline{1.5 \cdot 10^3 \text{ (muestras por segundo)}}$

b)  $\underline{\Omega_1} = \frac{\omega_1 \text{ (rad)}}{T_s \text{ (seg)}} = \omega_1 \text{ (rad)} \cdot f_s \text{ (Hz)} = 1.6\pi \cdot 10 \cdot 10^3 = \underline{16\pi \cdot 10^3 \text{ (rad/seg)}}$

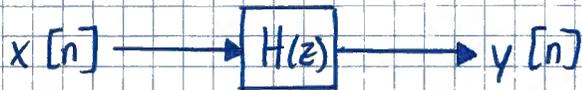
$\underline{f_1} = \frac{\Omega_1}{2\pi} = \frac{16\pi \cdot 10^3}{2\pi} = \underline{8 \cdot 10^3 \text{ (muestras/seg)}}$   
 ~~$-2000 \text{ Hz}$~~

Resumen:  $F_k = F_s \cdot \frac{K}{N}$  si  $0 \leq K \leq N/2$

$F_k = \frac{F_s}{N} (K-N)$  si  $\frac{N}{2} \leq K \leq N$



Problema 8.60:



$$H(z) = \frac{1}{z - bz^{-1}}$$

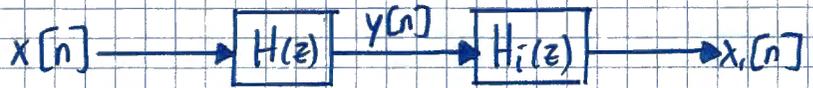
Queremos recuperar  $x[n]$  de 3 formas:

1)  $y[n] \quad 0 \leq n \leq N-1$   
 $Y(k) = \text{DFT}_N(y[n])$

2)  $V(k) = [W_N^{-k} - b W_N^k] Y(k)$

3)  $\text{DFT}^{-1}[V(k)] = V[n] \quad \hat{x}[n] = V[n] \quad n=0, \dots, N-1$  En que puntos coincide.

$$W_N^k = e^{-j \frac{2\pi}{N} k}$$



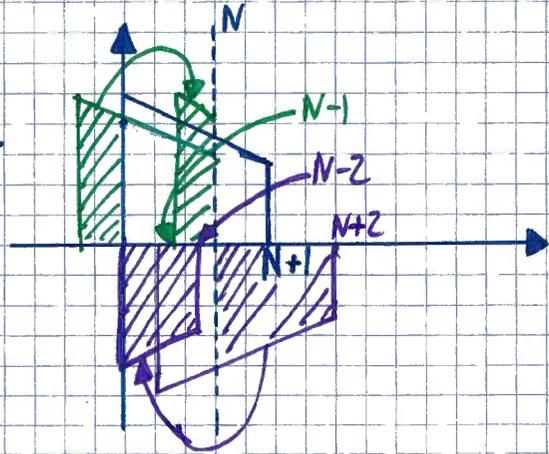
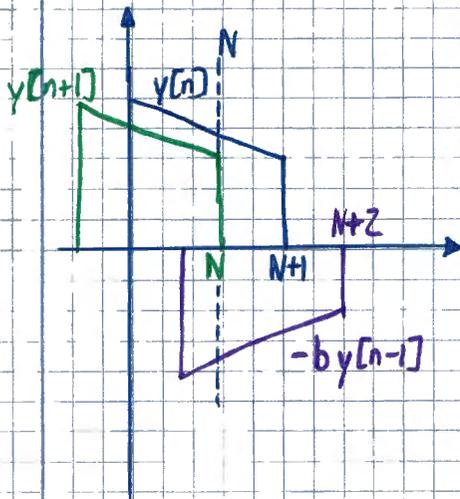
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z - bz^{-1}} \implies Y(z)[z - bz^{-1}] = X(z)$$

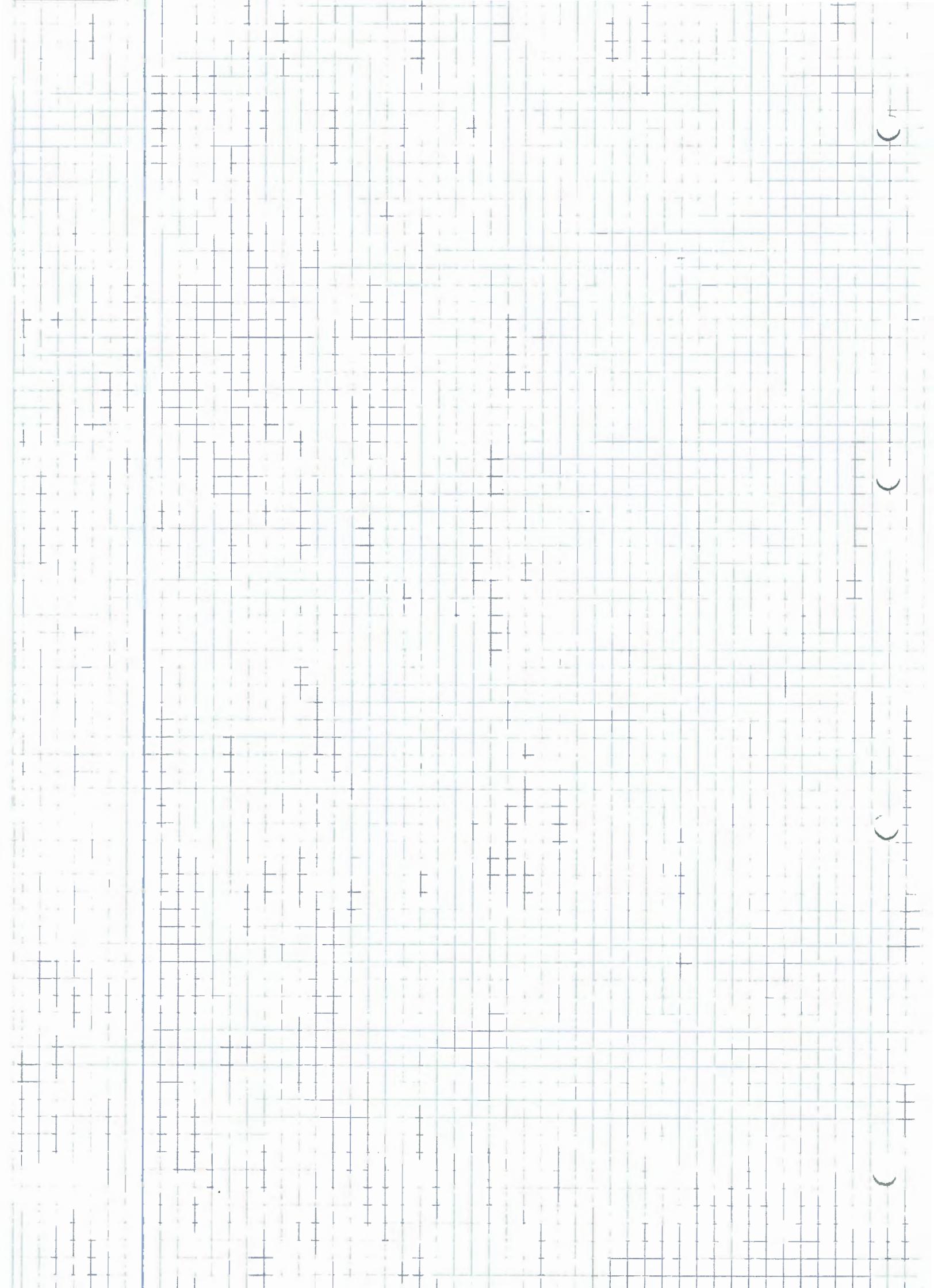
$$y[n+1] - by[n-1] = x[n]$$

$$Y(k) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} k \cdot 1} - b Y(k) e^{-j \frac{2\pi}{N} k \cdot (-1)} = X(k)$$

*Coincide con  $V(k)$*

$$V[n] = y[(n+1)]_N - by[(n-1)]_N \xleftarrow{\text{DFT}_N^{-1}}$$

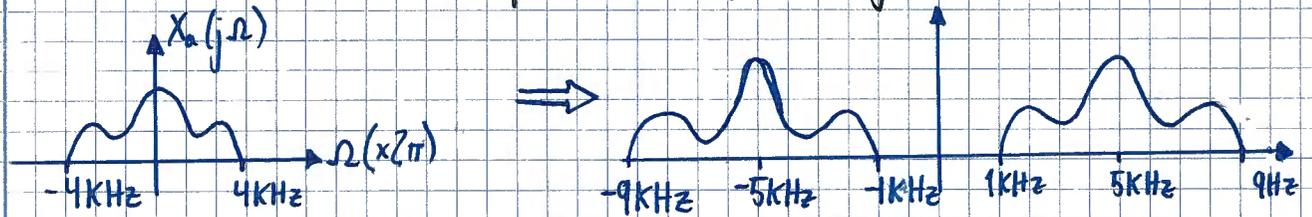




# Problema 1 Septiembre 2010

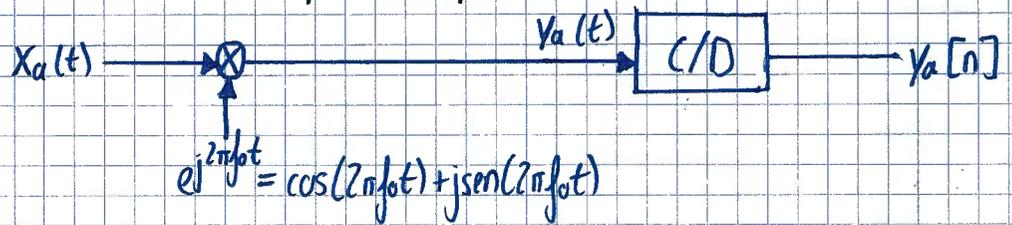
$X_a(t)$  es una señal paso bajo de ancho de banda 4KHz  
 $Y_a(t) = X_a(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}$  ;  $f_0 = 5\text{KHz}$

a) Frecuencia mínima muestreo para calcular  $y_a(t)$  ( $f_{s \text{ min}}$ )

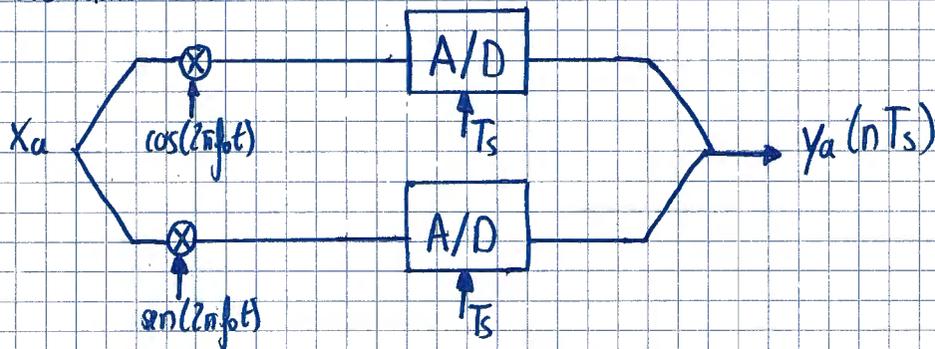


Por tanto:  $f_{s \text{ min}} = 2 \times 9 = 18\text{KHz}$

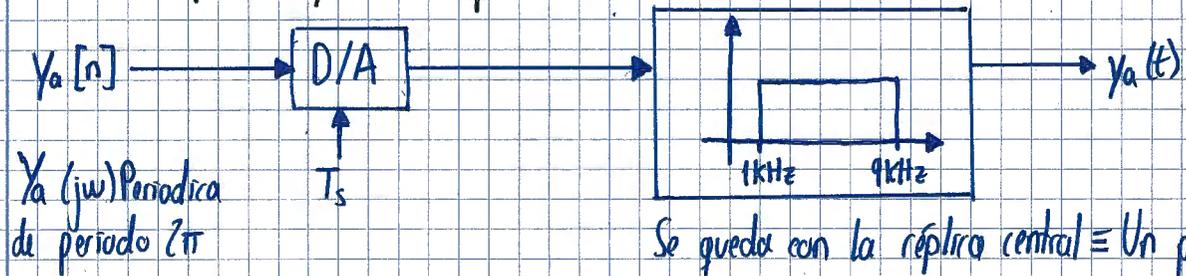
b) Como obtendría las muestras de  $y_a(t)$  a partir de  $x_a(t)$  con osciladores y conversores A/D reales  
 Tenemos lo siguiente:



lo que deberíamos hacer:

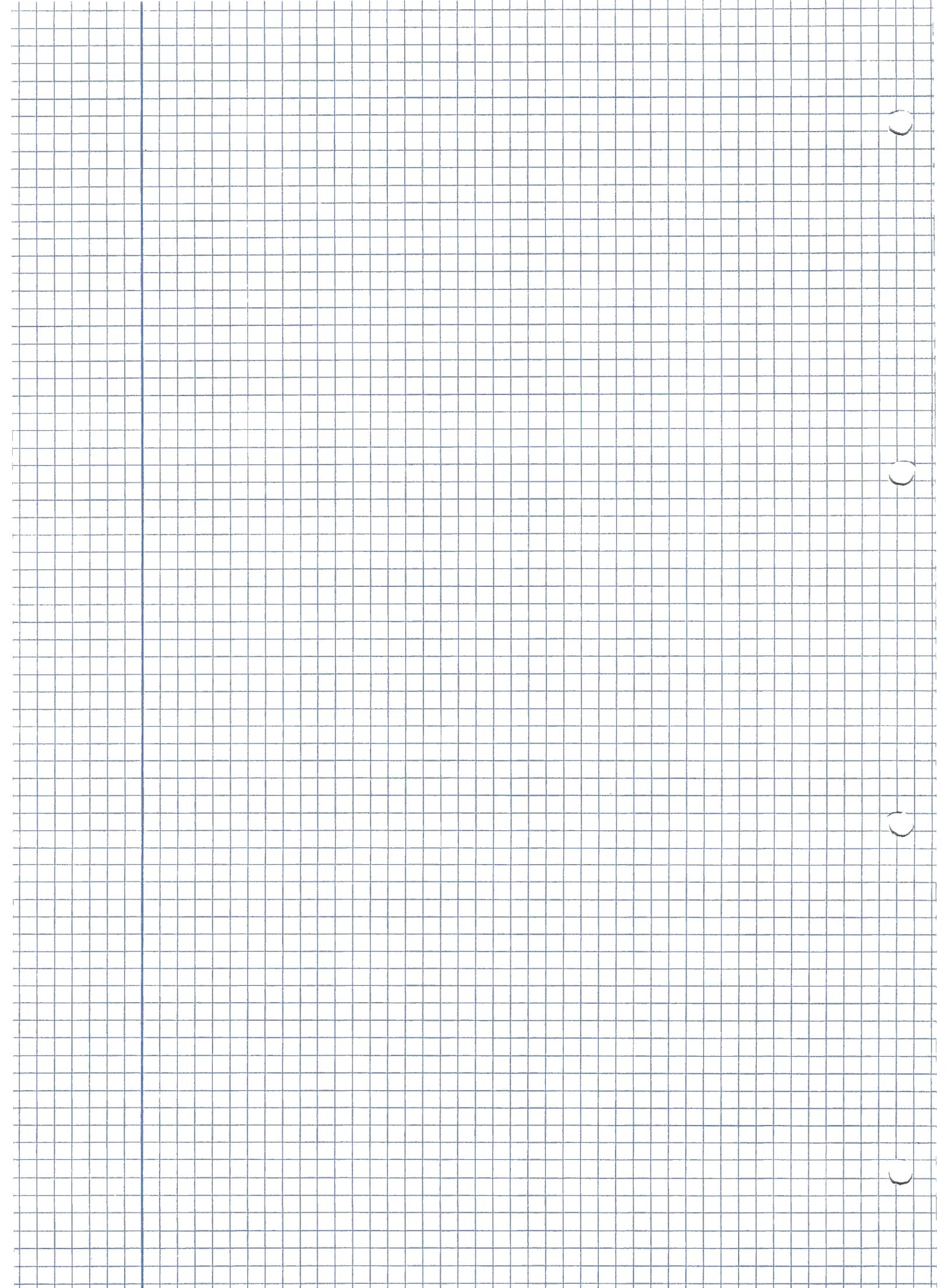


c) Como recuperar  $y_a(t)$  a partir de sus muestras



$Y_a(j\omega)$  Periódica de periodo  $2\pi$

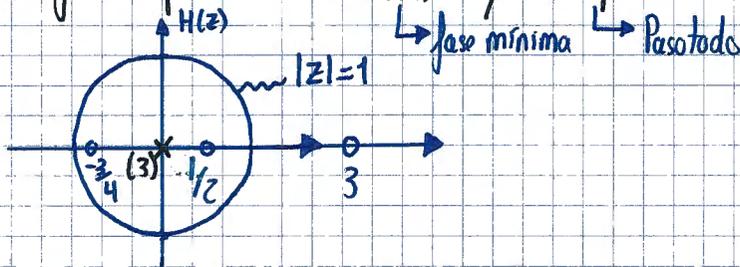
Se queda con la réplica central  $\equiv$  Un periodo  $2\pi$



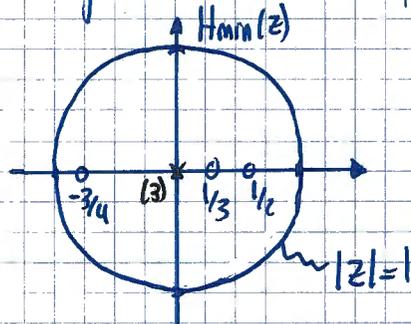
# Problema 2 Septiembre 2010

Un sistema LTI con  $H(z) = (1 - \frac{1}{2}z^{-1}) \cdot (1 + \frac{3}{4}z^{-1}) \cdot (1 - 3z^{-1})$

a) Diagrama polo-cero de  $H_{min}$  y  $H_{op}$

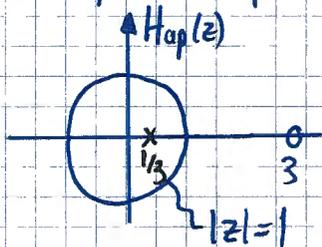


Para fase mínima tenemos que meter todos los 0s en la circunferencia unidad



$$H_{min}(z) = (1 + \frac{3}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})$$

Para el pasotodo ponemos un polo donde hemos puesto el 0 del fase mínima



$$H_{op}(z) = \frac{(1 - 3z^{-1})}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}$$

b) Demostrar si  $h[n]$  es un FIR de  $M+1$  puntos,  $h[n] = h[M-n]$  y  $H(z_0) = 0$

$$\Rightarrow H(1/z_0) = 0 \quad \text{[M+1 puntos]}$$

FIR fase lineal generalizada

$$h[n] = \pm h[M-n]$$

Cero en  $z_0$

- $z_0^*$
- $1/z_0$
- $1/z_0^*$

$$H(z) = \sum_{n=0}^M h[n] \cdot z^{-n} \quad \text{(T.Z. de } h[n] \text{ de un FIR)}$$

$$H(z) = \sum_{n=M}^0 h[M-n] \cdot z^{-(M-n)} = z^{-M} \cdot \sum_{n=M}^0 h[M-n] \cdot z^{+n}$$

$$\sum_{m-n=0}^{m-n=M}$$

$$= \left\{ \text{Cambio de variable para que } h[M-n] = h[m] \right\} =$$

$$M-n \rightarrow m \quad \begin{cases} n=M \rightarrow m=0 \\ n=0 \rightarrow m=M \end{cases}$$

$$= \sum_{m=0}^M h[m] \cdot z^{-m}$$

TIENEN LA MISMA  $H(z)$ !!

c)  $h[n]$  de un sistema LTI pasa todo con  $H(z)$  su función de transferencia tiene un sistema inverso estable  $h_i[n]$ . Demostrar  $h_i[n] = h[-n]$

da  $H(z)$  de un pasotodo genérica  $H(z) = \prod_{k=0}^m \frac{1 - c_k z^{-1}}{1 - c_k^* z^{-1}}$   
de orden  $m$

Si  $H(z)$  tiene los polos fuera su inverso los tendrá dentro.

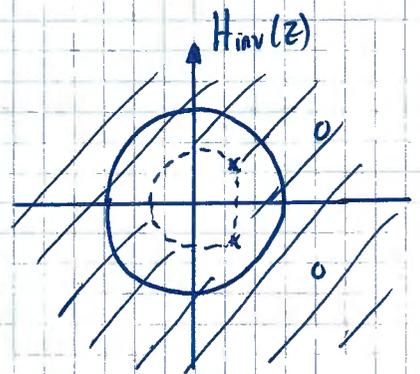


Estable y NO-causal

Y al hacer el inverso:

$$H_{inv}(z) = \frac{1}{H(z)} = \prod_{k=0}^m \frac{1 - c_k^* z^{-1}}{1 - c_k z^{-1}}$$

Causal y Estable



ROC  $\{H_{inv}\}$  tiene que contener la ROC de  $H(z)$  o una parte de ella (intersección no-nula). Por las propiedades de la transformada Z:

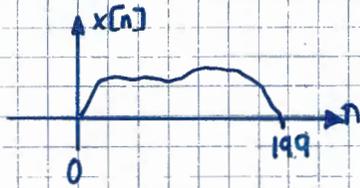
$$H(z) = TZ(h[n])$$

$$H_{inv}(z) = \frac{1}{H(z)} = TZ(h[-n]) = TZ(h_{inv}[n])$$

# Problema 4 Septiembre 2012

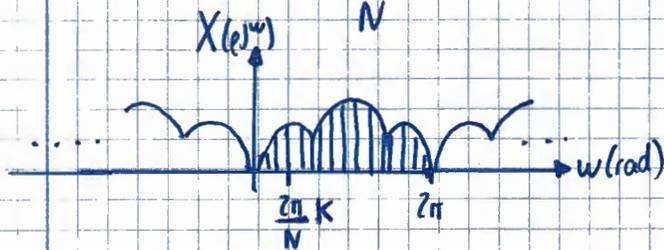
Sea  $x[n]$  real de duración 200 puntos y  $x[n]=0$  para  $n < 0$  y  $n > 199$

a) Sea  $X(k) = \text{DFT}^{300}(x[n])$  ¿Para qué  $k \neq 17$  es  $|X(k)| = |X(17)|$ ?



$300 = N > \text{duración}(x[n]) = 200 \rightarrow$  NO hay solapamiento

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} \quad k=0, \dots, N-1$$



Como  $x[n]$  es real  $\rightarrow X(e^{j\omega})$  es hermitica:  $|X(e^{j\omega})| = |X^*(e^{j\omega})|$  y  $X(k)$  también tiene simetría:  $k = 300 - 17 = 283$ :

$$\underline{|X(k=17)| = |X(k=283)|}$$

b)  $X(e^{j\omega}) = \text{TF}(x[n])$ . Calcularla en  $\omega = 2\pi/3$  usando una DFT de  $M$  puntos. ¿M mínimo? y describe un procedimiento para obtener  $X(e^{j\omega})$  en  $\omega = 2\pi/3$  usando la DFT de  $M$  puntos.

$$X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = 2\pi/3}$$

Como ahora la duración  $(x[n]) = 200$ , con  $M=3$  hay solapamiento.

$$\boxed{\frac{2\pi}{M} \cdot k = \frac{2\pi}{3}} \rightarrow M=3; k=1$$

$$\text{Por tanto: } \begin{cases} x'[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+Mr] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+3r] = \sum_{r=0}^{(200/3=66'6)} x[n+3r] \\ X'(k) = \text{DFT}_3(x'[n]) \\ X(e^{j\omega}) = X'(k) \Big|_{k=1} \end{cases}$$

c) Goertzel ó FFT ¿Cuál es el más eficiente?

↓  $\log_2 M$  operaciones es menor que  $M$  en DFT

Menos operaciones si hay solapamientos

Por tanto, Goertzel es más eficiente

### Problema 8.4

Considere la secuencia  $x(n) = \alpha^n u(n)$ , con  $|\alpha| < 1$ . Se construye una secuencia periódica  $\tilde{x}(n)$  a partir de  $x(n)$  de la siguiente forma

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rN)$$

- (a) Determine la transformada de Fourier  $X(\omega)$  de  $x(n)$ .
- (b) Determine los coeficientes de la serie de Fourier discreta  $\tilde{X}(k)$  para la secuencia  $\tilde{x}(n)$ .
- (c) ¿Cómo se relacionan  $\tilde{X}(k)$  y  $X(\omega)$ ?

(a)  $X(\omega)$

- Por definición

*Definición.*

$$X(\omega) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n u(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

ya que  $|\alpha| < 1$ .

- También puede calcularse a partir de la transformada  $z$

$$x(n) = \alpha^n u(n) \xrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, |z| > |\alpha|$$

Como  $|\alpha| < 1$ , el sistema es estable y su transformada de Fourier es

$$X(\omega) = X(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

(b)  $\tilde{X}(k)$

- Antes de calcular la serie de Fourier discreta es conveniente calcular  $\tilde{x}(n)$

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rN) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \alpha^{n+rN} u(n + rN)$$

En la gráfica se muestra la señal  $x(n + rN)$  (con  $N = 10$  y  $\alpha = 0.9$ ) para los valores de  $r = -1, 0, 1$  y  $2$ .

La señal  $\tilde{x}(n)$  se calcularía sumando estas señales para todo  $r$ ; pero teniendo en cuenta que la señal resultante  $\tilde{x}(n)$  es periódica de periodo  $N$  basta con calcular el sumatorio en el intervalo  $n = 0, \dots, N - 1$ .

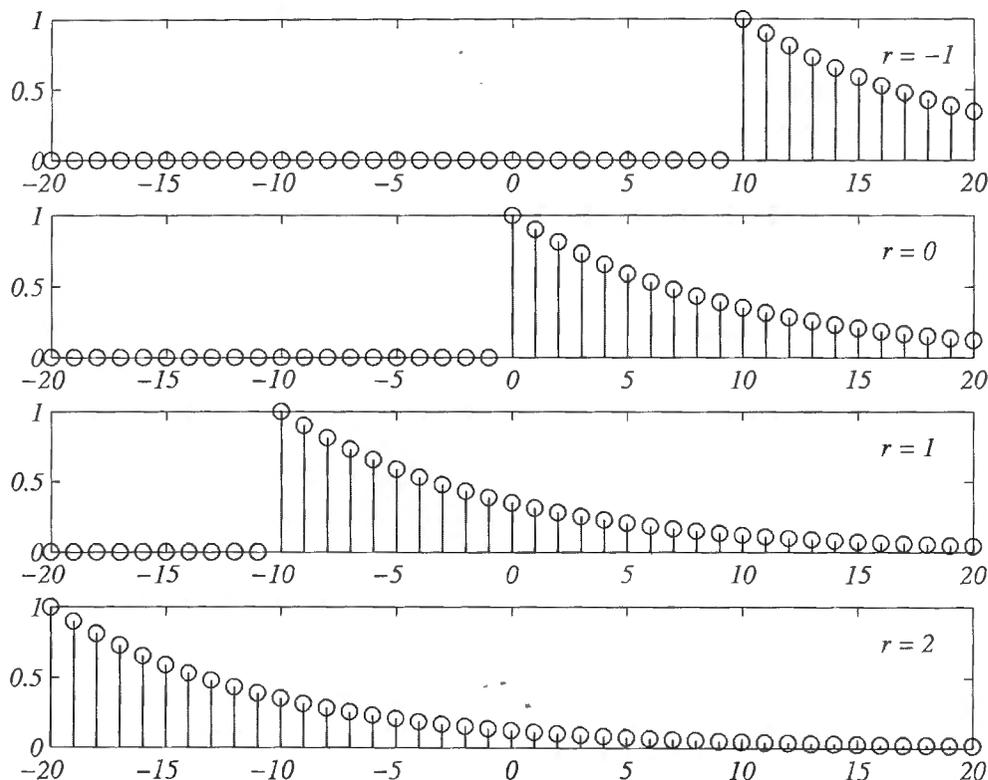
En la gráfica puede verse que para  $r = -1$  la señal  $x(n - N)$  no aporta nada a la suma en el intervalo de interés. Lo mismo ocurre para todos los valores negativos de  $r$ . Por contra, todos los valores positivos de  $r$  aportan cierta cantidad de señal que debe considerarse a pesar de que decrezca según crece  $r$ .

Así pues:

*Es de período  $N$  (10) → sólo aportan las  $\alpha$  positivas por eso empieza en  $r=0$ .*

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha^{n+rN} = \alpha^n \sum_{r=0}^{\infty} (\alpha^N)^r = \frac{\alpha^n}{1 - \alpha^N}, n = 0, \dots, N - 1$$

periódica, de periodo  $N$ .



- La serie de Fourier discreta es, por definición:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(k) &\triangleq \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi k}{N} n} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\alpha^n}{1 - \alpha^N} e^{-j \frac{2\pi k}{N} n} \\ &= \frac{1}{1 - \alpha^N} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \alpha e^{-j \frac{2\pi k}{N}} \right)^n \\ &= \frac{1}{1 - \alpha^N} \cdot \frac{1 - \alpha^N e^{-j \frac{2\pi k}{N} N}}{1 - \alpha e^{-j \frac{2\pi k}{N}}} \end{aligned}$$

El numerador del segundo factor puede reducirse a  $1 - \alpha^N$  (porque la exponencial  $e^{-j2\pi k}$  vale 1 para cualquier  $k$ ) y se cancela con el denominador del primer factor. En definitiva,

$$\tilde{X}(k) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j \frac{2\pi k}{N}}}$$

(c) Relación entre  $X(\omega)$  y  $\tilde{X}(k)$

Comparando las expresiones:  $X(\omega) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$  y  $\tilde{X}(k) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j \frac{2\pi k}{N}}}$  se aprecia que  $\tilde{X}(k)$  puede obtenerse a partir de  $X(\omega)$  mediante muestreo en  $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$ ; es decir  $\tilde{X}(k) = X(\omega)|_{\omega_k = \frac{2\pi k}{N}}$ .

### Problema 8.8

Sea  $X(\omega)$  la transformada de Fourier de la secuencia  $x(n) = (0,5)^n u(n)$ . Sea  $y(n)$  una secuencia de duración finita de longitud 10; es decir  $y(n) = 0, n < 0$ , e  $y(n) = 0, n \geq 10$ . La DFT de 10 puntos (orden 10) de  $y(n)$ ,  $Y(k)$ , se corresponde con 10 muestras equiespaciadas de  $X(\omega)$ ; es decir,  $Y(k) = X(\omega_k)|_{\omega_k = \frac{2\pi k}{10}} = X\left(\frac{2\pi k}{10}\right)$ . Determine  $y(n)$ .

- La transformada de Fourier de  $x(n) = (0,5)^n u(n)$  es:

$$X(\omega) = \frac{1}{1 - 0,5e^{-j\omega}}$$

(véase el apartado (a) del problema 8.4)

- Las muestras de la transformada de Fourier son:

$$Y(k) = X(\omega)|_{\omega = \frac{2\pi k}{10}} = \frac{1}{1 - 0,5e^{-j\frac{2\pi k}{10}}}, k = 0, \dots, 9$$

y se corresponden con la DFT de orden 10 de  $y(n)$ ; es decir,  $Y(k) = \text{DFT}^{10}\{y(n)\}$

- Así que:  $y(n) = \text{DFT}^{-10}\{Y(k)\}$ , donde  $\text{DFT}^{-N}$  indica DFT inversa.
- Aplicando la definición:

$$y(n) = \frac{1}{10} \sum_{k=0}^9 Y(k) e^{j\frac{2\pi k}{10}n} = \frac{1}{10} \sum_{k=0}^9 \frac{e^{j\frac{2\pi k}{10}n}}{1 - 0,5e^{-j\frac{2\pi k}{10}}} = \dots$$

resulta difícil llegar a una expresión cerrada. Siempre se pueden calcular los valores  $y(0) \dots y(9)$  pero es mejor intentar otra solución.

