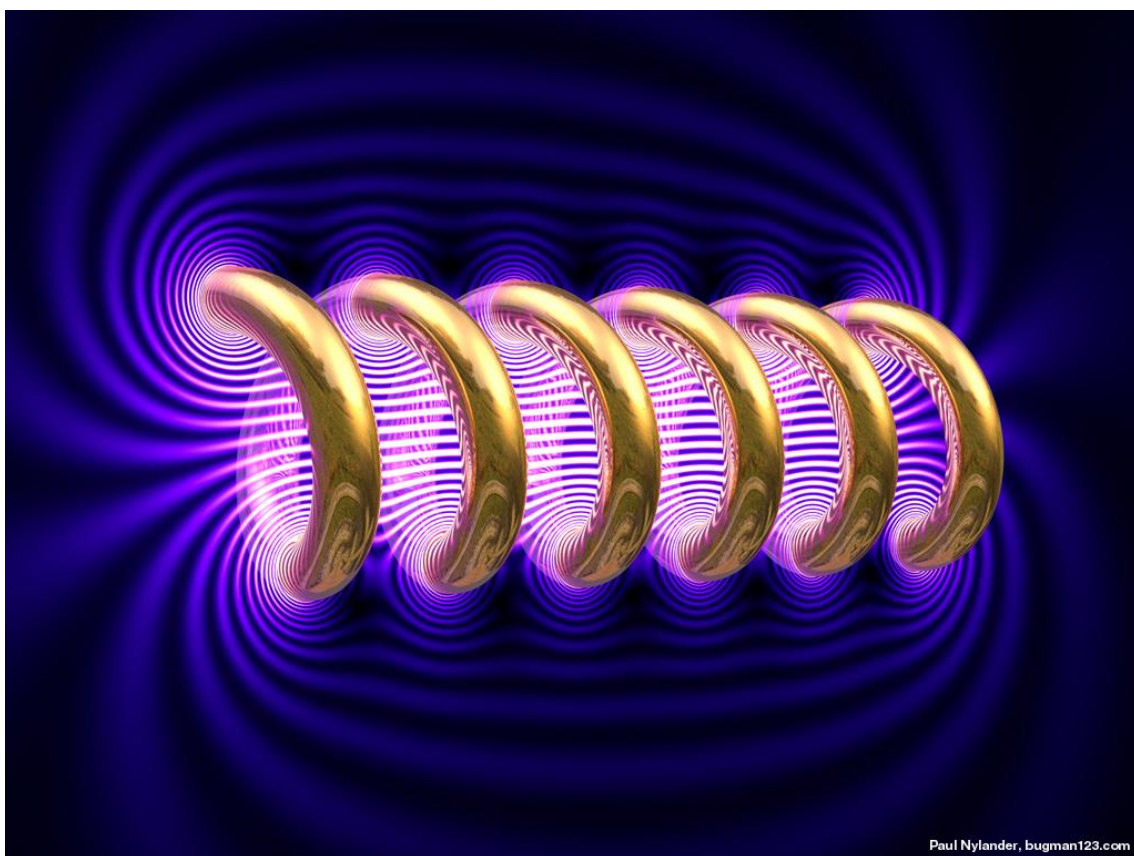


APUNTES ELECTROMAGNETISMO II



Paul Nylander, bugman123.com

Tema 1: Ecuaciones de Maxwell. Potenciales electromagnéticos

1.1. Ecuaciones de Maxwell en el vacío

A lo largo del curso de Electromagnetismo I se han estudiado diversos experimentos que condujeron al establecimiento de las relaciones entre los campos eléctricos y magnéticos con sus fuentes: las cargas y corrientes eléctricas. Todas estas leyes se fueron conociendo con el nombre de su descubridor pero fue Maxwell quien las unificó, añadiendo un término en la ley de Ampère que fue crucial para explicar la propagación de ondas electromagnéticas.

En el vacío, la formulación integral de las leyes es la siguiente:

➤ *Ley de Gauss para el campo eléctrico*

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

El flujo del campo eléctrico \vec{E} a través de una superficie cerrada S es igual a la carga eléctrica que encierra dicha superficie, Q , dividida por el factor ϵ_0 .

Si la superficie S encierra un volumen V en el cual la carga se distribuye con densidad volumétrica ρ_V , podemos expresar la ley como:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_V dV \quad (1.2)$$

➤ *Ley de Gauss para el campo magnético*

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.3)$$

El flujo del vector inducción magnética \vec{B} a través de una superficie cerrada S es igual a cero; está ligado al hecho de que no existen cargas magnéticas aisladas.

➤ *Ley de Faraday*

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (1.4)$$

La circulación del campo eléctrico a lo largo de un contorno cerrado C , es igual a la derivada con respecto al tiempo –cambiada de signo– del flujo del campo magnético a través de una superficie S abierta, cuyo contorno coincide con el de C . El primer término es la f.e.m. inducida y fue determinada por Faraday en numerosos experimentos

con espiras recorridas por corrientes e imanes, en los que provocaba la variación del flujo por movimiento relativo o por variaciones en la intensidad de corriente.

➤ *Ley circuital de Ampère*

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \left\{ \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right\} \quad (1.5)$$

La circulación del campo magnético a lo largo de un contorno cerrado C , es igual al factor μ_0 multiplicado por la suma de las corrientes que atraviesan cualquier superficie S que se apoye en dicho contorno. En el vacío:

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \text{ es la intensidad de corriente debida al flujo de cargas, } \vec{J} = \rho_V \vec{v}$$

$$\epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \text{ es la } \underline{\text{corriente de desplazamiento}} \text{ introducida por Maxwell.}$$

Estas ecuaciones tienen su equivalente en forma diferencial para las que se hace necesario la utilización de los operadores divergencia y rotacional (véase su expresión para los sistemas de referencia más usuales en las hojas suministradas). Las ecuaciones diferenciales son ecuaciones de punto, es decir, se han de verificar en cada punto de la región a la que se aplican.

❖ *Ley de Gauss para el campo eléctrico*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_V}{\epsilon_0} \quad (1.6)$$

La divergencia del campo eléctrico en el punto (x,y,z) es igual a la densidad volúmica de carga en dicho punto dividida por el factor ϵ_0 . Las fuentes y sumideros del campo eléctrico son las densidades de carga.

❖ *Ley de Gauss para el campo magnético*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.7)$$

Al no haber polos magnéticos aislados, la divergencia de \vec{B} es nula. Las líneas del vector inducción magnética son cerradas.

❖ *Ley de Faraday*

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.8)$$

Las variaciones temporales de \vec{B} originan un campo eléctrico cuyo rotacional es la derivada con respecto al tiempo –cambiada de signo– de \vec{B} . También puede interpretarse como que un campo \vec{E} de rotacional no nulo origina un \vec{B} cuya derivada temporal es dicho rotacional cambiado de signo.

❖ *Ley de Ampère*

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left\{ \vec{J} + \underbrace{\frac{\partial(\epsilon_0 \vec{E})}{\partial t}}_{\vec{J}_D} \right\} \quad (1.9)$$

Aquí observamos que el rotacional de \vec{B} es proporcional a la densidad de corriente debida al flujo de cargas, \vec{J} , y al término añadido por Maxwell que es la densidad de corriente de desplazamiento, \vec{J}_D . La existencia de \vec{J}_D fue demostrada posteriormente en los experimentos de Hertz.

Hallando la divergencia en ambos lados de (1.9) y teniendo en cuenta que la divergencia del rotacional es nula se obtiene la relación:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t} \quad (1.10)$$

que expresa la conservación de la carga en todo punto del espacio.

1.2. Ecuaciones de Maxwell en medios materiales. Relaciones constitutivas.

Hasta ahora hemos supuesto que los campos se establecían en el vacío. Cuando se generan en presencia de un medio material, las ecuaciones de Maxwell se siguen verificando pero hay que sustituir la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del vacío por los valores correspondientes a cada medio:

$$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad ; \quad \mu_0 \rightarrow \mu = \mu_r \mu_0 \quad (1.11)$$

También es conveniente introducir los vectores desplazamiento eléctrico, \vec{D} , e intensidad de campo magnético, \vec{H} , ligados a \vec{E} y \vec{B} a través de las *relaciones constitutivas*:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad ; \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \quad (1.12)$$

Si el material posee una conductividad no nula, σ , se establece además una densidad de corriente de conducción dada por

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (1.13)$$

y la densidad de corriente de desplazamiento vendrá dada por:

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.14)$$

Las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial quedan expresadas ahora como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_V \quad (1.15)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.16)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.17)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_D \quad (1.18)$$

Comentar finalmente que la expresión del rotacional de \vec{H} contiene la suma de dos densidades de corriente y, dependiendo de la situación, alguna de ellas puede ser nula. Por ejemplo, si aplicamos una diferencia de potencial constante a los extremos de un alambre sólo circulará \vec{J} ; cuando consideramos el sistema ‘antena transmisora’ \leftrightarrow ‘antena receptora’, la única corriente que los enlaza es \vec{J}_D , etc.

1.3. Condiciones de contorno

En la superficie que separa dos regiones, las ecuaciones de Maxwell dejan de tener sentido. Sin embargo, es posible establecer unas condiciones que deben cumplir las componentes de los campos al pasar de un medio a otro. Recordamos las ecuaciones deducidas en Electromagnetismo I.

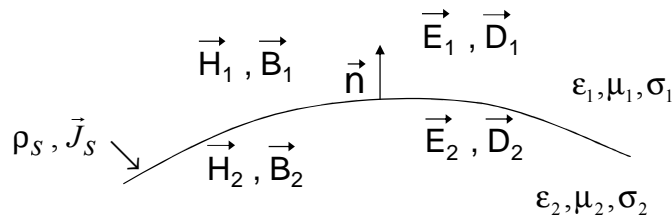


Figura 1.1. Geometría para el análisis de las condiciones de contorno.

Con relación a las variables representadas en la Figura 1.1, donde \vec{n} es un vector unitario normal a la superficie, se cumple:

$$\begin{aligned}
\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) &= \rho_s \\
\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) &= 0 \\
\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) &= 0 \\
\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) &= \vec{J}_s
\end{aligned}
\tag{1.19}$$

Vemos que la componente normal del vector \vec{D} sufre una discontinuidad igual a la densidad superficial de carga, ρ_s (C/m²). Asimismo, la componente normal de \vec{B} y la tangencial de \vec{E} se conservan al pasar de un medio a otro. De la última ecuación concluimos que la componente normal del vector \vec{H} sufre una discontinuidad igual a la densidad superficial de corriente, \vec{J}_s (A/m).

Resumiendo todo lo visto, podemos decir que dadas unas fuentes y una región del espacio con condiciones de contorno apropiadas, las ecuaciones de Maxwell permiten hallar los campos solución.

1.4. Potenciales electromagnéticos. Ecuaciones de onda

Aunque la formulación con campos es una forma posible de abordar problemas electromagnéticos, en algunos casos es más conveniente utilizar los potenciales como funciones auxiliares que simplifican la solución de los mismos. Vamos a caracterizar dichos potenciales y a obtener las ecuaciones de onda correspondientes.

El hecho de que la divergencia de un rotacional sea nula nos permite definir la inducción magnética como el rotacional de un campo vectorial:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{1.20}$$

Este campo \vec{A} se denomina *potencial vector magnético*.

Escribiendo \vec{B} como $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ en la ecuación (1.17) se obtiene:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{1.21}$$

siendo Φ el *potencial escalar eléctrico*. Para introducir este campo escalar se ha tenido en cuenta que el rotacional de un gradiente es cero.

Sustituyendo ambos potenciales en la ecuación (1.18) queda:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \tag{1.22}$$

Reagrupando y teniendo en cuenta la identidad vectorial (14) resulta:

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J} + \nabla \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (1.23)$$

Por otra parte, si introducimos los potenciales en la ecuación (1.15), con $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon}$, obtenemos:

$$-\nabla^2 \Phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\rho_V}{\epsilon} \quad (1.24)$$

Sumando $\mu\epsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$ en ambos miembros y operando queda:

$$\nabla^2 \Phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (1.25)$$

Para que un campo vectorial quede definido se ha de especificar su rotacional y su divergencia. Nosotros hemos especificado el rotacional de \vec{A} y podemos ahora imponer la *condición de Lorentz* para su divergencia:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0} \quad (1.26)$$

Ello permite desacoplar las ecuaciones (1.23) y (1.25) que se reducen a:

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2 \Phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho_V}{\epsilon} \\ \nabla^2 \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu\vec{J} \end{aligned}} \quad (1.27)$$

Estas son las *ecuaciones de onda para los potenciales*. La velocidad de propagación en el medio es

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (1.28)$$

Estas ecuaciones serán útiles para resolver problemas de radiación en el Tema 5.

1.4.1 Ecuaciones de onda para los campos en el medio libre (sin fuentes)

Para el estudio de propagación de ondas es conveniente partir de las ecuaciones de Maxwell para el caso en que las fuentes no están presentes. Entonces se reducen a:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (1.29)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.30)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.31)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.32)$$

Si la propagación tiene lugar en un medio como el aire, $\vec{D} \approx \epsilon_0 \vec{E}$ y $\vec{B} \approx \mu_0 \vec{H}$, ya que la permitividad y susceptibilidad son muy parecidas a las del vacío. Tomando rotacionales en la ecuación (1.31) obtenemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (1.33)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (1.32) y las relaciones constitutivas, queda para este caso:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (1.34)$$

Utilizando la identidad vectorial (14) y haciendo $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ en el medio libre, queda finalmente:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0} \quad (1.35)$$

que es conocida como la *ecuación de onda homogénea para el campo eléctrico* en el medio libre.

Razonado de forma análoga, es fácil demostrar que:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0} \quad (1.36)$$

que es la *ecuación de onda homogénea para el campo magnético*.

La velocidad de propagación será en ambos casos:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (1.37)$$

Si el medio tiene parámetros μ, ϵ , entonces la velocidad viene dada por la ecuación (1.28).

1.5 Aproximación casi-estática

En muchas aplicaciones del Electromagnetismo, los campos cambian con el tiempo pero de forma suficientemente lenta como para que los efectos de la corriente de desplazamiento sean despreciables, aunque no así los de la inducción electromagnética. Al conjunto de las ecuaciones de Maxwell que resultan se le suele denominar *aproximación casi-estática*:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v \quad (1.38)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.39)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.40)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} \simeq \vec{J} \quad (1.41)$$

Siguiendo los pasos del apartado anterior para hallar las fórmulas equivalentes a las ecuaciones de onda, podemos observar que en esta aproximación los efectos de propagación desaparecen, obteniéndose

$$\nabla^2 \vec{E} \simeq \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho_v \quad (1.42)$$

$$\nabla^2 \vec{H} \simeq -\nabla \times \vec{J} \quad (1.43)$$

Análogamente, con la condición para el potencial magnético $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, se obtienen las ecuaciones para los potenciales:

$$\nabla^2 \Phi \simeq -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (1.44)$$

$$\nabla^2 \vec{A} \simeq -\mu \vec{J} \quad (1.45)$$

Las soluciones son entonces formalmente idénticas a las del caso estático, pero con la intervención del tiempo, de manera que podemos designar a estos potenciales como *instantáneos*, es decir el potencial en cada instante dependerá del valor de las fuentes en ese mismo instante,

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho_v(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (1.46)$$

y análogamente para \vec{A} .

A efectos prácticos, la aproximación casi-estática será válida cuando las dimensiones del sistema son mucho menores que la longitud de onda asociada a los campos.

Un ejemplo clásico de aproximación cuasi-estática es la teoría de circuitos, donde los campos son *instantáneos*, aunque los efectos de inducción pueden ser muy importantes. La teoría de circuitos supone que los campos eléctrico y magnético se localizan en los componentes del circuito. Si bien la corriente de desplazamiento es dominante dentro de un condensador, es despreciable fuera del mismo y podemos ignorar en la ley de Ampère el término $\partial \vec{D} / \partial t$. En consecuencia, de (1.41) se tiene:

$$\nabla \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Si imaginamos una superficie cerrada S que rodea un nudo del circuito al que llegan densidades de corriente $\vec{J}_1, \vec{J}_2, \dots, \vec{J}_N$, se cumplirá:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{k=N} I_k = 0$$

Por tanto, la suma algebraica de las intensidades de corriente que llegan a un nudo es nula (ley de Kirchhoff de corrientes).