- Si se considera que  $Y(k)$  es un periodo de la serie de Fourier discreta  $\tilde{Y}(k)$  de la expansión periódica de  $\tilde{y}(n)$ , es evidente que  $y(n)$  es un periodo de  $\tilde{y}(n)$ . Por otra parte, puesto que  $Y(k)$  se ha formado tomando muestras de la transformada de Fourier de  $x(n)$  se cumple que

$$\tilde{y}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + r10)$$

y, por tanto

$$y(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + r10), n = 0, \dots, 9$$

- Analizando la señal y sus copias desplazadas  $\dots, x(n-10), x(n), x(n+10), \dots$  puede verse que los valores negativos de  $r$  no aportan nada a la suma en el intervalo  $n = 0, \dots, 9$  (véase el apartado (b) del problema 8.4) quedando finalmente:

$$y(n) = \sum_{r=0}^{\infty} (0,5)^{n+r10}$$

que puede sumarse fácilmente:

$$y(n) = (0,5)^n \sum_{r=0}^{\infty} ((0,5)^{10})^r = \frac{(0,5)^n}{1 - (0,5)^{10}} = (0,5)^n \frac{1024}{1023}, n = 0, \dots, 9$$

### Problema 8.33

Considere una secuencia  $x(n)$  de duración finita y longitud  $P$ , tal que  $x(n) = 0$  para  $n < 0$  y  $n \geq P$ . Se quieren calcular muestras de la transformada de Fourier en las  $N$  frecuencias equiespaciadas

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}, k = 0, \dots, N-1$$

Determine y justifique procedimientos para calcular las  $N$  muestras de la transformada de Fourier usando únicamente una DFT de  $N$  puntos en los siguientes casos:

(a)  $N > P$

(b)  $N < P$

(a)  $N > P$

- Cuando el orden (número de puntos) de la DFT,  $N$ , es mayor que la duración de la señal,  $P$ , no hay ningún problema; basta hacer:  $X(k) = \text{DFT}^N\{x(n)\}$ . La secuencia  $X(k)$  estará formada por muestras equiespaciadas de la transformada de Fourier de  $x(n)$ ; es decir,

$$X(k) = X(\omega) \Big|_{\omega_k = \frac{2\pi k}{N}}, k = 0, \dots, N-1$$

- Nótese que se define una señal de duración  $P$  como aquella que es nula para  $n < 0$  y  $n \geq P$ . Para hacer la DFT de orden  $N > P$  se tomarán  $N - P$  ceros correspondientes con los valores de la señal en  $n = P, \dots, N-1$ . El único problema que puede surgir es cuando se usa un software para calcular la DFT. Por ejemplo, en Matlab la función `fft` calcula la DFT de la señal pasada como primer argumento y si no se especifica el orden de la DFT como segundo argumento, la función usa la longitud del vector de señal. Así:

```
x = [1 2 -1 3]    % Señal x de longitud (duración) 4
X1 = fft(x)      % DFT de orden 4 de x
X2 = fft(x, 10)  % DFT de orden 10 de x
```

Para calcular `X2` Matlab realiza internamente la operación denominada "relleno con ceros" (*zero-padding*) consistente en ampliar el vector de señal para que incluya los ceros necesarios; es decir, convirtiendo  $x = [1 \ 2 \ -1 \ 3]$  en  $x = [1 \ 2 \ -1 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ . Desde el punto de vista matemático la señal  $x(n)$  ya tiene los ceros necesarios, pero la implementación software no. Por este motivo suele decirse que para hacer una DFT de orden  $N$  de una señal de duración  $P < N$  el procedimiento a seguir es:

1. Relleno con ceros; es decir formar  $x_1(n)$  concatenando la señal  $x(n)$  con  $N - P$  ceros:

$$x_1(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n < P \\ 0 & P \leq n < N \end{cases}$$

2. Calcular la DFT de orden  $N$  de  $x_1(n)$ :  $X(k) = \text{DFT}^N\{x_1(n)\}$

(b)  $N < P$ 

- Este caso es más interesante. En principio parece que no puede hacerse una DFT de orden menor que la duración de la señal; en realidad no es así. La condición  $N \geq P$  se impone únicamente si se quiere recuperar la señal a partir de su DFT, lo cual no siempre es el caso.
- Un primer intento (erróneo) sería calcular la DFT de orden  $N < P$  de la señal  $x_1(n) = x(n)$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ , pero esta DFT estaría formada por muestras de la transformada de Fourier de  $X_1(\omega)$  que no es la transformada de Fourier de  $x(n)$ , así que el resultado no serían muestras de la transformada  $X(\omega)$ .
- Pero ¿qué ocurre si se hace la transformada inversa de  $N < P$  muestras  $X(\omega)$ ? No se obtiene  $x(n)$  sino

$$x_2(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rN), \quad n = 0, \dots, N-1$$

resultado de interpretar la DFT como un periodo de la serie de Fourier discreta de  $\tilde{x}(n)$ , extensión periódica con periodo  $N$  de  $x(n)$ . Es decir  $x_2(n) = \text{DFT}^{-N}\{X(k)\}$  con  $X(k) = X(\omega)|_{\omega_k = \frac{2\pi k}{N}}$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ .

- Teniendo en cuenta que las transformadas son bidireccionales debe cumplirse que  $X(k) = \text{DFT}^N\{x_2(n)\}$ .
- En definitiva, el proceso a seguir es:

1. Formar un periodo de la extensión periódica de periodo  $N$  de la señal  $x(n)$ :

$$x_2(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rN), \quad n = 0, \dots, N-1$$

2. Calcular la DFT de orden  $N$  de  $x_2(n)$ :  $X(k) = \text{DFT}^N\{x_2(n)\}$

- Nótese que:
  - $X(k) \neq \text{DFT}^N\{x(n)\}$ , cálculo que no tiene sentido porque el orden de la DFT  $N$  es menor que la duración  $P$  de la señal.
  - $X(k) \neq \text{DFT}^N\{x_1(n) = x(n), n = 0, \dots, N-1\}$ , porque el resultado no son muestras de la transformada de Fourier de  $X(\omega)$
  - $X(k) = \text{DFT}^N\{x_2(n)\}$  sí son muestras de la transformada de Fourier de  $X(\omega)$ .
- El problema 8.9 ilustra este procedimiento.

### Problema 8.9

Considere una secuencia  $x(n)$  de duración  $P = 20$  tal que  $x(n) = 0$  fuera del intervalo  $0 \leq n \leq 19$ , y sea  $X(\omega)$  su transformada de Fourier.

- (a) Se desea evaluar  $X(\omega)$  en  $\omega = 4\pi/5$  mediante el cálculo de una DFT de  $M$  puntos. Determine el menor valor posible de  $M$  y desarrolle un procedimiento para obtener  $X(4\pi/5)$  con el mínimo valor de  $M$ .
- (b) Se desea evaluar  $X(\omega)$  en  $\omega = 10\pi/27$  mediante el cálculo de una DFT de  $L$  puntos. Determine el menor valor posible de  $L$  y desarrolle un procedimiento para obtener  $X(10\pi/27)$  con el mínimo valor de  $L$ .

(a)  $X(\omega)|_{\omega=4\pi/5}$

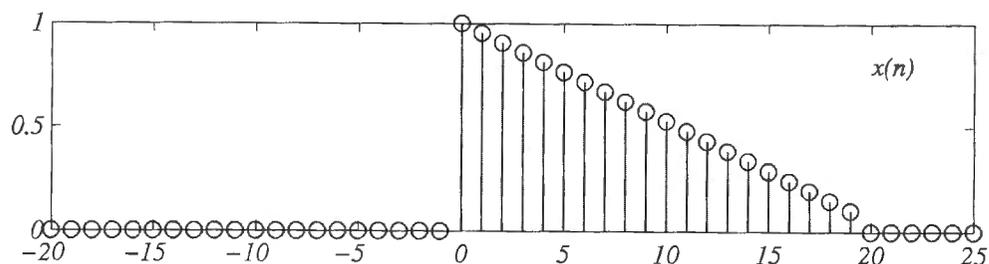
- La señal  $x(n)$  es de duración  $P = 20$ , por tanto, se podría hacer una DFT de orden  $P$ :  $X(k) = \text{DFT}^{20}\{x(n)\}$  y analizar el resultado.
- La muestra en  $\omega = 4\pi/5$  se puede obtener para el valor de  $k$  entero que resulta de resolver  $(2\pi k/20) = (4\pi/5) \Rightarrow k = 8$ , es decir,  $X(\omega)|_{\omega=4\pi/5} = X(k)|_{k=8}$ . Nótese que el valor de  $k$  debe ser entero porque es el índice de una secuencia.
- Esta solución, aunque buena, no responde correctamente al enunciado del problema que pide el valor mínimo del orden de la DFT. Teniendo en cuenta el denominador 5 del valor de frecuencia que se quiere obtener y el apartado (b) del problema 8.33 se puede hacer una DFT de orden  $M = 5$  de  $x_2(n)$ , un periodo de la extensión periódica de periodo 5 de  $x(n)$ . El procedimiento sería el siguiente:

1. Formar  $x_2(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+r5), n = 0, \dots, 4$

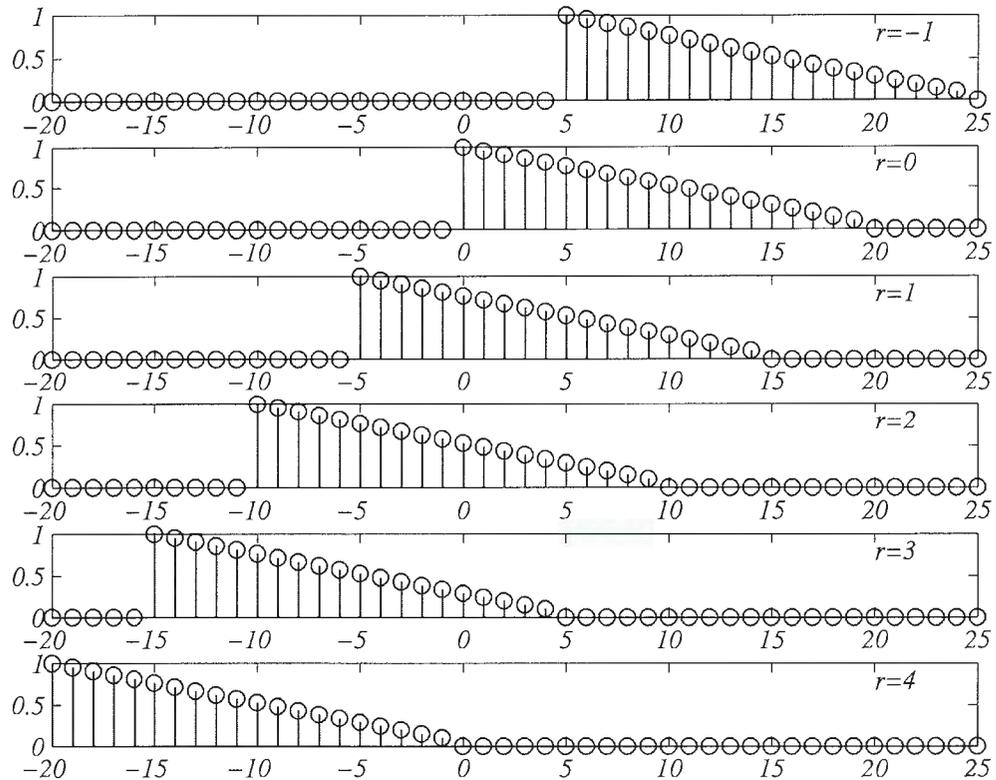
2. Calcular  $X_2(k) = \text{DFT}^5\{x_2(n)\}$

El valor pedido se obtiene para  $k = 2$ ; es decir  $X(\omega)|_{\omega=4\pi/5} = X_2(k)|_{k=2}$

- Aunque el problema no lo pide, es interesante ver con un ejemplo cómo se forma  $x_2(n)$ . Sea  $x(n)$  la señal de duración 20 de la figura:



La señal desplazada  $x(n+r5)$  para distintos valores de  $r$  se muestra a continuación:



Puede verse claramente que en el intervalo  $n = 0, \dots, 4$  sólo intervienen los valores  $r = 0, \dots, 3$  y,

por tanto, 
$$x_2(n) = \sum_{r=0}^3 x(n + 5r).$$

De forma más intuitiva:

- o La señal  $x(n)$  se corta en  $20/5 = 4$  trozos de duración 5,
- o Cada trozo se traslada al origen y
- o Se suman los trozos trasladados

**(b)**  $X(\omega)|_{\omega=10\pi/27}$

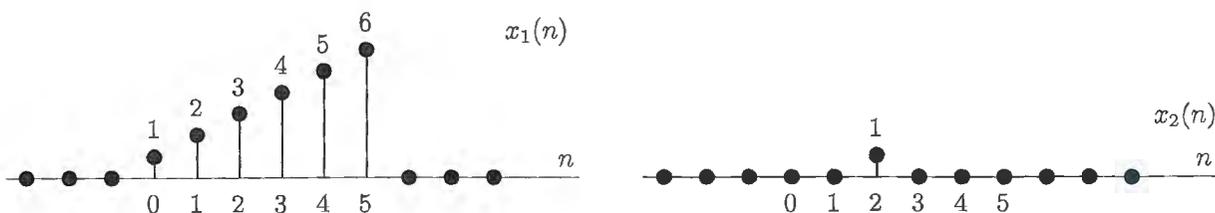
- En este caso, teniendo en cuenta que la fracción  $10/27$  no se puede reducir, habrá que hacer una DFT de orden  $L = 27$  para que pueda existir un valor de  $k$  entero. El procedimiento será:

- o Formar  $x_1(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n < 20 \\ 0 & 20 \leq n < 27 \end{cases}$  es decir, rellenar con ceros o en spanglish, hacer *zero-padding*.
- o Calcular  $X_1(k) = \text{DFT}^{27}\{x_1(n)\}$

El valor pedido se obtiene para  $k = 5$ ; es decir  $X(\omega)|_{\omega=10\pi/27} = X_1(k)|_{k=5}$

### Problema 8.11

La figura muestra dos secuencias finitas  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$ . Dibuje su convolución circular de 6 puntos.



- La convolución circular de dos secuencias de duración finita  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$  se puede escribir como

$$y(n) = x_1(n) \circledast x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n-m)_N), n = 0, \dots, N-1$$

- La convolución circular es un operador conmutativo por lo que también puede escribirse como:

$$y(n) = x_2(n) \circledast x_1(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_2(m)x_1((n-m)_N), n = 0, \dots, N-1$$

- Para determinar el valor del índice en el direccionamiento circular (módulo)  $(n-m)_N$  ha de tenerse en cuenta que esta operación no se corresponde con lo que los lenguajes de programación denominan habitualmente módulo con el operador “%” (en C, Java, Matlab, o Python) o “mod” (en Pascal, BASIC, SQL o Haskell), ya que estos operadores calculan el resto de una división entera manteniendo el signo del dividendo. La diferencia ocurre con los valores negativos, por ejemplo,  $3 \% 6 = 3$ , pero  $-2 \% 6 = -2$ , lo que no es correcto desde el punto de vista matemático en el que se define la convolución circular.

El módulo debe calcularse de forma que si el número no está en el intervalo  $n = 0, \dots, N-1$  se convierta en un número en este intervalo y, por tanto, siempre positivo. Para ello se suma o resta al número original el valor  $N$  tantas veces como sea necesario para que el resultado esté dentro del intervalo. Así, para calcular  $(-2)_6$  debe hacerse la operación  $-2 + 6 = 4$  porque  $-2$  no está en el intervalo  $n = 0, \dots, 5$ ; para calcular  $(-7)_6$  debe hacerse  $-7 + 6 + 6 = 5$  y para calcular  $(8)_6$  debe hacerse  $8 - 6 = 2$ . Evidentemente si el número original ya está en el intervalo se deja tal cual; por ejemplo  $(4)_6 = 4$ .

- Para calcular la convolución se pueden usar las siguientes estrategias: 1) cálculo directo, 2) cálculo gráfico 3) cálculo con DFTs y 4) aplicando propiedades de la DFT y/o de la convolución circular.

1. Cálculo directo:

Elegimos  $x_2(n)$  como secuencia “fija” porque sólo tiene un valor distinto de 0, lo cual anula todos los sumandos excepto para  $m = 2$ .

$$n = 0 \Rightarrow y(0) = \sum_{m=0}^5 x_2(m)x_1((0-m)_6) = x_2(2)x_1((0-2)_6) = x_1((-2)_6) = x_1(4) = 5$$

$$n = 1 \Rightarrow y(1) = \sum_{m=0}^5 x_2(m)x_1((1-m)_6) = x_2(2)x_1((1-2)_6) = x_1((-1)_6) = x_1(5) = 6$$

$$n = 2 \Rightarrow y(2) = \sum_{m=0}^5 x_2(m)x_1((2-m)_6) = x_2(2)x_1((2-2)_6) = x_1((0)_6) = x_1(0) = 1$$

$$n = 3 \Rightarrow y(3) = \sum_{m=0}^5 x_2(m)x_1((3-m)_6) = x_2(2)x_1((3-2)_6) = x_1((1)_6) = x_1(1) = 2$$

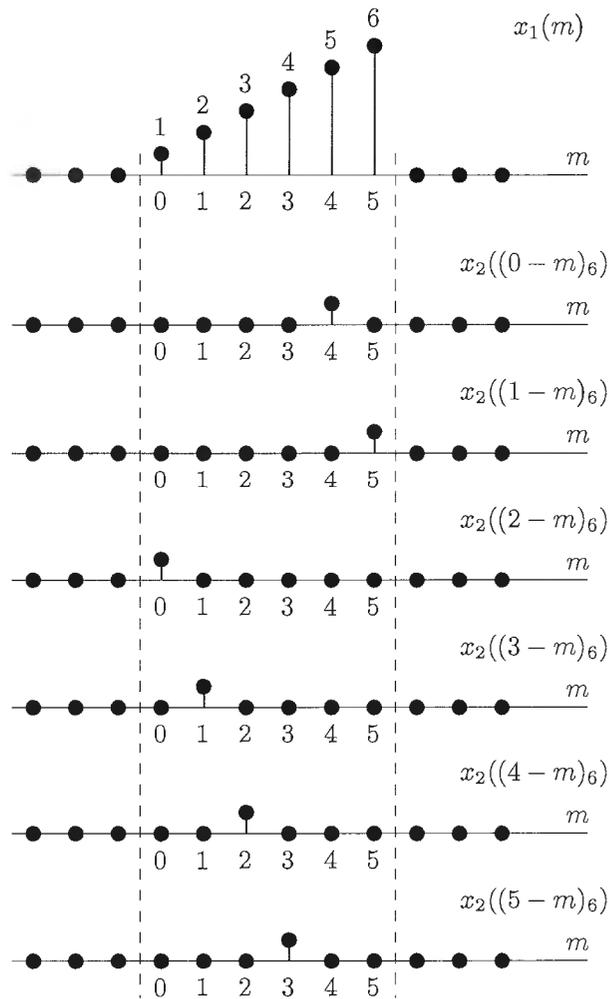
$$n = 4 \Rightarrow y(4) = \sum_{m=0}^5 x_2(m)x_1((4-m)_6) = x_2(2)x_1((4-2)_6) = x_1((2)_6) = x_1(2) = 3$$

$$n = 5 \Rightarrow y(5) = \sum_{m=0}^5 x_2(m)x_1((5-m)_6) = x_2(2)x_1((5-2)_6) = x_1((3)_6) = x_1(3) = 4$$

$$y(n) = 5\delta(n) + 6\delta(n-1) + \delta(n-2) + 2\delta(n-3) + 3\delta(n-4) + 4\delta(n-5)$$

2. Cálculo gráfico:

La mecánica de esta forma de cálculo es similar a la usada para la convolución lineal, teniendo en cuenta que 1) el cálculo sólo se hace en el intervalo  $n = 0, \dots, N-1$  y 2) que los desplazamientos son circulares. En este caso, elegimos  $x_1(n)$  como señal "fija" y dibujamos  $x_1(m)$  y  $x_2((n-m)_6)$  para  $n = 0, \dots, 5$



Notas:

- a) Para dibujar  $x_2((0-m)_6)$ , con  $x_2(n) = \delta(n-2)$ , hay que aplicar el operador módulo tal como se ha descrito en el apartado dedicado al cálculo directo; por tanto,  $x_2((-0)_6) = x_2(0) = 0$ ,  $x_2((-1)_6) = x_2(5) = 0$ ,  $x_2((-2)_6) = x_2(4) = 0$ ,  $x_2((-3)_6) = x_2(3) = 0$ ,  $x_2((-4)_6) = x_2(2) = 1$  y  $x_2((-5)_6) = x_2(1) = 0$ .
- b) El desplazamiento hacia la derecha es circular como se observa al desplazar  $x_2((1-m)_6)$  para obtener  $x_2((2-m)_6)$ ; en este movimiento el valor 1 que estaba en  $m=5$  al desplazarse hacia la derecha se sale del intervalo  $n = 0, \dots, 5$  marcado con líneas discontinuas verticales. Aplicando circularidad este valor debe reaparecer en 0, ya que  $(6)_6 = 0$ .

- c) Si el movimiento circular resulta confuso siempre se puede usar la definición de módulo. Así si queremos dibujar  $x_2((2-m)_6)$  en el intervalo  $m = 0, \dots, 5$  habrá que calcular  $x_2((2-0)_6) = x_2(2) = 1$ ,  $x_2((2-1)_6) = x_2(1) = 0$ ,  $x_2((2-2)_6) = x_2(0) = 0$ ,  $x_2((2-3)_6) = x_2(5) = 0$ ,  $x_2((2-4)_6) = x_2(4) = 0$  y  $x_2((2-5)_6) = x_2(3) = 0$ .

Una vez dibujadas las señales el resultado se calcula de la misma forma que en la convolución lineal: multiplicando la señal "fija" por la señal reflejada y desplazada y sumando los valores. En este caso:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 5 + 0 = 5 \\ y(1) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 6 = 6 \\ y(2) &= 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1 \\ y(3) &= 0 + 2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 2 \\ y(4) &= 0 + 0 + 3 + 0 + 0 + 0 = 3 \\ y(5) &= 0 + 0 + 0 + 4 + 0 + 0 = 4 \\ y(n) &= 5\delta(n) + 6\delta(n-1) + \delta(n-2) + 2\delta(n-3) + 3\delta(n-4) + 4\delta(n-5) \end{aligned}$$

### 3. Cálculo con DFTs:

La convolución circular (de orden  $N$ ) resulta de hacer una DFT inversa (de orden  $N$ ) del producto de las DFTs (de orden  $N$ ) de las señales; es decir, si  $X_1(k) = \text{DFT}^N\{x_1(n)\}$  y  $X_2(k) = \text{DFT}^N\{x_2(n)\}$ ,  $y(n) = x_1(n) \circledast x_2(n) = \text{DFT}^{-N}\{X_1(k)X_2(k)\}$ .

El cálculo de la DFT de una señal, por simple que sea, nunca es recomendable hacerlo a mano. Si se dispone de Matlab, por ejemplo, bastaría hacer

$$y = \text{ifft}(\text{fft}([1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6], 6) .* \text{fft}([0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0], 6), 6)$$

para obtener el resultado. O incluso quitando los parámetros 6 si se tiene la precaución de definir los vectores con la longitud y el número de ceros adecuado:

$$y = \text{ifft}(\text{fft}([1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]) .* \text{fft}([0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]))$$

Como prueba de lo engorroso que resulta hacer el cálculo a mano (incluso con señales de longitud pequeña y aplicando la propiedad de linealidad)

- La DFT de orden  $N$  de un impulso desplazado  $x(n) = \delta(n - n_0)$  es  $X(k) = e^{-j\frac{2\pi k}{N}n_0}$
- La señal  $x_1(n)$  puede escribirse como

$$x_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3) + 5\delta(n-4) + 6\delta(n-5)$$

y su DFT de orden 6, aplicando linealidad, como

$$X_1(k) = 1 + 2e^{-j\pi k/3} + 3e^{-j2\pi k/3} + 4e^{-j\pi k} + 5e^{-j4\pi k/3} + 6e^{-j5\pi k/3}$$

- La señal  $x_2(n) = \delta(n-2)$  es un impulso desplazado con DFT de orden 6  $X_2(k) = e^{-j2\pi k/3}$
- Multiplicando

$$Y(k) = X_1(k)X_2(k) = e^{-j2\pi k/3} + 2e^{-j\pi k} + 3e^{-j4\pi k/3} + 4e^{-j5\pi k/3} + 5e^{-j2\pi k} + 6e^{-j7\pi k/3}$$

- Las frecuencias de los dos últimos sumandos son  $\geq 2\pi$ , para  $k > 0$ . Teniendo en cuenta la periodicidad de las frecuencias, pueden reducirse a

$$\begin{aligned} 5e^{-j2\pi k} &= 5 \\ 6e^{-j7\pi k/3} &= 6e^{-j\pi k/3} \end{aligned}$$

quedando, por tanto

$$Y(k) = 5 + 6e^{-j\pi k/3} + e^{-j2\pi k/3} + 2e^{-j\pi k} + 3e^{-j4\pi k/3} + 4e^{-j5\pi k/3}$$

cuya DFT inversa de orden 6, aplicando linealidad y la DFT del impulso desplazado

$$y(n) = 5\delta(n) + 6\delta(n-1) + \delta(n-2) + 2\delta(n-3) + 3\delta(n-4) + 4\delta(n-5)$$

#### 4. Aplicación de propiedades de la DFT.

En el problema la señal  $x_2(n) = \delta(n-2)$  es tan sencilla que puede calcularse fácilmente su DFT de orden 6:  $X_2(k) = e^{-j2\pi k/3}$

Ahora

$$y(n) = \text{DFT}^{-6}\{e^{-j2\pi k/3}X_1(k)\}$$

que puede identificarse con la propiedad de desplazamiento en el dominio temporal resultando  $y(n) = x_1((n-2)_6)$  lo que permite escribir directamente

$$y(n) = x_1(n) \circledast \delta(n-2) = x_1((n-2)_6)$$

De esta forma, para resolver este problema bastaría con hacer un desplazamiento circular de la señal  $x_1(n)$ ; estrategia más sencilla que las anteriores.

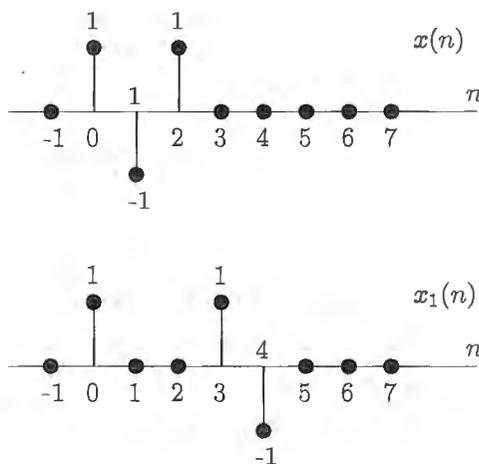
$$\begin{aligned} y(0) &= x_1((0-2)_6) = x_1(4) = 5 \\ y(1) &= x_1((1-2)_6) = x_1(5) = 6 \\ y(2) &= x_1((2-2)_6) = x_1(0) = 1 \\ y(3) &= x_1((3-2)_6) = x_1(1) = 2 \\ y(4) &= x_1((4-2)_6) = x_1(2) = 3 \\ y(5) &= x_1((5-2)_6) = x_1(3) = 4 \\ y(n) &= 5\delta(n) + 6\delta(n-1) + \delta(n-2) + 2\delta(n-3) + 3\delta(n-4) + 4\delta(n-5) \end{aligned}$$

### Problema 8.20

En la figura se muestran dos secuencias finitas  $x(n)$  y  $x_1(n)$ . Las DFTs de orden  $N$  de estas secuencias  $X(k)$  y  $X_1(k)$ , respectivamente, están relacionadas por la ecuación

$$X_1(k) = X(k)e^{j2\pi k^2/N}$$

donde  $N$  es una constante desconocida. ¿Puede encontrar un valor de  $N$  consistente con la figura? Su elección, ¿es única? Si sí, justifíquelo; si no encuentre otro valor de  $N$  consistente con la información dada.



- La propiedad de la DFT de desplazamiento circular en el dominio temporal establece:

$$x((n - n_0)_N) \xleftrightarrow{DFT} e^{-j\frac{2\pi k}{N}n_0} X(k)$$

- Comparando esta propiedad con la expresión del problema  $X_1(k) = X(k)e^{j\frac{2\pi k}{N}2}$  se obtiene  $x_1(n) = x((n + 2)_N)$ , así que  $x_1(n)$  debe responder a un desplazamiento circular a la izquierda de  $x(n)$ .
- Observando las gráficas de las señales  $x_1(n)$  sólo puede ser una versión desplazada circularmente hacia la derecha de  $x(n)$  con  $N = 5$ ; cualquier otro valor resultaría en un número de ceros distinto entre las muestras de valor 1 de  $x_1(n)$ , por ejemplo, con  $N = 6$  habría 3 ceros, mientras que con  $N = 4$  habría sólo uno.
- En definitiva:  $x_1(n) = x((n + 2)_5)$ , con  $N = 5$ , único.
- Los últimos comentarios del problema 8.11 permiten una solución "alternativa"; en efecto, se puede escribir  $x_1(n) = x(n) \otimes \delta((n + 2)_5)$ , pero es fácil comprobar que  $\delta((n + 2)_5) = \delta(n - 3)$ , así que también  $x_1(n) = x(n) \otimes \delta(n - 3) = x((n - 3)_5)$ , resultado que puede verificarse en las gráficas. ¿Hay algún error? No; el desplazamiento es circular por lo que desplazar una cantidad  $n_0$  en un sentido es equivalente a desplazar  $N - n_0$  en el sentido contrario. En el dominio transformado  $X(k)e^{j\frac{2\pi k}{5}(-2)} = X(k)e^{j\frac{2\pi k}{5}(-2)}e^{j\frac{2\pi k}{5}(5)} = X(k)e^{j\frac{2\pi k}{5}3}$ .

**Problema 8.38**

Considere la secuencia de duración finita

$$x(n) = 2\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-3)$$

Se realizan las siguientes operaciones con la secuencia:

(I) Calcular la DFT de orden 5,  $X(k)$ .

(II) Calcular la DFT inversa de orden 5 de  $Y(k) = X(k)^2$  para obtener la secuencia  $y(n)$ .

(a) Determine la secuencia  $y(n)$  para  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ .

(b) Si se usan DFTs de orden  $N$  en el anterior procedimiento, ¿cómo debe elegirse  $N$  para que  $y(n) = x(n) * x(n)$  para  $0 \leq n \leq N-1$ ?

Nota: véase el problema 8.11 en el que se discuten las estrategias para el cálculo de la convolución circular.

(a)  $y(n)$

- Haciendo las operaciones indicadas se obtiene  $y(n) = \text{DFT}^{-N}\{X(k)X(k)\} = x(n) \circledast x(n)$ , convolución circular de  $x(n)$  consigo misma.
- Cálculo directo:

$$y(0) = \sum_{m=0}^4 x(m)x((0-m)_5) = x(0)x(0) + x(1)x(4) + x(2)x(3) + x(3)x(2) + x(4)x(1) = 4$$

$$y(1) = \sum_{m=0}^4 x(m)x((1-m)_5) = x(0)x(1) + x(1)x(0) + x(2)x(4) + x(3)x(3) + x(4)x(2) = 5$$

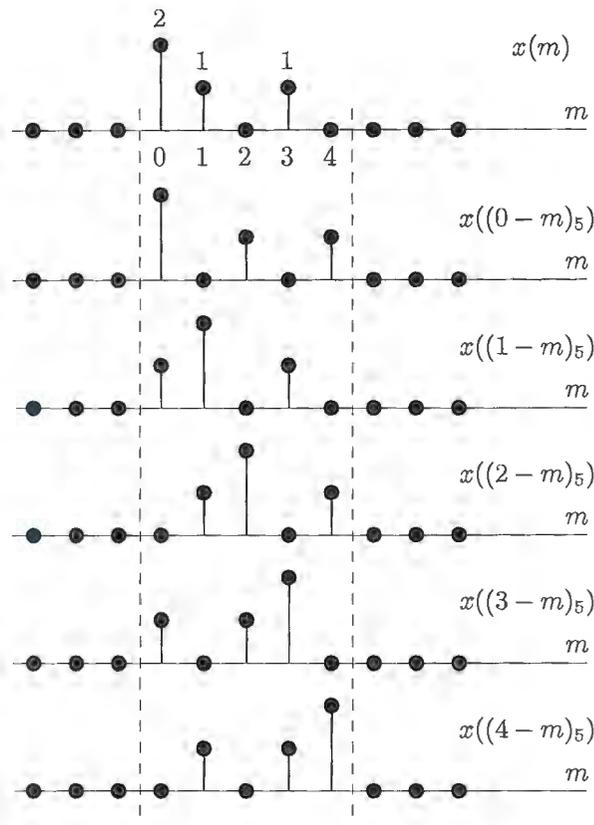
$$y(2) = \sum_{m=0}^4 x(m)x((2-m)_5) = x(0)x(2) + x(1)x(1) + x(2)x(0) + x(3)x(4) + x(4)x(3) = 1$$

$$y(3) = \sum_{m=0}^4 x(m)x((3-m)_5) = x(0)x(3) + x(1)x(2) + x(2)x(1) + x(3)x(0) + x(4)x(4) = 4$$

$$y(4) = \sum_{m=0}^4 x(m)x((4-m)_5) = x(0)x(4) + x(1)x(3) + x(2)x(2) + x(3)x(1) + x(4)x(0) = 2$$

$$y(n) = 4\delta(n) + 5\delta(n-1) + \delta(n-2) + 4\delta(n-3) + 2\delta(n-4)$$

- Cálculo gráfico:



$$\begin{aligned}
 y(0) &= 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 4 \\
 y(1) &= 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 5 \\
 y(2) &= 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 1 \\
 y(3) &= 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 4 \\
 y(4) &= 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 2 \\
 y(n) &= 4\delta(n) + 5\delta(n-1) + \delta(n-2) + 4\delta(n-3) + 2\delta(n-4)
 \end{aligned}$$

- Cálculo con propiedades de la DFT:

$$\begin{aligned}
 y(n) &= x(n) \circledast (2\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-3)) \\
 &= 2x(n) \circledast \delta(n) + x(n) \circledast \delta(n-1) + x(n) \circledast \delta(n-3) \text{ por la propiedad de linealidad} \\
 &= 2x(n) + x((n-1)_5) + x((n-3)_5) \text{ por el resultado de convolucionar con } \delta(n-n_0) \\
 &= (4\delta(n) + 2\delta(n-1) + 2\delta(n-3)) \\
 &\quad + (2\delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-4)) \\
 &\quad + (2\delta(n-3) + \delta(n-4) + \delta(n-1)) \\
 &= 4\delta(n) + 5\delta(n-1) + \delta(n-2) + 4\delta(n-3) + 2\delta(n-4)
 \end{aligned}$$

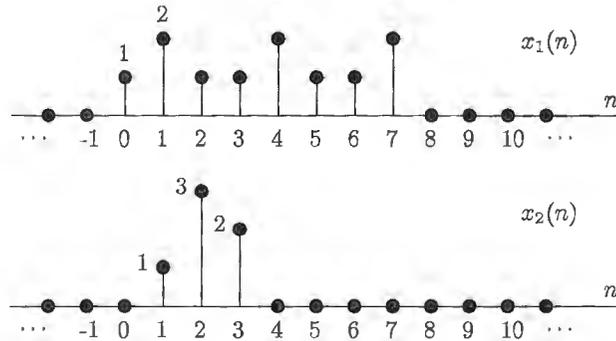
(b)  $N$  para que  $x(n) * x(n) = x(n) \circledast x(n)$ ,  $n = 0, \dots, N-1$

- Sean  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$  dos secuencias de duraciones  $L$  y  $P$ , respectivamente; sus convoluciones lineal y circular de orden  $N$  son iguales en el intervalo  $n_1 \leq n \leq n_2$  con  $n_1 = L + P - 1 - N$  y  $n_2 = N - 1$ .
- Para que ambas convoluciones sean iguales hay que seleccionar  $N = L + P - 1$ ; de esta forma  $n_1 = 0$  y  $n_2 = N - 1$ . En realidad, cualquier valor de  $N > L + P - 1$  es válido aunque en este caso el resultado  $n_1 < 0$  no tiene sentido. Por contra, el valor de  $n_2 > N - 1$  sí es correcto: ambas convoluciones producirán valores nulos para  $n > N - 1$ .

- En el problema  $L = P = 4$ .
- Con  $N = 5$ ,  $n_1 = 4 + 4 - 1 - 5 = 2$  y  $n_2 = 5 - 1 = 4$
- Con  $N = L + P - 1 = 7$ ,  $n_1 = 0$  y  $n_2 = 6$  y, por tanto,  $x(n) * x(n) = x(n) \textcircled{7} x(n)$ ,  $n = 0, \dots, 6$ .

**Problema 8.14**

La figura muestra dos señales de duración finita  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$ . Suponga que ambas señales son 0 fuera de la región mostrada en la figura. Sea  $x_3(n)$  la convolución circular de orden 8 de  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$ ; es decir,  $x_3(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$ . Determine  $x_3(2)$ .

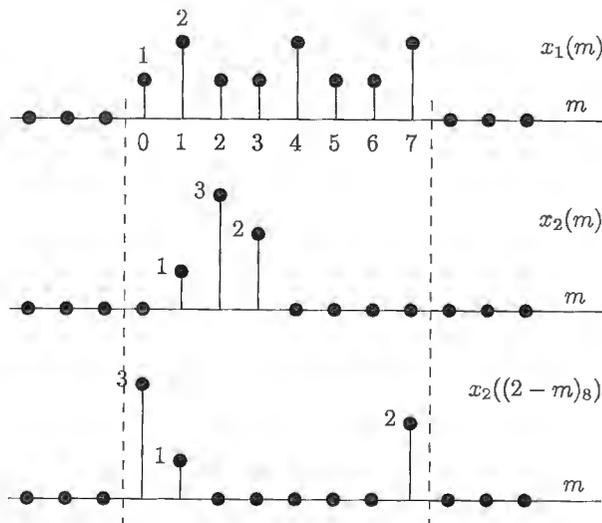


Nota: véase el problema 8.11 en el que se discuten las estrategias para el cálculo de la convolución circular.

- Una convolución circular de orden 8 es bastante tediosa de calcular a mano. Afortunadamente el problema sólo pide calcular el resultado para  $n = 2$ .
- Cálculo directo:

$$\begin{aligned}
 x_3(2) &= \sum_{m=0}^7 x_1(m)x_2((2-m)_8) \\
 &= x_1(0)x_2(2) + x_1(0)x_2(1) + x_1(0)x_2(0) + x_1(0)x_2(7) \\
 &\quad + x_1(1)x_2(6) + x_1(1)x_2(5) + x_1(1)x_2(4) + x_1(1)x_2(3) = \\
 &= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \\
 &= 9
 \end{aligned}$$

- Cálculo gráfico:

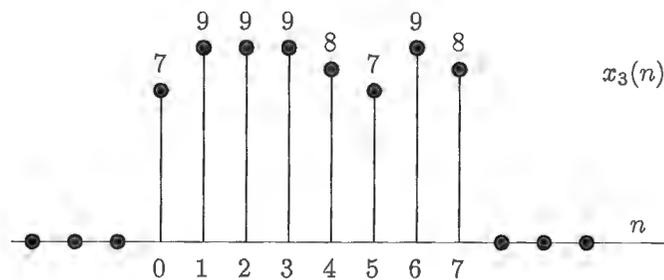


$$x_3(2) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 9$$

- Cálculo con propiedades de la DFT:

$$\begin{aligned}
 x_3(n) &= x_1(n) \otimes (\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 2\delta(n-3)) \\
 &= x_1((n-1)_8) + 3x_1((n-2)_8) + 2x_1((n-3)_8) \quad \text{particularizando para } n=2 \\
 x_3(2) &= x_1((2-1)_8) + 3x_1((2-2)_8) + 2x_1((2-3)_8) \\
 &= x_1(1) + 3x_1(0) + 2x_1(7) \\
 &= 2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\
 &= 9
 \end{aligned}$$

- Se recomienda como continuación del problema calcular todos los valores de la convolución. El resultado es:

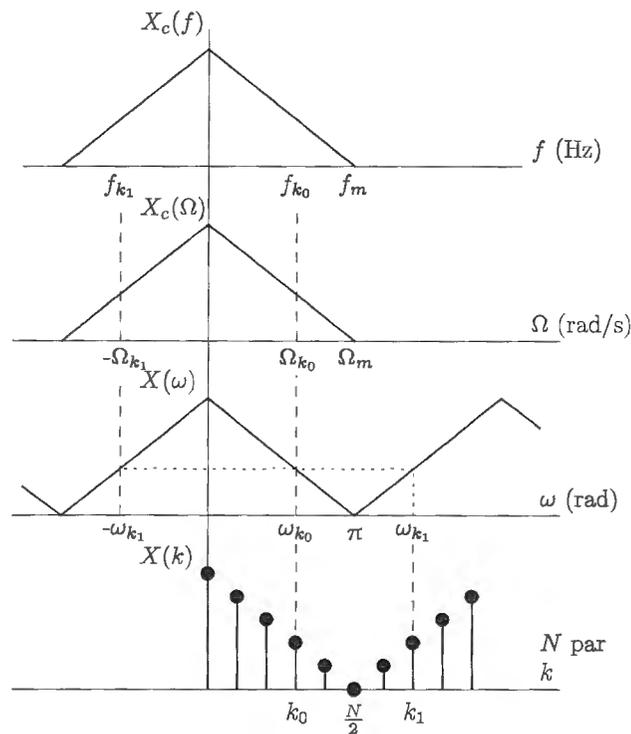


**Problema 10.1**

Una señal continua  $x_c(t)$  está limitada en banda a frecuencias inferiores a 5 kHz; es decir,  $X_c(\Omega) = 0$  para  $|\Omega| \geq 2\pi(5000)$ . La señal  $x_c(t)$  se muestrea con una frecuencia de muestreo de 10000 muestras por segundo (10 kHz) para producir la secuencia  $x(n) = x_c(nT_s)$  con  $T_s = 10^{-4}$ . Sea  $X(k)$  la DFT de orden 1000 de  $x(n)$ .

- (a) ¿Con qué frecuencia continua se corresponde el índice  $k = 150$  de  $X(k)$ ?
- (b) ¿Con qué frecuencia continua se corresponde el índice  $k = 850$  de  $X(k)$ ?

- En una DFT el índice  $k$  es adimensional; se trata del índice de una secuencia. Ahora bien, los valores de la DFT de orden  $N$  de una secuencia  $x(n)$  son muestras equiespaciadas de su transformada de Fourier  $X(\omega)$  en el intervalo  $[0, 2\pi)$ . Es decir, un índice  $k_0$  se corresponde con una frecuencia discreta  $\omega_k = 2\pi k_0/N$ .
- Una frecuencia discreta puede relacionarse con una frecuencia continua si la señal  $x(n)$  proviene del muestreo a frecuencia  $f_s = 1/T_s$  de una señal continua  $x_c(t)$ . Basta aplicar el cambio de variable  $\Omega = \omega/T_s$  para obtener la frecuencia continua en radianes o  $f = \omega/2\pi T_s$  para obtenerla en hercios. Nótese que para que el valor  $X(k_0)$  se corresponda (salvo una constante) con  $X_c(\Omega_0)$  o  $X_c(f_0)$  la señal  $x_c(t)$  debe estar bien muestreada.
- El índice  $k$  de la DFT varía en el rango  $0, \dots, N - 1$  por lo que un índice  $k_0 \leq N/2$  se corresponde con una frecuencia continua positiva; sin embargo, un índice  $k_1 > N/2$  se corresponde con una frecuencia discreta en el intervalo  $(\pi, 2\pi)$  y, por tanto, con una frecuencia continua negativa debido a la periodicidad de la transformada de Fourier de la secuencia  $x(n)$ . Véase la figura.



- Resumiendo, dado un índice  $k_i$  de una DFT de orden  $N$  las frecuencias continuas correspondientes son:

$$f_i = \begin{cases} \frac{f_s}{N} k_i & k_i \leq \frac{N}{2} \\ \frac{f_s}{N} (k_i - N) & k_i > \frac{N}{2} \end{cases} \quad \Omega_i = \begin{cases} \frac{2\pi f_s}{N} k_i & k_i \leq \frac{N}{2} \\ \frac{2\pi f_s}{N} (k_i - N) & k_i > \frac{N}{2} \end{cases}$$

Nótese que  $N/2$  es entero sólo si  $N$  es par; pero las expresiones siguen siendo válidas para  $N$  impar.

- En el problema la frecuencia máxima de la señal continua  $x_c(t)$  es  $f_m = 5000$  y la frecuencia de muestreo  $f_s = 10000$ ; es decir, la señal está bien muestreada. La DFT es de orden  $N = 1000$ , así que:

- $k = 150 < 500$  se corresponde con  $f_{150} = \frac{10000}{1000} 150 = 1500 \text{ Hz} = 2\pi(1500) \text{ rad/s}$

- $k = 800 > 500$  se corresponde con  $f_{800} = \frac{10000}{1000} (800 - 1000) = -2000 \text{ Hz} = -2\pi(2000) \text{ rad/s}$

**Problema 10.2**

Una señal continua  $x_c(t)$  está limitada en banda a 5 kHz; es decir,  $X_c(\Omega) = 0$  para  $|\Omega| \geq 2\pi 5000$ . La señal  $x_c(t)$  se muestrea con periodo  $T_s$  produciendo la señal  $x(nT_s)$ . Para examinar las propiedades espectrales de la señal, se calcula una DFT de orden  $N$  de un segmento de  $N$  muestras de  $x(n)$  usando un programa que requiere  $N = 2^v$ , con  $v$  entero.

Determine el valor mínimo de  $N$  y el rango de frecuencias de muestreo

$$F_{min} < \frac{1}{T_s} < F_{max}$$

de forma que se evite el solapamiento espectral, y que el espacio efectivo entre valores de la DFT sea menor que 5 Hz; es decir, que las frecuencias continuas equivalentes en las que se evalúa la transformada de Fourier estén separadas por una cantidad inferior a 5 Hz.

- La separación en frecuencia discreta de dos índices consecutivos de una DFT de orden  $N$  es  $\Delta\omega = 2\pi/N$ , que se traduce en frecuencias continuas como  $\Delta f = f_s/N$ . Véase el problema 10.1.
- El problema impone tres condiciones:

$$\begin{array}{rcl} f_s & > & 10 \text{ kHz} \quad (\text{para evitar solapamiento}) \\ \Delta f = f_s/N & < & 5 \text{ Hz} \quad (\text{dato}) \\ N & = & 2^v \quad (N \text{ potencia de } 2) \end{array}$$

- Las dos primeras condiciones pueden agruparse como:  $10 \text{ kHz} < f_s < 5N \text{ Hz}$ . El valor mínimo de  $N$  que satisface esta desigualdad es  $N = 2048 = 2^{11}$ , resultando  $10 \text{ kHz} < f_s < 5 \cdot 2048 = 10240 \text{ Hz}$ .
- La frecuencia mínima solicitada es  $F_{min} = 10000 \text{ Hz}$  y la frecuencia máxima  $F_{max} = 10240 \text{ Hz}$ .

### Problema 10.3

Una señal continua  $x_c(t) = \cos(\Omega_0 t)$  se muestrea con periodo  $T_s$  para producir la secuencia  $x(n) = x_c(nT_s)$ . A  $x(n)$ ,  $n = 0, \dots, N-1$  se le aplica una ventana rectangular de  $N$  puntos y se calcula la DFT de  $N$  puntos  $X(k)$ ,  $k = 0, \dots, N-1$  a la secuencia resultante.

- (a) Suponiendo que  $\Omega_0$ ,  $N$  y  $k_0$  son fijos, ¿cómo debe elegirse  $T_s$  para que  $X(k_0)$  y  $X(N-k_0)$  sean distintos de 0 y  $X(k) = 0$  para los restantes valores de  $k$ ?
- (b) La respuesta, ¿es única? Si no, encuentre otro valor de  $T_s$  que satisfaga las condiciones anteriores.

(a)  $T_s$  para que  $X(k) = 0$  excepto  $X(k_0)$  y  $X(N-k_0)$

- Sea  $y(n) = x(n)w(n)$  la señal  $x(n) = x_c(nT_s)$  enventanada con la ventana rectangular  $w(n)$  de longitud  $N$ . La ventana  $w(n)$  asegura que  $y(n)$  se anula fuera del intervalo  $n = 0, \dots, N-1$  y que, por tanto, se puede calcular su DFT de orden  $N$ .

$$\begin{aligned} y(n) &= \cos(\Omega_0 n T_s) w(n) \\ &= \frac{1}{2} (e^{j\Omega_0 T_s n} + e^{-j\Omega_0 T_s n}) w(n) \\ &= \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 T_s n} w(n) + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 T_s n} w(n) \end{aligned}$$

- Los sumandos de la expresión anterior pueden identificarse con la propiedad de desplazamiento en frecuencia de la DFT

$$e^{j\frac{2\pi k_0}{N} n} w(n) \xleftrightarrow{\text{DFT}} W((k-k_0)_N)$$

con  $k_0 = \Omega_0 T_s N / 2\pi$ .

- La DFT de orden  $N$  de una ventana rectangular de longitud  $N$  es  $W(k) = N\delta(k)$  ya que son muestras de su transformada de Fourier

$$W(\omega) = e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})} \frac{\text{sen}(\omega N/2)}{\text{sen}(\omega/2)}$$

en las frecuencias  $\omega_k = 2\pi k/N$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ . Para  $k = 0$ ,  $W(0) = N$  (aplicando la regla de L'Hôpital) y para  $k \neq 0$ ,  $W(k) = 0$  ya que el numerador es  $\text{sen}(\omega_k N/2) = \text{sen}(\pi k) = 0$ , con el denominador  $\text{sen}(\pi k/N) \neq 0$ .

- Por tanto

$$X(k) = \frac{N}{2} [\delta((k-k_0)_N) + \delta((k+k_0)_N)]$$

Nótese que el enunciado indica que la DFT de la señal enventanada se denomina  $X(k)$ .

- Como  $k_0 = \Omega_0 T_s N / 2\pi$ , resulta  $T_s = 2\pi k_0 / (\Omega_0 N)$ .
- En frecuencia continua,  $k_0 = f_0 N / f_s$  y teniendo en cuenta que  $f_s > 2f_0$  para que la señal  $x_c(t)$  esté bien muestreada, resulta  $k_0 < N/2$ . Con este resultado es fácil comprobar que  $\delta((k-k_0)_N) = \delta(k-k_0)$  y  $\delta((k+k_0)_N) = \delta(k-(N-k_0))$ , y por tanto:

$$X(k) = \frac{N}{2} [\delta(k-k_0) + \delta(k-(N-k_0))]$$

que se anula para todos los valores de  $k$  excepto  $k = k_0$  y  $k = N - k_0$ .

(b) ¿ $T_s$  único?

- No es único. Si se elige  $T_s = 2\pi(N - k_0)/(\Omega_0 N)$  se obtiene el mismo resultado, solo que ahora la primera delta resulta  $\delta(k - (N - k_0))$  y la segunda  $\delta(n - k_0)$ .

**Problema 10.5**

Considere la estimación del espectro de una señal discreta usando la DFT con una ventana de Hamming aplicada a  $x(n)$ . Un criterio conservador cuando se analiza con DFTs una señal enventanada es que la resolución en frecuencia es igual a la anchura del lóbulo principal de  $W(\omega)$ . Se desean resolver señales sinusoidales que están separadas tan poco como  $\pi/100$  en  $\omega$ . Además, la longitud de la ventana  $L$  está obligada a ser una potencia de 2. ¿Cuál es la longitud mínima  $L = 2^v$  que cumple con el requisito de resolución?

- La anchura del lóbulo principal de una ventana de Hamming de longitud  $L$  es  $\Delta\omega_h = 8\pi/L$ . Aplicando el criterio de no solapamiento de los lóbulos principales:

$$\Delta\omega_h \leq \pi/100$$

$$8\pi/L \leq \pi/100$$

$$L \geq 800$$

Pero, según el enunciado,  $L$  debe ser una potencia de 2 así que el valor buscado es

$$L_{min} = 2^{\lceil \log_2(800) \rceil} = 2^{10} = 1024$$

- Nota: La anchura del lóbulo principal de la ventana de Hamming es el doble que el de la ventana rectangular; por este motivo no es recomendable usar esta ventana para obtener resolución espectral, ya que es idónea para limitar las fugas espectrales pero a costa de un lóbulo principal más ancho que el de la ventana rectangular. Con la ventana rectangular el resultado del problema sería  $\Delta\omega_r = 4\pi/L \Rightarrow L \geq 400 \Rightarrow L_{min} = 512$ . Como puede verse, para obtener la misma resolución espectral se precisan el doble de muestras con la ventana de Hamming que con la ventana rectangular.

**Problema 10.11**

Una señal continua se muestrea a una frecuencia de 10 kHz y con la secuencia resultante se calcula una DFT de 1024 puntos. Determine la separación en frecuencia continua entre las muestras espectrales.

---

Nota: véanse los problemas 10.1 y 10.2

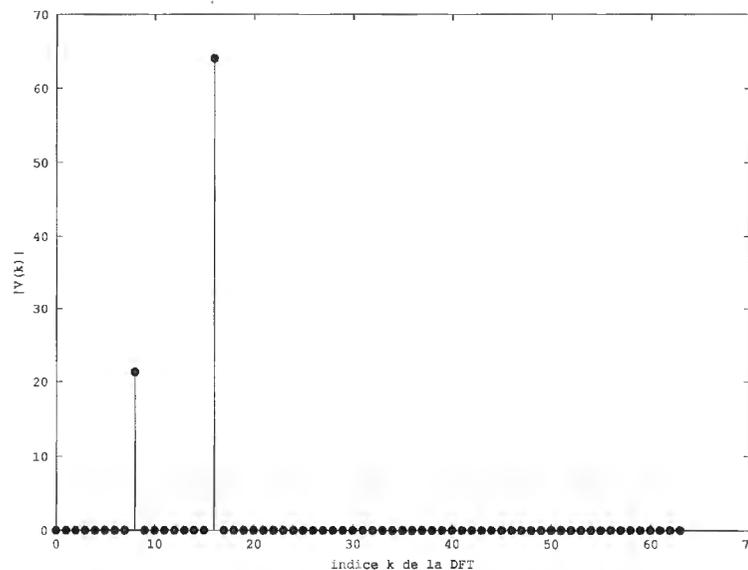
- La separación en frecuencias continuas responde a  $\Delta f = f_s/N$ , así que:

$$\Delta f = \frac{10000}{1024} = 9,77 \text{ Hz}$$
$$\Delta \Omega = 2\pi \Delta f = 61,36 \text{ rad/s}$$

### Problema 10.18

La figura muestra la magnitud  $|V(k)|$  de la DFT de 128 puntos  $V(k)$  de una señal  $v(n)$ . La señal  $v(n)$  se obtuvo multiplicando  $x(n)$  por una ventana rectangular de 128 puntos  $w(n)$ ; es decir,  $v(n) = x(n)w(n)$ . Nótese que la figura muestra  $|V(k)|$  sólo en el intervalo  $0 \leq k \leq 64$ . ¿Cuáles de las siguientes señales podría ser  $x(n)$ ? Es decir, ¿cuáles son consistentes con la información mostrada en la figura?

$$\begin{aligned}x_1(n) &= \cos(\pi n/4) + \cos(0,26\pi n) \\x_2(n) &= \cos(\pi n/4) + (1/3) \operatorname{sen}(\pi n/8) \\x_3(n) &= \cos(\pi n/4) + (1/3) \cos(\pi n/8) \\x_4(n) &= \cos(\pi n/8) + (1/3) \cos(\pi n/16) \\x_5(n) &= (1/3) \cos(\pi n/4) + \cos(\pi n/8) \\x_6(n) &= \cos(\pi n/4) + (1/3) \cos(\pi n/8 + \pi/3)\end{aligned}$$



- La gráfica sólo muestra frecuencias continuas positivas porque el rango de índices es  $k = 0, \dots, N/2$  equivalente a  $\omega_k \in [0, \pi)$ .
- A partir de la gráfica se obtiene la siguiente información:
  - Sólo hay dos valores no nulos de la DFT:  $k_1 = 8$  y  $k_2 = 16$
  - El valor en  $k_2 = 16$  ( $|V(16)| \sim 65$ ) es aproximadamente triple que el valor en  $k_1 = 8$  ( $|V(8)| \sim 22$ ).
- Las frecuencias discretas correspondientes a los valores de los índices  $k_1$  y  $k_2$  son:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{128} 8 = \frac{\pi}{8} \text{ rad} \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{128} 16 = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

- Análisis las señales propuestas:
  - $x_1(n) = \cos(\pi n/4) + \cos(0,26\pi n)$ : el segundo coseno tiene una frecuencia de  $0,26\pi$  rad que no es ni  $\pi/8$  ni  $\pi/4$  por lo que no es consistente con la gráfica. Es verdad que  $\pi/4 = 0,25\pi$  es un valor cercano a  $0,26\pi$  rad pero si se calcula el valor de  $k$  no entero en el que debería aparecer esta frecuencia se obtiene  $k = 0,26 \cdot 128/2 = 16,64$ , valor casi centrado entre 16 y 17; por tanto, teniendo en cuenta las fugas espectrales deberían aparecer valores no nulos en  $k = 16$  y  $k = 17$ , que no es el caso.

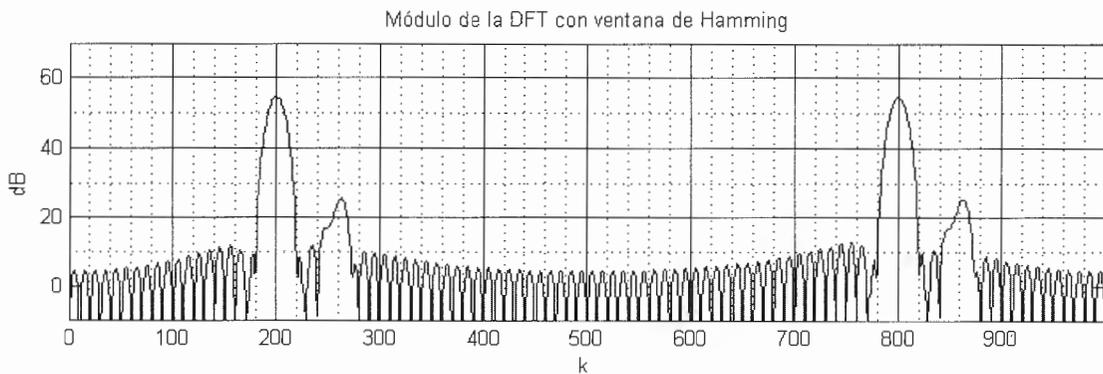
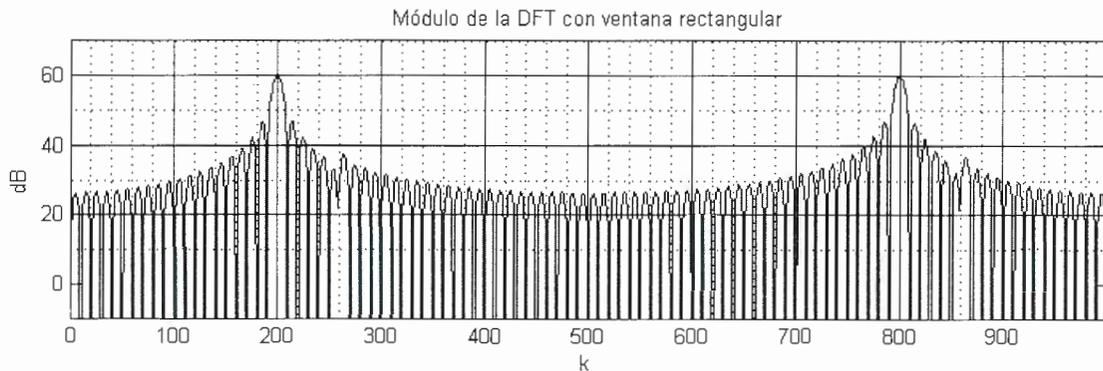
- $x_2(n) = \cos(\pi n/4) + (1/3) \sin(\pi n/8)$ : es consistente con la gráfica; los picos aparecen en los lugares adecuados y correctamente escalados.
  - $x_3(n) = \cos(\pi n/4) + (1/3) \cos(\pi n/8)$ : es consistente con la gráfica; los picos aparecen en los lugares adecuados y correctamente escalados.
  - $x_4(n) = \cos(\pi n/8) + (1/3) \cos(\pi n/16)$ : en  $k = 4$ , correspondiente con la frecuencia  $\pi/16$ , no aparece ningún pico por lo que no es consistente con la gráfica.
  - $x_5(n) = (1/3) \cos(\pi n/4) + \cos(\pi n/8)$ : los picos aparecen en los lugares adecuados, pero con las amplitudes cambiadas por lo que no es consistente con la gráfica.
  - $x_6(n) = \cos(\pi n/4) + (1/3) \cos(\pi n/8 + \pi/3)$ : es consistente con la gráfica; los picos aparecen en los lugares adecuados y correctamente escalados; la fase no está representada en una gráfica de módulo.
- En resumen, sólo las señales  $x_2(n)$ ,  $x_3(n)$  y  $x_6(n)$  son consistentes con la gráfica.

## Problema P2-6

La señal

$$x_c(t) = \sum_{i=1}^N A_i^c \cos(2\pi F_i^c t) + \sum_{i=1}^M A_i^e e^{j2\pi F_i^e t}$$

con ancho de banda inferior a 1000 Hz, se muestrea con  $F_s = 2000$  Hz. A un segmento de longitud  $L = 100$  de  $x(n) = x_c(nT_s)$  se le aplica una DFT de orden  $M = 1000$ . Los módulos de la DFT, empleando una ventana rectangular y una ventana de Hamming, se representan a continuación. Se pide que calcule  $N$ ,  $M$ ,  $A_i^c$ ,  $F_i^c$ ,  $A_i^e$  y  $F_i^e$ .



### ■ Comentarios preliminares:

- La señal  $x_c(t)$  está bien muestreada; no existe *aliasing*.
- Las DFTs están representadas como funciones continuas ya que una representación con “píruetas”, como corresponde a una secuencia, quedaría sucia y poco útil por la cantidad de puntos representados.
- La señal contiene cosenos y exponenciales por lo que es necesaria una representación de todo el espectro, como es el caso. En caso de que únicamente existiesen cosenos bastaría representar la parte positiva del espectro porque la parte negativa sería simétrica.

### ■ Datos de las gráficas

1. Con la ventana rectangular se distinguen claramente 2 picos:
  - índice  $k_1 = 200$ , amplitud  $a_1 = 60$  dB
  - índice  $k_2 = 800$ , amplitud  $a_2 = 60$  dB
2. Con la ventana de Hamming se distinguen claramente 4 picos:

- índice  $k_3 = 200$ , amplitud  $a_3 \approx 54$  dB
- índice  $k_4 \approx 260$ , amplitud  $a_4 \approx 25$  dB
- índice  $k_5 = 800$ , amplitud  $a_5 \approx 54$  dB
- índice  $k_6 \approx 860$ , amplitud  $a_6 \approx 25$  dB

Los índices  $k_4$  y  $k_6$  y las amplitudes se han indicado como aproximadas porque no resulta fácil leer los valores exactos de la gráfica; es perfectamente válido usar estos valores aproximados.

■ Cálculo de frecuencias (véase el problema 10.1):

- $k_1 \Rightarrow f_1 = \frac{f_s}{M} k_1 = \frac{2000}{1000} 200 = 400$  Hz
- $k_2 \Rightarrow f_2 = \frac{f_s}{M} (M - k_1) = \frac{2000}{1000} (1000 - 800) = -400$  Hz
- $k_3 \Rightarrow f_3 = \frac{f_s}{M} k_3 = \frac{2000}{1000} 200 = 400$  Hz
- $k_4 \Rightarrow f_4 = \frac{f_s}{M} k_4 = \frac{2000}{1000} 260 = 520$  Hz
- $k_5 \Rightarrow f_5 = \frac{f_s}{M} (M - k_5) = \frac{2000}{1000} (1000 - 800) = -400$  Hz
- $k_6 \Rightarrow f_6 = \frac{f_s}{M} (M - k_6) = \frac{2000}{1000} (1000 - 860) = -280$  Hz

A partir de estos datos está claro que hay:

- un coseno ( $N = 1$ ) con frecuencia  $F_1^c = 400$  Hz que se distingue en ambas gráficas ya que se observan sus exponenciales positivas (índices  $k_1$  y  $k_3$ ) y negativas (índices  $k_2$  y  $k_5$ ) de la misma amplitud.
- dos exponenciales ( $M = 2$ ) con frecuencias  $F_1^e = 520$  Hz (índice  $k_4$ ) y  $F_2^e = -280$  Hz (índice  $k_6$ ); estas exponenciales sólo se distinguen en la gráfica con ventana de Hamming.

■ Cálculo de amplitudes:

Para medir la amplitud de un coseno debe tenerse en cuenta la identidad  $A \cos(\theta) = A \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$  de forma que cada pico en la gráfica se corresponde con la mitad de la amplitud del coseno multiplicado por el valor espectral de la ventana en  $\omega = 0$ . La amplitud de una exponencial no se ve afectada por el factor  $1/2$ .

Recuérdese que cuando se enventana una señal la transformada de Fourier (y, por tanto, sus muestras obtenidas con la DFT) que se observa es la convolución de las transformadas de Fourier de la señal y de la ventana. Cuando la señal es una exponencial su transformada es una delta y por tanto el espectro de la señal enventanada es la transformada de la ventana desplazada al lugar de la delta.

El valor de la ventana en  $\omega = 0$  se calcula fácilmente aplicando la definición de la transformada de Fourier (o la DFT, porque es una señal de longitud finita):

$$W(k) = \sum_{n=0}^{L-1} w(n) e^{-j \frac{2\pi k}{L} n}$$

que para  $k = 0$  (correspondiente con  $\omega = 0$ ) se reduce a  $W(0) = \sum_{n=0}^{L-1} w(n)$ ; es decir, la suma de los valores de la ventana. Para la ventana rectangular es fácil calcular este valor porque todas sus muestras son la unidad, resultando  $W_r(0) = \sum_{n=0}^{L-1} 1 = L$ ; para la ventana de Hamming el cálculo es más complicado, resultando  $W_h(0) = 53,54$  para una ventana de longitud  $L = 100$ .