Análogamente, variaciones temporales de flujo magnético que son significativas en bobinas y transformadores, ecuación (1.40), se pueden despreciar en regiones exteriores. Ello da lugar a un campo eléctrico irrotacional:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi$$

Si sumamos algebraicamente las caídas de potencial a lo largo de M elementos de un camino cerrado L de un circuito se tendrá:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{k=M} V_k = 0$$

que constituye la formulación de la ley de Kirchhoff de voltajes.

Tema 1. Ecuaciones de Maxwell. Potenciales electromagnéticos.

Ecuaciones de Maxwell en el vacío y en medios materiales. Relaciones constitutivas. Condiciones de contorno. Potenciales electromagnéticos. Ecuaciones de onda. Aproximación casi-estática.

Problemas

1.- Si el campo vectorial dado en coordenadas cilíndricas por

$$\vec{E} = 3\rho\vec{u}_\rho + 6\vec{u}_z$$

representa un campo electrostático, determínese la densidad de carga volúmica asociada al mismo.

2.- ¿Cuál de los siguientes campos vectoriales puede representar un campo \vec{B} ?

$$\vec{B} = \frac{1}{\rho}\vec{u}_\rho + \rho z\vec{u}_\phi + \cos\phi\vec{u}_z$$

$$\vec{B} = (x+2)\vec{u}_x + (1-3y)\vec{u}_y + 2z\vec{u}_z$$

3.- Analizar cuál de los siguientes campos puede representar un campo de inducción magnética estática. Calcular la densidad de corriente asociada al mismo.

$$\vec{B} = x\vec{u}_x - y\vec{u}_y$$

$$\vec{B} = r\cos\phi\vec{u}_r - 3r\sin\theta\sin\phi\vec{u}_\phi$$

4.- Se tiene las distribuciones

$$\Phi(\vec{r}, t) = 0 \quad ; \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = A_0 \sin(kx - \omega t)\vec{u}_y$$

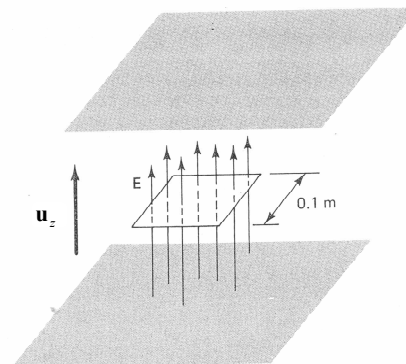
donde A_0 , ω y k son constantes.

Determinar los campos \vec{E} y \vec{B} y comprobar que satisfacen las ecuaciones de Maxwell. ¿Qué condición se debe imponer sobre ω y k ?

5.- Entre las placas de un condensador plano-paralelo se conecta un voltaje alterno. El campo que se establece en el condensador viene dado por:

$$\vec{E} = 10\cos\omega t\vec{u}_z$$

a) Si el medio entre placas es aire (ϵ_0, μ_0), determinar la corriente total que atraviesa un cuadrado de 0.1 m de lado colocado perpendicularmente al campo como se muestra en la figura.



b) Si entre las placas se pone agua de mar ($\epsilon = 78\epsilon_0$, $\sigma = 4\text{ S/m}$), hallar la relación entre los módulos de la densidad de corriente de conducción y la de desplazamiento a la frecuencia de 100 MHz. Calcular también la corriente total que atraviesa el cuadrado.

6.- Calcular la densidad de corriente de desplazamiento para los siguientes campos electromagnéticos

- Una onda de radiodifusión de 1 MHz que se propaga con un campo eléctrico de $1\ \mu\text{V/m}$.
- Una línea de transporte de alta tensión de 50 Hz que soporta un campo eléctrico de $100\ \text{kV/m}$.
- El haz de un láser de 600 nm que posee un campo eléctrico de $3 \times 10^4\ \text{V/m}$.

7.- En medios dieléctricos se estudió que para los cálculos de campos, un medio dieléctrico polarizado se podía sustituir por una densidad superficial de carga de polarización ρ_{ps} (C/m^2) y una densidad volúmica de carga de polarización ρ_p (C/m^3). Encontrar las condiciones de contorno en la superficie de separación de dos medios distintos para:

- La componente normal del vector polarización \mathbf{P}
- La componente normal de \mathbf{E} .

en función de las densidades de carga en la interfase.

8.- Una lámina infinita con corriente $\vec{J}_s = 5\vec{u}_x$ (A/m) coincidente con el plano xy , separa el aire (región 1, $z > 0$) de un medio con $\mu_r = 2$ (región 2, $z < 0$).

Si $\vec{H}_1 = 30\vec{u}_x + 40\vec{u}_y + 20\vec{u}_z$ (A/m), calcular:

- \vec{H}_2 ;
- \vec{B}_2 ;
- el ángulo α_1 que forma \vec{B}_1 con el eje z ;
- el ángulo α_2 que forma \vec{B}_2 con el eje z .

9.- El campo eléctrico inducido por un campo \vec{B} variable con el tiempo viene dado por:

$$\vec{E} = E_0 z^2 \cos \omega t \vec{u}_x$$

Suponiendo que \vec{B} tiene sólo componente en la dirección \vec{u}_y , y que su valor en $t = 0$ es nulo, hallar la expresión de \vec{B} utilizando la ley de Faraday.

10.- Suponer que un monopolo magnético q_m pasa a través de una espira circular sin resistencia, cuya autoinductancia es L . ¿Qué corriente se induce en la espira? (Ver Blas Cabrera, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1378.)

Problemas del Tema 1

1. Si el campo vectorial dado en coordenadas cilíndricas por

$$\vec{E} = 3\rho\vec{u}_\rho + 6\vec{u}_z$$

representa un campo electrostático, determínese la densidad de carga volúmica asociada al mismo.

Solución

Las componentes del campo en este sistema de coordenadas son:

$$E_\rho = 3\rho, \quad E_\phi = 0, \quad E_z = 6$$

Hallamos la divergencia de este campo,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\rho)}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \cdot 6\rho = 6$$

Por tanto, la densidad de carga volúmica vale:

$$\rho_V = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 6\epsilon_0$$

Si el campo está dado en V/m, la densidad de carga se medirá en C/m³.

2. ¿Cuál de los siguientes campos vectoriales puede representar un campo \vec{B} ?

$$\vec{B} = \frac{1}{\rho}\vec{u}_\rho + \rho z\vec{u}_\phi + \cos\phi\vec{u}_z$$

$$\vec{B} = (x+2)\vec{u}_x + (1-3y)\vec{u}_y + 2z\vec{u}_z$$

Solución

a) Para el primer campo se tiene

$$B_\rho = \frac{1}{\rho}, \quad B_\phi = \rho z, \quad B_z = \cos\phi$$

Hallamos su divergencia,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho B_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$

Luego representa un campo magnético

b) Para el segundo campo vectorial,

$$B_x = x + 2, \quad B_y = 1 - 3y, \quad B_z = 2z$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 1 - 3 + 2 = 0$$

También representa un campo magnético.

3. Analizar cuál de los siguientes campos puede representar un campo de inducción magnética estática. Calcular la densidad de corriente asociada al mismo.

$$\vec{B} = x\vec{u}_x - y\vec{u}_y$$

$$\vec{B} = r \cos \phi \vec{u}_r - 3r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \vec{u}_\phi$$

a) Para el primer campo se tiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 1 - 1 = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & -y & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{J} = 0$$

b) Para el segundo campo usamos los operadores expresados en coordenadas esféricas:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 B_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} = 3 \cos \phi + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} (-3r \operatorname{sen} \theta \cos \phi) = 0 \quad ;$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \left(\frac{\partial (\operatorname{sen} \theta B_\phi)}{\partial \theta} \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial B_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r B_\phi)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta$$

Por tanto, la densidad de corriente asociada será:

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \left[-6 \cos \theta \operatorname{sen} \phi \vec{u}_r + \left(6 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi - \frac{\operatorname{sen} \phi}{\operatorname{sen} \theta} \right) \vec{u}_\theta \right]$$

4.- Se tiene las distribuciones

$$\Phi(\vec{r}, t) = 0 \quad ; \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = A_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) \vec{u}_y$$

donde A_0 , ω y k son constantes.

Determinar los campos \vec{E} y \vec{B} y comprobar que satisfacen las ecuaciones de Maxwell.

¿Qué condición se debe imponer sobre ω y k ?

Solución

Campo eléctrico:

$$\vec{E} = -\underbrace{\vec{\nabla} \Phi}_{=0} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} [A_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)] \vec{u}_y = A_0 \omega \cos(kx - \omega t) \vec{u}_y$$

Campo magnético:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & A_0 \sin(kx - \omega t) & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} [A_0 \sin(kx - \omega t)] \vec{u}_z = A_0 k \cos(kx - \omega t) \vec{u}_z$$

Ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \vec{u}_z = \frac{\partial}{\partial x} [A_0 \omega \cos(kx - \omega t)] \vec{u}_z = -A_0 k \omega \sin(kx - \omega t) \vec{u}_z$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = A_0 k \omega \sin(kx - \omega t) \vec{u}_z$$

Hemos comprobado que se cumple $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Por otra parte:

$$\nabla \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_0 k \cos(kx - \omega t) \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial x} [A_0 k \cos(kx - \omega t)] \vec{u}_y = A_0 k^2 \sin(kx - \omega t) \vec{u}_y$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [A_0 \omega \cos(kx - \omega t)] \vec{u}_y = A_0 \omega^2 \sin(kx - \omega t) \vec{u}_y$$

La ecuación $\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ se verifica si imponemos

$$k^2 = \frac{1}{c^2} \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = \frac{\omega}{k}}$$

Además no hay densidad de corriente libre, $\vec{J} = 0$.

Para las ecuaciones de divergencia tenemos:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \rho_v = 0$$

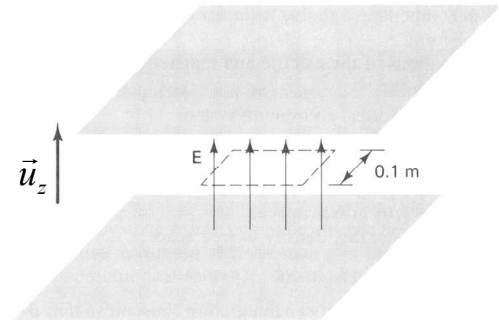
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

5.- Entre las placas de un condensador de placas paralelas se conecta un voltaje alterno. El campo que se establece en el condensador viene dado por:

$$\vec{E} = 10 \cos \omega t \vec{u}_z$$

a) Si el medio entre placas es aire (ϵ_0, μ_0),

determinar la corriente total que atraviesa un cuadrado de 0.1 m de lado colocado perpendicularmente al campo como se muestra en la figura.



b) Si entre las placas se pone agua de mar,

$\epsilon = 78\epsilon_0$; $\sigma = 4 \text{ S/m}$, hallar la relación entre la densidad de corriente de conducción y la de desplazamiento a la frecuencia de 100 MHz. Calcular también la corriente total que atraviesa el cuadrado.

Solución

a) La única corriente que existe en esta región es la de desplazamiento. Su densidad viene dada por:

$$\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -10 \epsilon_0 \omega \sin \omega t \vec{u}_z \text{ (A/m}^2\text{)}$$

Por tanto, la corriente que atraviesa el cuadrado será

$$I_D = \int_{\text{cuadrado}} \vec{J}_D \cdot d\vec{S} = -10 \epsilon_0 \omega \sin \omega t \int_{\text{cuadrado}} dS = -0.1 \epsilon_0 \omega \sin \omega t \text{ (A)}$$

b) Para $f = 100 \text{ MHz}$, $\omega = 2\pi \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$. La densidad de corriente de conducción vale:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = 40 \cos 2\pi \cdot 10^8 t \vec{u}_z \text{ (A/m}^2\text{)}$$

El cociente de ambas (módulo) será:

$$\frac{|\vec{J}|}{|\vec{J}_D|} = \frac{40 \cos \omega t}{10 \epsilon_0 \omega \sin \omega t} = \frac{4}{78 \cdot 2\pi \cdot 10^8 \epsilon_0} \cot 2\pi \cdot 10^8 t = 9.22 \cot 2\pi \cdot 10^8 t$$

Y la corriente total:

$$I_{\text{total}} = \int_{\text{cuadrado}} (\vec{J} + \vec{J}_D) \cdot d\vec{S} = 0.4 \cos 2\pi \cdot 10^8 t - 0.043 \sin 2\pi \cdot 10^8 t \text{ (A)}$$

6.- Calcular la densidad de corriente de desplazamiento para los siguientes campos electromagnéticos

- Una onda de radiodifusión de 1 MHz que se propaga con un campo eléctrico de 1 $\mu\text{V/m}$.
- Una línea de transporte de alta tensión de 50 Hz que soporta un campo eléctrico de 100 kV/m.
- El haz de un láser de 600 nm que posee un campo eléctrico de $3 \times 10^4 \text{ V/m}$.

Solución

Para campos armónicos la corriente de desplazamiento viene dada por:

$$|\vec{J}_D| = \left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| = \omega \epsilon |\vec{E}|$$

En los tres casos la corriente es paralela al campo eléctrico y está desfasada $\pi/2$ con respecto al mismo; tomamos $\epsilon = \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F/m}$.

a) $f = 1 \text{ MHz}$; $E = 1 \mu\text{V/m}$.

$$J_D = 2\pi \times 10^6 \cdot \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \times 10^{-6} \text{ (A/m}^2\text{)} = 5,6 \times 10^{-11} \text{ A/m}^2$$

b) $f = 50 \text{ Hz}$; $E = 100 \text{ kV/m}$.

$$J_D = 100\pi \cdot \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \times 10^5 \text{ (A/m}^2\text{)} = 2,8 \times 10^{-4} \text{ A/m}^2$$

c) $\lambda = 600 \times 10^{-9} \text{ m}$; $E = 3 \times 10^4 \text{ V/m}$; $f = \frac{c}{\lambda} = 5 \times 10^{14} \text{ Hz}$

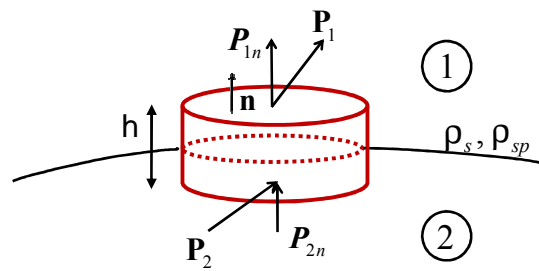
$$J_D = 2\pi \cdot 5 \times 10^{14} \cdot \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \cdot 3 \times 10^4 \text{ (A/m}^2\text{)} = 8,4 \times 10^8 \text{ A/m}^2$$

7.- En medios dieléctricos se estudió que para los cálculos de campos, un medio dieléctrico polarizado se podía sustituir por una densidad superficial de carga de polarización ρ_{ps} (C/m^2) y una densidad volúmica de carga de polarización ρ_p (C/m^3). Encontrar las condiciones de contorno en la superficie de separación de dos medios distintos para:

- La componente normal del vector polarización **P**
- La componente normal de **E**.

en función de las densidades de carga en la interfase.

Solución



a) La relación entre \vec{P} y ρ_p es.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_p$$

Hallamos la integral extendida al volumen del cilindro elemental de la figura:

$$\int_{\Delta V} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV = \oint_{\Delta S} \vec{P} \cdot d\vec{S} = - \int_{\Delta V} \rho_p dV$$

Cuando $h \rightarrow 0$, el flujo del vector \vec{P} a través de la superficie lateral es despreciable; además, podemos considerar aprox. constantes los valores en las bases. Queda entonces:

$$(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{n} \Delta S = -\rho_p \Delta S h$$

El término de la derecha es la carga de polarización en el volumen ΔV . Al tomar límites la carga se reduce a la densidad superficial:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \rho_p \Delta S h = \rho_{ps} \Delta S$$

Operando, queda finalmente:

$$\boxed{P_{1n} - P_{2n} = -\rho_{ps}}$$

b) Teniendo en cuenta que

$$\epsilon_0 \vec{E} = \vec{D} - \vec{P}$$

y que la condición de contorno para el vector \vec{D} es la dada en la ec. (1.19), queda:

$$\epsilon_0 (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \vec{n} = (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} - (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{n} = \rho_s + \rho_{ps}$$

Por tanto,

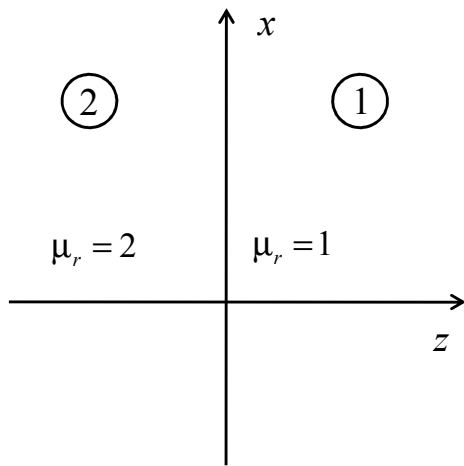
$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \vec{n} = \frac{\rho_s + \rho_{ps}}{\epsilon_0}$$

8.- Una lámina infinita con corriente $\vec{J}_s = 5\vec{u}_x$ (A/m) coincidente con el plano XY , separa el aire (región 1, $z > 0$) de un medio con $\mu_r = 2$ (región 2, $z < 0$).