El valor representado en las gráficas está medido en decibelios por lo que el valor leído  $a$  cumplirá:

- para un coseno de amplitud  $A^c$ :  $a = 20 \log_{10} ((A^c/2)W(0))$ , de donde  $A^c = (2/W(0))10^{a/20}$
- para una exponencial de amplitud  $A^e$ :  $a = 20 \log_{10} (A^e W(0))$ , de donde  $A^e = (1/W(0))10^{a/20}$

En el problema:

- amplitud del coseno usando el dato medido en la gráfica con ventana rectangular:  
 $A_1^c = (2/L)10^{60/20} = (2/100)10^3 = 20$ . Usando el dato medido en la gráfica con ventana de Hamming se obtendría  $A_1^c \approx (2/53,54)10^{54/20} = 18,72$ , valor menos preciso porque el dato leído de la gráfica es aproximado.
- amplitud de las exponenciales:  $A_1^e = A_2^e \approx (1/53,54)10^{25/20} = 0,33$

El cálculo de la amplitud de las exponenciales ha necesitado el dato  $W_r(0) = 53,54$  no disponible en el problema y de cálculo laborioso a partir de la definición de la ventana de Hamming. Pero puede usarse otra estrategia: las diferencias de amplitudes en decibelios medidas en ambas gráficas se conservan; así que las exponenciales tendrán una amplitud  $54 - 25 = 29$  dB menor que la amplitud medida para el coseno, y, por tanto, en la ventana rectangular deberían verse con una amplitud de  $60 - 29 = 31$  dB. Usando ahora la ventana rectangular se obtendría  $A_1^e = A_2^e \approx (1/100)10^{31/20} = 0,35$ , valor razonablemente parecido al obtenido anteriormente.

- En resumen  $N = 1$ ,  $M = 2$ ,  $A_1^c = 20$ ,  $F_1^c = 400$  Hz,  $A_1^e = 0,33$ ,  $F_1^e = 520$  Hz,  $A_2^e = 0,33$  y  $F_2^e = -280$  Hz. La señal continua es:  $x_c(t) = 20 \cos(2\pi 400t) + 0,33e^{j2\pi 520t} + 0,33e^{-j2\pi 280t}$ .
- Nota: los resultados aproximados pueden tomarse como válidos; el análisis espectral a ojo no da para más.

2

2

2

2

## Análisis Espectral. TEMA 5

Siendo  $L$  la duración de una señal  $x[n]$  y  $M$  el orden de la DFT, tenemos que:

- Resolución en frecuencia  $\equiv$  criterio de no-solapamiento  $\equiv$  criterio de resolución  $\equiv \Delta\omega \geq \frac{4\pi}{L}$  ó  $L \geq \frac{2F_s}{\Delta F}$   
siendo  $F_s \equiv$  frecuencia de muestreo y  $\Delta F \equiv$  resolución en frecuencia.

- Error en la medida de las frecuencias  $\Delta F \geq \frac{F_s}{M}$  siendo  $F_s \equiv$  frecuencia de muestreo.

Siendo  $L$  la duración de una señal  $x[n]$  y  $M$  el orden de la DFT, tenemos que:

$$x_c(t) = \sum_{i=1}^{N^c} A_i^c \cos(2\pi F_i^c t) + \sum_{i=1}^{N^e} A_i^e e^{j2\pi F_i^e t}$$

Siendo:  $N^c \equiv$  número de cosenos ;  $F_i^c \equiv$  frecuencia de cada coseno ;  $A_i^c \equiv$  amplitud de los cosenos  
 $N^e \equiv$  número de exponenciales ;  $F_i^e \equiv$  frecuencia de cada exponencial ;  $A_i^e \equiv$  amplitud de las exponenciales

1) Cálculo de  $F_i^c$  y  $F_i^e$ :  $\omega_i = \frac{2\pi}{N} \cdot k_i$  ;  $F_i = \begin{cases} \frac{F_s \cdot k_i}{M} ; k \leq M/2 \\ -\frac{F_s (M - k_i)}{M} ; k > M/2 \end{cases}$

Siendo  $F_s \equiv$  frecuencia muestreo ;  $k_i \equiv$  la posición donde se encuentra un lóbulo en cualquiera de las ventanas que nos dan. Si se repite una  $F_i$  con  $+F_i$  y  $-F_i \rightarrow$  coseno, sino será una exponencial

2) Cálculo de  $A_i^c$  y  $A_i^e$ : Fijándonos únicamente en la ventana rectangular sacamos las distintas amplitudes en dB y empleando las siguientes fórmulas (según sea coseno o exponencial):

$$A_i^c = \frac{L}{L} \cdot 10^{a_i^c/20}$$

siendo  $a_i^c$  la amplitud en dB de la gráfica correspondiente al lóbulo del coseno.

$$A_i^e = \frac{1}{L} \cdot 10^{a_i^e/20}$$

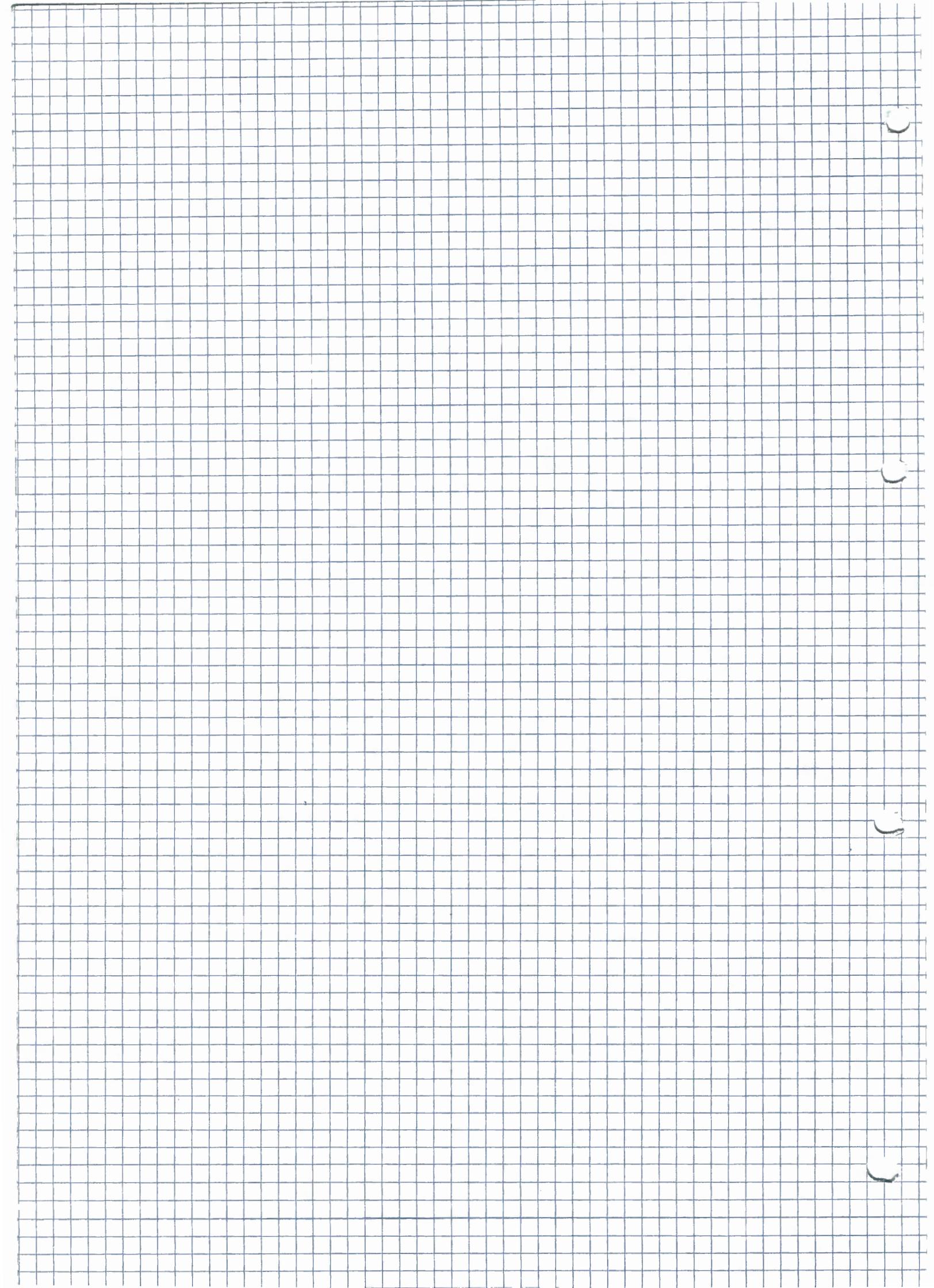
siendo  $a_i^e$  la amplitud en dB de la gráfica correspondiente al lóbulo de la exponencial.

Si en la ventana rectangular uno de los lóbulos no se puede distinguir respecto a los demás, es decir, el lóbulo que nos interesa no "destaca" por tener amplitud similar a los lóbulos cercanos, nos fijaremos en otra ventana donde sí se aprecie y haremos lo siguiente:

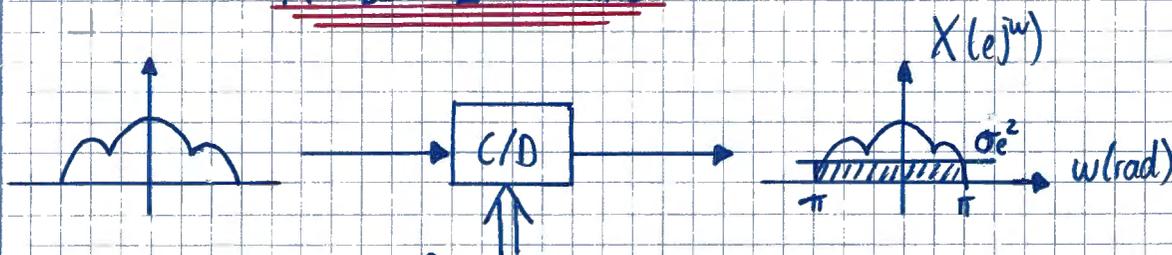
1) Cogemos dos  $k$  distintos (una la del lóbulo y otra de referencia) hacemos su diferencia de amplitud.

2) Cogemos las mismas dos  $k$  en la ventana rectangular e igualamos a la diferencia de amplitud del paso 1) despejando la amplitud que desconocemos de la ventana rectangular.

3) Sustituimos el susodicho valor de la amplitud en la fórmula.

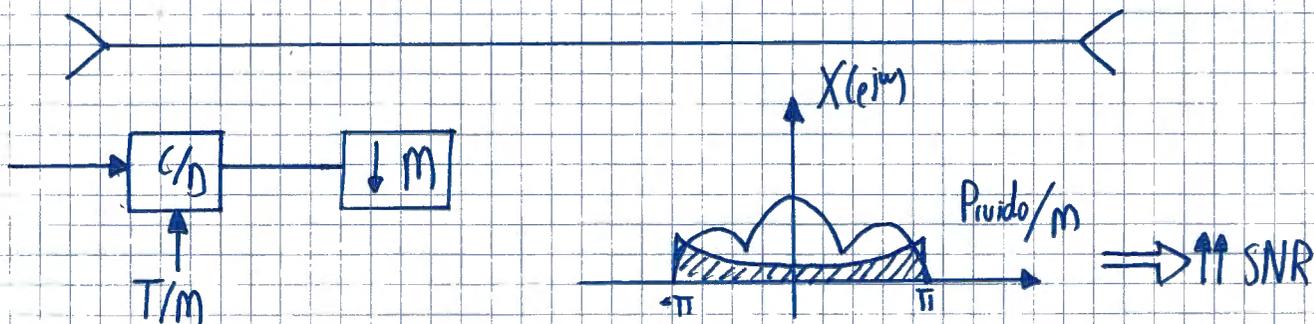
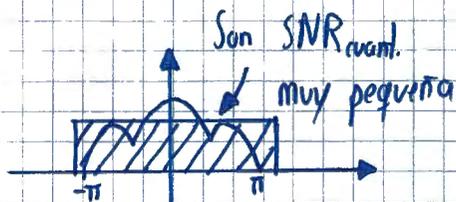


# ANÁLISIS ESPECTRAL

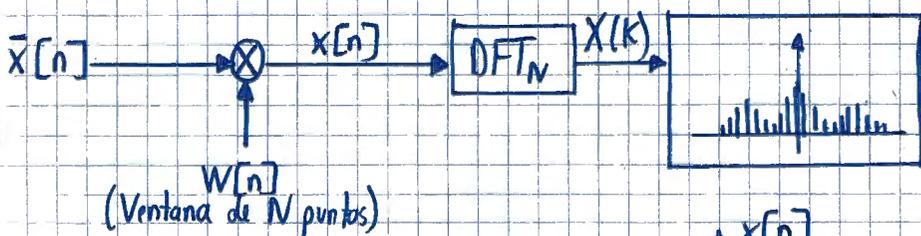


Ruido de cuantificación  
(Ruido blanco gaussiano de media cero y potencia =  $\sigma_e^2$ )  
 $\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12}$  siendo  $\Delta \equiv$  tamaño del escalón =  $\frac{2X_m}{2^B+1}$

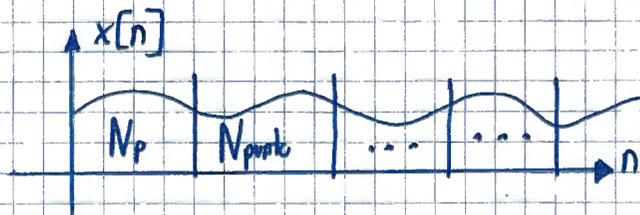
SNR<sub>cuantificación</sub> =  $10 \log \frac{P_{señal}}{P_{ruido}}$   
Relación Señal a Ruido



## Analizador de espectros

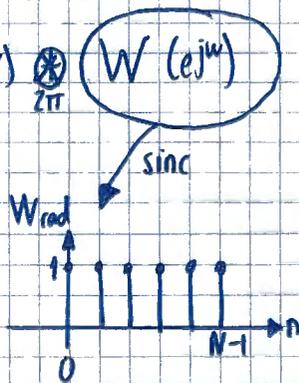


Como  $x[n]$  es de duración muy grande



Como  $x[n] = \bar{x}[n] \cdot w[n]$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \bar{X}(e^{j\omega}) \otimes W(e^{j\omega})$$

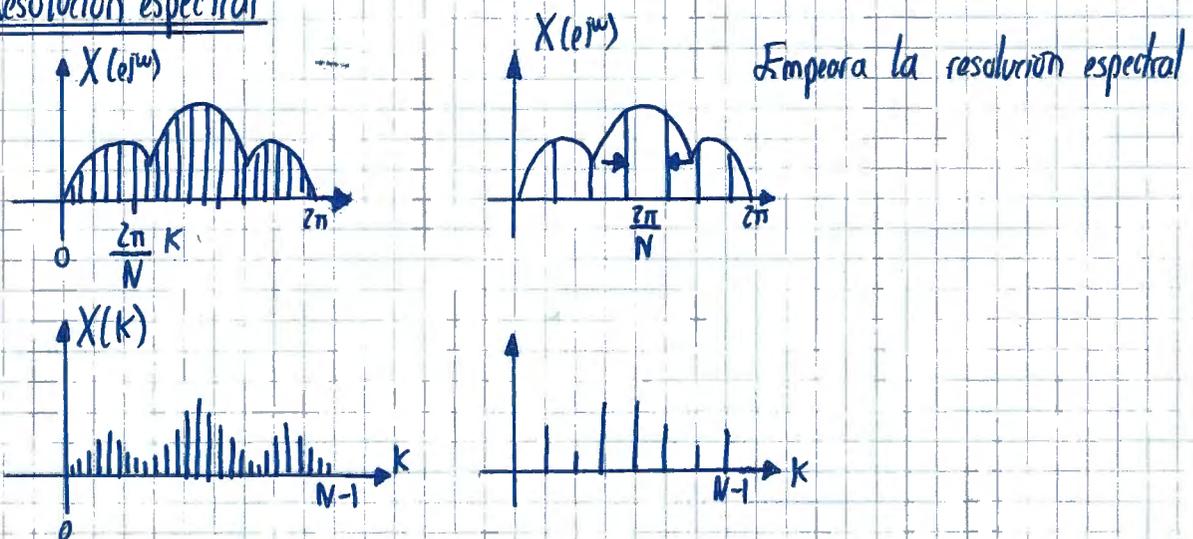


- $w[n] \equiv$  {  
rectangular  
triangular  
Hanning  
Hamming  
Blackman  
Kaiser ...

- $w[n]$  tuviera duración corta para procesar menos muestras de  $\tilde{x}[n]$  (normalmente tiene paridad)
- $x[n]$  tuviera duración larga para que su TF sea una sinc ideal.

$N \equiv n^\circ$  puntos de la DFT  $\equiv$  duración de la ventana  $\equiv n^\circ$  líneas espectrales

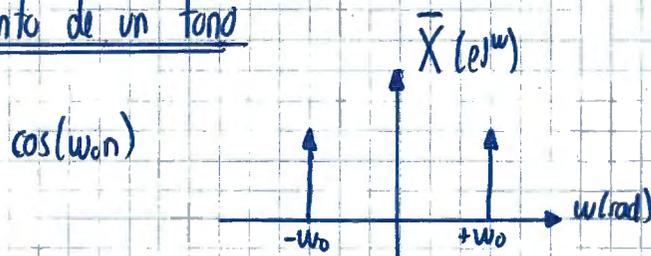
### Resolución espectral



•  $\frac{2\pi}{N} \equiv$  Resolución espectral

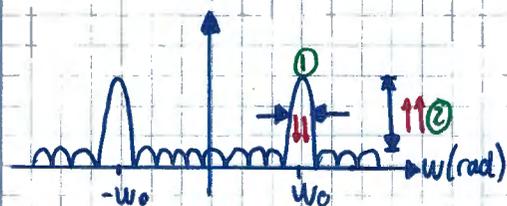
•  $\uparrow N \equiv n^\circ$  puntos  $\implies \downarrow \frac{2\pi}{N} \implies$  Mejora la resolución espectral

### Tratamiento de un tono



$$X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N} \cdot k}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N} \cdot k$$



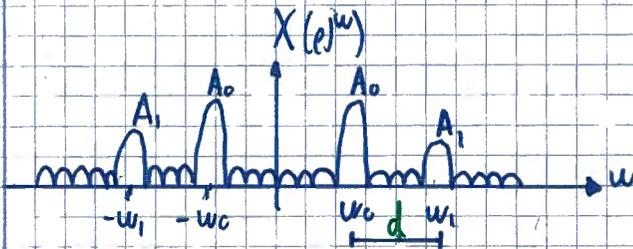
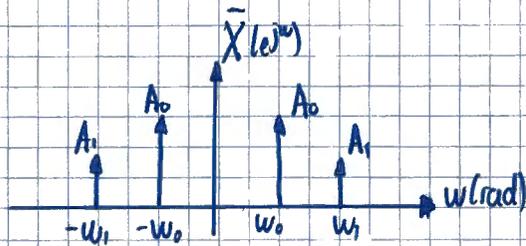
- ① • Lóbulo principal estrecho (que se parezca a una delta)
- ② • Distancia entre lóbulo principal y el secundario en amplitud grande.

Para mejorar usamos ventanas mejores. Si aumentas el  $n^\circ$  de puntos conseguimos estrechar el lóbulo principal.

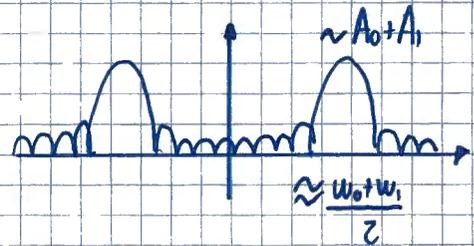
$\uparrow N \implies$  estrechamos lóbulo principal

• Tratamiento de dos tonos

$$A_0 \cos(\omega_0 n) + A_1 \cos(\omega_1 n)$$



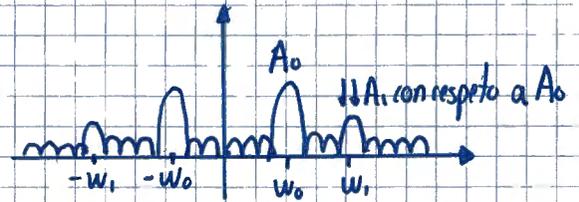
Cuando entretanamos pueden pasar dos cosas:

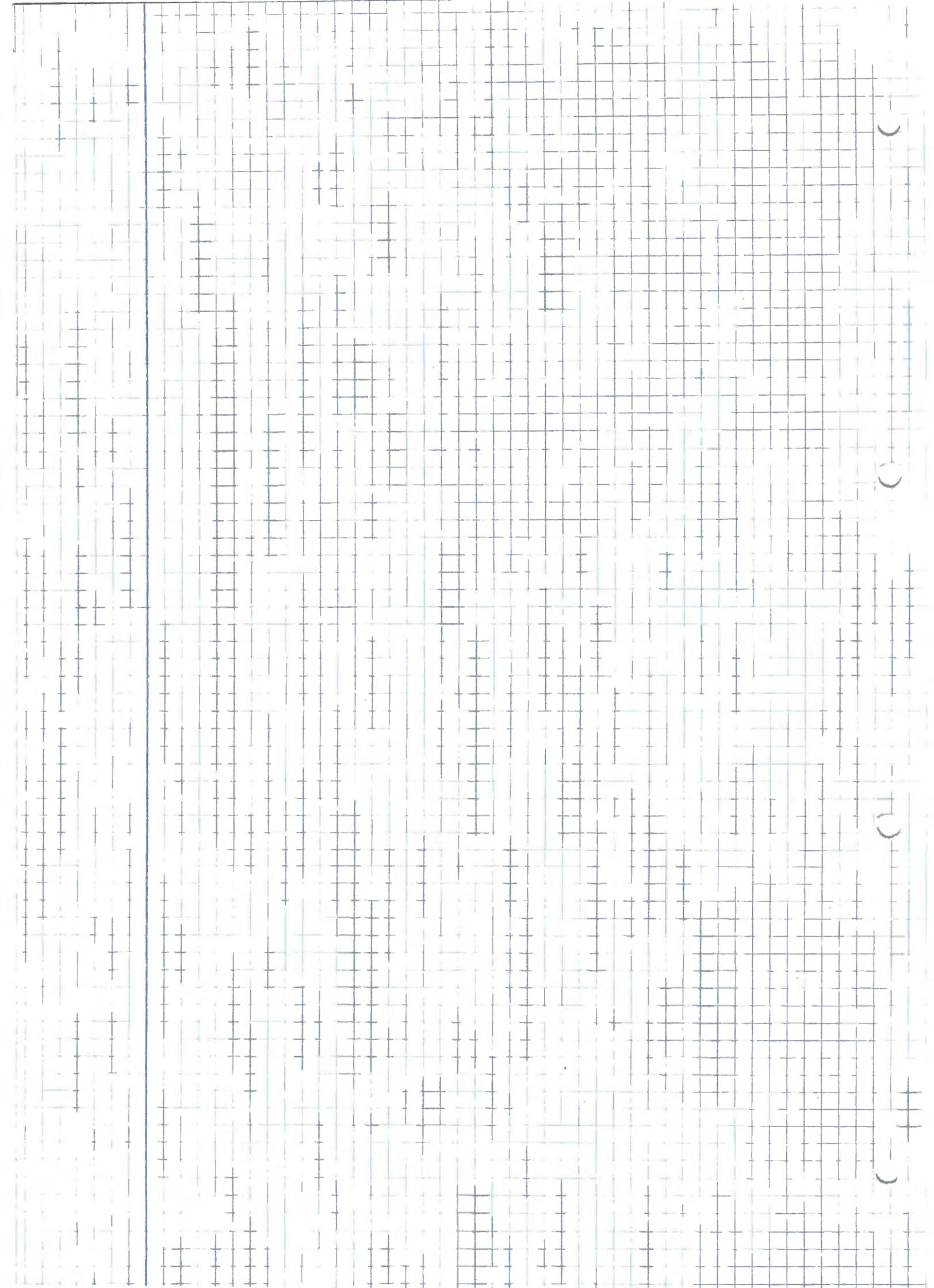


•  $d = (\text{criterio de resolución}) \Rightarrow \underline{\underline{\omega_1 - \omega_0 \geq \frac{4\pi}{N}}}$

Para solucionarlo hay que respetar el criterio de resolución!!

• Para solucionar esto hay que poner amplitudes diferente (diferencia entre  $A_0$  y  $A_1$  pequeña)





## Tratamiento Digital de Señales


Apellidos: \_\_\_\_\_ Nombre: \_\_\_\_\_

D.N.I.: \_\_\_\_\_ Curso: \_\_\_\_\_ Firma: \_\_\_\_\_

### Teoría 1 (2 puntos)

$h(n)$  es la respuesta impulsiva de un sistema LTI. De ella se sabe que:

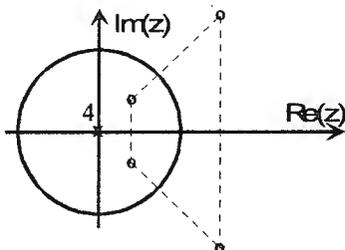
- i)  $h(n)$  es real.
- ii)  $h(n) = 0$ , para  $n < 0$  y  $n > 4$ .
- iii)  $H(z)$ , la transformada z de  $h(n)$ , tiene un cero en  $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\pi/4}$  y  $z_2 = \sqrt{2}e^{-j\pi/4}$ .

Basándose en esa información:

- a) Obtenga  $H(z)$ , dibuje el diagrama cero-polo y señale su región de convergencia ¿Es estable el sistema? ¿Es causal? (suponga que  $H(z)|_{z=1} = 1$ ).

La secuencia  $x(n)$  es real y sabemos que hay ceros complejos por lo que éstos se han de presentar en parejas complejo-conjugadas. Además, como  $h(n)$  sólo tiene cinco coeficientes,  $H(z)$  sólo puede ser de cuarto orden, es decir, nos faltan otros dos ceros además de los proporcionados. Los ceros que faltan son:

$z_3 = \sqrt{2}e^{j\pi/4}$  y  $z_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\pi/4}$ . El diagrama cero-polo queda entonces como sigue



$H(z) = k(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})(1 - z_3 z^{-1})(1 - z_4 z^{-1}) = k(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_1^{-1} z^{-1})(1 - z_1^* z^{-1})(1 - z_1^{*-1} z^{-1})$ ; de la condición  $H(1) = 1$  se obtiene

$$k = 1/((1-z_1)(1-z_2)(1-z_3)(1-z_4)) = 2$$

La región de convergencia es todo el plano z menos el origen: R.O.C.(H) =  $\{|z| > 0\}$ .

- b) Calcule y dibuje la respuesta impulsiva  $h(n)$ . A la vista de la secuencia  $h(n)$  ¿qué se podría decir de la fase de  $H(\omega)$ ?

Desarrollando  $H(z)$  y sustituyendo  $z_1, \dots, z_4$  por sus valores, se obtiene un polinomio de orden 4 en  $z^{-1}$ , cuya transformada inversa proporciona la secuencia:

$$h(n) = 2 \delta(n) - 6 \delta(n-1) + 9 \delta(n-2) - 6 \delta(n-3) + 2 \delta(n-4).$$

La secuencia es simétrica con simetría par y muestra central no repetida, luego representa a un sistema de fase lineal generalizada; su fase por tanto es lineal. (Más precisamente, es un sistema de los llamados de Tipo I.)

- c) Considere el siguiente diagrama de bloques:



en donde  $H(z)$  es el sistema definido en iii) y  $H_c(z)$  es causal y estable. Obtenga  $H_c(z)$ , de orden mínimo, con la condición de que  $|Y(\omega)| = |X(\omega)|$ .

El sistema representado por:

$$H(z) = k(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_1^{-1} z^{-1})(1 - z_1^* z^{-1})(1 - z_1^{*-1} z^{-1}), \quad z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

tiene cuatro polos en el origen y dos ceros dentro y dos ceros fuera de la circunferencia unidad. Se puede factorizar en producto de un sistema de fase mínima por un sistema paso-todo de la forma:

$$H(z) = H_{min}(z) H_{ap}(z)$$

de forma que  $|H(z)| = |H_{min}(z) H_{ap}(z)| = |H_{min}(z)|$

La expresión de  $H_{min}(z)$  y  $H_{ap}(z)$  se obtiene como:

$$H(z) = k(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_1^{-1} z^{-1})(1 - z_1^* z^{-1})(1 - z_1^{*-1} z^{-1}) = \frac{k/k_1}{z^4} ((z - z_1)(z - z_1^*))^2 \left( k_1 \frac{(z - z_1^{-1})(z - z_1^{*-1})}{(z - z_1)(z - z_1^*)} \right)$$

Ajustando  $k_1$  para que el segundo paréntesis represente a un sistema paso-todo de ganancia 1, se obtiene  $k_1 = 1/2$ .

Por otro lado, nos piden encontrar un  $H_c(z)$  tal que

$$|Y(z)| = |H(z) H_c(z)| |X(z)| = |X(z)|$$

es decir

$$|H_{min}(z) H_c(z)| = 1, \text{ ya que } |H_{ap}(z)| = 1.$$

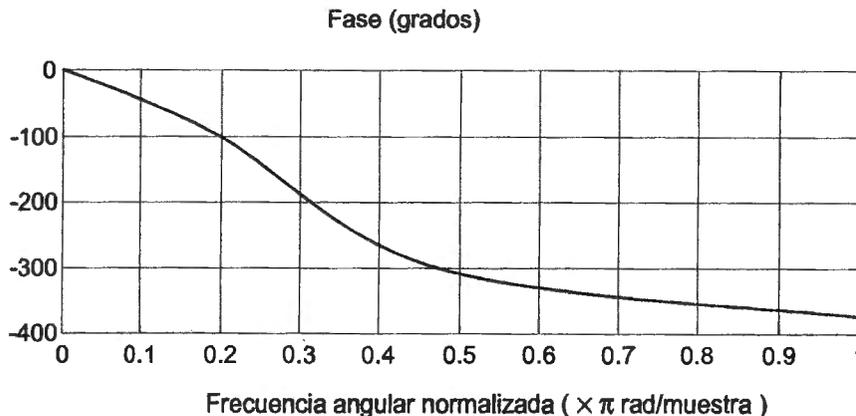
Por tanto,  $H_c(z) = \frac{1}{H_{min}(z)} = \frac{k_1/k}{(1 - z_1 z^{-1})^2 (1 - z_1^* z^{-1})^2}; k_1 = 1/2; k = 2; z_1 = (1/\sqrt{2}) e^{j\pi/4}$ .

d) Se define  $H_{eq}(z) = H(z)H_c(z)$ . Dibuje aproximadamente el módulo y la fase de  $H_{eq}(\omega)$ .

$$|H_{eq}(z)| = |H_{ap}(z) H_{min}(z) H_c(z)| = |H_{ap}(z)| = 1$$

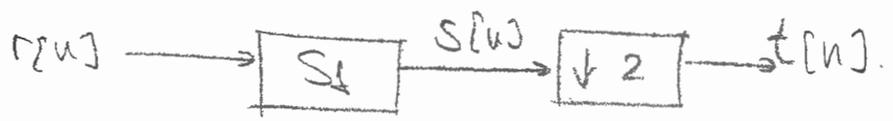
$$fase(H_{eq}(z)) = fase(H_{ap}(z) H_{min}(z) H_c(z)) = fase(H_{ap}(z))$$

Pero sabemos que la fase de un sistema paso-todo es monótona decreciente en el intervalo  $[0, \pi]$  y, asimismo, antisimétrica. Por tanto, un dibujo aproximado de la fase podría ser:



Prob. 1

Se LTI causal y real con  $h[n]$ .  
 $r[n]$  es un p. estocástico ruido blanco media nula y potencia  $\sigma_r^2$ .



autocorrelación  $R_{yy}[m] = R_{xx}[m] * C_{hh}[m]$   
 $C_{hh}[m] = h[n] * h[-n]$

~ D. esp. pot.  $S_{yy}(e^{j\omega}) = S_{xx}(e^{j\omega}) \cdot |H(e^{j\omega})|^2$   
 Potencia =  $\sigma_x^2 + \mu_x^2 = R_{xx}[0]$ .

a) (0.5 p) Demuestre  $\sigma_s^2 = \sigma_r^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h^2[k]$ .