Si $\vec{H}_1 = 30\vec{u}_x + 40\vec{u}_y + 20\vec{u}_z$ (A/m), calcular:

- a) \vec{H}_2 ; b) \vec{B}_2 ; c) el ángulo α_1 que forma \vec{B}_1 con el eje z ; d) el ángulo α_2 que forma \vec{B}_2 con el eje z .

Solución



$$B_{1n} = B_{2n} \Leftrightarrow H_{2z} = \frac{1}{\mu_{r2}} H_{1z} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \Rightarrow$$

$$\vec{u}_z \times \left([30 - H_{2x}] \vec{u}_x + [40 - H_{2y}] \vec{u}_y + [20 - H_{2z}] \vec{u}_z \right) = 5\vec{u}_x$$

Por tanto,

$$H_{2x} = 30 \quad ; \quad H_{2y} = 45$$

a) $\vec{H}_2 = 30\vec{u}_x + 45\vec{u}_y + 10\vec{u}_z$ (A/m)

b) $\vec{B}_2 = 2\mu_0\vec{H}_2$ (T)

c) $\alpha_1 = \arctan \frac{\sqrt{30^2 + 40^2}}{20} = 68.2^\circ$

d) $\alpha_2 = \arctan \frac{\sqrt{30^2 + 45^2}}{10} = 79.5^\circ$

9.- El campo eléctrico inducido por un campo \vec{B} variable con el tiempo viene dado por:

$$\vec{E} = E_0 z^2 \cos \omega t \vec{u}_x$$

Suponiendo que \vec{B} tiene sólo componente en la dirección \vec{u}_y , y que su valor en $t = 0$ es nulo, hallar la expresión de \vec{B} utilizando la ley de Faraday.

Solución

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_0 z^2 \cos \omega t & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial z} [E_0 z^2 \cos \omega t] \vec{u}_y = 2E_0 z \cos \omega t \vec{u}_y = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Integrando con respecto a t la expresión de \vec{B} viene dado por:

$$\vec{B} = \left[-\frac{2E_0 z}{\omega} \text{sen } \omega t + \underbrace{Cte}_{=0} \right] \vec{u}_y$$

Las posibles componentes constantes en las otras direcciones (que al derivar con respecto a t no darían contribución al rotacional), las ignoramos porque se impone que \vec{B} sólo tiene componente y .

10.- Suponer que un monopolo magnético q_m pasa a través de una espira circular sin resistencia, cuya autoinductancia es L . ¿Qué corriente se induce en la espira? (Ver Blas Cabrera, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1378.)

Solución

Si existen los monopolos magnéticos, su movimiento equivale a una “corriente magnética” \vec{J}_m . Esta corriente entraría en las ecuaciones de Maxwell del siguiente modo (por similitud con la corriente eléctrica como fuente de campo magnético):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Esto sería una generalización de la ley de Faraday. La constante μ_0 es justo la que hace falta para que cuadren las dimensiones de la ecuación. Integrando esta ley de Faraday generalizada en la superficie de la espira:

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E} = -\mu_0 \int \vec{J}_m \cdot d\vec{A} - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\mu_0 I_m - \frac{d\Phi_m}{dt}$$

Pero $\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$, de modo que $\frac{dI}{dt} = \frac{\mu_o}{L} I_m + \frac{1}{L} \frac{d\Phi_m}{dt}$, o:

$$I = \frac{\mu_o}{L} \Delta Q_m + \frac{1}{L} \Delta \Phi_m$$

donde ΔQ_m es la carga magnética total que atraviesa la espira y $\Delta \Phi_m$ el cambio en el flujo magnético a través de la espira. Si la espira es plana, entonces $\Delta Q_m = q_m$ y $\Delta \Phi_m = 0$ (cuando el monopolo está muy lejos de la espira, $\Phi_m = 0$; al acercarse, crece el flujo, digamos “positivo”; una vez que el monopolo atraviesa la espira, el flujo pasa a ser “negativo” – en sentido contrario al del principio –, y cuando se aleja el flujo tiende nuevamente a cero). En definitiva:

$$I = \frac{\mu_o q_m}{L}$$

Tema 2. Problemas de contorno: Campos estáticos

2.1 El problema de contorno en electrostática y magnetostática. Unicidad de la solución.

La determinación de los campos eléctrico o magnético en situaciones estáticas es un problema de gran importancia práctica. Se trata así de encontrar la solución a las ecuaciones del tipo

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho_V}{\epsilon} \quad (\text{ecuación de Poisson}) \quad (2.1)$$

o para puntos en los que no existen fuentes,

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (\text{ecuación de Laplace}) \quad (2.2)$$

Para el caso magnetostático el problema es formalmente análogo al eléctrico, por lo que en general nos referiremos al potencial electrostático.

Si se conocen todas las fuentes en el problema, la solución es inmediata por superposición. Pero lo habitual es que se conozcan condiciones sobre una superficie que limita la región en estudio, o *condiciones de contorno*.

¿Cuáles son las condiciones de contorno adecuadas para que resulte una solución única del problema definido por la ecuación de Poisson o Laplace?

- ♦ Una posibilidad es especificar el potencial sobre puntos de una superficie cerrada (*condiciones de Dirichlet*) ya que determina unívocamente el potencial en el interior.
- ♦ La solución también es única si se establece la derivada normal del potencial (*condiciones de Neumann*) sobre la superficie, lo que equivale a dar la distribución superficial de carga.

La demostración puede hacerse a partir de la aplicación del teorema de la divergencia de Gauss al vector $\Phi \overline{\nabla\Phi}$, en un volumen V rodeado por la superficie S :

$$\nabla \cdot (\Phi \overline{\nabla\Phi}) \stackrel{(9)}{=} \overline{\nabla\Phi} \cdot \overline{\nabla\Phi} + \Phi \nabla^2\Phi \quad (2.3)$$

$$\oint_S \Phi \overline{\nabla\Phi} \cdot \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot (\Phi \overline{\nabla\Phi}) dV = \int_V |\overline{\nabla\Phi}|^2 dV + \int_V \underbrace{\Phi \nabla^2\Phi}_{=0} dV \quad (2.4)$$

donde el último término desaparece por cumplirse la ecuación de Laplace.

La proyección de los gradientes sobre la normal a la superficie puede también expresarse como la derivada del escalar respecto a la normal:

$$\overline{\nabla\Phi} \cdot \vec{n} \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial n}$$

Supongamos ahora que pueden existir dos soluciones Φ_1 y Φ_2 que satisfacen la condición fijada sobre el contorno: 1) $\Phi_1 = \Phi_2$ ó 2) $\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial n}$. Si aplicamos la ecuación (2.4) a la diferencia $\Phi_1 - \Phi_2$,

$$\oint_S (\Phi_1 - \Phi_2) (\overline{\nabla\Phi_1} - \overline{\nabla\Phi_2}) \cdot \vec{n} dS = \int_V |\overline{\nabla\Phi_1} - \overline{\nabla\Phi_2}|^2 dV \quad (2.5)$$

Así, para cualquiera de las dos condiciones de contorno, de Dirichlet o de Neumann, el primer miembro de (2.5) se anula y al ser el integrando del segundo miembro una cantidad definida positiva en todo el volumen V , necesariamente ha de ser

$$\overline{\nabla\Phi_1} = \overline{\nabla\Phi_2}, \quad \forall \mathbf{r} \in V \quad (2.6)$$

Por tanto, las soluciones deben ser la misma o diferir en una constante, lo que no supone ninguna diferencia en cuanto a la distribución de campo eléctrico, quedando así asegurada la unicidad de la solución.

2.2 Teorema de reciprocidad

Partiremos de una igualdad análoga a (2.4) pero para dos funciones escalares Φ y Ψ genéricas, continuas y con derivadas primera y segunda también continuas en V . Obtenemos así la igualdad

$$\oint_S \Phi \frac{\partial\Psi}{\partial n} dS = \int_V \overline{\nabla\Phi} \cdot \overline{\nabla\Psi} dV + \int_V \Phi \nabla^2 \Psi dV \quad (2.7)$$

denominada *1ª identidad de Green*.

Intercambiando las dos funciones escalares y restando las igualdades obtenidas se llega inmediatamente a:

$$\oint_S \left(\Phi \frac{\partial\Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right) dS = \int_V (\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi) dV \quad (2.8)$$

que es la 2ª identidad, o teorema de Green.

Si tenemos dos distribuciones localizadas de carga ρ_1 y ρ_2 , que producen en todo el espacio los potenciales Φ_1 y Φ_2 , podemos aplicar el teorema de Green (2.8) a ambas y obtendremos

$$\int_V (\Phi_1 \nabla^2 \Phi_2 - \Phi_2 \nabla^2 \Phi_1) dV = \oint_S \left(\Phi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} - \Phi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \right) dS, \quad (2.9)$$

Al estar las cargas localizadas en una región finita, podemos extender la integral de volumen a todo el espacio y, por tanto, la de superficie $S \rightarrow S_\infty$ (superficie del infinito), donde el integrando tiende a cero al menos como $1/R^3$ y dS es $\propto R^2$. Esta última integral se anula por tanto. Teniendo en cuenta además que $\nabla^2 \Phi = -\rho / \epsilon_0$, queda

$$\int_V \Phi_2 \rho_1 dV = \int_V \Phi_1 \rho_2 dV \quad (2.10)$$

resultado que se conoce como *teorema de reciprocidad de Green*. La expresión obtenida puede extenderse para incluir también las densidades de carga superficiales, por ejemplo sobre conductores cargados. Sobre ellos, $\partial \Phi / \partial n = \sigma / \epsilon_0$ quedando:

$$\int_V (\Phi_2 \rho_1 - \Phi_1 \rho_2) dV' = \oint_S (\sigma_2 \Phi_1 - \sigma_1 \Phi_2) dS'$$

O bien,

$$\int_V \rho_2 \Phi_1 dV' + \oint_S \sigma_2 \Phi_1 dS' = \int_V \rho_1 \Phi_2 dV' + \oint_S \sigma_1 \Phi_2 dS' \quad (2.10a)$$

2.3 Sistemas de conductores: coeficientes de potencial e influencia

Consideremos un conjunto de conductores cargados, en equilibrio electrostático. Supongamos un estado en el que las cargas y potenciales de los conductores son $Q_1, Q_2, \dots, Q_i, \dots, Q_N$ y $V_1, V_2, \dots, V_i, \dots, V_N$, respectivamente, como se muestra en la Fig 1.

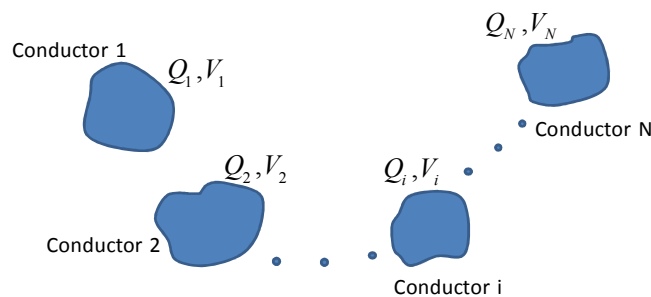


Figura 1: Conjunto de conductores en equilibrio electrostático

Debido a la linealidad de las ecuaciones de Maxwell y en particular de la ecuación de Poisson, se verifica el principio de superposición, según el cual el potencial en cualquier punto es la suma de las contribuciones de cada una de las cargas individuales. Para nuestro sistema esto se traduce en que los potenciales pueden expresarse como combinaciones lineales de las cargas en cada uno de ellos:

$$V_i = \sum_{j=1}^N P_{ij} Q_j \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.11)$$

donde P_{ij} son los llamados *coeficientes de potencial*.

El significado físico de los P_{ij} es evidente si analizamos la ec. (2.11). En efecto, si todos los conductores tienen carga nula salvo el j que tiene $Q_j = 1$, resulta:

$$V_i = P_{i1} \underbrace{Q_1}_{=0} + P_{i2} \underbrace{Q_2}_{=0} + \dots + P_{ij} \underbrace{Q_j}_{=1} + \dots + P_{iN} \underbrace{Q_N}_{=0} \quad \Rightarrow V_i = P_{ij}$$

Por tanto, P_{ij} representa el potencial que adquiere el conductor i cuando todos los conductores están descargados, excepto el conductor j que tiene carga unidad.

Si la relación anterior se invierte, las cargas se podrán expresar recíprocamente como combinaciones lineales de los potenciales:

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} V_j \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.12)$$

donde C_{ij} ($i \neq j$) son llamados *coeficientes de influencia* y C_{ii} *coeficientes de capacidad*. Hay que hacer notar que el coeficiente de capacidad de un conductor en presencia de otros, C_{ii} , es diferente del coeficiente de capacidad de ese mismo conductor aislado C . Los coeficientes de influencia y de capacidad dependen solamente de la geometría del sistema y no del estado eléctrico de los conductores

El significado físico de los C_{ij} es evidente a partir de (2.12). Si todos los conductores están a potencial cero salvo el j que se encuentra a $V_j = 1$, se tiene

$$Q_i = C_{i1} \underbrace{V_1}_{=0} + C_{i2} \underbrace{V_2}_{=0} + \dots + C_{ij} \underbrace{V_j}_{=1} + \dots + C_{iN} \underbrace{V_N}_{=0} \quad \Rightarrow Q_i = C_{ij}$$

Así, C_{ij} representa la carga que adquiere el conductor i cuando todos los conductores están a potencial cero, excepto el conductor j que está a potencial unidad. Puesto que en esta situación las líneas de campo deben partir del conductor j que es el único a potencial positivo y acabar en los otros conductores o en el infinito, las cargas de los demás conductores serán negativas. Por tanto los coeficientes de influencia serán negativos y los de capacidad positivos,

$$C_{ii} > 0, \quad C_{ij} < 0$$

Además, la carga positiva debe ser mayor o igual que la suma de las negativas en valor absoluto,

$$C_{ii} \geq -\sum_{j \neq i}^N C_{ij}$$

Los coeficientes de influencia son simétricos y –como la matriz de coeficientes de potencial es inversa de los de capacidad– también lo serán aquéllos,

$$C_{ij} = C_{ji}, \quad P_{ij} = P_{ji}$$

Para demostrarlo consideremos dos situaciones diferentes para el sistema de N conductores: en la primera todos los conductores están a potencial cero excepto el i que está a potencial unidad,

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11} \underbrace{V_1}_{=0} + C_{12} \underbrace{V_2}_{=0} + \dots + C_{1i} \underbrace{V_i}_{=1} + \dots + C_{1N} \underbrace{V_N}_{=0} \\ Q_2 &= C_{21} \underbrace{V_1}_{=0} + C_{22} \underbrace{V_2}_{=0} + \dots + C_{2i} \underbrace{V_i}_{=1} + \dots + C_{2N} \underbrace{V_N}_{=0} \\ &\dots\dots\dots \\ Q_N &= C_{N1} \underbrace{V_1}_{=0} + C_{N2} \underbrace{V_2}_{=0} + \dots + C_{Ni} \underbrace{V_i}_{=1} + \dots + C_{NN} \underbrace{V_N}_{=0} \end{aligned}$$

En la segunda, el conductor j el que está a potencial unidad y el resto a cero,

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11} \underbrace{V_1}_{=0} + C_{12} \underbrace{V_2}_{=0} + \dots + C_{1j} \underbrace{V_j}_{=1} + \dots + C_{1N} \underbrace{V_N}_{=0} \\ Q_2 &= C_{21} \underbrace{V_1}_{=0} + C_{22} \underbrace{V_2}_{=0} + \dots + C_{2j} \underbrace{V_j}_{=1} + \dots + C_{2N} \underbrace{V_N}_{=0} \\ &\dots\dots\dots \\ Q_N &= C_{N1} \underbrace{V_1}_{=0} + C_{N2} \underbrace{V_2}_{=0} + \dots + C_{Nj} \underbrace{V_j}_{=1} + \dots + C_{NN} \underbrace{V_N}_{=0} \end{aligned}$$

Vemos que las cargas sobre los conductores son en el primer caso $C_{1i}, C_{2i}, \dots, C_{Ni}$ y en el segundo, $C_{1j}, C_{2j}, \dots, C_{Nj}$. Si se aplica el teorema de reciprocidad de Green al producto de cargas en un caso por potenciales en el otro, se obtiene inmediatamente

$$C_{ij} \underbrace{V_j}_{=1} = C_{ji} \underbrace{V_i}_{=1} \Rightarrow C_{ij} = C_{ji}, \quad (\text{c.q.d.})$$

2.4 Método de imágenes

Consideremos un problema de Dirichlet definido por una cierta región del espacio V donde existen cargas y unas condiciones de contorno dadas por los valores del potencial sobre la superficie S que la limita (situación de la Figura 2a). Si somos capaces de encontrar una distribución de cargas exteriores a V , que juntamente con las cargas interiores, produzca el mismo potencial $\Phi(\vec{r})$ sobre S (situación 2b), entonces el teorema de unicidad nos asegura que, dentro del volumen V , la solución para ambas situaciones es la misma. A las cargas exteriores q'_i se les llama *cargas imágenes*.

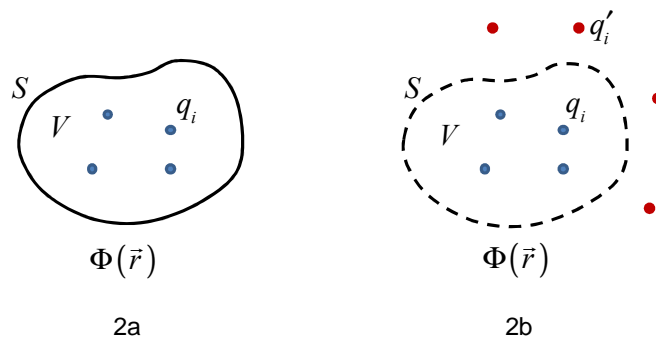


Figura 2. Un problema de contorno (2a) puede resolverse como el potencial creado por las cargas interiores q_i más las *cargas imágenes* q'_i , exteriores a V (2b), que producen el potencial dado $\Phi(\vec{r})$ sobre la superficie.

En general, no es fácil encontrar un conjunto finito de cargas imágenes que resuelvan un problema de contorno dado. Para algunas geometrías sencillas, sin embargo, la solución por imágenes es directa y de gran utilidad, como se verá en los siguientes ejemplos.

a) Imagen de una carga frente a un plano conductor indefinido

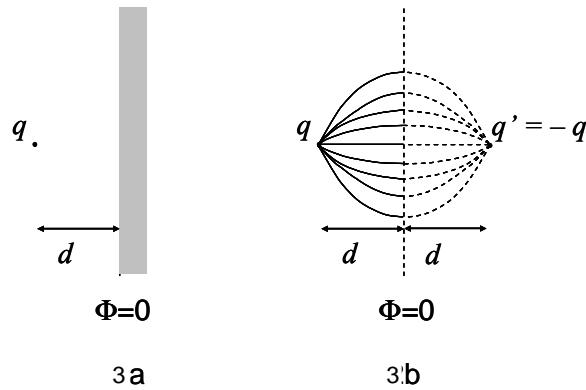


Figura 3. Carga puntual q frente a plano a tierra (potencial cero). El potencial creado por q y la carga imagen $-q$ resuelven el problema del potencial en el semiespacio de la izquierda. En la figura se representan las líneas de campo eléctrico.

Vamos a resolver el problema de una carga puntual frente a un plano a potencial cero (Figura 3). La carga imagen es una carga igual y de signo contrario a la carga original, situada simétricamente a ella respecto al plano (imagen especular, de ahí el nombre del método).

$$q' = -q \text{ situada en } d' = d \quad (2.13)$$

Debemos verificar siempre que las cargas imágenes:

- 1) Estén fuera del volumen V , es decir, deben pertenecer al espacio 'imagen' y no al espacio del problema real.
- 2) Hagan cumplir, junto con las cargas reales, las condiciones de contorno dadas.

Cualquier magnitud física asociada a los campos en el problema real puede calcularse mediante la situación equivalente, utilizando las cargas imágenes.

b) Imagen de una carga frente a una esfera conductora a potencial cero

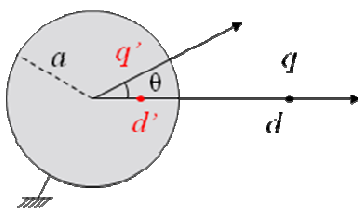


Figura 4. Carga puntual frente a esfera conectada a tierra. La carga imagen $q' = -\frac{a}{d}q$ y está situada a la distancia $d' = \frac{a^2}{d}$ del centro de la esfera.

Es conocido que dos cargas puntuales de distinto signo y cuyas magnitudes están en una relación dada, tienen siempre una equipotencial que es una esfera. Esta propiedad puede utilizarse para establecer el método de imágenes para una carga frente a una esfera a

potencial constante, o en particular, conectada a tierra (Figura 4). El volumen V es el exterior de la esfera (limitado por la superficie esférica y una superficie muy alejada en la que el potencial es cero o S_∞).

El potencial creado en el punto \vec{r} por la carga q y su imagen q' es

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + d'^2 - 2rd'\cos\theta}} \right) \quad (2.14)$$

Puede comprobarse que efectivamente $\Phi(\vec{r})|_{r=a} = 0$ cuando

$$\boxed{q' = -\frac{a}{d}q} \quad \text{y} \quad \boxed{d' = \frac{a^2}{d}} \quad (2.15)$$

que es por tanto la carga imagen buscada en la posición d' .

El campo eléctrico en cualquier punto exterior a la esfera se podrá calcular como.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(q \frac{\vec{r} - d\vec{u}_z}{|\vec{r} - d\vec{u}_z|^3} + q' \frac{\vec{r} - d'\vec{u}_z}{|\vec{r} - d'\vec{u}_z|^3} \right) \quad (2.16)$$

y sobre la superficie de la esfera conductora,

$$\vec{E}(\vec{r})|_{r=a} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a(d^2/a^2 - 1)}{(a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta)^{3/2}} \vec{u}_r, \quad (2.17)$$

pudiéndose obtener a partir de él otras magnitudes, como por ejemplo la densidad superficial de carga $\sigma = \epsilon_0 E(\vec{r})|_{r=a}$.

Análogamente, para hallar el potencial de una carga frente a una esfera a un potencial fijado V_0 , hay que añadir a la carga imagen q' una carga imagen adicional $Q = 4\pi\epsilon_0 V_0 a$ en el origen, que producirá el potencial deseado sobre la esfera.

2.5 Separación de variables

El método de mayor generalidad para resolver la ecuación de Laplace es el de separación de variables. En él la ecuación diferencial en derivadas parciales se separa en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, cada una de ellas en términos de una sola variable independiente. El procedimiento es especialmente útil cuando las superficies límite sobre las que se imponen las condiciones de contorno, coinciden con

superficies de coordenada constante, en el sistema de coordenadas elegido. Las ecuaciones diferenciales ordinarias que resultan, con las condiciones de contorno de Dirichlet o Neumann, constituyen problemas del tipo de Sturm-Liouville y los conjuntos de soluciones son, por tanto, ortogonales y completos, lo que resulta esencial para construir la solución buscada.

Vamos a exponer el fundamento del método, particularizándolo para coordenadas cartesianas y esféricas. Un tratamiento más general y su aplicación a otros tipos de coordenadas, pueden consultarse en libros de ecuaciones diferenciales o textos avanzados de electromagnetismo.

a) Separación de variables en coordenadas cartesianas

La ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas se escribe:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.18)$$

Buscaremos soluciones de (2.18) que se expresen en la forma de producto de tres funciones, cada una de ellas dependiente de una de las coordenadas cartesianas,

$$\Phi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \quad (2.19)$$

Sustituyendo en (2.18) y dividiendo por $X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$, se obtiene:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (2.20)$$

Como las coordenadas son independientes, cada uno de los tres sumandos en (2.20) debe ser una constante. Denotando estas constantes por α^2 , β^2 y γ^2 , queda:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \alpha^2, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \beta^2, \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0 \quad (2.21)$$

Las soluciones de estas ecuaciones ordinarias son, como es bien sabido, exponenciales. Dado el carácter ortogonal y completo de las soluciones de (2.21), cualquier solución de la ecuación de Laplace puede construirse a partir de una combinación lineal de estas soluciones separadas. Así, la *solución general* puede expresarse en la forma

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} (A e^{\alpha x} + A' e^{-\alpha x}) (B e^{\beta y} + B' e^{-\beta y}) (C e^{\gamma z} + C' e^{-\gamma z}) \quad (2.22)$$

♦ Para que la suma de las tres constantes en (2.21) sea cero, al menos una de ellas debe ser negativa y por tanto α , β o γ imaginarias. La elección de la(s) constante(s) imaginaria(s) se hará dependiendo del problema. Igualmente, las constantes se fijarán aplicando las condiciones de contorno del problema. La combinación de exponenciales positivas y negativas es equivalente a una combinación de funciones seno y coseno hiperbólico y, análogamente, la de exponenciales imaginarias es equivalente a una combinación de senos y cosenos trigonométricos.

♦ También es posible el valor cero para alguno(s) de los parámetros. En ese caso la solución correspondiente es una variación lineal. Por ejemplo si $\alpha = 0$, la solución correspondiente es $Ax + A'$, por lo que hay que añadir posibles soluciones de este tipo a cada uno de los factores de (2.22).

Es importante observar que la forma concreta de la solución deberá elegirse de acuerdo con las características físicas del problema,

Ejemplo 1: Potencial en el interior de un condensador de placas planas y paralelas. Sean dos placas conductoras paralelas e indefinidas a potenciales V y 0 respectivamente.

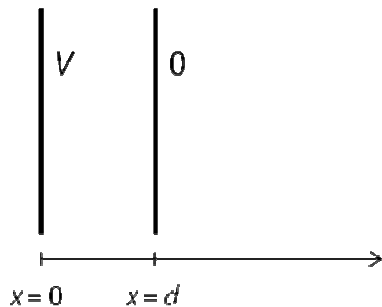


Figura 5. Potencial entre las placas indefinidas de un condensador plano

Debido a la simetría del problema, la solución no debe depender de las coordenadas y ni z , y para cada una de estas variables debemos tener una variación lineal $(By + B')(Cz + C')$, con $B = C = 0$. Al ser por tanto $\beta = \gamma = 0$, también $\alpha = 0$, o sea el potencial debe variar linealmente con x y ser constante en las direcciones y, z . En definitiva,

$$\Phi(x) = Ax + A' \quad (2.23)$$

Las constantes se determinan de las condiciones de contorno, $\Phi(0) = V$, $\Phi(d) = 0$, de donde $A = -V/d$, y $A' = V$. El resultado es

$$\boxed{\Phi(x) = V(1 - x/d)} \quad (2.24)$$

Ejemplo 2: Se quiere calcular el potencial en el interior de una caja paralelepédica

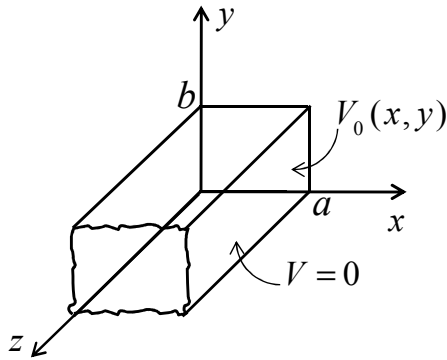


Figura 6. Problema de contorno sobre las caras de un paralelepípedo semi-indefinido.

abierta, cuyas paredes laterales se extienden de manera indefinida en la dirección del eje z . Las condiciones de contorno son: potencial cero en las caras laterales y potencial dado, como una función $V_0(x, y)$ sobre la base $z = 0$.

Dado que el potencial debe anularse cuando $z \rightarrow \infty$, escogeremos una constante γ real, mientras que como la solución debe anularse en $x = 0, x = a, y = 0, y = b$, las constantes α y β se tomarán imaginarias y expresaremos las soluciones a (2.21) de forma general como

$$\begin{aligned} X(x) &= A \operatorname{sen}(\alpha x) + B \operatorname{cos}(\alpha x) \\ Y(y) &= C \operatorname{sen}(\beta y) + D \operatorname{cos}(\beta y) \\ Z(z) &= E e^{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z} + F e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Las condiciones de contorno implican que $B = D = E = 0$, $\alpha = \frac{n\pi}{a}$, $\beta = \frac{m\pi}{b}$,

con lo que la solución toma la forma:

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \operatorname{sen}(n\pi x / a) \operatorname{sen}(m\pi y / b) e^{-\pi \sqrt{(n/a)^2 + (m/b)^2} z} \quad (2.26)$$

Falta por imponer la condición de contorno en $z = 0$,

$$\Phi(x, y, 0) = V_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \operatorname{sen}(n\pi x / a) \operatorname{sen}(m\pi y / b) \quad (2.27)$$

La forma de despejar las constantes de esta ecuación es el procedimiento habitual en desarrollos en términos de funciones ortogonales. Así, multiplicaremos por $\times \operatorname{sen}(n'\pi x / a) \operatorname{sen}(m'\pi y / b)$ e integraremos a las x e y , entre $(0, a)$ y $(0, b)$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \int_0^a \sin(n\pi x/a) \sin(n'\pi x/a) dx \int_0^b \sin(m\pi y/b) \sin(m'\pi y/b) dy \\ = \int_0^a \int_0^b V_0(x, y) \sin(n'\pi x/a) \sin(m'\pi y/b) dx dy \end{aligned} \quad (2.28)$$

Pero

$$\int_0^a \sin(n\pi x/a) \sin(n'\pi x/a) dx = \begin{cases} = 0, & \text{si } n' \neq n \\ = \frac{a}{2} & \text{si } n' = n \end{cases} \quad (2.29)$$

obteniéndose

$$A_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b V_0(x, y) \sin(n\pi x/a) \sin(m\pi y/b) dx dy \quad (2.30)$$

y la solución es (2.26) con (2.30).

b) Separación de variables en coordenadas esféricas

En coordenadas esféricas la ecuación de Laplace se escribe:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (2.31-a)$$

Para problemas con *simetría azimutal*, independientes de ϕ , esta ecuación se reduce a:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (2.31-b)$$

Buscamos soluciones separables,

$$\Phi(r, \theta) = R(r) \cdot P(\theta) \quad (2.32)$$

y por un procedimiento análogo al seguido con las coordenadas cartesianas, obtenemos la ecuación:

$$\frac{P(\theta)}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = 0 \quad (2.33)$$

Dividiendo por $R(r) \cdot P(\theta)$ y multiplicando por r^2 resulta:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \quad (2.34)$$

Puesto que el miembro de la izquierda sólo depende de r y el de la derecha sólo depende de θ , la única forma de igualarlos para todo r y θ es que ambos sean iguales a una constante K . Así:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + KP = 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = KR \quad (2.36)$$

La ecuación (2.35) se conoce como *ecuación de Legendre*; tiene soluciones que se comportan bien para todos los valores de θ , incluyendo 0 y π , solo si se cumple:

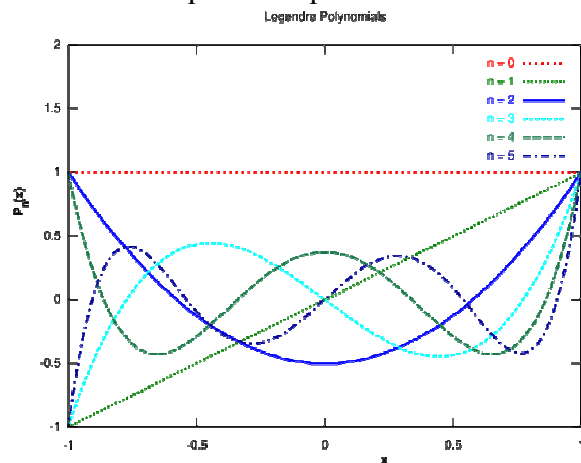
$$K = n(n+1) \quad (2.37)$$

donde n es un entero nulo o positivo. Las soluciones correspondientes se asocian al índice n , es decir se denotan $P_n(\cos \theta)$ y se denominan Polinomios de Legendre.