$R_{ss}[m] = R_{rr}[m] * C_{hh}[m] = R_{rr}[m] * h[m] * h[-m] =$

} Potencia =  $\sigma_r^2 + \mu_r^2 \stackrel{0}{=} R_{xx}[0] \cdot 4$

~  $= \sigma_r^2 \cdot \delta[m] * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] \cdot h[m+k] = \sigma_r^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] \cdot h[m+k]$

$\sigma_s^2 \stackrel{m=0}{=} R_{ss}[0] = \sigma_r^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] \cdot h[k]$

$$s[n] = r[n] + (1/2) \cdot s[n-1]$$

con c.i. nulas.

b)  $\mu_s, \sigma_s^2, R_{ss}[m]$  y  $S_{ss}(e^{j\omega})$   
 (1 p) dibujarlas

$\mu_s = 0$   $\mu_r = 0$  y sist LTI

$$\sigma_s^2 = \sigma_r^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]^2 = \sigma_r^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot u[k] \right]^2 =$$

$$s[n] - \frac{1}{2} s[n-1] = r[n]$$

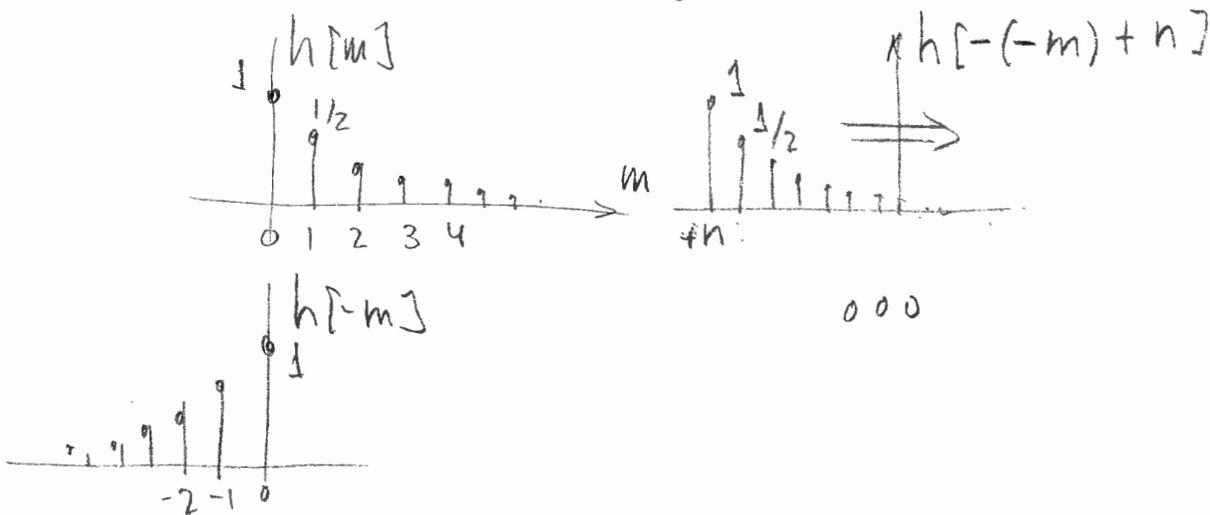
$$H(z) \cdot \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \rightarrow h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n]$$

$$= \sigma_r^2 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sigma_r^2 \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sigma_r^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \sigma_r^2 //$$

$$R_{ss}[m] = R_{rr}[m] * C_{hh}[m] = \sigma_r^2 \cdot \delta[m] * C_{hh}[m] =$$

$$= \sigma_r^2 \cdot C_{hh}[m]$$

$$C_{hh}[m] = h[m] * h[-m]$$



$$h[m] = \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot u[m] \rightarrow H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\circlearrowleft h[-m] = \left(\frac{1}{2}\right)^{-m} \cdot u[-m] = (2)^m \cdot u[-m] \rightarrow H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z}$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z} = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{2}z}$$

$$A\left(1 - \frac{1}{2}z\right) + B\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) = 1$$

$$z = \frac{1}{2} \rightarrow A\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = 1 \rightarrow A = \frac{4}{3}$$

$$z = 2 \rightarrow B\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = 1 \rightarrow B = \frac{4}{3}$$

$$H_{chh}(z) = \frac{4/3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{4/3}{1 - \frac{1}{2}z}$$

$$C_{hh}[m] = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot u[m] + \frac{4}{3} (2)^m \cdot u[-m+1]$$

$$\rightarrow R_{ss}[m] = \sigma_r^2 C_{hh}[m]$$

causal /  $\frac{4\sigma_r^2}{3} R_{ss}[m]$

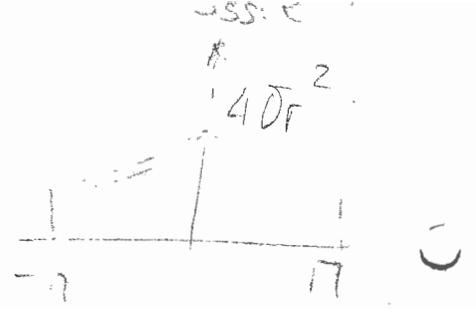
$$\rightarrow S_{ss}(e^{j\omega}) = S_{rr}(e^{j\omega}) \cdot |H(e^{j\omega})|^2 =$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{\left| \left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}e^{j\omega}\right) \right|^2} =$$

$$= \frac{1}{\left| 1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} - \frac{1}{2}e^{j\omega} + \frac{1}{4} \underbrace{e^{j\omega} \cdot e^{-j\omega}}_{1 \cdot 1} \right|^2} =$$

$$= \frac{1}{\left| \frac{5}{4} - \frac{1}{2}(e^{-j\omega} + e^{j\omega}) \right|^2} = \frac{1}{\left| \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cos(\omega) \right|^2}$$

$$S_{SS}(e^{j\omega}) = \sigma_r^2 \cdot \frac{1}{\frac{5}{4} - \cos \omega}$$



c)  
(3p)

$$\mu_t = \mu_s = 0$$

$$\sigma_t^2 = \sigma_s^2 = \frac{4}{3}\sigma_r^2$$

$$P_{tt}[m] = P_{ss}[2m]$$

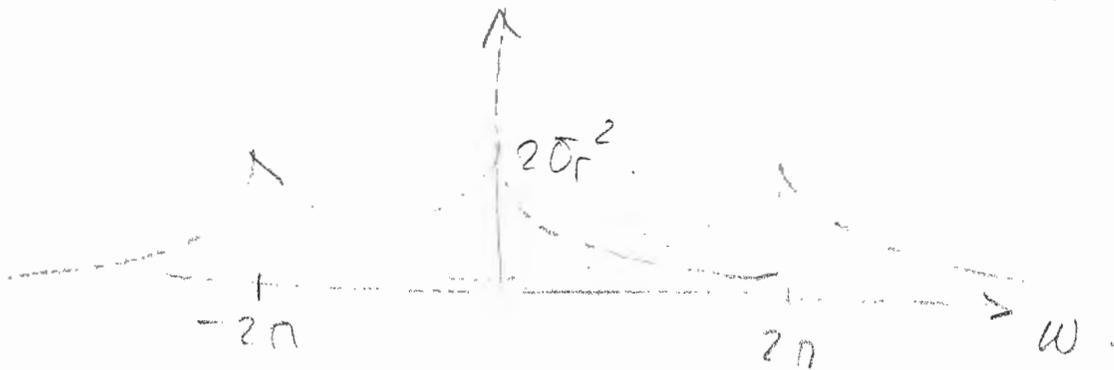
$\wedge P_{tt}[m]$

$$\frac{4}{3}\sigma_r^2$$

se comprime en et donc  $\Rightarrow$

$$S_{tt}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2-1} S_{SS}(e^{j(\frac{\omega - 2\pi k}{2})}) =$$

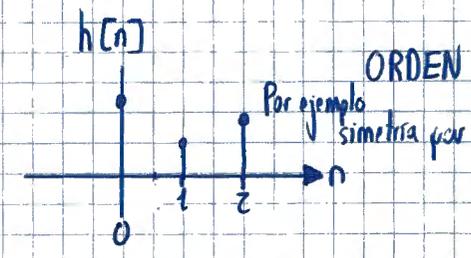
$$= \frac{1}{2} [S_{SS}(e^{j\omega}) + S_{SS}(e^{j(\omega/2 - \pi)})]$$



# Problema 3 Septiembre 2011

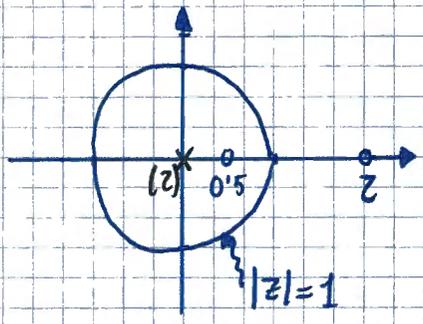
Tenemos  $H(z)$  LTI estable y causal de un FIR de fase lineal con 3 coeficientes ( $n=0,1,2$ ). Tiene un cero en  $z=0.5$  y  $H(z)|_{z=1} = 1$

a)  $\hat{c} H(z)$  y  $h[n]$ ? Dibujalas:



ORDEN  $N-1=3-1=2 \rightarrow$  ORDEN  $z$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cero} = 0.5 \\ \text{Cero} = 1/0.5 = 2 \end{array} \right.$



$$H(z) = K \cdot (1 - 0.5z^{-1})(1 - 2z^{-1})$$

$$H(z)|_{z=1} = K(1 - 0.5 \cdot 1)(1 - 2) = 1$$

$$K \cdot 0.5(-1) = 1$$

$$\underline{\underline{K = -2}}$$

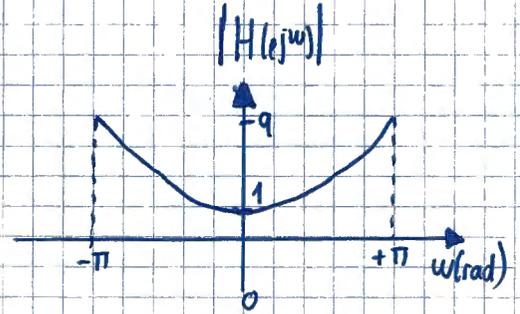
Por tanto:  $H(z) = -2(1 - 0.5z^{-1})(1 - 2z^{-1})$

MÓDULO

•  $|H(e^{j\omega})| = |H(z)|_{z=e^{j\omega}} = |-2(1 - 0.5e^{-j\omega})(1 - 2e^{-j\omega})| =$

$$= |-2(1 - 2e^{-j\omega} - 0.5e^{-j\omega} + 1e^{-j2\omega})|$$

- $\omega=0 \rightarrow |H(e^{j0})| = 2 \cdot |1 - 0.5 - 2 + 1| = 1$
- $\omega=\pi \rightarrow |H(e^{j\pi})| = 2 \cdot |1 + 0.5 + 2 + 1| = 9$



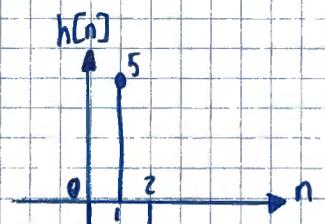
$$H(z) = -2(1 - 0.5z^{-1})(1 - 2z^{-1}) = -2(1 - 2z^{-1} - 0.5z^{-1} + z^{-2})$$

$$H(z) = -2 + 4z^{-1} + z^{-1} - 2z^{-2}$$

$$H(z) = -2 + 5z^{-1} - 2z^{-2}$$

$\downarrow$   $Tz^{-1}$

$$\underline{\underline{h[n] = -2\delta[n] + 5\delta[n-1] - 2\delta[n-2]}}$$

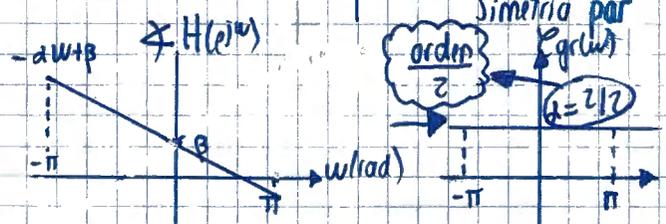


FASE

•  $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \cdot e^{-j\theta} \neq H(e^{j\omega})$

$$\theta = \angle H(e^{j\omega}) = \text{Fase}$$

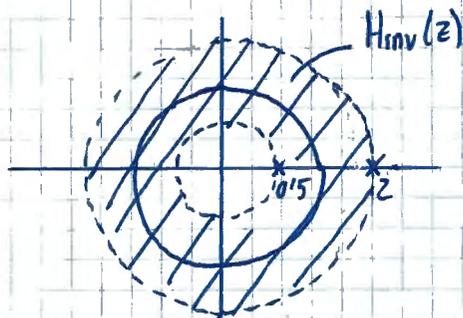
Filtro Fase Lineal FIR  $\equiv$  Fase  $= -\alpha\omega + \beta$



$$E_{gr}(w) = \frac{-d}{dw} (\neq H(e^{jw})) = \frac{-d}{dw} (-\alpha w + \beta) = \alpha = \frac{\text{orden}}{2}$$

b) ¿Tiene inverso estable? Si es así calcule la función de transferencia y su  $h[n]$

$$H_{inv}(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{-1}{z(1-0.5z^{-1})(1-z^{-1})}$$



Estable  $0.5 < |z| < 2$   
NO causal

$$H_{inv}(z) = \frac{A}{(1-0.5z^{-1})} + \frac{B}{(1-z^{-1})} = \frac{-1}{z(1-0.5z^{-1})(1-z^{-1})}$$

$$A(1-z^{-1}) + B(1-0.5z^{-1}) = -1/z$$

$$\bullet z=2 \rightarrow B \frac{3}{4} = -1/2 \rightarrow B = -2/3$$

$$\bullet z=0.5 \rightarrow A-3 = -1/2 \rightarrow A = 1/6$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet z=2 \rightarrow B \frac{3}{4} = -1/2 \rightarrow B = -2/3 \\ \bullet z=0.5 \rightarrow A-3 = -1/2 \rightarrow A = 1/6 \end{array} \right\} H_{inv}(z) = \frac{1/6}{(1-0.5z^{-1})} + \frac{-2/3}{(1-z^{-1})}$$

$\downarrow \mathcal{I}Z^{-1}$

$$h_{inv}[n] = \frac{1}{6} (0.5)^n u[n] - \frac{2}{3} (2)^n u[n]$$

c) Se puede recuperar  $h[n]$  a partir de la autocorrelación  $R_{kk}[n]$  donde  $R_{kk}[m] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] \cdot h[m+k] = \boxed{h[k] \otimes h[-k]}$

≠ deconvolución en el tiempo

$R(e^{jw}) = |H(e^{jw})|^2 \rightsquigarrow$  Tampoco en frecuencia porque no hay información sobre la fase (solo del módulo)

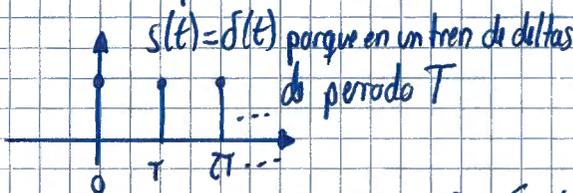
# Problema 2 Septiembre 2011

$$X_a(j\omega) = TF(x_a(t))$$

a) Demostrar  $S_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j \frac{2\pi}{T} kt}$

Señal periódica de periodo  $T \Rightarrow$  Desarrollo en Serie de Fourier  
 $S_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot e^{j k \frac{2\pi}{T} t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot e^{j k \frac{2\pi}{T} t}$  donde  $a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S_a(t) \cdot e^{-j k \frac{2\pi}{T} t} dt$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot e^{-j k \frac{2\pi}{T} t} dt = \frac{1}{T}$$



$$\Rightarrow S_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \cdot e^{j k \frac{2\pi}{T} t}$$

b) ¿ $S_a(j\omega)$ ? ~ Mirar Tablas ~

$$S_a(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k/T)$$

c) Demostrar:  $S_a(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_a(kT) \cdot \delta(t - kT)$

TF  $\rightarrow \frac{1}{2\pi} S_a(j\omega) \otimes \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k/T)$

Tienen la misma transformada de Fourier

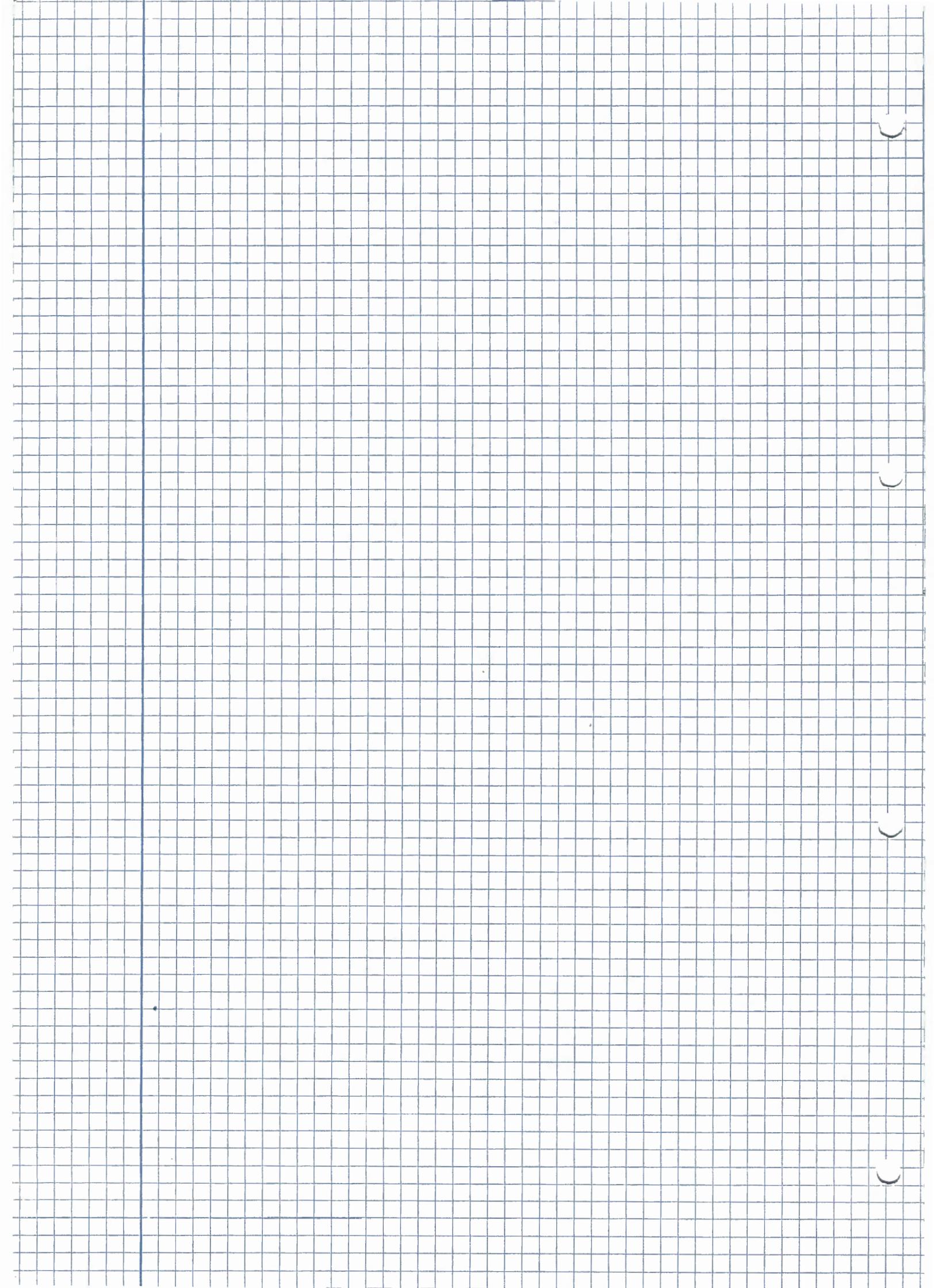
d)  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_a(nT) \cdot e^{-j\omega nT} \stackrel{?}{\Leftrightarrow} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a(j\omega - j \frac{2\pi}{T} k) = \frac{1}{2\pi} X_a(j\omega) \otimes \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{T} k)$

$\downarrow TF^{-1}$

Da lo mismo que en la izquierda

e) ¿ $S_a(t)$ ? a partir de  $S_a(kT)$





3. (2 puntos) Considere las secuencias  $x_1(n)$  de duración 4 y  $x_2(n)$  de duración 8 y su convolución lineal  $z(n) = x_1(n) * x_2(n)$ . Se pretende calcular la secuencia  $Z(k)$  con 8 muestras de la transformada de Fourier de  $z(n)$  equiespaciadas en el intervalo  $[0, 2\pi)$ , es decir:  $Z(k) = Z(\omega)|_{\omega=\frac{2\pi}{8}k}$ ,  $k = 0, \dots, 7$ .

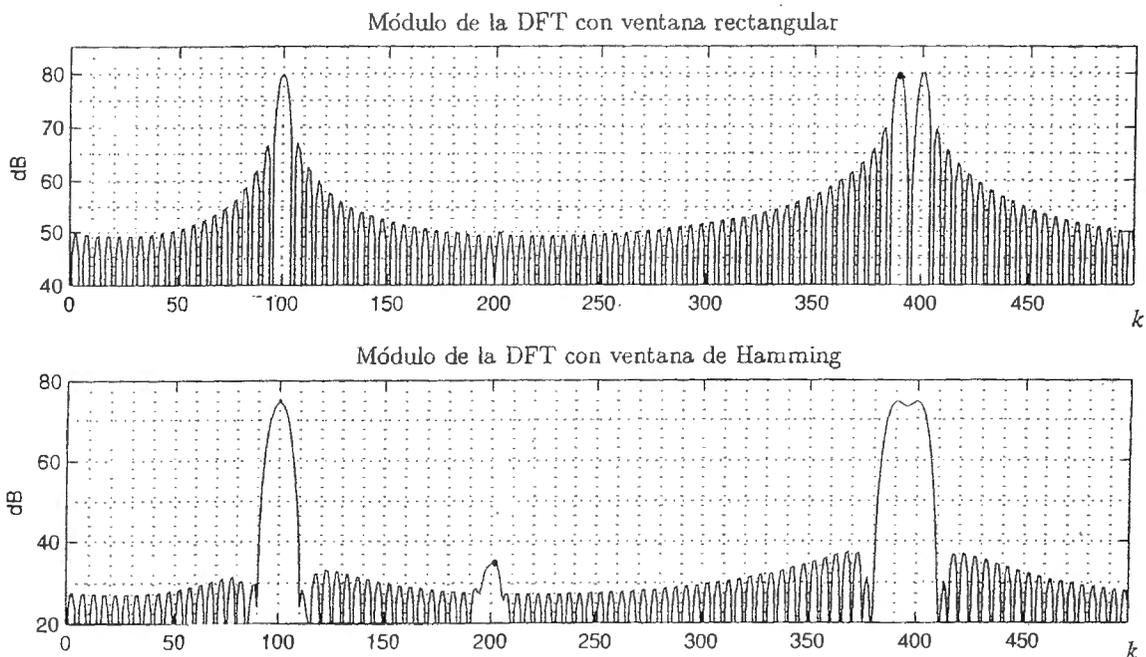
a) Escriba un procedimiento que use una DFT de orden 8 para calcular  $Z(k)$ .

b) Escriba un procedimiento que use una DFT de orden 16 para calcular  $Z(k)$ .

4. (4 puntos) La señal  $x_c(t) = \sum_{i=1}^{N^c} A_i^c \cos(2\pi F_i^c t) + \sum_{i=1}^{N^e} A_i^e e^{j2\pi F_i^e t}$ , con frecuencias  $F_i$  inferiores a 500 Hz, se muestrea a frecuencia  $F_s = 1000$  Hz obteniéndose la señal  $x(n) = x_c(n/F_s)$ . Para medir las frecuencias  $F_i$  se aplica una DFT de orden  $M$  a un segmento de  $x(n)$  de longitud  $L$ .

a) Calcule  $L$  y  $M$  para que: 1) la resolución en frecuencia (con el criterio de no solapamiento de los lóbulos principales) sea como mínimo 10 Hz y 2) el error en la medida las frecuencias  $F_i$  sea inferior o igual a 1 Hz.

b) Considere  $L = 100$  y  $M = 500$ , independientemente de los valores calculados en el apartado anterior. Las siguientes gráficas muestran los módulos de la DFT de la señal  $x(n)$  multiplicada por una ventana rectangular y una ventana de Hamming, respectivamente. Determine los parámetros  $N^c$ ,  $N^e$ ,  $A_i^c$ ,  $F_i^c$ ,  $A_i^e$  y  $F_i^e$  y escriba la expresión de la señal  $x_c(t)$ .



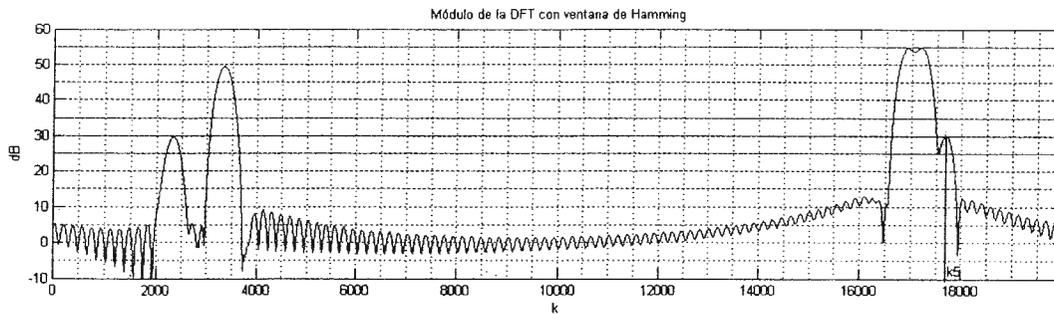
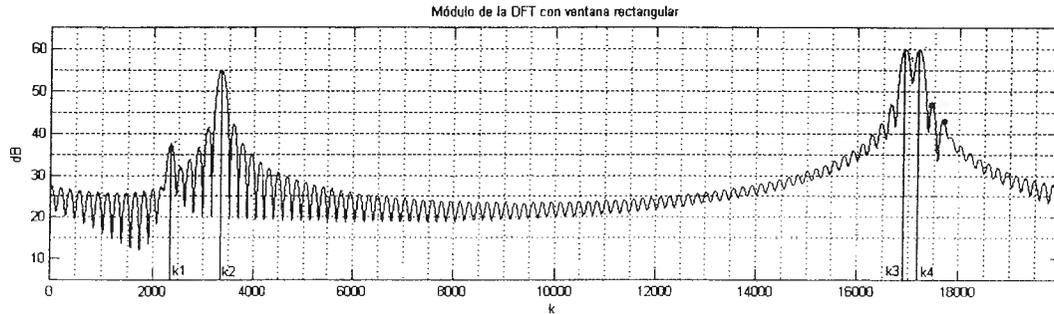
6. La señal  $x_c(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(2\pi F_i t) + \sum_{j=1}^M B_j e^{j2\pi F_j t}$ , con ancho de banda inferior a 5000 Hz, se muestra con

$F_s = 10000$  Hz. A un segmento de longitud  $L = 100$  de  $x(n) = x_c(nT_s)$  se le aplica una DFT de orden  $M = 20000$ .

Los módulos de la DFT, empleando una ventana rectangular y una ventana de Hamming, se representan a continuación. Sobre las gráficas se han medido los siguientes índices de la DFT:

$k_1 = 2350; k_2 = 3330; k_3 = 16920; k_4 = 17200; k_5 = 17650;$  Se pide que calcule  $N, A_i, F_i, M, B_j, F_j$ .

(8 puntos)



### Problema 3. Diciembre 2012.

$$\text{dur}(x_1[n]) = 4$$

$$\text{dur}(x_2[n]) = 8$$

$$z[n] = x_1[n] * x_2[n]$$

$$Z(k) = Z(\omega) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{8} k} \quad k = 0, \dots, 7$$

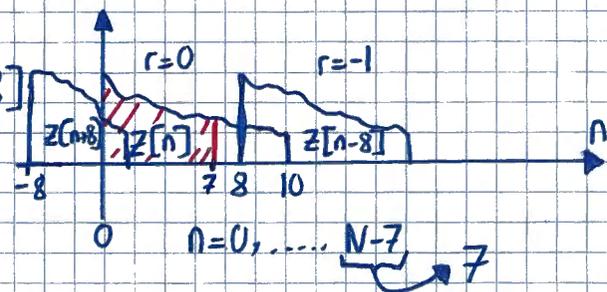
$$Z(k) = \sum_{n=0}^{N-1} z[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \quad k = 0, \dots, 7$$

a)  $Z(k) = \text{DFT}_8(z[n])$

$$N \geq \text{duración}(z[n]) = \text{duración}(x_1[n]) + \text{duración}(x_2[n]) - 1 = 4 + 8 - 1 = 11$$

$$N = 8 < 11 \rightarrow \text{Hay solapamiento}$$

$$\begin{aligned} \underline{z'[n]} &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} z[n+rN] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} z[n+r8] \\ &= \sum_{r=0}^1 z[n+r8] = \underline{z[n] + z[n+8]} \end{aligned}$$



b)  $\bar{z}(k) = \text{DFT}_{16}(z[n])$

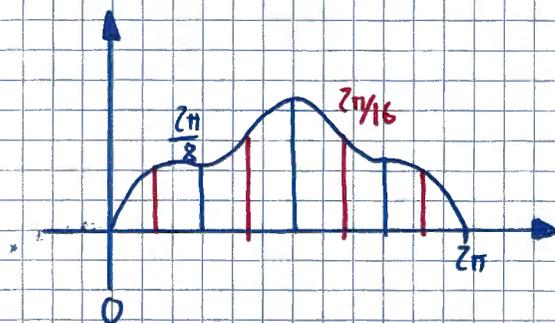
$$N = 16 > \text{dur}(z[n]) = 11 \rightarrow \text{NO hay solapamiento}$$

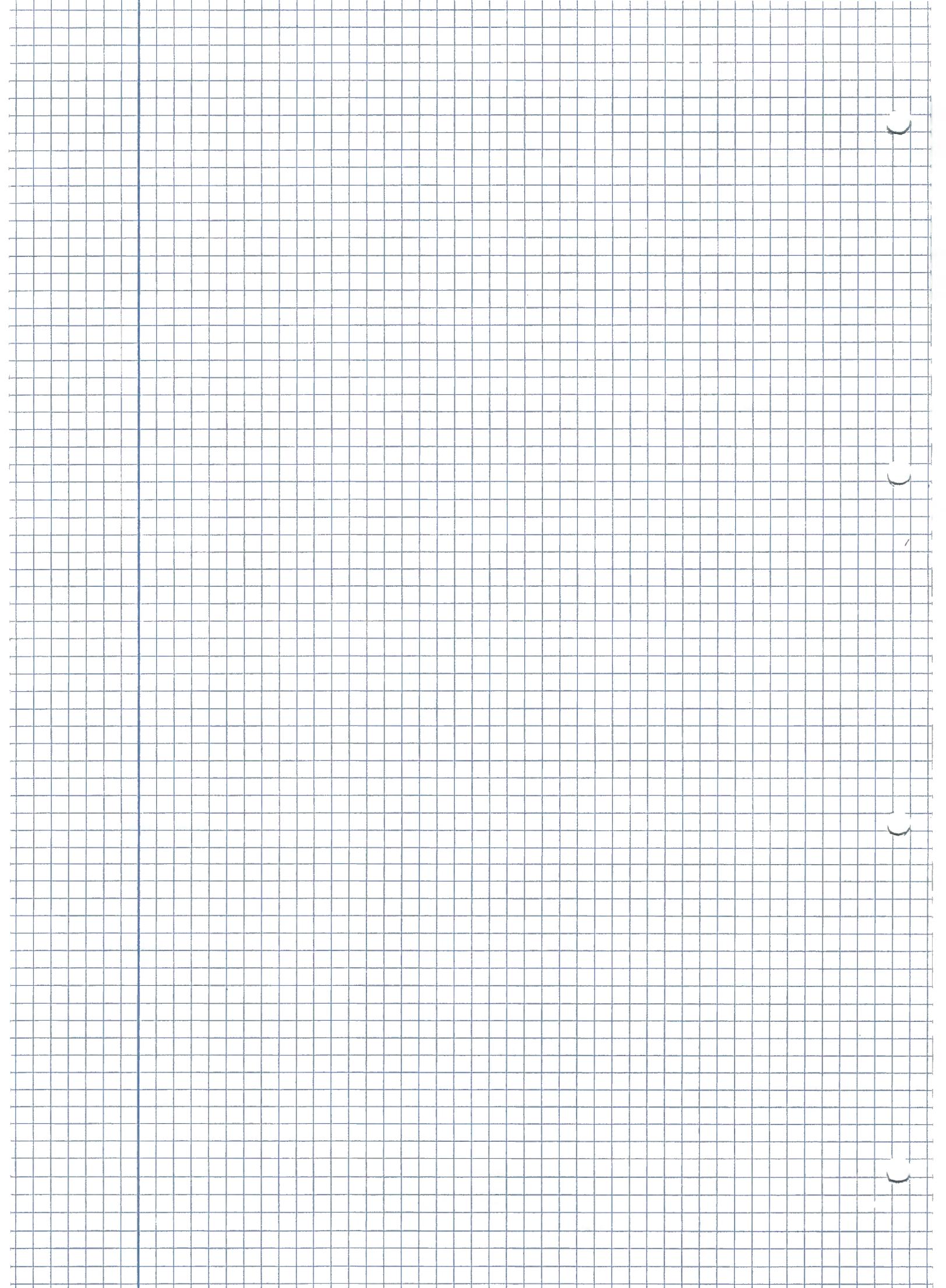
$z[n]$  se rellena con 5 ceros de 11 a 15



$$\underline{z(k) = \text{DFT}_{16}(z[n]) = \sum_{n=0}^{15} z[n] e^{-j \frac{2\pi}{16} nk} \quad k = 0, \dots, 15}$$

$$\underline{z(k) = \bar{z}(k)}$$





# Problema 4, Diciembre 2012

$$x_c(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N^c} A_i^c \cos(2\pi F_i^c t)}_{N^c \text{ cosenos}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N^e} A_i^e e^{j2\pi F_i^e t}}_{N^e \text{ exponenciales}}$$

$$F_s = 1000 \text{ Hz}$$

$$x[n] = x_c(n/F_s)$$

$$\text{DFT}_M(x[n]) \quad \text{duración}(x[n]) = L$$

a) L y M?