En la figura 7 se muestra la gráfica y la expresión de los 3 primeros polinomios.

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{3x^2 - 1}{2} \\ &\dots \end{aligned}$$

Figura 7. Tabla y gráfica de los polinomios de Legendre.
 $x \equiv \cos \theta$



Estos polinomios son ortogonales; es decir,

$$\int_{-1}^1 P_n(x) \cdot P_m(x) dx = \frac{2\delta_{nm}}{2n+1} \quad (2.38)$$

siendo $x \equiv \cos \theta$. La función delta de Kronecker, δ_{nm} , es cero para $n \neq m$ y 1 si $n = m$.

Puesto que hemos determinado K podemos intentar resolver (2.36) para distintos n :

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = n(n+1)R \quad (2.39)$$

Esta ecuación admite dos soluciones linealmente independientes para cada n :

$$R_n = r^n \quad \text{y} \quad R_n = r^{-(n+1)} \quad (2.40)$$

La solución del potencial $\Phi_n = R_n(r) \cdot P_n(\cos\theta)$ tiene por tanto dos soluciones linealmente independientes:

$$\Phi_n(r, \theta) = r^n P_n(\cos\theta) \quad \text{y} \quad \Phi_n(r, \theta) = r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta) \quad (2.41)$$

Entonces, la solución general se escribirá como una combinación lineal de todas las posibles soluciones –o sea, $n = 0, 1, \dots, \infty$. Se obtiene:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] \cdot P_n(\cos\theta) \quad (2.42)$$

Las constantes A_n y B_n han de ser evaluadas teniendo en cuenta las condiciones de contorno y las condiciones asintóticas del problema.

Ejemplo 3: Se tiene dos esferas concéntricas de radios R_1 y R_2 ($R_2 > R_1$). Los potenciales en ambas superficies están dados por $\Phi(R_1) = 0$, $\Phi(R_2) = V_0 \cos\theta$. Determinar el potencial en la región $R_1 \leq r \leq R_2$.

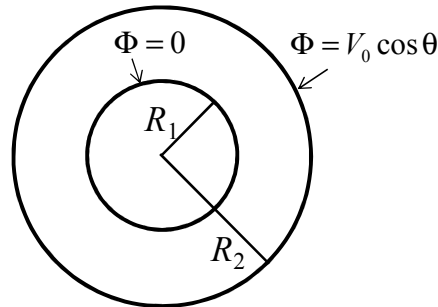


Figura 8. Potencial entre dos esferas

La condición de contorno $\Phi(R_1) = 0$ aplicada a (2.42) nos da:

$$A_n + B_n R_1^{-(2n+1)} = 0 \quad \text{para todo } n$$

y la condición de contorno $\Phi(R_2) = V_0 \cos\theta$,

$$A_1 + \frac{B_1}{R_2^3} = \frac{V_0}{R_2}, \quad A_n + B_n R_2^{-(2n+1)} = 0 \quad \text{para } n \neq 1$$

Resolviendo el sistema obtenido para los coeficientes resulta:

$$A_1 = \frac{V_0 R_2^2}{R_2^3 - R_1^3}, \quad B_1 = -\frac{V_0 R_2^2 R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \quad ; \quad A_n = B_n = 0 \quad \text{para } n \neq 1$$

Por tanto la distribución del potencial entre las esferas será:

$$\Phi(r) = \frac{V_0 R_2^2}{R_2^3 - R_1^3} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) \cos \theta$$

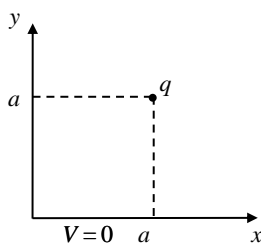
Casos más generales, que no incluyen simetría azimutal, y los correspondientes a otros tipos de coordenadas pueden verse en la bibliografía recomendada.

Tema 2. Problemas de contorno: Campos estáticos

El problema de contorno en electrostática y magnetostática. Unicidad de la solución. Teorema de reciprocidad. Sistemas de conductores: coeficientes de potencial e influencia. Método de imágenes. Separación de variables.

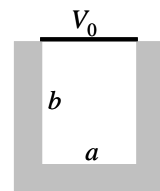
PROBLEMAS

1. Se tiene una carga puntual q entre dos planos conductores paralelos conectados a tierra y separados una distancia d . La carga dista d_1 de uno de ellos. Aplicando el teorema de reciprocidad, hallar la carga inducida sobre cada plano.
2. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b \gg a$). Inicialmente las tres esferas tienen la misma carga q . A continuación, una a una y sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál es la carga de cada una al final de este proceso?
3. Sea un sistema formado por tres esferas conductoras 1, 2 y 3, de radios R_1 , R_2 y R_3 y cargas Q_1 , Q_2 y Q_3 respectivamente. Las esferas 1 y 2 son concéntricas ($R_2 > R_1$) y la esfera 3 está a una distancia d del centro de las primeras, siendo $d \gg R_2 > R_3$. a) Hallar los coeficientes de potencial del sistema de conductores y los potenciales de las tres esferas. b) Si la esfera 2 se une a tierra, calcúlese su carga así como los potenciales de las otras dos esferas.
4. Se tienen dos planos conductores semi-infinitos, $y = 0$ y $x = 0$, conectados a tierra. En la posición $(a, a, 0)$ hay una carga puntual q .

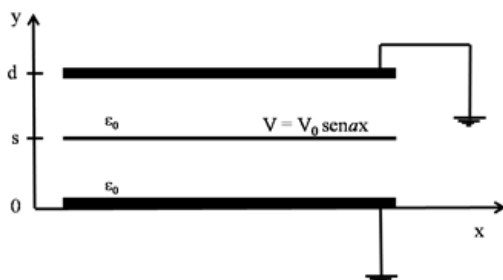


- a) Calcular el potencial en la región ente los planos, utilizando el método de imágenes.
 - b) Calcular la fuerza sobre q y la energía electrostática del sistema.
 - c) Si los planos se cortaran en un ángulo α distinto de 90° , ¿podría aún resolverse el problema por imágenes? ¿bajo qué condición?
5. Un conductor plano horizontal indefinido, a potencial cero, tiene una protuberancia semi-esférica de radio R . En la vertical que pasa por el centro de la semiesfera y a una distancia D del mismo ($D > R$) hay una carga puntual q . Hallar: a) la expresión del potencial en cualquier punto del espacio y b) la fuerza sobre la carga q .
 6. Una esfera conductora de radio R_1 está aislada y cargada con una carga Q . En el interior de la esfera hay una cavidad esférica, no concéntrica con la esfera conductora, de radio R_2 ($R_2 < R_1$), donde se coloca una carga puntual $q = Q/3$ a una distancia $a = R_2/2$ del centro de la cavidad. Se pide calcular: a) el potencial de la esfera conductora y su densidad superficial de carga. b) el valor del potencial y del campo eléctrico en el centro de la cavidad.

7. Una esfera conductora de radio R está aislada y cargada con una carga Q . Se coloca un dipolo a una distancia a ($a > R$) del centro de la esfera, estando el vector momento dipolar \mathbf{p} dirigido según un diámetro de la esfera y alejándose de esta. Hallar: a) el potencial eléctrico de la esfera y b) el campo eléctrico en los puntos de la línea que une el centro de la esfera con el dipolo y que distan R y $2a$ del centro de la esfera.
8. Dos esferas conductoras de radios a y b tienen sus centros separados una distancia $c > a, b$. Hallar los coeficientes de influencia del sistema hasta segundo orden de aproximación, es decir, despreciando términos $(a/c)^3, (b/c)^3$, etc.
9. Se tienen dos alambres rectos, paralelos, indefinidos, cargados con densidades lineales de carga $+\lambda$ y $-\lambda$, separadas una distancia d .
- a) Hallar el potencial en cualquier punto del espacio.
- b) Demostrar que las equipotenciales son cilindros circulares y determinar la posición del eje y el radio del cilindro cuyo potencial es V_0 .
10. Una línea bifilar está formada por dos alambres cilíndricos paralelos indefinidos, de radio r , separados una distancia d ($d \gg r$). La línea está situada paralelamente a un plano conductor indefinido, conectado a tierra, a una distancia h ($h \gg r$). Calcular la capacidad de la línea en presencia del plano conductor.
11. Un alambre indefinido recorrido por una corriente de intensidad I está situado en un medio de permeabilidad μ_1 y a la distancia d de la superficie plana de un medio extenso de permeabilidad $\mu_2 > \mu_1$. Determinar los campos en ambas regiones y la fuerza sobre el alambre, indicando si es atractiva o repulsiva respecto al plano.
12. Un semicilindro conductor muy largo de radio R sobresale de un plano conductor horizontal conectado a tierra, con su eje paralelo al plano. Fuera del cilindro, paralelo al eje, a una distancia h del mismo, hay una línea indefinida cargada con densidad de carga λ por unidad de longitud. Hallar la densidad de carga inducida en los puntos de la superficie cilíndrica más próximos a la línea de carga.
13. Un bloque conductor conectado a tierra, de dimensiones a, b y una longitud muy grande en la dirección del eje z , tiene una ranura rectangular cubierta por una placa que está aislada del bloque (en la figura se representa una sección transversal). Sobre la placa se establece un potencial $V = V_0$. Hallar la distribución de potencial dentro de la ranura.



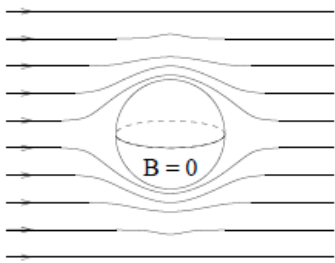
14. Un plano con distribución de potencial $V = V_0 \text{sen}ax$, se coloca entre dos planos conductores paralelos indefinidos, conectados a tierra, a una distancia s del plano inferior. La distancia entre los planos conductores es d .



- a) Hallar la distribución de potencial y de campo eléctrico.
- b) Hallar las distribuciones de carga en $y = 0, y = s, y = d$.

15. Una carga puntual q está situada a una distancia d del centro de una fina capa esférica conductora, conectada a tierra, de radio $R > d$. Hallar:
- El potencial en todo el espacio.
 - La densidad de carga inducida sobre la superficie interior de la esfera, en función de θ
 - La carga total sobre esa superficie y la fuerza sobre la carga q . Cuando la carga se lleva a una distancia pequeña a de la superficie, compara esa fuerza con la que actúa sobre una carga a la misma distancia de un plano conductor a tierra.
 - La energía electrostática del sistema. Particulariza la energía para el caso de la carga a la distancia a pequeña y deduce en ese caso la fuerza a partir de la energía.
16. Se tiene un dipolo ideal de momento dipolar \mathbf{p} . Hallar qué distribución de carga hay que establecer sobre una esfera de radio R con centro en la posición del dipolo, para que el potencial eléctrico se anule en el exterior de esa esfera.
17. Una esfera conductora de radio R y carga q se coloca en un campo eléctrico uniforme E_0 . Calcular:
- el potencial eléctrico dentro y fuera de la esfera;
 - la distribución de carga inducida en la superficie de la esfera;
 - el dipolo eléctrico inducido en la esfera.
18. Se tiene un sistema formado por dos esferas concéntricas de radios R_1 y R_2 ($R_2 > R_1$). El potencial en la superficie de la esfera interior es nulo y sobre la superficie exterior viene dado por $V(R_2, \theta) = V_0 \cos \theta$. Determinar el potencial y el campo eléctrico en los puntos $r \geq R_1$. Comprobar que el campo eléctrico solo tiene componente normal en los puntos de la superficie $r = R_1$.
19. Una esfera dieléctrica de radio R y permitividad ϵ , está situada en el vacío e inmersa en un campo uniforme E_0 .
- Hallar el potencial y el campo eléctrico en todo el espacio.
 - Comprobar que la esfera polarizada produce un campo de tipo dipolar y hallar el momento dipolar al que equivale la esfera polarizada.

20. Un superconductor tiene la propiedad de que excluye al campo magnético de su interior (de manera análoga a como un conductor excluye al campo eléctrico de su interior mediante una carga superficial, el superconductor lo hace para el campo magnético mediante una corriente superficial). En un campo magnético inicialmente uniforme \mathbf{B}_0 , se sumerge una esfera superconductora de radio R .

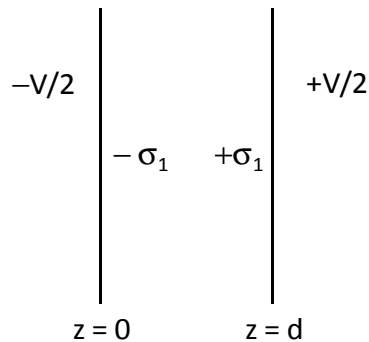


- Como en el exterior de la esfera $\nabla \mathbf{B} = 0$ y $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, se puede escribir $\mathbf{B} = -\nabla \Phi_M$ donde Φ_M satisface la ecuación de Laplace. ¿Cuáles son las condiciones de contorno para Φ_M en $r = R$ y $r \rightarrow \infty$?
- Mediante el método de separación de variables, hallar el potencial magnético y el vector \mathbf{B} en todo el espacio.
- De la condición de contorno para la componente tangencial de \mathbf{B} , hallar la densidad de corriente superficial.

P1-T2

Supongamos dos distribuciones a las que aplicaremos el teorema de reciprocidad.

Distribución 1: Condensador con placas a $\pm V/2$

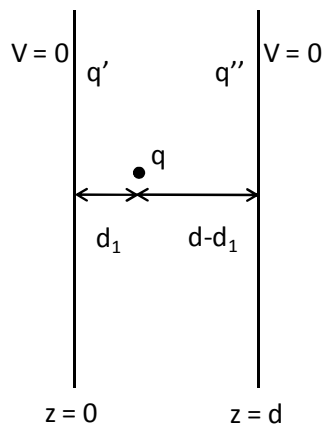


$$\Phi_1(z) = -\frac{V}{2} + \frac{V}{d}z, \quad \begin{cases} \Phi_1(0) = -\frac{V}{2} \\ \Phi_1(d) = \frac{V}{2} \end{cases}$$

$$\rho_1 = 0$$

$$\sigma_1 = \epsilon_0 \frac{V}{d}$$

Distribución 2: Situación real



$$\Phi_2(z), \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} \Phi_2(0) = 0 \\ \Phi_2(d) = 0 \end{cases}$$

$$\rho_2 = q\delta(\vec{r} - d_1\vec{u}_z)$$

$$q' + q'' = -q$$

Teorema de reciprocidad:

$$\int_V \rho_2 \Phi_1 dV + \int_{\text{plano } z=0} \sigma_2(0) \Phi_1 dS + \int_{\text{plano } z=d} \sigma_2(d) \Phi_1 dS = \int_V \rho_1 \Phi_2 dV + \int_{\text{plano } z=0} (-\sigma_1) \Phi_2 dS + \int_{\text{plano } z=d} \sigma_1 \Phi_2 dS$$

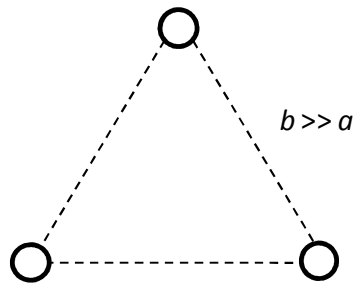
$$q \Phi_1(z = d_1) + \left(-\frac{V}{2}\right) q' + \frac{V}{2} q'' = 0$$

$$\left. \begin{aligned} q \left(-\frac{V}{2} + \frac{V}{d} d_1\right) + \left(-\frac{V}{2}\right) q' + \frac{V}{2} q'' = 0 \\ q' + q'' = -q \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} q' &= -\frac{d-d_1}{d} q \\ q'' &= -\frac{d_1}{d} q \end{aligned}}$$

P2-T2

$$V_i = \sum_{j=1}^3 P_{ij} Q_j$$



$$P_{11} = P_{22} = P_{33} = P_0 \quad (\text{esferas idénticas})$$

$$P_{12} = P_{13} = P_{23} = P_1 \quad (\text{simetría en las posiciones})$$

$$P_{ij} = P_{ji}$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_1 \\ P_1 & P_1 & P_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}$$

Si hacemos $Q_2 = Q_3 = 0$,

$$\begin{cases} V_1 \approx \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a} \equiv P_0 Q_1 \Rightarrow P_0 \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \\ V_2 \approx \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 b} \equiv P_1 Q_1 \Rightarrow P_1 \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 b} \end{cases}$$

Con esto quedan calculados los coeficientes de potencial.