L = longitud de la ventana o segmento

a-1) Resolución en frecuencia  $\equiv$  criterio de no solapamiento  $\equiv$  criterio de resolución  $\equiv \Delta\omega \geq \frac{4\pi}{L}$

$$L \geq \frac{4\pi}{\Delta\omega} \quad \text{Resolución en frecuencia} \quad L \geq \frac{2F_s}{\Delta F}$$

En caso nos den frecuencias usamos esta fórmula

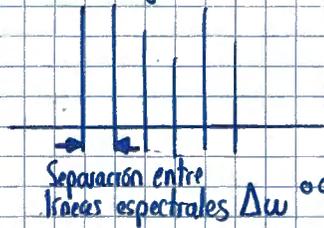
Como  $\Delta F = 10 \text{ Hz}$  ;  $F_s = 1000 \text{ Hz}$   $\rightarrow L \geq \frac{2 \cdot 1000}{10} = 200$  (muestras)

Dato

a-2) Error en la medida de frecuencias  $F_i$  sea  $\leq 1 \text{ Hz}$

$$M \geq \frac{F_s}{\Delta F}$$

Orden de la DFT

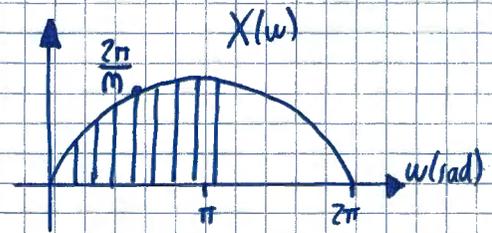


Separación entre líneas espectrales  $\Delta\omega$  Tomo DFT

$$M \geq \frac{1000}{1} = 1000$$

b)  $L = 100$   
 $M = 500$

$$F_i = \begin{cases} F_s \frac{k_i}{m} & ; k_i \leq m/2 \\ -F_s \frac{(m - k_i)}{m} & ; k_i > m/2 \end{cases}$$



Tecnia:  $\omega_i = \frac{2\pi}{N} k_i$

1º) (calcular  $F_i^c$  y  $F_i^e$ )

De las gráficas

Para  $k_1 = 100 \rightarrow F_1 = F_s \frac{k_1}{m} = 1000 \cdot \frac{100}{500} = 200 \text{ Hz}$

Para  $k_2 = 390 \rightarrow F_2 = -\frac{F_s (m - k_2)}{m} = -\frac{1000 \cdot (500 - 390)}{500} = -220 \text{ Hz}$

Para  $k_3 = 400 \rightarrow F_3 = -\frac{1000 (500 - 400)}{500} = -200 \text{ Hz}$

Coseno en 200 Hz

Para  $k_4 = 200 \rightarrow F_4 = 1000 \cdot \frac{200}{500} = 400 \text{ Hz}$

Por tanto:

$$N^c = 1 \quad \text{número de cosenos}$$

$$N^e = 2 \quad \text{número de exponenciales}$$

$$F_1^c = 200 \text{ Hz} \quad \text{Donde está el coseno}$$

$$F_1^e = -220 \text{ Hz}$$

$$F_2^e = 400 \text{ Hz} \quad \left. \vphantom{F_1^e, F_2^e} \right\} \text{Donde están las exponenciales}$$

2) Calcular  $A_i^c$  y  $A_i^e$ . Sólo se puede observar en ventana rectangular:

$$A_i^c = \frac{2}{L} \cdot 10^{a_i^c/20} \quad (\text{V})$$

$$A_i^e = \frac{1}{L} \cdot 10^{a_i^e/20}$$

De la gráfica:

$$A_i^c = \frac{2}{100} \cdot 10^{80/20} = 200$$

$$A_i^e = \frac{1}{100} \cdot 10^{80/20} = 100$$

de la gráfica 80dB en  $K_1=100$  y  $K=400$

de la gráfica en  $K=390$

En la de Hamming NO podemos medir  $a_z^e$  !! Pero sí podemos medir la diferencia de dB:

$$\begin{array}{c} 75\text{dB} \\ \uparrow \\ K=100 \end{array} - \begin{array}{c} 35\text{dB} \\ \uparrow \\ K=200 \end{array} = 40\text{dB}$$

Diferentes ventanas misma diferencia de amplitud

Y en la rectangular:  $\begin{array}{c} 80\text{dB} \\ \uparrow \\ K=100 \end{array} - \begin{array}{c} a_z^e \\ \uparrow \\ K=200 \end{array} = 40 \rightarrow a_z^e = 40\text{dB}$

Por tanto:  $A_z^e = \frac{1}{100} \cdot 10^{40/20} = 1$

Finalmente:

$$x_c(t) = 200 \cos(2\pi \cdot 200 \cdot t) + 100 e^{j2\pi 220t} + 1 \cdot e^{j2\pi 400t}$$

# Problema 6 Septiembre 2006

$$x_c(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(2\pi F_i t) + \sum_{j=1}^M B_j e^{j2\pi F_j t}$$

$$F_s = 10\,000 \text{ Hz}$$

$$L = 100 \text{ de } x[n] = x_c[nT_s]$$

$$\text{DFT}_M = 20\,000$$

$$k_1 = 2350 ; k_3 = 16920$$

$$k_2 = 3330 ; k_4 = 17200$$

$$k_5 = 17650$$

¿N, A<sub>i</sub>, F<sub>i</sub>, M, B<sub>j</sub>, F<sub>j</sub>?

↓  
nº de exp

1) calcular F<sub>i</sub> y F<sub>j</sub>

condición en  $M/2 = k$

$$k_1 = 2350 \rightarrow F_1 = \frac{F_s k_1}{M} = \frac{10\,000 \cdot 2350}{20\,000} = 1175 \text{ Hz}$$

$$k_2 = 3330 \rightarrow F_2 = \frac{F_s k_2}{M} = \frac{10\,000 \cdot 3330}{20\,000} = 1665 \text{ Hz}$$

$$k_3 = 16920 \rightarrow F_3 = \frac{-F_s (M - k_3)}{M} = \frac{-10\,000 \cdot (20\,000 - 16920)}{20\,000} = -1540 \text{ Hz}$$

$$k_4 = 17200 \rightarrow F_4 = \frac{-F_s (M - k_4)}{M} = -1400 \text{ Hz}$$

$$k_5 = 17650 \rightarrow F_5 = \frac{-F_s (M - k_5)}{M} = -1175 \text{ Hz}$$

→ coseno (1 coseno)

3 exponenciales

$$N = 1$$

$$M = 3$$

2) calcular A<sub>i</sub> y B<sub>j</sub>

En ventana rectangular  $A_i = \frac{2}{L} 10^{a_i/20}$

$k_1 = 2350$  en la gráfica  $B_j = \frac{1}{L} 10^{b_j/20}$

$$A_1 = \frac{2}{100} 10^{38/20} = 1.15887$$

$$A_5 = \frac{2}{100} 10^{95/20} = 1.15887$$

En Hamming  $\equiv 55 \text{ dB} - 30 \text{ dB} = 25 \text{ dB}$   
(k=5)

En rectangular  $\equiv 25 \text{ dB} = 60 \text{ dB} - a_5$

$\Rightarrow a_5 = 35 \text{ dB}$

en la gráfica de Hamming no puedo medir

Finalmente:

$$X_c(t) = 1'5887 \cdot \cos(2\pi 1175t) + 5'6234 e^{j\pi 1665t} + 10 e^{j\pi 1400t} + 10 e^{j\pi 1540t}$$

$$B_2 = \frac{1}{100} \cdot 10 \overset{55/20}{\uparrow} \underset{K_2}{\downarrow} = 5'6234$$

# Tratamiento Digital de Señales (21-12-11)



Apellidos: \_\_\_\_\_ Nombre: \_\_\_\_\_

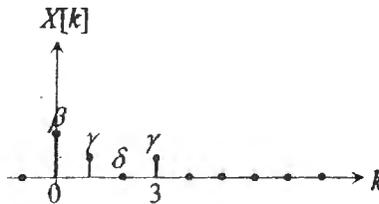
D.N.I.: \_\_\_\_\_

Firma: \_\_\_\_\_

Duración del examen: 60 minutos (Todos los apartados deben ser razonados)

## Teoría 1 1 punto

Considere la secuencia  $x[n]$  de duración 4 muestras, cuya DFT de 4 puntos tiene el siguiente aspecto:

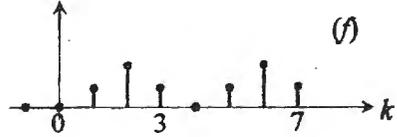
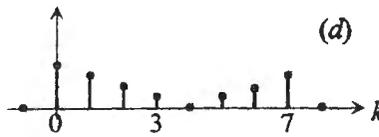
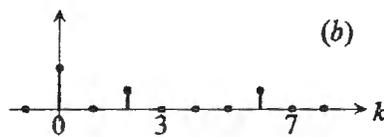
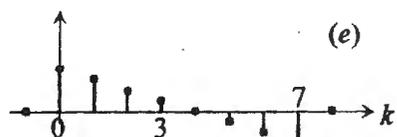
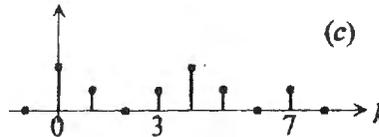


Considere ahora las secuencias  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$ , ambas de 8 muestras, definidas como sigue:

$$x_1[n] = \begin{cases} x[n/2]; & n \text{ par} \\ 0; & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$x_2[n] = \begin{cases} x[n]; & 0 \leq n < 4 \\ 0; & 4 \leq n < 8 \end{cases}$$

Identifique cuál de las siguientes DFT-s corresponde a  $x_1[n]$  y cuál a  $x_2[n]$  y explíquelo con detalle.



Diciembre 2011

**Problema 2** 5 puntos

Este problema tiene que ver con la ecualización de un canal de comunicaciones. Suponga que tiene que transmitir  $N = 4$  símbolos, los cuales vienen dados por

$k$	0	1	2	3
$X[k]$	1	1	j	j

- a) Calcule  $x[n] = \text{IDFT}^4(X[k]); \quad 0 \leq n \leq N-1$ .

La señal que se transmite no es  $x[n]$  sino  $x_r[n]$ , la cual se forma anteponiendo un prefijo a la señal  $x[n]$  de la siguiente forma:

$$x_r[n] = \begin{cases} x[n]; & 0 \leq n \leq 3 \\ x[n+4]; & -2 \leq n \leq -1 \\ 0; & \text{resto} \end{cases}$$

- b) Obtenga explícitamente  $x_r[n]$ .

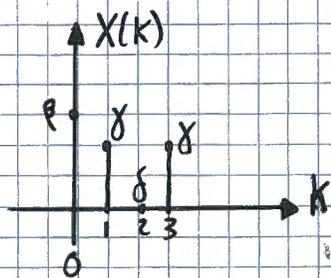
Supongamos que en canal hay multitrayecto. Un modelo simple de multitrayecto es suponer que la señal que se transmite es distorsionada por un filtro de respuesta impulsiva

$$h[n] = \delta[n] + a\delta[n-1],$$

en donde el sumando  $a\delta[n-1]$  representa la distorsión debida al multitrayecto.

- c) Calcule la señal recibida  $y[n]$ , en donde  $y[n] = x_r[n] * h[n], \forall n$ .
- d) Calcule la convolución circular  $z[n] = x_r[n] \circledast h[n]; 0 \leq n \leq 3$  e indique qué valores de  $y[n]$  corresponden a  $z[n]$ .
- e) Sea  $Z[k] = \text{DFT}^4(z[n])$ . Indique un procedimiento para recuperar los símbolos  $X[k]$  transmitidos a partir de  $Z[k]$ .

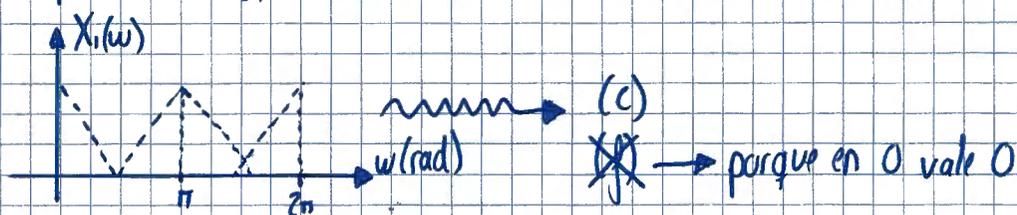
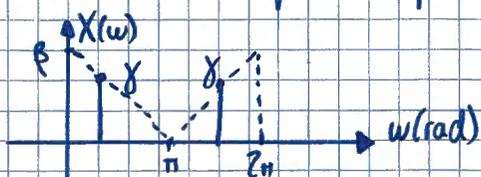
# Teoria 1 Diciembre 2011



$$x_1[n] = \begin{cases} x[n/2] & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$x_2[n] = \begin{cases} x[n] & 0 \leq n < 4 \\ 0 & 4 \leq n < 8 \end{cases}$$

$x_1[n]$  es una interpolación de  $x[n]$  → Mete un cero entre cada par de muestras.  
 $X_1(\omega)$  es  $X(\omega)$  comprimida por 2 y además periódica de periodo  $\frac{2\pi}{L} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ .



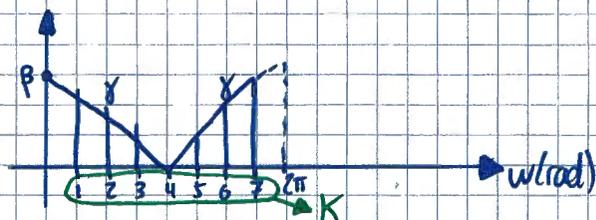
Por tanto  $x_1[n]$  equivale a la gráfica (c)

$$x_2[n] = [\beta, \gamma, \delta, \gamma, 0, 0, 0, 0]$$

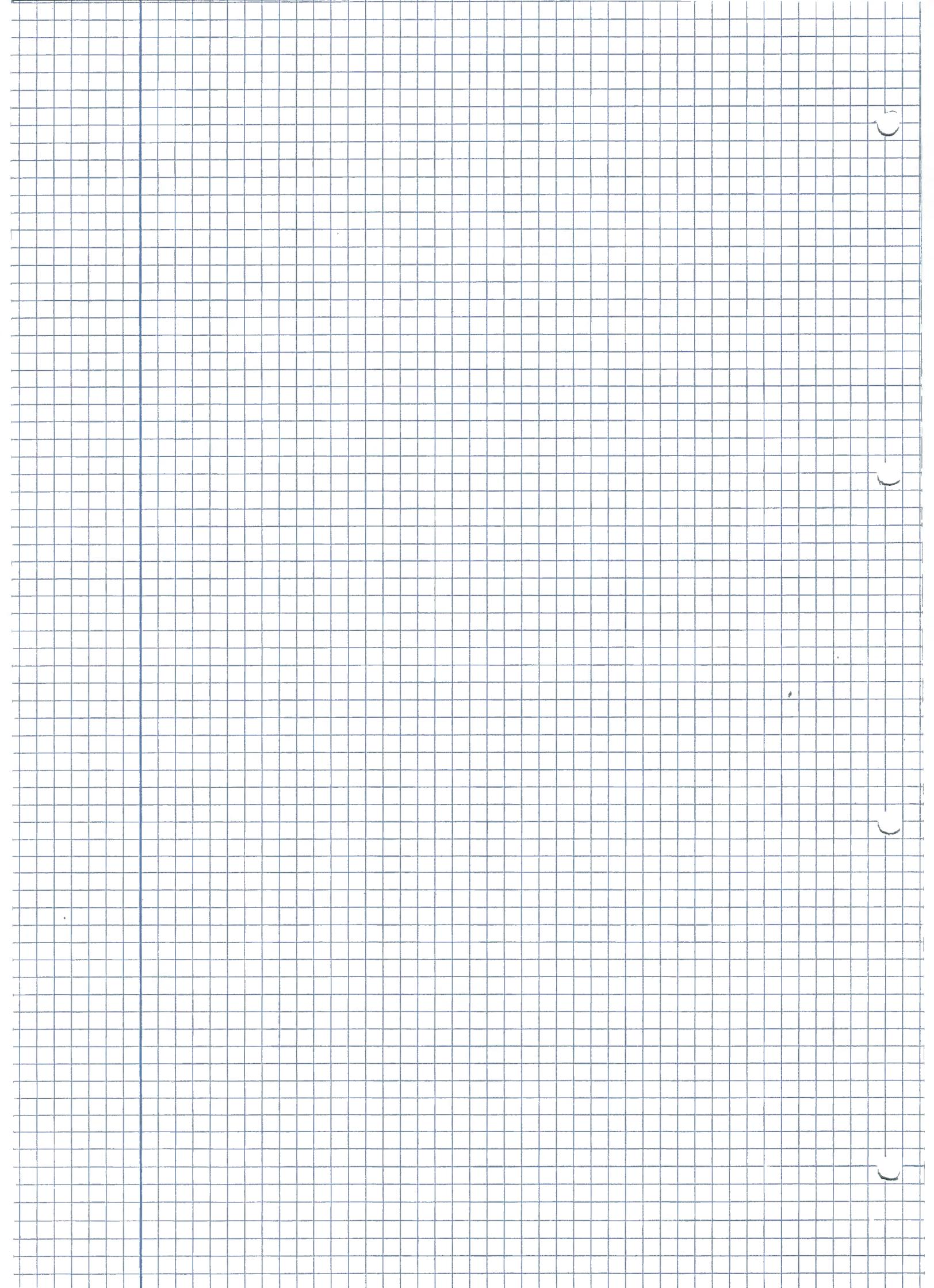
$$\text{DFT}_8(x_2[n]) = \text{DFT}_8(x[n]) \quad 8 > \text{dur}(x[n]) = 4$$

$$\frac{2\pi}{4} K \rightarrow \frac{2\pi}{8} K$$

Tienes el doble de muestras de  $X(\omega)$  entre 0 y  $2\pi$



Por tanto  $x_2[n]$  equivale a la gráfica (d)



## Problema 2 Dicembre 2011

$$X(k) = [1, 1, j, j]$$

a)  $x[n] = \text{IDFT}^4(X(k)) \quad 0 \leq n \leq N-1$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \quad n=0, \dots, N-1$$

$$x[n] = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(k) e^{j \frac{2\pi}{4} kn} \quad n=0, \dots, 3$$

$$x[n] = \frac{1}{4} \left[ 1 \cdot e^0 + 1 \cdot e^{j \frac{2\pi}{4} 1 \cdot n} + j \cdot e^{j \frac{2\pi}{4} 2n} + j \cdot e^{j \frac{2\pi}{4} 3n} \right] \quad n=0, \dots, 3$$

•  $n=0 \rightarrow x[n] = \frac{1}{4} [1+1+j+j] = \frac{1}{2} (1+j)$

•  $n=1 \rightarrow x[n] = \frac{1}{4} [1 + e^{j\pi/2} + j e^{j\pi} + j e^{j3\pi/2}] = \frac{1}{4} [1+j+j(-1)+j(-j)] = 1/2$

•  $n=2 \rightarrow x[n] = \frac{1}{4} [1 + e^{j\pi} + j e^{j2\pi} + j e^{j3\pi}] = 0$

•  $n=3 \rightarrow x[n] = \frac{1}{4} [1 + e^{j3\pi/2} + j e^{j3\pi} + j e^{j9\pi/2}] = -j/2$

$$\underline{x[n] = \left[ \frac{1}{2}(1+j), \frac{1}{2}, 0, -j/2 \right]}$$

b)  $x_e[n] = [0, -j/2, \frac{1}{2}(1+j), \frac{1}{2}, 0, -j/2]$  ✓

$\frac{1}{2}(1+j), \frac{1}{2}$   
-4 -3  
 $x[n+4]$

c)  $h[n] = \delta[n] + a\delta[n-1]$

$$y[n] = x_e[n] * h[n], \quad \forall n$$

$$y[n] = x_e * (\delta[n] + a\delta[n-1]) = x_e[n] + a x_e[n-1]$$

$$x_e[n] = [0, -j/2, \frac{1}{2}(1+j), \frac{1}{2}, 0, -j/2]$$

$$\underline{a x_e[n+1] = [0, 0, -aj/2, \frac{a}{2}(1+j), a/2, 0, -aj/2] +}$$

$$\underline{y[n] = [0, -j/2, \frac{1}{2}(1+j) - aj/2, \frac{1}{2} + \frac{a}{2}(1+j), \frac{a}{2}, -j/2, -aj/2]}$$

d)  $z[n] = x[n] \oplus h[n] \quad 0 \leq n \leq 3$  ¿Qué valores de  $y[n]$  corresponden a  $z[n]$ ?

$$z[n] = (x[n])_4 + a(x[n-1])_4$$

$$x[n] = \left[ \frac{1}{2}(1+j), \frac{1}{2}, 0, \frac{-j}{2} \right]$$

$$ax[n-1] = \left[ 0, \frac{a}{2}(1+j), \frac{a}{2}, 0, \frac{-aj}{2} \right] +$$

$$\tilde{z}[n] = \left[ \frac{1}{2}(1+j), \frac{1}{2} + \frac{a}{2}(1+j), \frac{a}{2}, \frac{-j}{2}, \frac{-aj}{2} \right] \rightarrow \text{No desaparece cuando al principio.}$$

$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \end{matrix}$   $\xrightarrow{N=4}$

$$\underline{z[n] = \left[ \frac{1}{2}(1+j) - \frac{aj}{2}, \frac{1}{2} + \frac{a}{2}(1+j), \frac{a}{2}, \frac{-j}{2} \right]}$$

e)  $z[k] = \text{DFT}^4(z[n])$  ¿ $X[k]$ ?

$$z[n] = x[n] \oplus h[n]$$

$$Z[k] = X[k] \cdot H[k] \longrightarrow \underline{X[k] = \frac{Z[k]}{H[k]}}$$

$$X[k] = \text{DFT}_4(x[n])$$

$$H[k] = \text{DFT}_4(h[n])$$

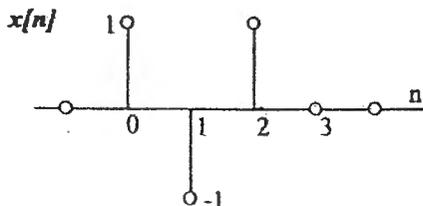
# Tratamiento Digital de Señales

Apellidos: \_\_\_\_\_ Nombre: \_\_\_\_\_

D.N.I.: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_ Firma: \_\_\_\_\_

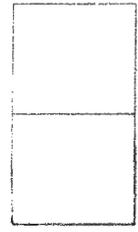

## Teoría 1 (2 puntos)

Considere la señal  $x[n]$  de la figura



- a) Sea  $X[k]$  ( $k=0, 1, 2, 3$ ), la DFT de orden 4 de  $x[n]$  y  $Y[k] = X^2[k]$ . Calcule y dibuje la secuencia  $y[n]$  que resulta de aplicar una DFT inversa de orden 4 a  $Y[k]$ .
- b) Si  $Y[k] = X[k] e^{jnk}$ , calcule y dibuje la secuencia  $y[n]$  que resulta de aplicar una DFT inversa de orden 4 a  $Y[k]$ .
- c) Sea  $x[n] = x_c(nT_s)$ , con  $T_s = 125 \mu s$ , y  $X[k]$  ( $k=0, 1, \dots, 39$ ), la DFT de orden 40 de  $x[n]$  ( $n=0, 1, \dots, 39$ ). ¿Qué coeficiente de la DFT hay que considerar si queremos examinar el contenido frecuencial de  $x_c(t)$  para la frecuencia 2200Hz?

# Tratamiento Digital de la Señal (7-2-02)



Apellidos: \_\_\_\_\_ Nombre: \_\_\_\_\_

D.N.I.: \_\_\_\_\_ Firma: \_\_\_\_\_

## Problema 1 (3 puntos)

Considere un sistema LTI con respuesta al impulso  $h(n) = (1/2)^n u(n)$ , entrada  $x(n) = u(n) - u(n-N)$  y salida  $y(n) = x(n) * h(n)$ .

a) Sin calcular  $y(n)$  indique un procedimiento, utilizando 2 DFTs de orden  $N$ , para calcular  $Y_k = Y(\omega)|_{\omega=2\pi k/N}$ ,  $k=0, \dots, N-1$  ( $Y(\omega)$  es la Transformada de Fourier de  $y(n)$ ).

$x(n) = u(n) - u(n-N) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$ ;  $h(n) = \begin{cases} (1/2)^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

$y(n) = x(n) * h(n) \xrightarrow{X} Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$ ;  $\Rightarrow Y(k) = Y(\omega)|_{\omega=2\pi k/N} = H(k) \cdot X(k)$ ;  $k=0, \dots, N-1$

$X(k) = \text{DFT}^N \{x(n)\}$   
 $H(k) = \sum_0^{N-1} h(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=lN}^{N+lN-1} (1/2)^{n+lN} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n'=0}^{N-1} \left( \sum_{l=0}^{\infty} h(n'+lN) \right) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

luego  $H(k) = \text{DFT}^N \{ \tilde{h}(n) \}$

siendo  $\tilde{h}(n) = \sum_{l=0}^{\infty} (1/2)^{n+lN} = (1/2)^n \left( \frac{1}{1-(1/2)^N} \right)$ ;  $n=0, \dots, N-1$

b) Calcule  $y(n)$  e indique un procedimiento para calcular  $Y_k$  a partir de  $y(n)$  utilizando una DFT de orden  $N$ .

$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} (1/2)^{n-m} u(n-m) = (1/2)^n \begin{cases} \sum_0^{n-1} (1/2)^{-m} & 0 \leq n \leq N-1 \\ \sum_{n-N}^{N-1} (1/2)^{-m} & N \leq n < \infty \end{cases} = (1/2)^n \begin{cases} (2^{n+1}-1) & 0 \leq n \leq N-1 \\ (2^N-1) & N \leq n < \infty \end{cases}$

Por otro lado,  $\{Y(k)\}_0^{N-1} = \{Y(\frac{2\pi}{N}k)\}_0^{N-1}$  no representa a  $\{y(n)\}_0^{N-1}$  sino a  $\{\tilde{y}(n)\}_0^{N-1}$ , una versión periódica y sobremuestra de  $y(n)$ , la cual viene dada por:

$\tilde{y}(n) = \sum_{l=0}^{\infty} y(n+lN)$ ;  $n=0, \dots, N-1$

Por tanto,

$\{Y(k)\}_0^{N-1} = \text{DFT}^N \{ \tilde{y}(n) \}$

siendo

$\tilde{y}(n) = \sum_{l=0}^{\infty} (1/2)^{n+lN} f(n+lN)$ ;  $f(k) = \begin{cases} 2^{k+1}-1 & 0 \leq k \leq N-1 \\ 2^N-1 & N \leq k < \infty \end{cases} \Rightarrow \tilde{y}(n) = (1/2)^n \left\{ (1/2)^n f(n) + \sum_{l=1}^{\infty} (1/2)^{lN} (2^{n-lN}-1) \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{y}(n) = (1/2)^n \left\{ (2^{n+1}-1) + (2^N-1) \sum_{l=1}^{\infty} (1/2)^{lN} \right\} = (1/2)^n \left\{ (2^{n+1}-1) + (2^{N-1} - 1/2) \sum_{l=1}^{\infty} (1/2)^{(l-1)N} \right\} = (1/2)^n \left\{ (2^{n+1}-1) + 1 \right\} = 2$ ;  $n=0, \dots, N-1$

c) Compruebe que los dos procedimientos dan el mismo resultado,

$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-j\frac{2\pi}{N}kn})^n = N \delta(k) \Rightarrow Y(k) = \tilde{H}(k) X(k) = N \delta(k) \tilde{H}(k) = N \tilde{H}(0) \delta(k) = 2N \delta(k)$

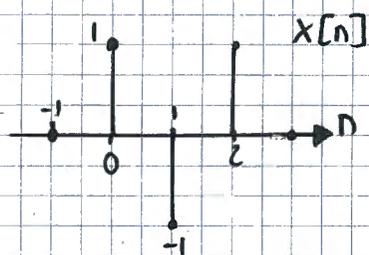
$\tilde{H}(0) = \frac{2N}{2^N-1} \sum_{n=0}^{N-1} (1/2)^n = 2$

La transformada inversa de  $Y(k)$  será:

$\tilde{y}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} 2N \delta(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = 2$ ;  $n=0, 1, \dots, N-1$

que coincide con el apartado b)

Teoría 1, Febrero 2004



a)  $X(k) \quad k=0, \dots, 3$   
 $DFT_4 \{x[n]\}$   
 $Y(k) = X^2(k)$   
 $\hat{y}[n]? \quad y[n] = IDFT(Y(k))$

$Y(k) = X(k) \cdot X(k) \rightarrow y[n] = DFT_4^{-1}(Y(k))$

$y[n] = x[n] \circledast x[n]$   
 $dur(y_c[n]) = 3+3-1 = 5$   
 $N=4 < 5 \rightarrow$  Hay solapamiento

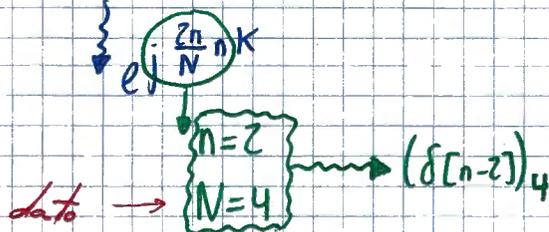
$y_c[n] = x[n] * (\delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-2]) = x[n] - x[n-1] + x[n-2]$

$[1, -1, 1]$   
 $[-1, 1, -1]$   
 $+ [1, -1, 1]$   


---

 $y_c[n] = [1, -2, 3, -2, 1]$   
 $\rightarrow N=4$   
 $y_c[n] = [2, -2, 3, -2]$

b)  $Y(k) = X(k) e^{jn k} \quad \hat{y}[n]? \quad y[n] = DFT_4^{-1}(Y(k))$



OTRA FORMA

- ① cálculo  $X(k)$
- ②  $Y(k) = X(k) \cdot e^{jn k}$
- ③  $y[n] = \frac{1}{N} \sum Y(k) e^{j \frac{2\pi}{N} n k}$

$y[n] = x[n] * (\delta[n-2])_4 = x([n-2])_4$

$[1, -1, 1] \equiv x[n]$   
 $[1, -1, 1] \equiv x[n-2]$   
 $\rightarrow N=4$   
 $y[n] = [1, 0, 1, -1]$

c)  $x[n] = x_c(nT_s)$   
 $T_s = 125 \mu s$

$X(k) \quad (k=0, \dots, 39)$   
 $\hookrightarrow DFT_{40}(x[n])$

$\hat{k} / F_c = 2200 \text{ Hz?}$

$$\frac{2\pi}{N} K = 2\pi \cdot 2200 \text{ Hz} \cdot 175 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \underline{\underline{K=11}}$$

$\rightarrow N$

$$N=40$$



## Teoría (2 puntos)

Considere las siguientes secuencias finitas  $x(n)$  y  $h(n)$  tales que:

$$x(n) = 0, \text{ para } n < 28 \text{ y } n > 55$$

$$h(n) = 0, \text{ para } n < 0 \text{ y } n > 100$$

- a) Si calculamos la convolución lineal  $y_1(n) = x(n) * h(n)$  e

$$y_2(n) = x(n) \otimes_{256} h(n) = \sum_{k=0}^{256} x(k)h((n-k)_{256}), \text{ determine los puntos de } y_1(n) \text{ que coinciden con los de } y_2(n).$$

- b) Describa un procedimiento basado en DFT-s para calcular  $y_1(n)$  el cual utilice tres DFT de orden  $N$ , siendo  $N = 256$ .
- c) ¿Puede ser inferior a 256 el valor de  $N$  del apartado anterior? Razone su respuesta.

### Solución:

- a) La convolución lineal de  $y_1(n)$  tiene  $L = 101 + 56 - 1 = 156$  muestras. Cualquier convolución cíclica de módulo  $N \geq 156$  muestras no solapa y, por tanto, coincidirían las 156 primeras muestras de ambas secuencias.

- b)

$$X(k) = DFT^{256}(x(n))$$

$$H(k) = DFT^{256}(h(n))$$

$$Y_2(k) = X(k)H(k); \quad k = 0, \dots, 255$$

$$y_2(n) = IDFT^{256}(Y_2(k)); \quad n = 0, \dots, 255$$

$$y_1(n) = y_2(n); \quad n = 0, \dots, 155$$

- c) Cualquier valor  $N \geq 156$  sería válido, en principio. Ahora bien, como hay 28 ceros al principio de la secuencia  $x(n)$ , éstos se pueden utilizar para alojar solapamiento adicional en la convolución cíclica. Por tanto, el valor de  $N$  se puede reducir hasta  $N = 156 - 28 = 128$ , si bien en este caso habrá que reordenar los elementos de la convolución:

$$y_1 = \{y_2(28), y_2(29), \dots, y_2(155), y_2(0), \dots, y_2(27)\}.$$

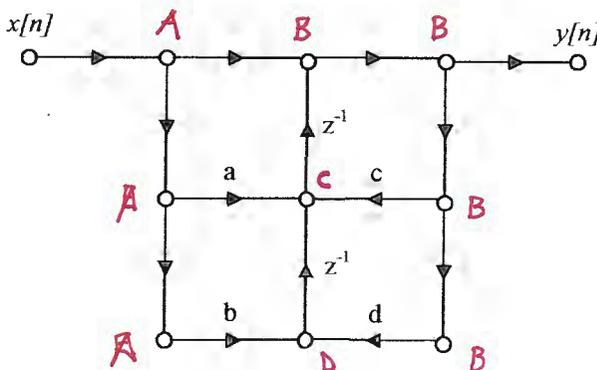
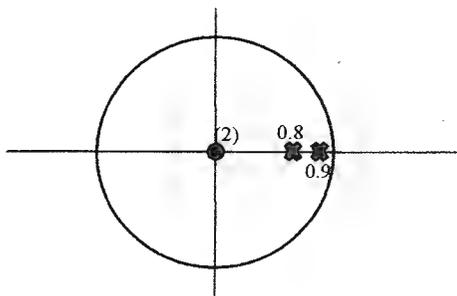


Apellidos \_\_\_\_\_

Nombre \_\_\_\_\_

Calificación 1 + 2 + 3 + 4 = \_\_\_\_\_

1. En las figuras se muestran el diagrama polo-cero de un sistema  $H(z)$  causal y una de sus posibles topologías para ser implementado (forma directa II transpuesta)



Responda a las siguientes cuestiones:

(a) Especifique la función de transferencia  $H(z)$  y las transmitancias del grafo. (0,8 p)

(b) Dibuje el módulo de la transformada de Fourier de  $h[n]$ , especificando los valores para  $\omega=0$  y  $\omega=\pi$ . Comente si el filtro es paso bajo o paso alto. (0,8 p)

(c) Programe el grafo. (0,9 p)

EXAMEN COMPLETO

Repaso ejercicios Tema 3, 4 y 5

2. Se sabe que la señal  $x(n)$  ha sufrido un proceso de distorsión a causa del cual solo se conoce la señal  $y(n)$ , estando ambas señales relacionadas por la ecuación en diferencias

$$y(n) = x(n-2) - 3x(n-3) + \frac{1}{2}y(n-1)$$

Se quiere obtener una señal  $r(n)$ , que compense la distorsión de amplitud del espectro de  $x(n)$ , mediante la siguiente ecuación en diferencias (operada en reposo inicial y estable):

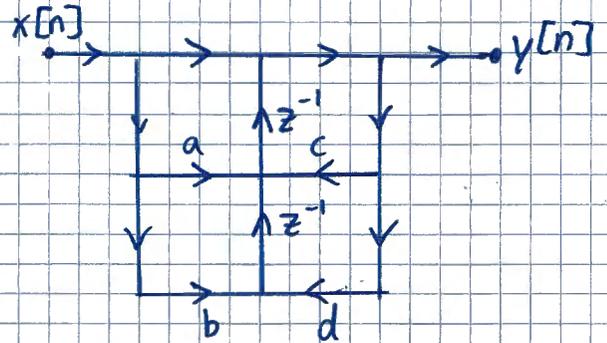
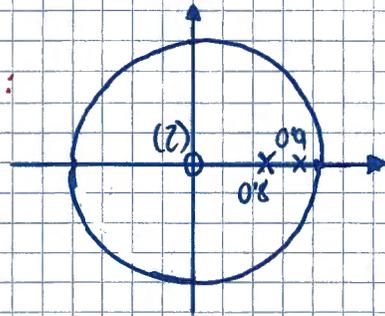
$$r(n) = ay(n) + by(n-1) + cy(n-2) + dy(n-3) + er(n-1) + fr(n-2)$$

Calcule los coeficientes  $a, b, c, d, e, f$  de la ecuación en diferencias. (2,5 p)

# Enero 2014, Examen Entero

## 2° Parcial

### Problema 1:

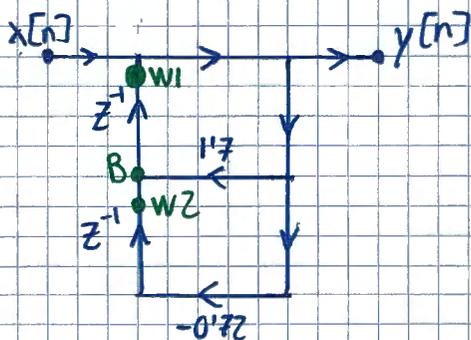


$$a) \underline{H(z)} = \frac{z^2}{(z-0.8)(z-0.9)} = \frac{1}{(1-0.8z^{-1})(1-0.9z^{-1})}$$

$$\text{Operando } H(z) = \frac{1}{1-1.7z^{-1}+0.72z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$x[n] = y[n] - 1.7y[n-1] + 0.72y[n-2]$$

$$\underline{y[n] = x[n] + 1.7y[n-1] - 0.72y[n-2]}$$



Iguando grafos:

$$\underline{a = b = 0}$$

$$\underline{c = 1.7}$$

$$\underline{d = -0.72}$$

$$b) |H(e^{j\omega})|$$

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \text{ para } |z| > 0.9$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-1.7e^{-j\omega}+0.72e^{-j2\omega}}$$

$$\underline{|H(e^{j0})| = \frac{1}{1-1.7+0.72} = 50}$$

$$\underline{|H(e^{j\pi})| = \frac{1}{1+1.7-0.72} = 0.29}$$

⇒ Filtro Paso Bajo

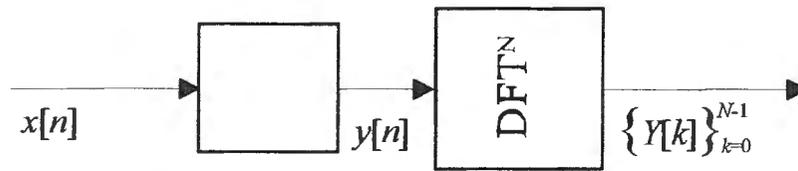


```

c) % Inicialización
w1 = 0
w2 = 0
for i = 0 ... to xlength           % Bucle
    y = X + w1
    % Actualizaciones
    w1 ← B = y'7 + w2
    w2 ← -0.72 y
end;

```

3. Considere la señal de tiempo discreto y duración infinita  $x[n] = 2 e^{-n} u[n]$ , cuya transformada de Fourier de tiempo discreto es  $X(\omega)$ . Se quieren obtener muestras de  $X(\omega)$  mediante el esquema de la siguiente figura, en el cual se hacen pasar las muestras  $x[n]$  por un bloque de procesamiento desconocido y luego se les hace una DFT de  $N$  puntos, como indica la figura.

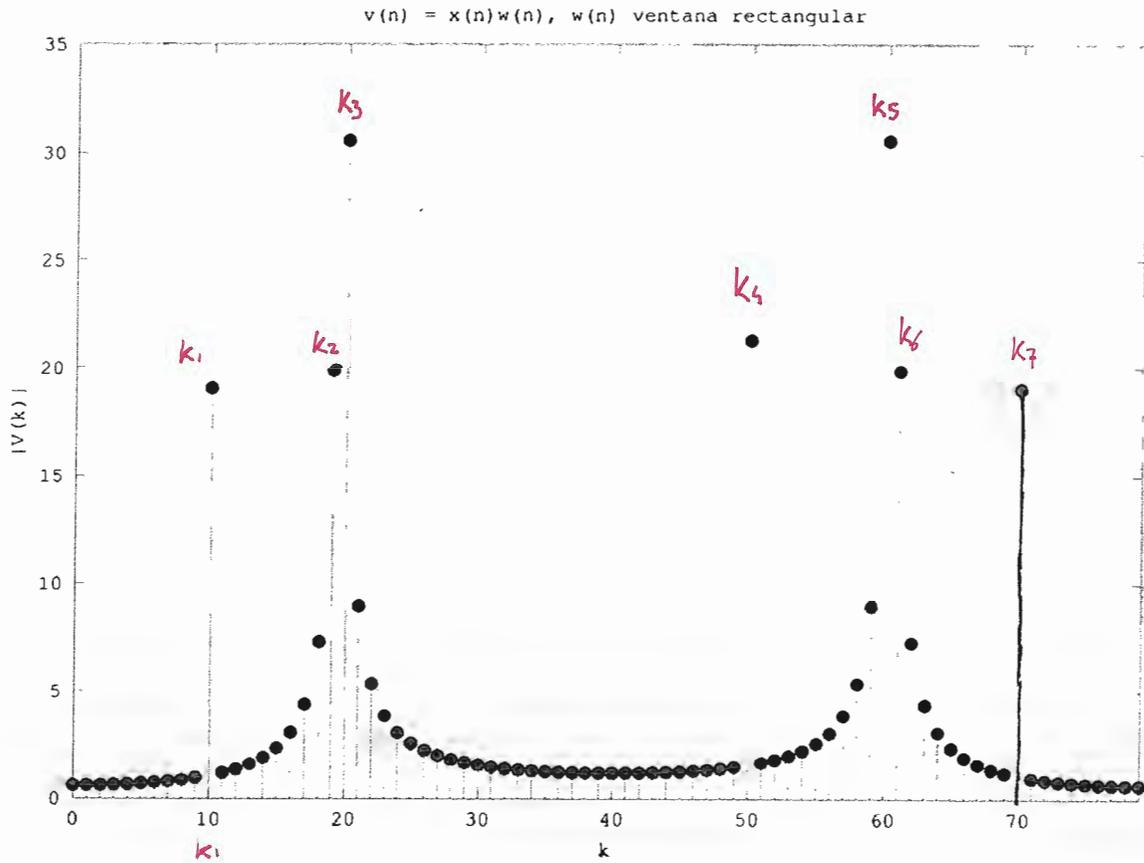


- a) Especifique el bloque en blanco y especifique **explícitamente**  $y[n]$  en términos de  $x[n]$ . **(1,25 p)**
- b) Diga la relación que tienen las muestras de salida,  $Y[k]$ , con las muestras  $x[n]$  y con el espectro  $X(\omega)$ . **(1,25 p)**

**4.**

Una señal continua  $x_c(t)$  está limitada en banda a frecuencias inferiores a 1 kHz; es decir,  $X_c(\Omega) = 0$  para  $|\Omega| \geq 2\pi(1000)$ . La señal  $x_c(t)$  se muestrea con una frecuencia de muestreo  $f_s = 2$  kHz para producir la secuencia  $x(n) = x_c(nT_s)$  con  $T_s = 1/f_s = 5 \cdot 10^{-4}$ .

La figura muestra la magnitud  $|V(k)|$  de la DFT de 80 puntos  $V(k)$  de la señal  $v(n)$  obtenida multiplicando  $x(n)$  por una ventana rectangular de 80 puntos  $w(n)$ ; es decir,  $v(n) = x(n)w(n)$ .



Indique razonadamente cuál de las siguientes señales es  $x_c(t)$ :

- (a)  $x_1(t) = \cos(2\pi 250t) + 2 \cos(2\pi 490t) + (1/2)e^{-j2\pi 750t}$
- (b)  $x_2(t) = (1/2) \cos(2\pi 250t) + \cos(2\pi 500t) + (1/4)e^{-j2\pi 750t}$
- (c)  $x_3(t) = (1/2) \cos(2\pi 250t) + \cos(2\pi 500t) + (1/4)e^{j2\pi 750t}$
- (d)  $x_4(t) = (1/2) \cos(2\pi 250t) + \cos(2\pi 490t) + (1/4)e^{-j2\pi 750t}$
- (e)  $x_5(t) = \cos(2\pi 500t) + 2 \cos(2\pi 980t) + e^{j2\pi 1500t}$

(2,5 p)

### Problema 3

$$x[n] = 2 \cdot e^{-n} \cdot u[n]$$

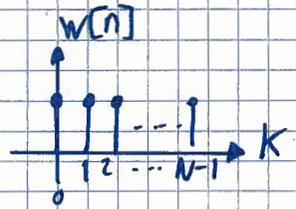


a)

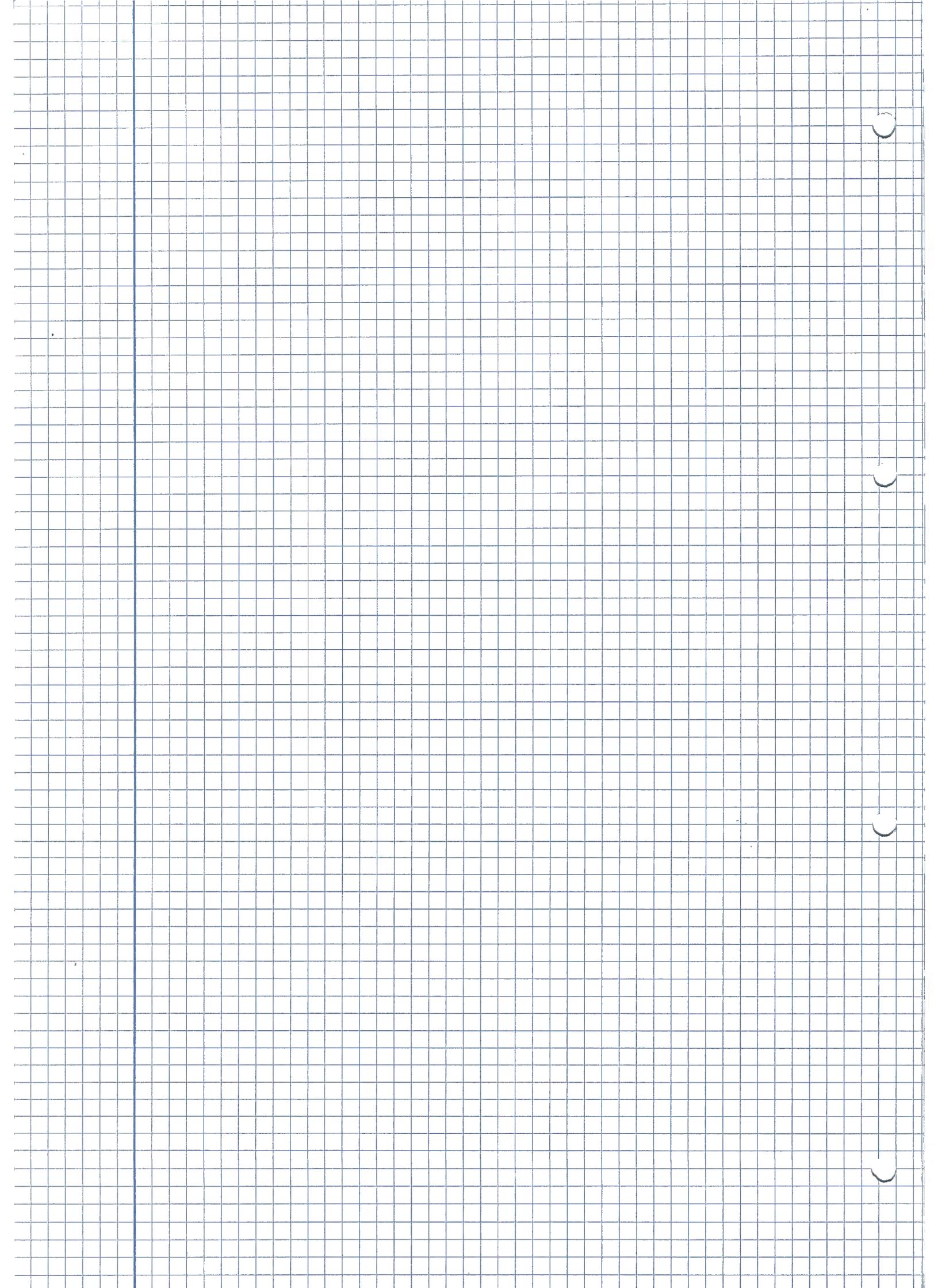
$w[n]$   
duración  $N$

$$y[n] = x[n] \cdot w[n]$$

Se trata de una ventana



$$\begin{aligned} b) Y(k) = X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} ; k=0, \dots, N-1 \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot w[n] \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \end{aligned}$$



## Problema 4

$$f_s = 2 \text{ kHz}$$

$$T_s = 5 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

$$N = 80 = M$$

$$f_i = \begin{cases} F_s \cdot \frac{k_i}{M} & k \leq M/2 \\ -F_s \frac{(M-k_i)}{M} & k > M/2 \end{cases}$$

$$\bullet k_1 = 10 \rightarrow f_1 = \frac{2000 \cdot 10}{80} = 250 \text{ Hz}$$

$$\bullet k_2 = 19 \rightarrow f_2 = \frac{2000 \cdot 19}{80} = 475 \text{ Hz} \quad \times \text{ (Están juntas)}$$

$$\bullet k_3 = 20 \rightarrow f_3 = \frac{2000 \cdot 20}{80} = 500 \text{ Hz}$$

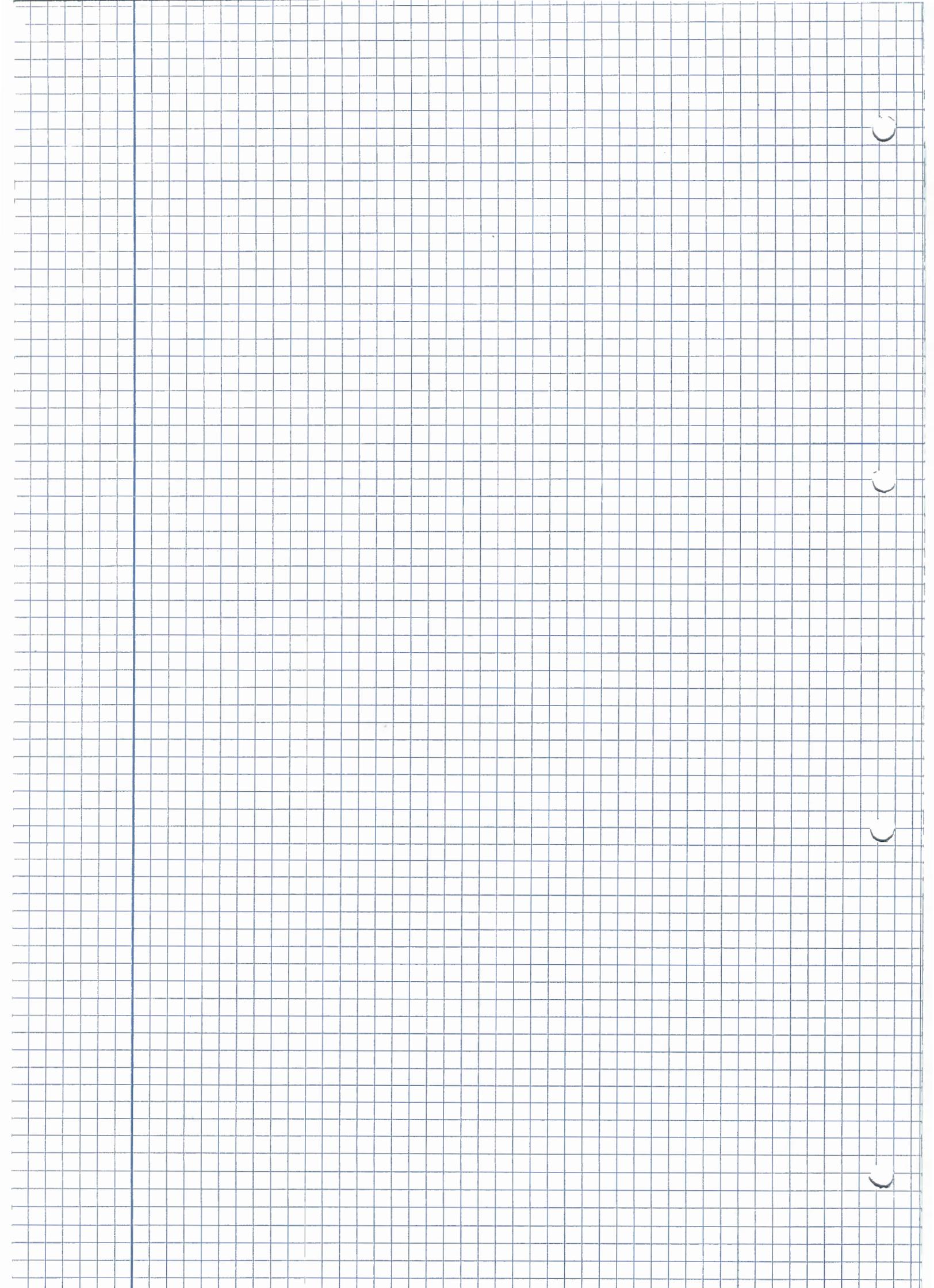
$$\bullet k_4 = 50 \rightarrow f_4 = -\frac{2000(80-50)}{80} = -750 \text{ Hz}$$

$$\bullet k_5 = 60 \rightarrow f_5 = -\frac{2000(80-60)}{80} = -500 \text{ Hz}$$

$$\bullet k_6 = 61 \rightarrow f_6 = -\frac{2000(80-61)}{80} = -475 \text{ Hz} \quad \times \text{ (Están juntas)}$$

$$\bullet k_7 = 70 \rightarrow f_7 = -\frac{2000(80-70)}{80} = -250 \text{ Hz}$$

Opción b)



# Tratamiento Digital de Señales (TDSÑ 95000028)

Laboratorio: Trabajos Finales

Curso 2014-2015

El método docente de la asignatura incluye la realización de un trabajo final; en este trabajo el alumno debe aplicar los conocimientos adquiridos durante el curso a la resolución de un problema práctico. La evaluación de este trabajo aporta un 20 % de la nota final de la asignatura.

## Metodología

### Grupos

Los trabajos se elaborarán en grupos de 2, 3 ó 4 alumnos. Excepcionalmente pueden considerarse trabajos individuales si existe un motivo justificado.

### Elaboración

La elaboración del trabajo estará dividida en dos fases:

#### 1. Análisis

En esta fase se hará un análisis del problema y de la metodología a aplicar. El resultado será un anteproyecto, que debe incluir:

- a) Estudio previo: análisis técnico teórico del problema y de la solución adoptada.
- b) Plan de trabajo: análisis metodológico del proyecto que incluya una descomposición en tareas.
- c) Diseño software: determinación de la estructura del programa y de los prototipos de las funciones a implementar.

#### 2. Desarrollo

En esta fase se llevará a cabo la codificación, integración y pruebas de las tareas que componen el proyecto. Los resultados serán:

- a) Memoria con la descripción de la codificación de la solución y las pruebas y resultados obtenidos.
- b) Códigos y ficheros de datos de MATLAB que constituyan la solución.

1

2

3

4

## Evaluación

La evaluación de los trabajos estará basada en dos elementos:

- Presentación del trabajo, que se hará de forma colectiva con una duración aproximada de 10 minutos. Esta presentación debe incluir una demostración de los resultados obtenidos.
- Preguntas relacionadas con cualquier aspecto del trabajo, que el profesor formulará de manera individual a cada uno de los componentes del grupo tras la presentación.

## Entregables

- Memoria del trabajo, que incluirá los estudios previos, la planificación del trabajo, la descripción de la codificación de la solución y las pruebas y resultados obtenidos.
- Códigos y ficheros de datos de MATLAB que constituyan la solución.
- Materiales empleados en la presentación del trabajo.

## Propuestas

En el apéndice se detalla una colección de propuestas de trabajos. Además de las propuestas descritas, los alumnos podrán proponer trabajos alternativos; en este caso, el profesor debe dar su aprobación tras valorar su viabilidad y alcance.

## Calendario

Fecha límite	
08/11	Configuración de los grupos y elección del trabajo.
28/11	Tutoría obligatoria. Debe programarse con el profesor.
30/11	Entrega del anteproyecto.
15/12	Tutoría opcional en caso de que el profesor, a la vista del anteproyecto, la considere necesaria.
27/01	Entrega de la memoria y evaluación. Entre la entrega y la evaluación de un trabajo debe mediar al menos una semana.

1

2

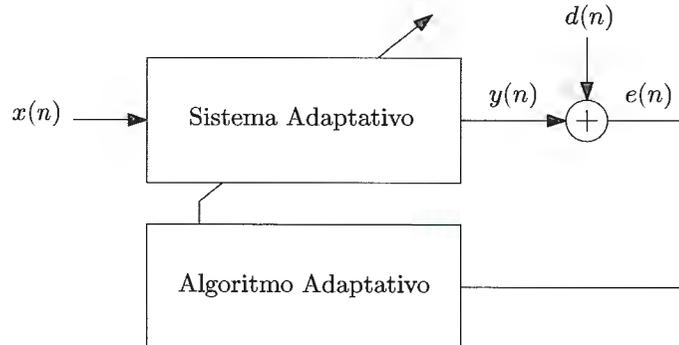
3

4

## 10. Sistemas adaptativos

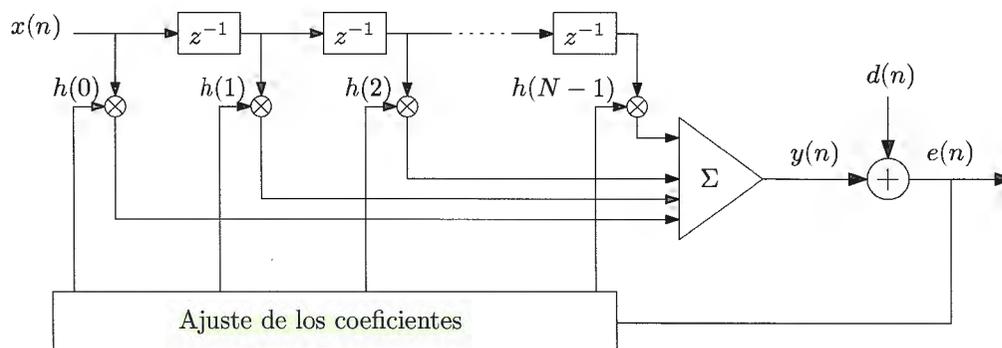
### Introducción

Los sistemas adaptativos son sistemas variantes en el tiempo que se adaptan a cambios en su entorno de acuerdo con una serie de algoritmos. El esquema general de estos sistemas es el de la figura.



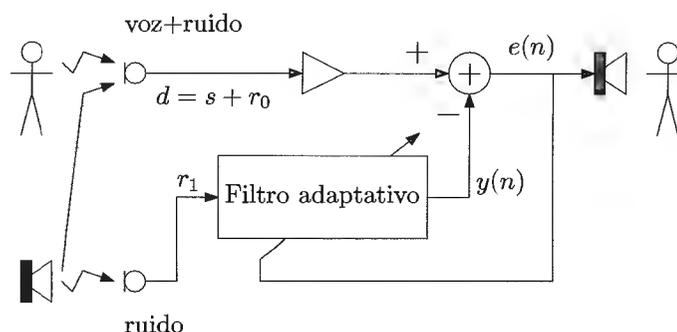
Aunque el bloque "Sistema adaptativo" puede corresponder tanto a un filtro IIR como a un FIR, es este último el que más se prefiere utilizar. La razón de esta preferencia es bastante simple. Al filtro FIR sólo hay que ajustarle los ceros, estando en principio libre de problemas de estabilidad. Esto no ocurre con los IIR.

De las diferentes estructuras FIR que podemos utilizar elegimos la transversal como se puede ver en la figura.



Para ajustar adaptativamente los coeficientes  $h(n)$  del filtro FIR utilizaremos un criterio basado en mínimos cuadrados, su nombre es LMS (*Least Mean Square*).

Una de las aplicaciones de los filtros adaptativos es la cancelación del ruido que ha degradado una señal de voz. Esta situación es la que tiene lugar, por ejemplo, en la cabina de un piloto de combate donde el nivel de ruido del motor del avión es muy alto. Este tipo de ruido tiene fuertes componentes periódicas, ricas en armónicos, que ocupan la misma banda de frecuencia que la voz del piloto. La siguiente figura representa de forma simplificada este caso. La señal  $d = s + r_0$  la recoge el micrófono que tiene el piloto cerca de sus labios y la señal  $x = r_1$  la recoge un micrófono que tiene el piloto situado en la parte trasera de su casco, con el propósito de que capte el ruido ambiental pero no su voz.



1

2

3

4

## Alcance del trabajo

El objetivo de este trabajo es la elaboración de un programa MATLAB que resuelva la situación presentada en la figura anterior. Es decir, a partir de dos grabaciones simultaneas, una de la voz con ruido y otra con sólo ruido se tiene que obtener la señal de voz limpia cancelando el ruido.

En la carpeta del trabajo encontrará ficheros con señales de voz más ruido (VOZ\_RUIDOX . mat) y ruido de referencia (RUIDOX . mat).