Según el enunciado, inicialmente tenemos $Q_1 = Q_2 = Q_3 = q$

Etapa 1:

$$V_1 = 0, \quad Q_2 = Q_3 = q$$

$$0 = P_0 Q_1 + 2P_1 q \Rightarrow Q_1 = -\frac{2P_1}{P_0} q, \quad \boxed{Q_1 = -\frac{2a}{b} q}$$

Etapa 2:

$$V_2 = 0, \quad Q_1 \text{ en esfera 1, } q \text{ en esfera 3}$$

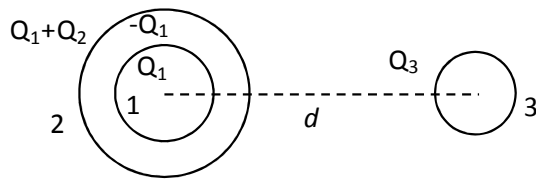
$$0 = P_1 Q_1 + P_0 Q_2 + P_1 q = P_1 (Q_1 + q) + P_0 Q_2 \Rightarrow Q_2 = -\frac{P_1}{P_0} (Q_1 + q), \quad \boxed{Q_2 = \left(\frac{2a}{b} - 1\right) \frac{a}{b} q}$$

Etapa 3:

$$V_3 = 0, \quad Q_1 \text{ en esfera 1, } Q_2 \text{ en esfera 2}$$

$$0 = P_1 (Q_1 + Q_2) + P_0 Q_3, \quad Q_3 = -(Q_1 + Q_2) \frac{P_1}{P_0} \Rightarrow \boxed{Q_3 = \left(3 - \frac{2a}{b}\right) \frac{a^2}{b^2} q}$$

P3-T2



a)

Si $Q_3 = 0$,

$$R_1 \leq r \leq R_2, \quad \Phi(r) = \Phi(R_2) - \int_{R_2}^r E dr, \quad \text{donde } E = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0 r^2} \quad (\text{aplicando T. Gauss})$$

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{R_2} \right), \quad \text{en particular, } \begin{cases} V_1 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} \right) \\ V_2 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{Q_1 + Q_2}{R_2} \right) \end{cases}$$

$$r \geq R_2, \quad \Phi(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2}{r}, \quad V_3 \underset{d \gg R_2, R_3}{\approx} \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2}{d}$$

Identificando con

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2 + \cancel{P_{13}Q_3} \\ V_2 &= P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2 + \cancel{P_{23}Q_3} \\ V_3 &= P_{31}Q_1 + P_{32}Q_2 + \cancel{P_{33}Q_3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} P_{11} &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0 R_1}, & P_{12} &= P_{21} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 R_2} \\ P_{22} &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0 R_2}, & P_{31} &= P_{13} \approx P_{32} = P_{23} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 d} \end{aligned}$$

$$Q_1 = Q_2 = 0, \quad Q_3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad P_{33} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 R_3}$$

Sustituyendo queda:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_3}{d} \right) ; \quad V_2 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{R_2} + \frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_3}{d} \right) ; \quad V_3 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{d} + \frac{Q_2}{d} + \frac{Q_3}{R_3} \right)$$

b) Conectando V_2 a tierra:

$$V_2 = 0, \quad Q_1 + Q_2 = -Q_3 \frac{R_2}{d} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_2 = -Q_3 \frac{R_2}{d} - Q_1}$$

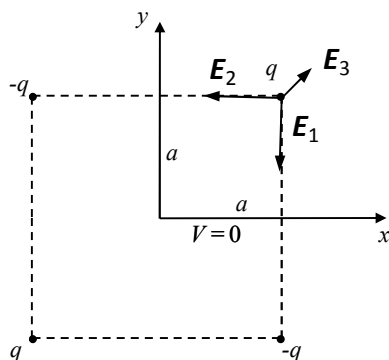
$$V_3 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(-Q_3 \frac{R_2}{d^2} + \frac{Q_3}{R_3} \right), \quad \boxed{V_3 = \frac{Q_3}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_3} - \frac{R_2}{d^2} \right)}$$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{R_1} - \frac{Q_3}{d} - \frac{Q_1}{R_2} + \frac{Q_3}{d} \right), \quad \boxed{V_1 = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

(potencial en un condensador esférico; el condensador está apantallado del exterior)

P4-T2

Cargas imágenes $-q + q y - q$, como indica la figura, de forma que los planos sean equipotenciales con $V=0$.



$$a) \quad V(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^4 V_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_q|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|} + \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_3|} \right]$$

b) Campos en la posición de q (creados por las cargas inducidas sobre los planos conductores, pero equivalentes a los efectos de las cargas imágenes):

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(2a)^2}(-\mathbf{u}_y) ; \quad \mathbf{E}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(2a)^2}(-\mathbf{u}_x)$$

$$\mathbf{E}_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(2a\sqrt{2})^2} \mathbf{u}_r = \frac{\sqrt{2}q}{64\pi\epsilon_0 a^2} [\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y] ; \quad \left(\mathbf{u}_r = \frac{1}{\sqrt{2}} [\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y] \right)$$

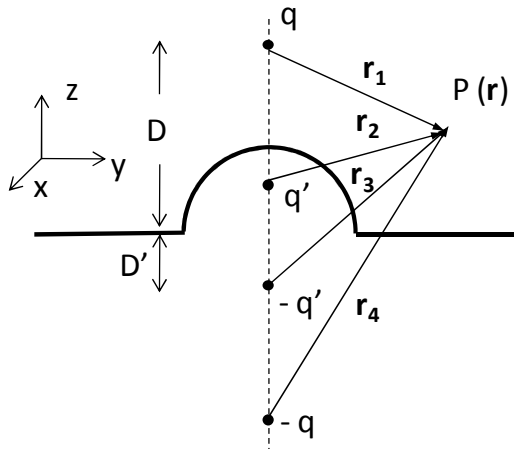
$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3) = -\frac{(4-\sqrt{2})q^2}{64\pi\epsilon_0 a^2} [\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y] \quad (\text{hacia el origen de coordenadas})$$

La energía se puede calcular como el trabajo de configuración: traemos la carga desde el infinito hasta la posición final.

$$U = \int \mathbf{F} d\mathbf{l} = \int_{\infty}^a -(F_x dx + F_y dy) = \frac{(4-\sqrt{2})q^2}{64\pi\epsilon_0} \left(\int_{\infty}^a \frac{1}{x^2} dx + \int_{\infty}^a \frac{1}{y^2} dy \right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 1 \right) q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{q}{2a} - \frac{q}{2a} + \frac{q}{2a\sqrt{2}} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 1 \right) , \quad \text{se cumple } U = \frac{1}{2} qV$$

c) Es posible siempre que $\alpha = \frac{\pi}{n}$, n entero.



Carga q frente a esfera: carga imagen

$$q' = -q \frac{R}{D} \text{ situada en } D' = \frac{R^2}{D}$$

Carga frente a plano: carga imagen $-q$ en $-D$

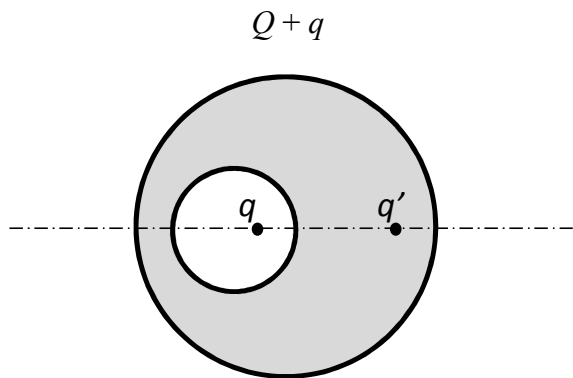
Para asegurar las condiciones de contorno, sistema de cargas: $q, q', -q, -q'$ como se indica en la figura.

a) Potencial en el semiespacio superior:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} - \frac{q'}{r_3} - \frac{q}{r_4} \right), \text{ donde } \begin{cases} r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - D)^2} \\ r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - D')^2} \\ r_3 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + D')^2} \\ r_4 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + D)^2} \end{cases}$$

b) Fuerza sobre q :

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q'}{(D - D')^2} - \frac{q'}{(D + D')^2} - \frac{q}{(2D)^2} \right] \mathbf{u}_z, \text{ atractiva hacia el conductor}$$



En la superficie interior de la cavidad, debe haber una carga total $-q$. Si la esfera está descargada, sobre la superficie exterior debe aparecer una carga $+q$. Si se le da carga Q , la carga sobre la superficie exterior será $q + Q$, distribuida uniformemente.

Aplicando el teorema de Gauss,

$$\mathbf{E} = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r, \quad (r \geq R_1) \text{ (tomando el origen en el centro de la esfera grande)}$$

y el potencial en el exterior,

$$V = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (r \geq R_1); \text{ sobre la esfera } \boxed{V_0 = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_1}}, \quad \boxed{\sigma} = \epsilon_0 E|_{r=R_1} = \boxed{\frac{Q+q}{4\pi R_1^2}}$$

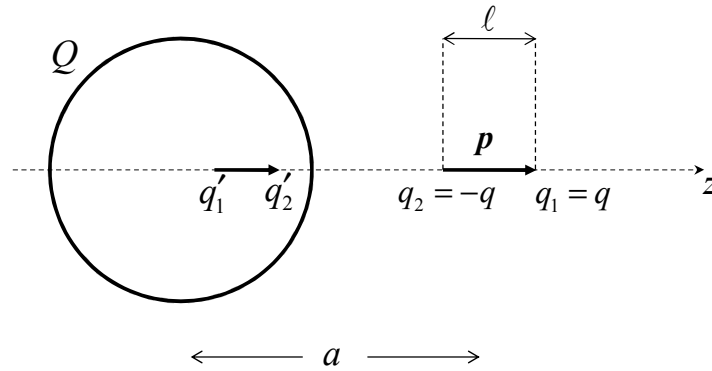
En el interior de la cavidad:

Potencial y campo pueden calcularse por carga imagen: $q' = -\frac{R_2}{a} q$ en $a' = \frac{R_2^2}{a}$. Junto con q produce potencial cero en la superficie esférica. Para tener en cuenta la situación real, hay que añadir al potencial la constante V_0 . Así, en el centro de la cavidad,

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 a'} + V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{R_2}{a' R_2^2} \right) + V_0, \quad \boxed{V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R_2} \right) + V_0}$$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{R_2}{a' R_2^3} \right) \mathbf{u}_r, \quad \boxed{\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(1 - \frac{a^3}{R_2^3} \right) \mathbf{u}_r}$$

En la dirección de la línea de q hacia el centro.



Imágenes:

$$\left. \begin{aligned} q_1' &= -\frac{R}{a+l/2}q, & d_1' &= \frac{R^2}{a+l/2} \\ q_2' &= -\frac{R}{a-l/2}q, & d_2' &= \frac{R^2}{a-l/2} \end{aligned} \right\} \frac{1}{1+x} \approx 1-x+x^3+\dots$$

$$\left. \begin{aligned} q_1' &= -\frac{qR}{a} \left(\frac{1}{1+l/2a} \right) \approx -\frac{qR}{a} (1-l/2a), & d_1' &\approx \frac{R^2}{a} \left(1 - \frac{l}{2a} \right) \\ q_2' &= +\frac{qR}{a} \left(\frac{1}{1-l/2a} \right) \approx \frac{qR}{a} (1+l/2a), & d_2' &\approx \frac{R^2}{a} \left(1 + \frac{l}{2a} \right) \end{aligned} \right\} d_2' - d_1' \approx \frac{R^2 l}{a^2}$$

El conjunto de las dos cargas equivale a dipolo $\mathbf{p}' = \frac{qR}{a} \cdot \frac{R^2 l}{a^2} \mathbf{u}_z$ situado en

$$d' = \frac{d_1' + d_2'}{2} = \frac{R^2}{a}, \text{ más una carga neta } q' = q_1' + q_2' = \frac{qRl}{a^2}.$$

En realidad, para el dipolo ideal $l \rightarrow 0$, $ql = p$. Así, las imágenes son:

$$\mathbf{p}' = \frac{R^3}{a^3} \mathbf{p} \text{ en } d' = \frac{R^2}{a} \quad ; \quad q' = \frac{Rp}{a^2} \text{ en } d'$$

Además, para que la esfera tenga carga Q tendremos que incluir en el centro una carga $Q - q'$.

a) Potencial de la esfera:

$$V = \frac{Q - q'}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q - \frac{Rp}{a^2}}{4\pi\epsilon_0 R}$$

b) Campo eléctrico en $z =$

R y $2a$:

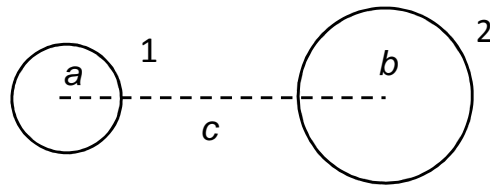
$\mathbf{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3\mathbf{r}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - p r^2]$. Recordemos que el campo del dipolo a una distancia D del

mismo (a dcha o izqda), sobre el eje z : $\mathbf{E}_p = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 D^3} \mathbf{u}_z$

$$z = R, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_{Q-q'} + \mathbf{E}_{q'} + \mathbf{E}_{p'} + \mathbf{E}_p; \quad \mathbf{E} = \left[\frac{Q - q'}{4\pi\epsilon_0 R^2} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 (R - d')^2} + \frac{p'}{2\pi\epsilon_0 (R - d')^3} + \frac{p}{2\pi\epsilon_0 (a - R)^3} \right] \mathbf{u}_z$$

$$z = 2a, \quad \mathbf{E} = \left[\frac{Q - q'}{4\pi\epsilon_0 (2a)^2} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 (2a - d')^2} + \frac{p'}{2\pi\epsilon_0 (2a - d')^3} + \frac{p}{2\pi\epsilon_0 a^3} \right] \mathbf{u}_z$$

P8-T2



$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2$$

$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2$$

Cálculo de C_{11} y C_{21} :

Hay que poner la esfera 1 a potencial 1 y la 2 a potencial 0. Para ello, situamos una carga imagen $q = 4\pi\epsilon_0 a$ en el centro de la primera esfera que crea un potencial 1 en dicha esfera; para que la segunda esté a potencial cero, debemos introducir una carga imagen:

$$q' = -4\pi\epsilon_0 a \cdot b / c = -4\pi\epsilon_0 n a, \text{ siendo } \boxed{n = b/c}, \text{ en posición } d' = b^2 / c = n b.$$

Para restablecer el potencial 1 en la primera esfera, necesitamos una imagen

$$q'' = -q' \frac{a}{c-d'} = 4\pi\epsilon_0 a \frac{m n}{1-n^2} \text{ a la distancia } d'' = \frac{a^2}{c-d'} = \frac{m a}{1-n^2}, \text{ a la derecha del centro de la esfera 1, siendo } \boxed{m = a/c}$$

Para restaurar de nuevo el potencial cero en la esfera 2,

$$q''' = -q'' \frac{b}{c-d''} = -4\pi\epsilon_0 a \frac{m n^2}{1-m^2-n^2} \text{ a la distancia } d''' = \frac{b^2}{c-d''} = \frac{n(1-n^2)b}{1-m^2-n^2}, \text{ etc.}$$

Notemos que la magnitud de las cargas imágenes va disminuyendo sucesivamente.

La suma de las cargas imágenes nos da la carga total real sobre cada esfera. De la definición de los coeficientes de capacidad e influencia, C_{11} será igual a la carga de la esfera 1:

$$C_{11} = 4\pi\epsilon_0 a \left(1 + \frac{m n}{1-n^2} + \frac{m^2 n^2}{(1-n^2)^2 - m^2} + \dots \right)$$

C_{21} se obtendrá sumando las cargas imágenes dentro de la esfera 2:

$$C_{21} = C_{12} = -4\pi\epsilon_0 a \left(n + \frac{m n^2}{1-m^2-n^2} + \dots \right)$$

C_{22} se calcula como C_{11} pero cambiando a por b .