## Desarrollo

El estudio previo del anteproyecto debe contener, entre otros, los siguientes apartados:

- Descripción de los sistemas adaptativos en general
- Explicación detallada de la cancelación de ruido en voz
- Descripción del algoritmo LMS

## Bibliografía

- [1] *Adaptive Filter Theory*; S. Haykin; Prentice-Hall, 1996.
- [2] *Digital Communications*; J. Proakis; McGraw-Hill, 2000.
- [3] *Adaptive Signal Processing*; B. Widrow, Samuel D. Stearns; Prentice-Hall, 1985

1

2

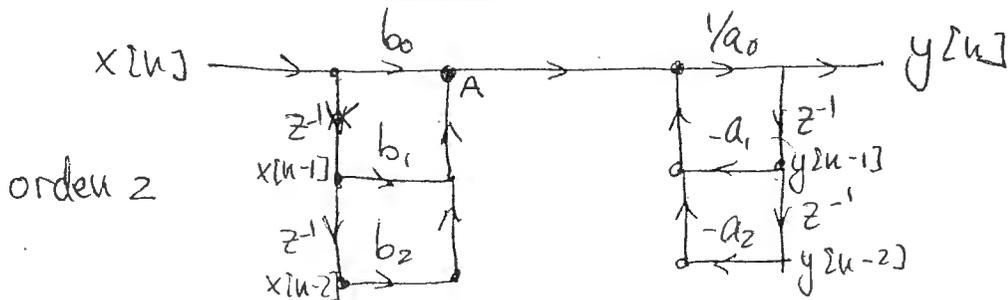
3

4

# 7) Flujoograma

**F. Directa I** SOLO usar esta para sacar la ec. de diferencias

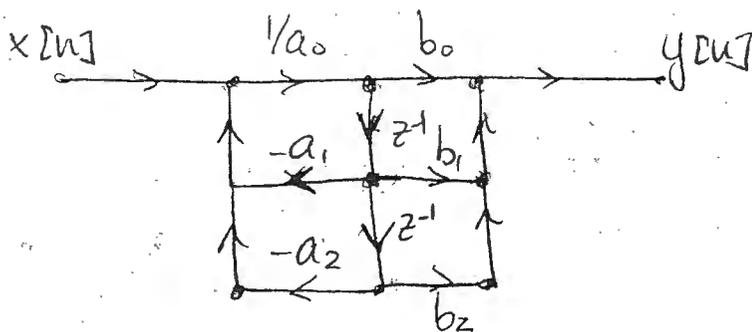
$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left[ \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^M a_k y[n-k] \right]$$



$$y[n] = \frac{1}{a_0} [b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2]]$$

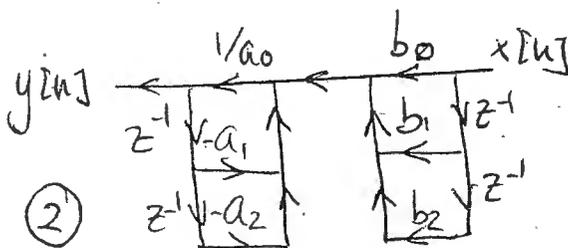
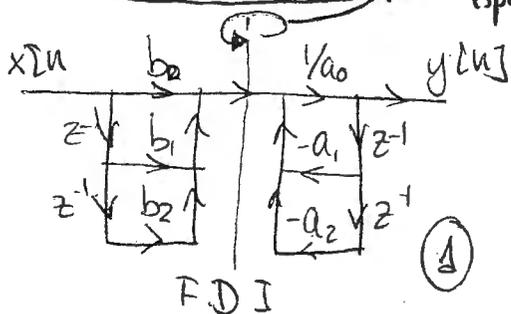
$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = \overbrace{b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]}^A$$

## **F. Directa II**

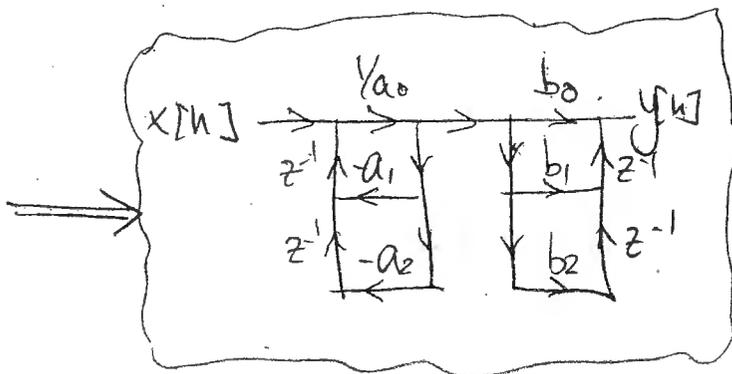


## **F. Directa III**

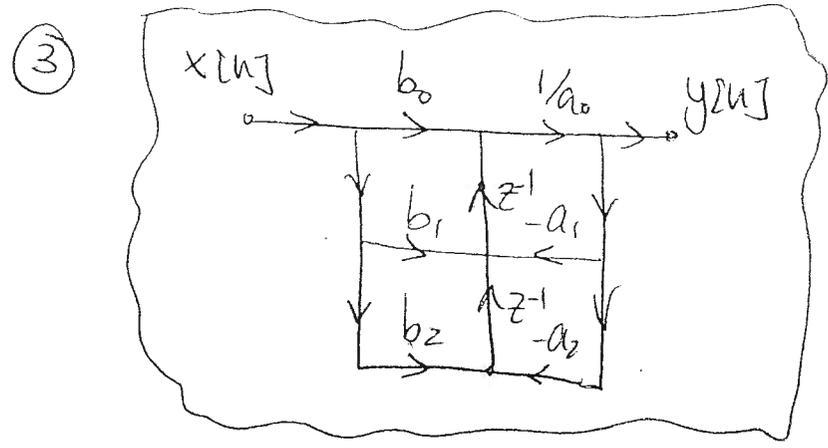
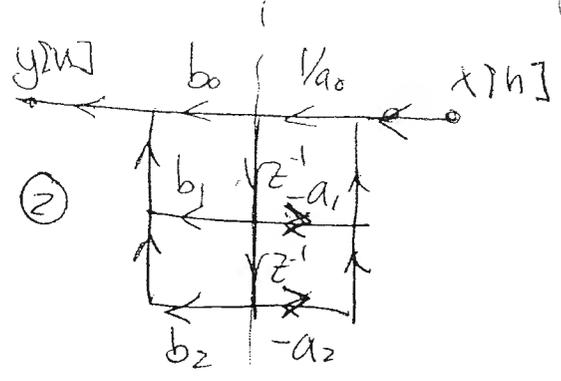
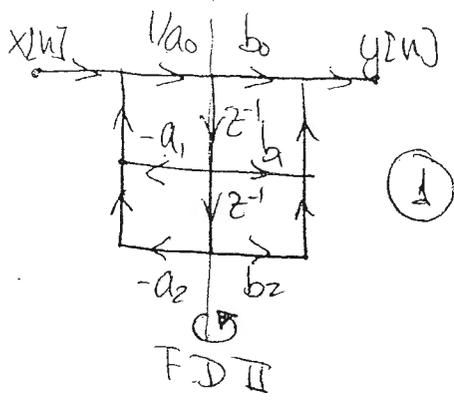
Como si fuera un espejo



- ③ Cambiamos sentido flechas.  
Intercambio  $x[n]$  por  $y[n]$

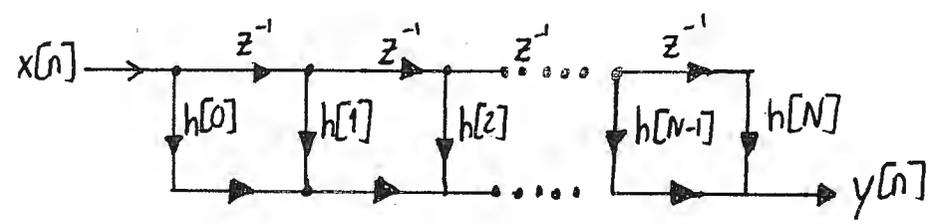


# F. Directa IV



# FIR

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h[n]z^{-n} = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \dots + h[N]z^{-N}$$



# PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Señal	Transformada de Fourier
$x[n]$	$X(e^{j\omega})$ periódica con periodo $2\pi$
$y[n]$	$Y(e^{j\omega})$ periódica con periodo $2\pi$
$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$ (Teorema superposición o linealidad)
$x[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$ (Teorema del retardo)
$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ $X^*(e^{j\omega})$ si $x[n]$ real
$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{si } n \text{ es múltiplo de } k \\ 0, & \text{si } n \text{ no es múltiplo de } k \end{cases}$	$X(e^{jk\omega})$
$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega - \theta)})d\theta$ $\frac{1}{2\pi} [X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega})]$
$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$
$nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
$x[n]$ real $\rightarrow$ su transformada es simétrica conjugada.	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \\ \Re\{X(e^{j\omega})\} = \Re\{X(e^{-j\omega})\} & \text{Parte real par} \\ \Im\{X(e^{j\omega})\} = -\Im\{X(e^{-j\omega})\} & \text{Parte imaginaria impar} \\  X(e^{j\omega})  =  X(e^{-j\omega})  & \text{Modulo par} \\ \angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega}) & \text{Fase impar.} \end{cases}$
$x_e[n] = Ev\{x[n]\} = \frac{x[n] + x[-n]}{2}$ $[x[n]$ real]	$\Re\{X(e^{j\omega})\}$
$x_o[n] = Od\{x[n]\} = \frac{x[n] - x[-n]}{2}$ $[x[n]$ real]	$j\Im\{X(e^{j\omega})\}$
Relación de Parseval para señales aperiódicas	
$\rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty}  x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi}  X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$	

• Si  $x[n]$  es par, es posible descomponerlo en una secuencia par y otra impar.

$$x[n] = x_{par}[n] + x_{impar}[n]$$

• Si  $x[n]$  es una secuencia compleja,  $x[n] = x_{RE}[n] + j x_{IM}[n]$

$$x_{RE}[n] \rightarrow X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \text{ simétrica conjugada}$$

$$x_{IM}[n] \rightarrow X(e^{j\omega}) = -X^*(e^{-j\omega}) \text{ Antisimétrica conjugada.}$$

# PROPIEDADES DE LAS SERIES DE FOURIER

Señales periódicas	Coeficientes de las series de Fourier
$\left. \begin{matrix} x[n] \\ y[n] \end{matrix} \right\}$ periódicas de periodo $N$ y frec. fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	$a_k$ Periódica de periodo $N$ $b_k$ Periódica de periodo $N$
$Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
$x[n - n_0]$	$a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n_0}$
$e^{jM(\frac{2\pi}{N})n} x[n]$	$a_{k-M}$
$x^*[n]$	$a_{-k}^*$
$x[-n]$	$a_{-k}$
$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m] & n \text{ múltiplo de } m \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$ Periódica de periodo $mN$	$\frac{1}{m} a_k$ Periódica de periodo $mN$
$\sum_{r=(N)} x[r]y[n-r]$	$Na_k b_k$
$x[n]y[n]$	$\sum_{l=(N)} a_l b_{k-l}$
$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-jk(2\pi/N)}) a_k$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]$ (valor finito y periódico si $a_0 = 0$ )	$\left( \frac{1}{1 - e^{-jk(2\pi/N)}} \right) a_k$
$x[n]$ real	$\begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ \Re\{a_k\} = \Re\{a_{-k}\} \\ \Im\{a_k\} = -\Im\{a_{-k}\} \\  a_k  =  a_{-k}  \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$
$x_e[n] = Ev\{x[n]\} = \frac{x[n] + x[-n]}{2}$ [ $x[n]$ real]	$\Re\{a_k\}$
$x_o[n] = Od\{x[n]\} = \frac{x[n] - x[-n]}{2}$ [ $x[n]$ real]	$j\Im\{a_k\}$

Relación de Parseval para señales periódicas

$$\frac{1}{N} \sum_{n=(N)} |x[n]|^2 = \sum_{k=(N)} |a_k|^2$$

## TRANSFORMADAS DE FOURIER TIEMPO DISCRETO

Señal	Transformada de Fourier	Coeficientes de las series (si son periódicos)
$\sum_{l < N} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k$
$\rightarrow e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \quad  \omega  < \pi$	a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1, & k = m, m \pm N, m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$ b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irracional $\Rightarrow$ la señal es no periódica
$\rightarrow \cos \omega_0 n$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)] = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0) \quad  \omega  < \pi$	a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1/2, & k = \pm m, \pm m \pm N, \pm m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$ b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irracional $\Rightarrow$ la señal es no periódica
$\text{sen } \omega_0 n$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)]$	a) $\omega_0 = \frac{2\pi r}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1/2j, & k = r, r \pm N, r \pm 2N, \dots \\ -1/2j, & k = -r, -r \pm N, -r \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$ b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irracional $\Rightarrow$ la señal es no periódica
$\rightarrow x[n] = 1$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi l) = 2\pi \delta(\omega) \quad  \omega  < \pi$	$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{en cualquier otro valor} \end{cases}$
Onda periódica cuadrada $x[n] = \begin{cases} 1, &  n  \leq N_1 \\ 0, & N_1 <  n  \leq \frac{N}{2} \end{cases}$ $x[n+N] = x[n]$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{\text{sen}\left[\frac{2\pi k}{N}\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\right]}{N \text{sen}\left[\frac{2\pi k}{2N}\right]}, \quad k \neq 0, \pm N, \dots$ $a_k = (2N_1 + 1)/N, \quad k = 0, \pm N, \dots$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{1}{N}$ para toda k
$\rightarrow a^n u[n],  a  < 1$	$1/(1 - ae^{-j\omega})$	
$x[n] = \begin{cases} 1, &  n  \leq N_1 \\ 0, &  n  > N_1 \end{cases}$	$\frac{\text{sen}\left[\omega\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\right]}{\text{sen}(\omega/2)}$	
$\rightarrow \frac{\text{sen} Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$ $0 < W < \pi$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq  \omega  \leq W \\ 0, & W <  \omega  \leq \pi \end{cases}$ $X(e^{j\omega})$ periódica con periodo $2\pi$	
$\rightarrow \delta[n]$	1	
$\rightarrow u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k)$	
$\rightarrow \delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$	
$(n+1)a^n u[n],  a  < 1$	$1/(1 - ae^{-j\omega})^2$	
$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n u[n],  a  < 1$	$1/(1 - ae^{-j\omega})^r$	

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \delta[n-k] = u[n] - u[n-N] \xrightarrow{F} e^{-j\omega(N-1)} \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

# PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Señal	Transformada de Fourier
$x(t)$	$X(j\omega)$
$y(t)$	$Y(j\omega)$
$ax(t) + by(t)$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$
$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(j(\omega - \omega_0))$
$\hat{x}(t)$	$X^*(-j\omega)$
$x(-t)$	$X(-j\omega)$
$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$
$x(t) * y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(j\omega)$
$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
$tx(t)$	$j \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$
$x(t)$ real $\rightarrow$ su transformada es simétrica conjugada.	$\begin{cases} X(j\omega) = X^*(-j\omega) \\ \Re\{X(j\omega)\} = \Re\{X(-j\omega)\} \\ \Im\{X(j\omega)\} = -\Im\{X(-j\omega)\} \\  X(j\omega)  =  X(-j\omega)  \\ \angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega) \end{cases}$
$x_e(t) = Ev\{x(t)\} = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$ [x(t) real]	$\Re\{X(j\omega)\}$
$x_o(t) = Od\{x(t)\} = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$ [x(t) real]	$j\Im\{X(j\omega)\}$

Relación de Parseval para señales aperiódicas

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

## TRANSFORMADAS DE FOURIER

$$\cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})$$

$$\cos(\omega_0 n) \xrightarrow{T.Fourier} \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$TF \{x[n]\} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

## TRANSFORMADAS Z

$$\delta[n - n_0] \xrightarrow{z} z^{-n_0}$$

$$a^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > a$$

$$-a^n u[-n - 1] \xrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| < a$$

$$TZ \{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

## MUESTREO

$$t = nT$$

$$\omega = \Omega T$$

## PROCESAMIENTO MULTITASA

### Compresor

$$y[n] = x[Mn]$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\frac{\omega}{M} - \frac{2\pi k}{M})})$$

### Expansor

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n - kL]$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$$

## FILTROS

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega}) H^*(e^{j\omega}) = H(z) H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

## DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi nk}{N}} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

11

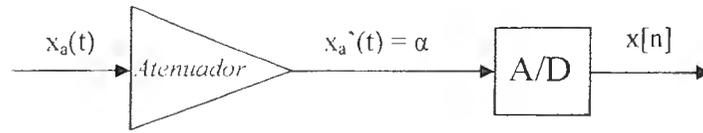
12

13

14

1. La señal  $x_a(t)$  de entrada a un conversor A/D está limitada en banda a 4 kHz. La aplicación requiere que la relación señal a ruido de cuantificación mínima sea de 40 dB. Cuando  $x_a(t)$  fluctúa entre +5 volt y -5 volt y se muestrea a 8 kHz la relación señal a ruido es de 50 dB.

¿Cuanto podemos atenuar la señal  $x_a(t)$ , como se indica en la figura, manteniendo la frecuencia de muestreo a 8 kHz para que la relación señal a ruido de cuantificación sea de 40 dB?

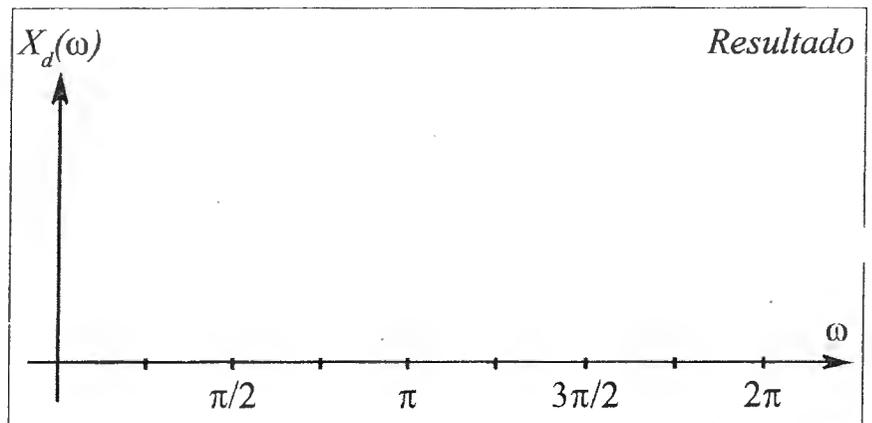


b) Si la señal de entrada está atenuada 20 dB, ¿qué frecuencia de muestreo  $F_s$  debemos utilizar para que la relación señal a ruido de cuantificación sea de 40 dB? En este caso indique el procesamiento digital necesario para obtener una secuencia que represente a la señal  $x_a(t)$  atenuada y que la relación señal a ruido de cuantificación sea de 40 dB.

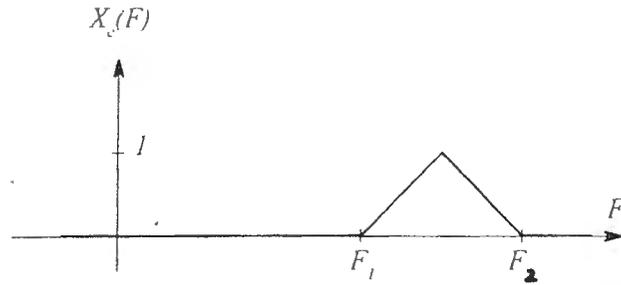
Notas: Se define que la señal  $x_a'(t)$  está atenuada  $A$  dB si  $A = 10 \log_{10} \frac{\sigma_{x_a}^2}{\sigma_{x_a'}^2}$

$\sigma_x^2$  es la potencia de una señal  $x(t)$ .  $\sigma_{x_a'}^2 = \alpha^2 \sigma_{x_a}^2$

2. Considere la señal  $x_c(t) = \frac{1}{\pi} e^{-100t} - \frac{1}{\pi} \cos(\pi 4750t)$ . Esta señal se muestrea con una  $F_s = 1000$  Hz, obteniéndose la secuencia  $x_d(n) = x_c\left(\frac{n}{F_s}\right)$ . Dibuje, en la gráfica que se adjunta, la transformada de Fourier  $X_d(\omega)$ .

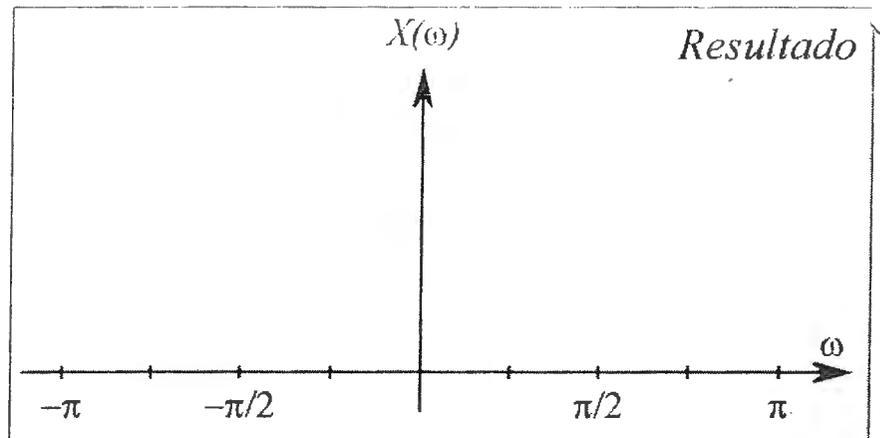


4. Considere una señal  $x_c(t)$ , cuya transformada de Fourier se representa en la figura.

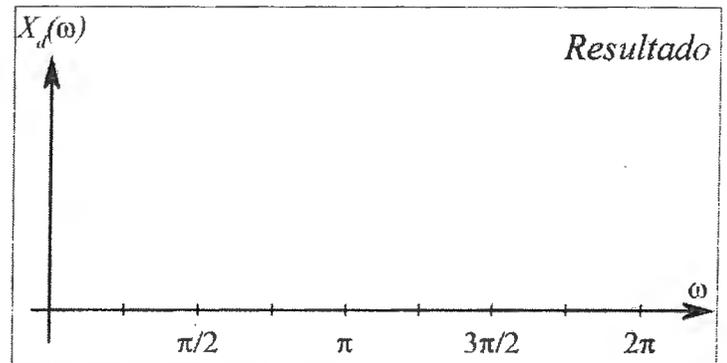
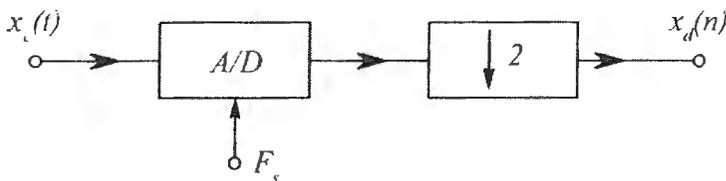


Conteste, razonadamente, a las siguientes preguntas:

- Se muestrea idealmente la señal  $x_c(t)$ , obteniéndose la secuencia  $x(n)$ . ¿Cuál es la frecuencia de muestreo mínima que se puede emplear de tal forma que se pueda recuperar  $x_c(t)$  a partir de  $x(n)$ ?
- Calcule y dibuje en la gráfica adjunta, con el máximo detalle posible, la transformada de Fourier  $X(\omega)$  de la secuencia  $x(n)$ , para  $F_1 = 7000$  Hz,  $F_2 = 13000$  Hz, empleando la frecuencia de muestreo mínima.



- Dibuje un esquema de bloques que permita recuperar la señal  $x_c(t)$  a partir de la secuencia de muestras  $x(n)$  obtenida en el apartado anterior. Puede emplear convertidores D/A ideales y filtros ideales con respuesta impulsiva compleja.
- Considere el siguiente diagrama de bloques, con  $F_1 = 7000$  Hz,  $F_2 = 9000$  Hz,  $F_s = 4000$  Hz. Calcule y dibuje en la gráfica adjunta, la transformada de Fourier  $X_d(\omega)$ .



- Dibuje un esquema de bloques que permita recuperar la señal  $x_c(t)$  a partir de la secuencia de muestras  $x_d(n)$  del apartado d), empleando la frecuencia de muestreo mínima posible. Puede emplear convertidores D/A ideales y filtros ideales con respuesta impulsiva compleja.

# Muestreo y Procesamiento Digital

## Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

5 de octubre de 2004

### Indicaciones:

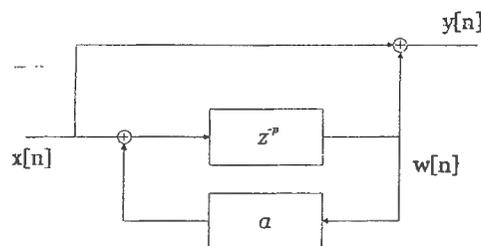
- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

### Pregunta [10 pts.]

Enunciar y demostrar el teorema del muestreo.

### Problema 1 [15 pts.]

Considere el sistema SLIT causal de la figura, donde el parámetro  $p$  es un entero positivo y  $a$  es un real.



- Plantear las ecuaciones en recurrencia que representan al sistema.
- Probar que la respuesta en frecuencia del sistema es:

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1 + (1 - a)e^{-jp\theta}}{1 - ae^{-jp\theta}}$$

De ahora en más, se considera  $p = 1$ .

- (c) Hallar y dibujar la respuesta al impulso del sistema.
- (d) ¿Cómo se puede determinar si el sistema es estable? Hallar la condición que debe cumplir  $a$  para que el sistema sea estable.

Suponiendo que  $x[n]$  e  $y[n]$  son procesos estacionarios:

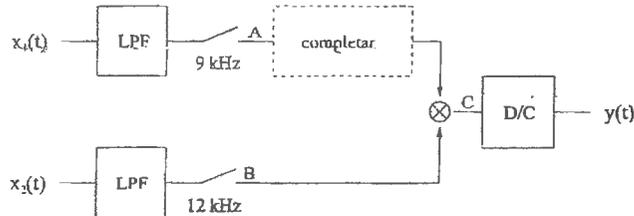
- (e) Hallar el valor medio de la salida en función del valor medio de la entrada.
- (f) Hallar  $R_{xy}[m] = E\{x[n]y[n+m]\}$ , correlación entre la entrada y la salida, en función de la autocorrelación de la entrada y de la respuesta al impulso del sistema.

Se desea analizar cómo se comporta el sistema cuando la entrada  $x[n]$  es ruido blanco gaussiano de potencia  $\sigma_x^2$  y media nula.

- (g) Hallar la potencia de la salida  $y[n]$ .
- (h) Hallar la autocorrelación de la salida  $y[n]$  en función de la respuesta al impulso del sistema.

## Problema 2 [15 pts.]

Considere el sistema de la figura, que sirve para multiplicar señales de tiempo continuo usando un sistema de tiempo discreto.



- (a) ¿Cuáles son los máximos anchos de banda admisibles en las señales  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  para no tener solapamiento al muestrear? Bosquejar los espectros en los puntos A y B indicados en la figura cuando

$$X_1(f) = \Pi\left(\frac{f}{3 \text{ kHz}}\right) \quad \text{y} \quad X_2(f) = \Pi\left(\frac{f}{4 \text{ kHz}}\right)$$

- (b) Diseñar un sistema de conversión de frecuencias para incluir en el rectángulo punteado del diagrama, de forma de igualar las frecuencias de muestreo.
- (c) Bosquejar el espectro en todos los puntos del sistema diseñado cuando  $x_1$  y  $x_2$  son las indicadas en la parte (a).
- (d) Encontrar y bosquejar el espectro en el punto C indicado en la figura cuando  $x_1$  y  $x_2$  son las indicadas en la parte (a).
- (e) ¿Qué condiciones deben cumplir  $W_1$  y  $W_2$ , anchos de banda de  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  respectivamente, para que  $y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$ ?

# Muestreo y Procesamiento Digital

## Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

4 de octubre de 2008

### Indicaciones:

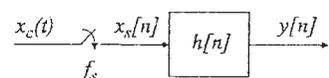
- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

### Pregunta [10 pts.]

- Definir estabilidad BIBO (entrada acotada - salida acotada) para un sistema en tiempo discreto con entrada  $x$  y salida  $y$ .
- Enunciar la condición necesaria y suficiente de estabilidad BIBO para sistemas lineales invariantes en el tiempo.
- Demostrar.

### Problema 1 [15 pts.]

Sean  $x_s[n]$  una secuencia obtenida a partir de las muestras de un proceso estocástico real, estacionario de tiempo continuo  $x_c(t)$ , muestreado con una frecuencia  $f_s = 1/T_s$ . Las muestras  $x_s[n]$  son filtradas con un filtro discreto de respuesta frecuencial  $H(e^{j\theta})$ .



- Hallar una expresión para la autocorrelación de  $x_s$ ,  $R_{x_s}[n]$ , en función de la autocorrelación de  $x_c(t)$ ,  $R_{x_c}(\tau)$
- Sea  $G_{x_c}(j\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$  la densidad espectral de  $x_c(t)$ . Hallar todas las posibles frecuencias de muestreo de forma que no haya solapamiento en la densidad espectral de  $x_s[n]$ ,  $G_{x_s}(e^{j\theta})$ . Bosquejar  $G_{x_s}(e^{j\theta})$  indicando las características (altura, frecuencias particulares, etc.)
- Hallar  $R_{x_s}[n]$ , en las condiciones de la parte 2

- (d) Dar una expresión para la densidad espectral de potencia de la señal de salida del filtro,  $y[n]$ ,  $G_y(e^{j\theta})$ .
- (e) Hallar en función de los parámetros del problema la autocorrelación de la señal de salida,  $R_y[n]$ , cuando el filtro es el definido por la ecuación de recurrencia:  $y[n] = x_s[n] - a x_s[n-1]$ .
- (f) Hallar en función de los parámetros del problema la autocorrelación de la señal de salida,  $R_y[n]$ , cuando el filtro tiene transferencia  $H(e^{j\theta}) = \Pi\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)$ , con  $\theta_0 f_s = \omega_0$ .

## Problema 2 [15 pts.]

Se considera la señal de tiempo continuo  $x(t)$ :

$$x(t) = \text{sinc}^2(f_1 t) \cos(2\pi f_1 t).$$

- (a) Hallar el espectro de  $x(t)$ .

La señal  $x(t)$  es muestreada para ser procesada en un sistema de tiempo discreto.

- (b) Hallar la mínima frecuencia de muestreo necesaria para representar correctamente a  $x(t)$ .
- (c) Hallar el espectro de la señal en tiempo discreto  $x[n] = x(nT_s)$  para la frecuencia de muestreo hallada en la parte anterior.

La señal se procesa filtrándola con un filtro SLIT  $H$  con respuesta al impulso:

$$h[n] = 0.5\delta[n-1] + \delta[n] + 0.5\delta[n+1]$$

- (d) Hallar la respuesta en frecuencia del filtro  $H$ .
- (e) Hallar y bosquejar el espectro a la salida del filtro.

Se desea aumentar la frecuencia de muestreo al doble, implementando este aumento de frecuencia en tiempo discreto.

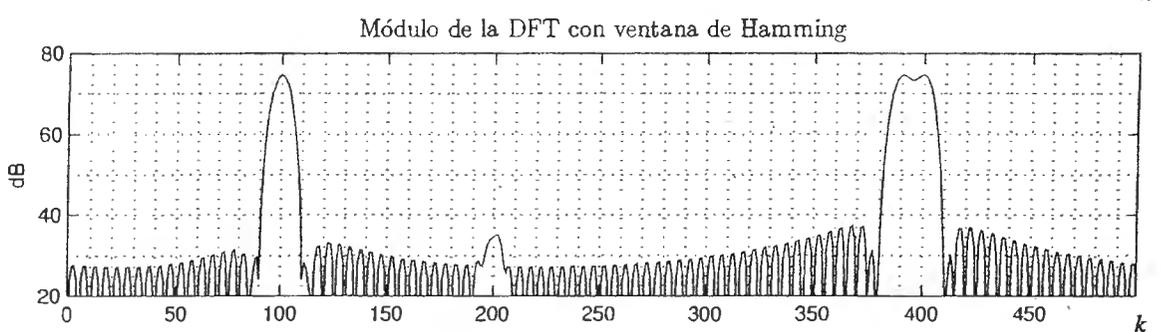
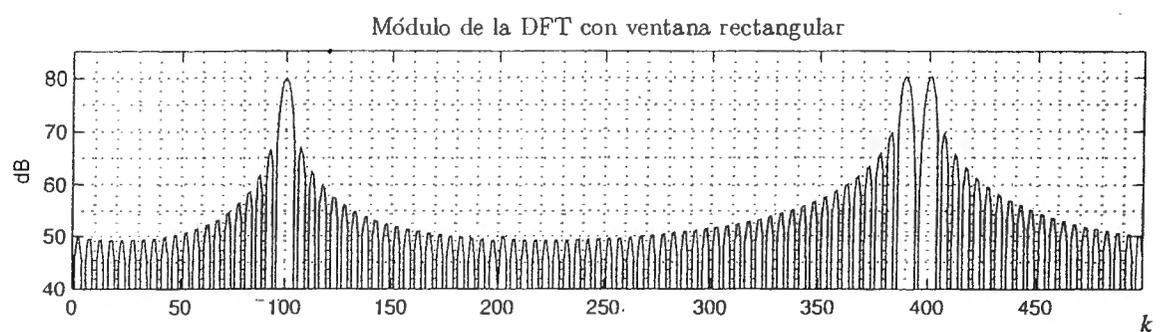
- (f) Dar el diagrama de bloques del sistema completo si se aumenta la frecuencia de muestreo antes del filtro  $H$ . Bosquejar el espectro a la salida.
- (g) Dar el diagrama de bloques del sistema completo si se aumenta la frecuencia de muestreo después del filtro  $H$ . Bosquejar el espectro a la salida. ¿Es igual al espectro de la parte anterior?

3. (2 puntos) Considere las secuencias  $x_1(n)$  de duración 4 y  $x_2(n)$  de duración 8 y su convolución lineal  $z(n) = x_1(n) * x_2(n)$ . Se pretende calcular la secuencia  $Z(k)$  con 8 muestras de la transformada de Fourier de  $z(n)$  equiespaciadas en el intervalo  $[0, 2\pi)$ , es decir:  $Z(k) = Z(\omega)|_{\omega=\frac{2\pi}{8}k}$ ,  $k = 0, \dots, 7$ .

- a) Escriba un procedimiento que use una DFT de orden 8 para calcular  $Z(k)$ .
  
- b) Escriba un procedimiento que use una DFT de orden 16 para calcular  $Z(k)$ .

4. (4 puntos) La señal  $x_c(t) = \sum_{i=1}^{N^c} A_i^c \cos(2\pi F_i^c t) + \sum_{i=1}^{N^e} A_i^e e^{j2\pi F_i^e t}$ , con frecuencias  $F_i$  inferiores a 500 Hz, se muestrea a frecuencia  $F_s = 1000$  Hz obteniéndose la señal  $x(n) = x_c(n/F_s)$ . Para medir las frecuencias  $F_i$  se aplica una DFT de orden  $M$  a un segmento de  $x(n)$  de longitud  $L$ .

- a) Calcule  $L$  y  $M$  para que: 1) la resolución en frecuencia (con el criterio de no solapamiento de los lóbulos principales) sea como mínimo 10 Hz y 2) el error en la medida las frecuencias  $F_i$  sea inferior o igual a 1 Hz.
  
- b) Considere  $L = 100$  y  $M = 500$ , independientemente de los valores calculados en el apartado anterior. Las siguientes gráficas muestran los módulos de la DFT de la señal  $x(n)$  multiplicada por una ventana rectangular y una ventana de Hamming, respectivamente. Determine los parámetros  $N^c$ ,  $N^e$ ,  $A_i^c$ ,  $F_i^c$ ,  $A_i^e$  y  $F_i^e$  y escriba la expresión de la señal  $x_c(t)$ .



Parcial 2 Sept 2006

6. La señal  $x_c(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(2\pi F_i t) + \sum_{j=1}^M B_j e^{j2\pi F_j t}$ , con ancho de banda inferior a 5000 Hz, se muestrea con

$F_s = 10000$  Hz. A un segmento de longitud  $L = 100$  de  $x(n) = x_c(nT_s)$  se le aplica una DFT de orden  $M = 20000$ .

Los módulos de la DFT, empleando una ventana rectangular y una ventana de Hamming, se representan a continuación. Sobre las gráficas se han medido los siguientes índices de la DFT:

$k_1 = 2350$ ;  $k_2 = 3330$ ;  $k_3 = 16920$ ;  $k_4 = 17200$ ;  $k_5 = 17650$ ; **Se pide** que calcule  $N$ ,  $A_i$ ,  $F_i$ ,  $M$ ,  $B_j$ ,  $F_j$ .

(8 puntos)