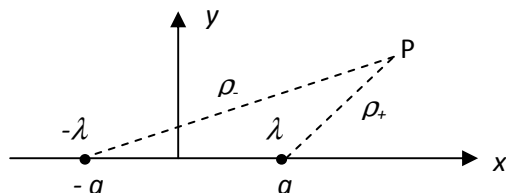
Si se desprecian términos de orden 3, tendremos:

$$\boxed{C_{11} \approx 4\pi\epsilon_0 a \left(1 + \frac{ab}{c^2 - b^2} \right), \quad C_{12} \approx -4\pi\epsilon_0 a \frac{b}{c}, \quad C_{22} \approx 4\pi\epsilon_0 b \left(1 + \frac{ab}{c^2 - a^2} \right)}$$

P9-T2

Llamamos $a = d/2$ y escogemos el origen de coordenadas en el punto medio entre las líneas cargadas como se muestra en la figura.

a) El potencial en P (x,y) será



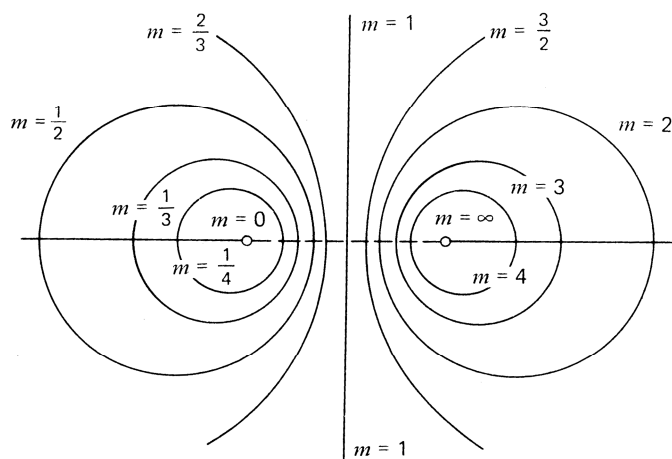
$$\Phi = -\frac{\lambda \ln \rho_+}{2\pi\epsilon_0} + \frac{\lambda \ln \rho_-}{2\pi\epsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\rho_-}{\rho_+} \right)$$

b) Las equipotenciales vendrá fijadas por la condición

$$\frac{\rho_-}{\rho_+} = \frac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = cte = m$$

Reordenando términos encontramos:

$$x^2 - 2\left(\frac{m^2 + 1}{m^2 - 1}\right)a x + y^2 = -a^2$$



que son circunferencias, con centro en

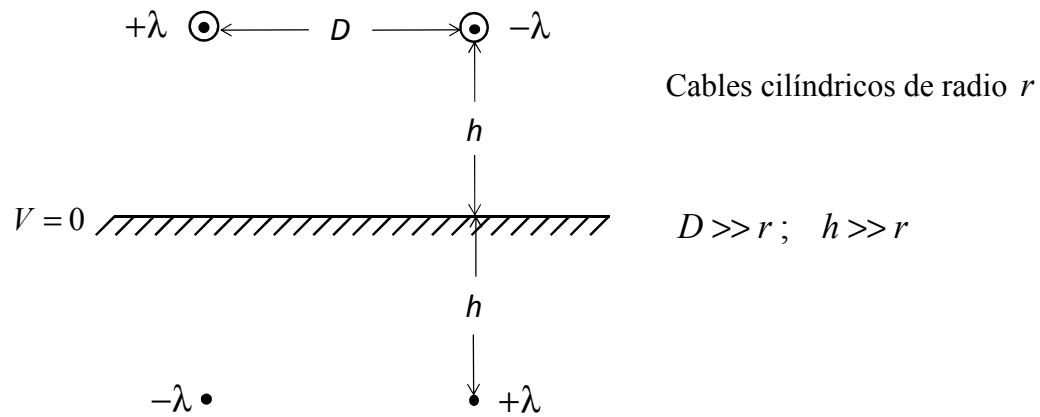
$$x_0 = \left(\frac{m^2 + 1}{m^2 - 1} \right) a \quad \text{y radio dado por} \quad R^2 = x_0^2 - a^2 = \left(\frac{2ma}{m^2 - 1} \right)^2$$

La equipotencial V_0 será la circunferencia con centro en $x_0 = \left(\frac{m^2 + 1}{m^2 - 1} \right) \frac{d}{2}$ y radio $R = \frac{md}{m^2 - 1}$

donde $m = \exp\left(\frac{2\pi\epsilon_0}{\lambda} V_0\right)$.

Estos resultados son la base para la resolución de problemas con simetría cilíndrica por el método de imágenes: líneas frente a cilindros conductores, cilindros paralelos de igual o distinto radio, condensador cilíndrico excéntrico, etc.

P10-T2



Suponiendo los hilos con cargas $+\lambda$ y $-\lambda$, las cargas imágenes serán $-\lambda$ y $+\lambda$ como se ilustra en la figura. La capacidad por unidad de longitud viene dada por:

$$C_l = \frac{\lambda}{V_+ - V_-}$$

El potencial del cable positivo es la suma del producido por su propia carga y del creado por las otras tres distribuciones:

$$V_+ = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{h}{r} - \ln \frac{h}{D} - \ln \frac{h}{2h} + \ln \frac{h}{\sqrt{D^2 + 4h^2}} \right)$$

$$V_+ = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{2D}{r} \frac{h}{\sqrt{D^2 + 4h^2}} \right)$$

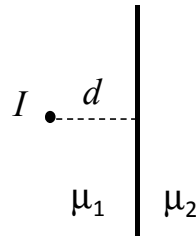
Análogamente se calcula el potencial del cable negativo, obteniéndose:

$$V_- = -V_+$$

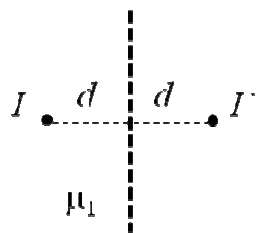
Por tanto, la capacidad por unidad de longitud es:

$$C_l = \frac{\lambda}{V_+ - V_-} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \left(\frac{2D}{r} \frac{h}{\sqrt{D^2 + 4h^2}} \right)}$$

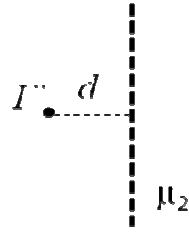
P11-T2



Para poder estudiar ambas regiones y cumplir las condiciones de contorno de los campos B y H , es necesario considerar dos líneas imagen, I' e I'' , como se muestra en la figura.

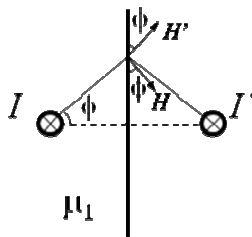


a) Para $z < 0$

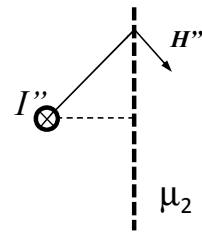


b) Para $z > 0$

El H de cada línea es de la forma: $\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{u}_\phi$.



a) Para $z < 0$



b) Para $z > 0$

$$H_{1t} = H \cos \phi - H' \cos \phi = (H - H') \cos \phi$$

$$B_{1n} = B \sin \phi + B' \sin \phi = \mu_1 (H + H') \sin \phi$$

$$H_{2t} = H'' \cos \phi$$

$$B_{2n} = \mu_2 H'' \sin \phi$$

Imponemos continuidad de H tangencial y de B normal:

$$\left. \begin{aligned} H_{1t} = H_{2t} &\Rightarrow I - I' = I'' \\ B_{1n} = B_{2n} &\Rightarrow \mu_1 (I + I') = \mu_2 I'' \end{aligned} \right\} \begin{cases} I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I \\ I'' = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I \end{cases}$$

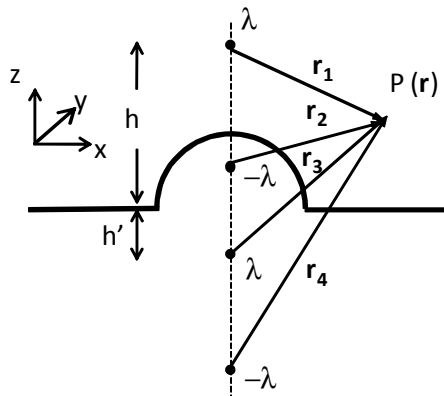
Fuerza sobre I : será debida al campo creado por I' . Como I' tiene el mismo sentido que I (dado que $\mu_2 > \mu_1$), la fuerza será atractiva y -por unidad de longitud- valdrá:

$$\frac{dF}{dl} = \mu_1 \frac{I I'}{2\pi(2d)} = \frac{\mu_1}{4\pi d} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I^2$$

P12-T2

Problema análogo al de la protuberancia semiesférica, pero ahora las líneas imágenes son iguales y de signo contrario

Imagen de línea λ frente a cilindro: línea $-\lambda$ en $h' = R^2 / h$.



Sistema de imágenes:

- λ en $z = h$
- $-\lambda$ en $z = h'$
- $+\lambda$ en $z = -h'$
- $-\lambda$ en $z = -h$

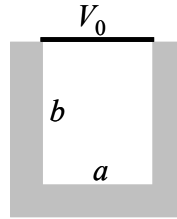
$$\mathbf{E}(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^2} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^2} + \frac{\mathbf{r}_3}{r_3^2} - \frac{\mathbf{r}_4}{r_4^2} \right)$$

$$\mathbf{E}(0, R^+) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{h-R} - \frac{1}{R-h'} + \frac{1}{R+h'} - \frac{1}{R+h} \right) \mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{E}(0, R^+) = -\frac{2\lambda h}{\pi\epsilon_0 (h^2 - R^2)} \mathbf{u}_y$$

$\sigma = \epsilon_0 \mathbf{E} = -\frac{2\lambda h}{\pi(h^2 - R^2)}$

P13-T2



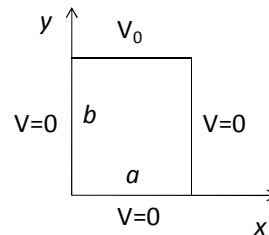
No hay dependencia con z , $Z(z) = \text{cte}$

En este caso las soluciones de la ecuación de Laplace son de la forma

$$e^{\pm j\alpha x} \cdot e^{\pm \alpha y}$$

Condiciones de contorno:

- 1) $\Phi(0, y) = 0, \quad 0 \leq y < b$
- 2) $\Phi(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b$
- 3) $\Phi(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq a$
- 4) $\Phi(x, b) = V_0, \quad 0 \leq x \leq a$



$$1) \Rightarrow \Phi(x, y) = \sum A \sin \alpha x (C \sinh \alpha y + D \cosh \alpha y)$$

$$2) \Rightarrow \alpha \equiv \alpha_n = \frac{n\pi}{a}$$

$$3) \Rightarrow \Phi(x, 0) = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$4) \Rightarrow \Phi(x, b) = \sum A_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi b}{a} = V_0$$

Cálculo de los coeficientes:

$$V_0 \int_0^a \sin \frac{n'\pi x}{a} dx = \sum_n A_n \sinh \frac{n\pi b}{a} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n'\pi x}{a} dx$$

$$-\frac{aV_0}{n'\pi} [\cos(n'\pi) - 1] = \sum_n A_n \sinh \frac{n\pi b}{a} \cdot \frac{a}{2} \delta_{nn'}$$

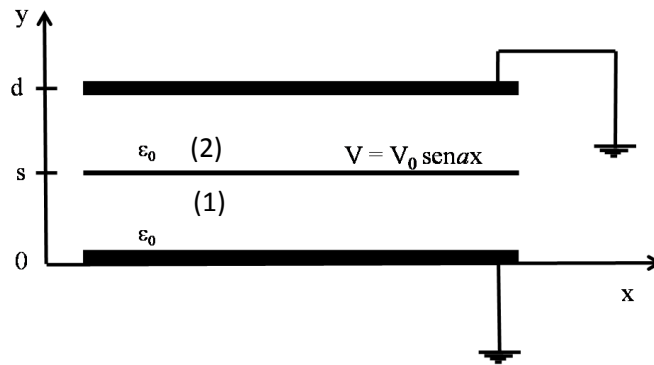
$$A_n = \frac{4V_0}{n\pi \sinh \frac{n\pi b}{a}} \quad (n \text{ impar})$$

$$A_n = 0 \quad (n \text{ par})$$

Por tanto, la solución general expresada como desarrollo en serie vendrá dada por:

$$\Phi(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \frac{\sinh \frac{n\pi y}{a}}{n \sinh \frac{n\pi b}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

P14-T2



El problema se resuelve mediante separación de variables. Dada la geometría, no hay dependencia con la variable z .

a) Forma general del potencial:

$$\Phi = \sum (A \operatorname{sen} ax + B \cos ax)(C \operatorname{sh} ay + D \operatorname{ch} ay),$$

para cada una de las regiones 1 y 2.

Se asegura el cumplimiento de las condiciones de contorno en $y = 0$, $y = d$, escogiendo:

$$\Phi_1 = A \operatorname{sen} ax \operatorname{sh} ay$$

$$\Phi_2 = B \operatorname{sen} ax \operatorname{sh} a(y - d)$$

(o bien, combinación de sh y ch)

C. contorno en $y = s$:

$$A \operatorname{sen} ax \operatorname{sh} as = V_0 \operatorname{sen} ax \Rightarrow A = \frac{V_0}{\operatorname{sh} as}$$

$$B \operatorname{sen} ax \operatorname{sh} a(s - d) = V_0 \operatorname{sen} ax \Rightarrow B = \frac{V_0}{\operatorname{sh} a(s - d)}$$

Por tanto, la expresión del potencial en cada una de las regiones viene dada por:

$$\Phi_1 = \frac{V_0}{\operatorname{sh} as} \operatorname{sen} ax \operatorname{sh} ay, \quad 0 \leq y \leq s$$

$$\Phi_2 = \frac{V_0}{\operatorname{sh} a(s - d)} \operatorname{sen} ax \operatorname{sh} a(y - d), \quad s \leq y \leq d$$

El campo eléctrico se obtiene a partir del gradiente de estas funciones

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi$$

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{V_0 a}{\text{sh } as} (\cos ax \text{ sh } ay \mathbf{i} + \text{sen } ax \text{ ch } ay \mathbf{j}), \quad 0 \leq y \leq s$$

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{V_0 a}{\text{sh } a(s-d)} [\cos ax \text{ sh } a(y-d) \mathbf{i} + \text{sen } ax \text{ ch } a(y-d) \mathbf{j}], \quad s \leq y \leq d$$

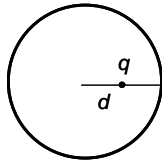
b) Densidades de carga:

$$\sigma(y=0) = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)_{y=0} = -\frac{\epsilon_0 V_0 a}{\text{sh } as} \text{sen } ax \text{ ch } ay \Big|_{y=0} = -\frac{\epsilon_0 V_0 a}{\text{sh } as} \text{sen } ax$$

$$\sigma(y=d) = \epsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right)_{y=d} = \frac{\epsilon_0 V_0 a}{\text{sh } a(s-d)} \text{sen } ax \text{ ch } a(y-d) \Big|_{y=d} = -\frac{\epsilon_0 V_0 a}{\text{sh } a(d-s)} \text{sen } ax$$

$$\begin{aligned} \sigma(y=s) &= \left(-\epsilon_0 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)_{y=s} = \epsilon_0 V_0 a \left[-\frac{\text{ch } a(y-d)}{\text{sh } a(s-d)} + \frac{\text{ch } ay}{\text{sh } as} \right]_{y=s} \text{sen } ax \\ &= \epsilon_0 V_0 a [\text{coth } as - \text{coth } a(s-d)] \text{sen } ax = \epsilon_0 V_0 a [\text{coth } as + \text{coth } a(d-s)] \text{sen } ax \end{aligned}$$

P15-T2



a) $q' = -q \frac{R}{d}, \quad d' = \frac{R^2}{d}$

$r \leq R, \quad \Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|r - d\mathbf{u}_z|} + \frac{q'}{|r - d'\mathbf{u}_z|} \right]$

$r > R, \quad \Phi = 0$

$r \leq R, \quad \Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}} + \frac{q'}{(r^2 + d'^2 - 2rd' \cos \theta)^{1/2}} \right]$

b)

$$\sigma = \epsilon_0 E_n = +\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{q(R - d \cos \theta)}{(R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta)^{3/2}} - \frac{q'(R - d' \cos \theta)}{(R^2 + d'^2 - 2Rd' \cos \theta)^{3/2}} \right]$$

c) La carga total debe ser $-q$. Fuerza sobre $q =$ la debida a q' , o sea:

$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0(d'-d)^2} \mathbf{u}_z$ (atractiva, puesto que q' tiene signo opuesto a q)

$d = R - a, \quad a \ll R, \quad F = \frac{q^2 R / d}{4\pi\epsilon_0(R^2 / d - d)^2} = \frac{q^2 R d}{4\pi\epsilon_0(R^2 - d^2)^2} = \frac{q^2 R(R - a)}{4\pi\epsilon_0(2Ra - a^2)^2}$

$F \approx \frac{q^2 R^2}{4\pi\epsilon_0 4R^2 a^2} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2}$, equivalente a la producida por una imagen $-q$ respecto a un plano.

d) Energía electrostática: Como la carga imagen es inducida por la carga q ,

$U_e = \frac{1}{2} q\phi = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{d'-d} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{-q^2 R / d}{R^2 / d - d} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{-q^2 R}{R^2 - d^2}$

$U_e = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{-q^2 R}{2Ra - a^2} \approx -\frac{1}{16\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a}$

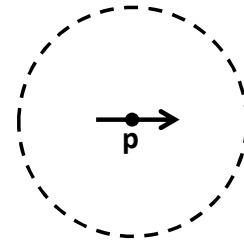
$F = -\frac{\partial U_e}{\partial a} \approx \frac{1}{16\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2}$

P16-T2

Para que el potencial se anule en el exterior,

$\Phi = 0$, ($r = R$), continuo al pasar del interior al exterior.

El potencial en el interior debe ser de la forma:



$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)} \right] P_n(\cos \theta)$$

Recordemos que los polinomios de Legendre para los 3 primeros valores de n son:

$$P_0 = 1 \quad ; \quad P_1 = \cos \theta \quad ; \quad P_2 = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$$

Por tanto el desarrollo en serie será:

$$\Phi(r, \theta) = A_0 + \frac{B_0}{r} + \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) \cdot \cos \theta + \left(A_2 r^2 + \frac{B_2}{r^3} \right) \cdot \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) + \dots$$

Este potencial está sujeto a las condiciones asintótica y de contorno:

i) $\lim_{r \rightarrow 0} \Phi(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

ii) $\Phi(R, \theta) = 0, \quad \forall \theta$

La condición i) $\Rightarrow B_n = 0, \quad n \neq 1, \quad B_1 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}$

La condición ii) $\Rightarrow A_n = 0, \quad n \neq 1, \quad A_1 R = -\frac{B_1}{R^2}, \quad A_1 = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3}$

Potencial resultante:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{r^3}{R^3} \right) \cos \theta, \quad \text{que efectivamente satisface i) y ii).}$$

Densidad de carga: $\sigma = D_n^{ext} - D_n^{int} = 0 - \left[-\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right]_{R_{int}}$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{2}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right] \quad ; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{R_{int}} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-3}{R^3} \right)$$

Por tanto,

$$\sigma = -\frac{3p \cos \theta}{4\pi R^3}$$

P17-T2

- a) Este problema es la superposición del problema de la esfera cargada de la esfera más el de la esfera conectada a tierra en un campo eléctrico uniforme E_o , tratado en clase y que suele venir en los libros de texto de Electromagnetismo, y puede plantearse de manera análoga, imponiendo la condición adicional de que para $r = R$, $\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_o R}$.

La solución para puntos $r > R$ va a ser:

$$V(r, \theta) = -E_o r \cos \theta + \frac{E_o R^3 \cos \theta}{r^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_o r}$$

El primer término corresponde al campo uniforme E_o , el tercero a la carga q de la esfera, mientras que el segundo se debe al dipolo inducido en la esfera (redistribución de la carga para apantallar el campo en el interior).

Para el interior de la esfera, $r \leq R$: $V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o R}$, constante

- b) El campo eléctrico es:

$$\begin{cases} E_r(r, \theta) = -\frac{\partial V}{\partial r} = \left(1 + \frac{2R^3}{r^3}\right) E_o \cos \theta + \frac{q}{4\pi\epsilon_o r^2} \\ E_\theta(r, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) E_o \sin \theta \end{cases} \quad r > R$$

Para $r \leq R$ es, obviamente, $E = 0$.

Sobre la superficie de la esfera aparece una densidad de carga:

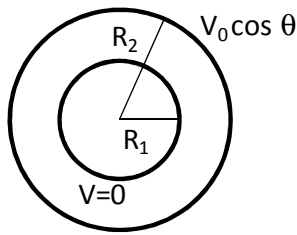
$$\sigma = \epsilon_o E_r(R, \theta) = 3\epsilon_o E_o \cos \theta + \frac{q}{4\pi R^2}$$

- c) El término dipolar del campo es $E_o R^3 \cos \theta / r^2$. Comparando esta expresión con el

campo de un dipolo: $V_d = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_o r^2}$, se tiene que el dipolo inducido es:

$$\boxed{p = 4\pi\epsilon_o R^3 E_o}, \quad \text{que también podría hallarse como } p = \int z dq = \int z \sigma dS$$

P18-T2



Simetría de revolución,

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta)$$

Región 1: $R_1 \leq r \leq R_2$

- Condiciones de contorno:
- 1) $\Phi(R_1, \theta) = 0 \quad 0 \leq \theta \leq \pi$
 - 2) $\Phi(R_2, \theta) = V_0 \cos \theta$

$$\left. \begin{array}{l} 1) \Rightarrow A_n R_1^n + B_n R_1^{-(n+1)} = 0, \quad \forall n \\ 2) \Rightarrow A_n = B_n = 0, \quad \forall n \neq 1, \quad A_1 R_2 + B_1 R_2^{-2} = V_0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_1 R_1 + B_1 R_1^{-2} = 0 \\ A_1 R_2 + B_1 R_2^{-2} = V_0 \end{array} \right.$$

$$B_1 = -\frac{V_0 R_1^3 R_2^2}{R_2^3 - R_1^3}, \quad A_1 = -\frac{B_1}{R_1^3}$$

$$\boxed{\Phi(r, \theta) = \frac{V_0 R_2^2}{R_2^3 - R_1^3} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) \cos \theta, \quad (R_1 \leq r \leq R_2)}$$

Región 2: $r \geq R_2$

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A'_n r^n + B'_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta)$$

- Condiciones de contorno y asintótica:
- 1) $\Phi(r, \theta) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty \Rightarrow A'_n = 0, \quad \forall n$
 - 2) $\Phi(R_2, \theta) = V_0 \cos \theta \Rightarrow B'_n = 0, \quad n \neq 1,$

$$\frac{B'_1}{R_2^2} = V_0, \quad B'_1 = V_0 R_2^2$$

$$\boxed{\Phi(r, \theta) = \frac{V_0 R_2^2}{r^2} \cos \theta, \quad (r \geq R_2)}$$

$$\overline{\nabla \Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta$$

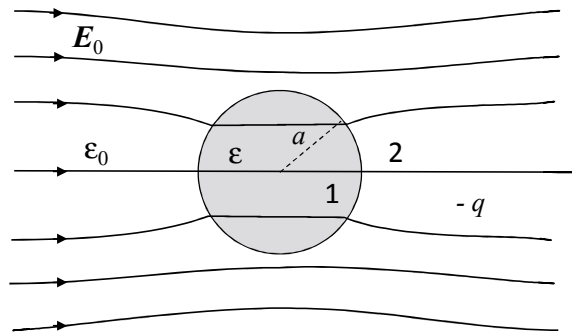
$$\mathbf{E} = -\overline{\nabla \Phi} = -\frac{V_0 R_2^2}{R_2^3 - R_1^3} \left[\left(1 + 2 \frac{R_1^3}{r^3} \right) \cos \theta \mathbf{u}_r - \frac{1}{r} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) \text{sen} \theta \mathbf{u}_\theta \right] \quad (R_1 \leq r \leq R_2)$$

$$\boxed{\mathbf{E}(r = R_1) = -\frac{3 V_0 R_2^2}{R_2^3 - R_1^3} \cos \theta \mathbf{u}_r}, \text{ normal a la superficie conductora.}$$

P19-T2

Condiciones asintóticas y frontera:

- i) $\lim_{r \rightarrow 0} \Phi_1(r, \theta) = \text{finito}$
- ii) $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_2(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta$
- iii) $\Phi_1 = \Phi_2, \quad (r = a)$
- iv) $\epsilon \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)_{r=a} = \epsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right)_{r=a}$



Los potenciales en ambas regiones vendrán dados por:

$$\Phi_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta) \quad \Phi_2(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta)$$

i) $\Rightarrow B_n = 0, \quad \Phi_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta)$

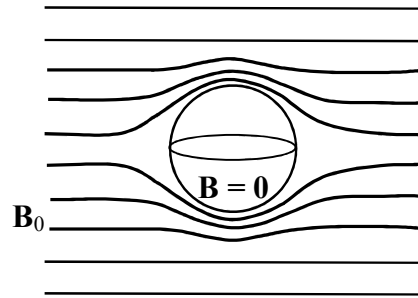
ii) $\Rightarrow C_n = 0 \quad (n \neq 1), \quad C_1 = -E_0, \quad \Phi_2(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} D_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta)$

$$\left. \begin{array}{l} \text{iii) } \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_1 = -E_0 + \frac{D_1}{a^3} \\ A_n = \frac{D_n}{a^{2n+1}}, \quad (n \neq 1) \end{array} \right. \\ \text{iv) } \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\epsilon}{\epsilon_0} A_1 = -E_0 - 2 \frac{D_1}{a^3} \\ \frac{\epsilon}{\epsilon_0} n A_n = -(n+1) 2 \frac{D_n}{a^{2n+1}}, \quad (n \neq 1) \end{array} \right. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_n = D_n = 0, \quad (n \neq 1) \\ A_1 = -\left(\frac{3}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} \right) E_0 \\ D_1 = -\left(\frac{\epsilon/\epsilon_0 - 1}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} \right) a^3 E_0 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_1 = -\left(\frac{3}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} \right) E_0 r \cos \theta \\ \Phi_2 = -E_0 r \cos \theta + \left(\frac{\epsilon/\epsilon_0 - 1}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} \right) E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_1 = \frac{3}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0 + \text{campo de dipolo con } \mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon/\epsilon_0 - 1}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} \right) a^3 \mathbf{E}_0 \end{array} \right.$$

P20-T2



- a) En $r = R$, de las condiciones frontera se deduce que la componente normal de \mathbf{B} debe anularse; por tanto,

i) $\frac{\partial \Phi_M}{\partial r} = 0, \quad (r = R).$

Además tenemos la condición asintótica:

ii) $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_M(r, \theta) = -B_0 r \cos \theta$

b) $\Phi_M(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + C_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta)$

De la condición ii) $\Rightarrow A_n = 0 \quad (n \neq 1), \quad A_1 = -B_0,$

De la condición i) $\Rightarrow C_n = 0 \quad (n \neq 1), \quad A_1 - \frac{2C_1}{R^3} = 0, \quad C_1 = \frac{A_1 R^3}{2} = -\frac{B_0 R^3}{2}$

$$\boxed{\Phi_M(r, \theta) = -B_0 r \left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right) \cos \theta}$$

$$\mathbf{B} = -\overline{\nabla} \Phi_M \left\{ \begin{array}{l} B_r = -\frac{\partial \Phi_M}{\partial r} = B_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) \cos \theta \\ B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_M}{\partial \theta} = -B_0 \left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right) \sin \theta \end{array} \right.$$

Condición frontera: $\mathbf{J}_S = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{n} \times \mathbf{B}|_{r=R} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{u}_r \times \mathbf{B}|_{r=R},$

$$\boxed{\mathbf{J}_S = -\frac{3B_0}{2\mu_0} \sin \theta \mathbf{u}_\phi}$$

Tema 3: Ondas planas monocromáticas

3.1. Campos armónicos. Representación fasorial

En muchas aplicaciones las señales con las que se trabaja son de tipo sinusoidal, ya que son fáciles de generar. Además, cualquier otra señal puede obtenerse como combinación de estas mediante desarrollo en serie de Fourier.

Los *campos armónicos* proceden de fuentes que generan señales que varían con t en la forma:

$$A = A_m \cos(\omega t + \phi) \quad ; \quad A = A_m \sin(\omega t + \phi') \quad (3.1)$$

Puesto que $\cos(\omega t + \phi) = \sin(\omega t + \phi + \pi/2)$, es indiferente cuál de las dos funciones usemos. En el presente estudio elegimos la función coseno y todos los resultados deben ser consistentes con dicha elección.

Debido a la linealidad de las ecuaciones de Maxwell, fuentes que varían armónicamente producen campos estacionarios que varían sinusoidalmente a la misma frecuencia. Esto facilita mucho el estudio. También es conveniente utilizar la función exponencial de forma que las fuentes vienen dadas por:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}) e^{i\omega t} \quad ; \quad \vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}) e^{i\omega t} \quad (3.2)$$

donde $\rho(\vec{r})$ y $\vec{J}(\vec{r})$ son funciones en general complejas que sólo dependen de la posición. La dependencia temporal queda englobada en la exponencial. Una vez que resolvamos el problema, es necesario tomar la *parte real de la función solución* que es la que tiene significado físico.

La ventaja de usar exponenciales es clara ya que se cumple:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2 \quad (3.3)$$

lo que simplifica mucho las ecuaciones a resolver.

Si sustituimos estas funciones y sus derivadas en las ecuaciones de Maxwell queda:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}(\vec{r})) e^{i\omega t} &= \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} e^{i\omega t} \\
\vec{\nabla} \cdot (\vec{B}(\vec{r})) e^{i\omega t} &= 0 \\
\vec{\nabla} \times (\vec{E}(\vec{r})) e^{i\omega t} &= -i\omega (\vec{B}(\vec{r})) e^{i\omega t} \\
\vec{\nabla} \times (\vec{B}(\vec{r})) e^{i\omega t} &= \mu_0 [\vec{J}(\vec{r}) + i\omega \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r})] e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Eliminando el factor $e^{i\omega t}$, obtenemos las ecs. de Maxwell en términos de los vectores complejos, o *fasores*, de sus campos y fuentes:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}(\vec{r})) &= \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \\
\vec{\nabla} \cdot (\vec{B}(\vec{r})) &= 0 \\
\vec{\nabla} \times (\vec{E}(\vec{r})) &= -i\omega (\vec{B}(\vec{r})) \\
\vec{\nabla} \times (\vec{B}(\vec{r})) &= \mu_0 [\vec{J}(\vec{r}) + i\omega \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r})]
\end{aligned} \tag{3.5}$$

En lo que sigue obviaremos la forma expresa: $\rho(\vec{r}) \rightarrow \rho$, etc., para simplificar.

3.2. Ondas planas uniformes monocromáticas

Es posible, mediante distribuciones adecuadas de fuentes, generar ondas esféricas, cilíndricas o planas. Estas se propagan en el espacio y pueden alcanzar distancias enormes (la luz de las estrellas, por ejemplo). Llamamos *frente de onda* al lugar geométrico de los puntos que son alcanzados por la onda en el mismo instante, es decir, se encuentran en la misma fase.

En las *ondas esféricas*, producidas por fuentes elementales, todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de la fuente tienen el mismo valor de fase de los campos em (decimos que presentan frentes de onda esféricos). Las *ondas cilíndricas* se caracterizan por estar generadas por fuentes distribuidas en alambres rectos indefinidos y presentan frentes de ondas cilíndricos. Por último, distribuciones de fuentes a lo largo de un plano indefinido, dan lugar a campos con la misma fase en todos los puntos de planos paralelos al de la fuente, que son perpendiculares a la dirección de propagación.

En lo que sigue vamos a estudiar estas ondas que suponemos propagándose en la dirección z . Para facilitar su estudio, supondremos además que *el valor del campo es constante en todos los puntos de cada frente de onda (ondas planas uniformes)*.

Resumiendo las propiedades descritas, las ondas planas uniformes se caracterizan por:

- 1) Frentes de onda en planos $z = Cte.$
 2) Los campos no dependen de las variables x e y ,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{E}, \vec{B}) = \frac{\partial}{\partial y}(\vec{E}, \vec{B}) = 0.$$

- 3) Se propagan en el espacio libre (no hay fuentes)

$$\rho = 0 \quad ; \quad \vec{J} = 0.$$

Sin embargo recordemos que dichas fuentes deben estar en algún lugar para generarlos, aunque los campos se propaguen independientemente de ellas. Además, para simplificar el estudio consideraremos que las fuentes oscilan a una frecuencia determinada, ω , y por tanto generan *ondas monocromáticas*.

Veamos qué implicaciones tiene en las ecuaciones (3.5). Estas se reducen a:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -i\omega\vec{B} & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= i\omega\mu_0\varepsilon_0\vec{E} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Vamos a calcular el rotacional del campo eléctrico:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -i\omega(B_x\vec{u}_x + B_y\vec{u}_y + B_z\vec{u}_z) \quad (3.7)$$

Igualando por componentes queda:

$$\boxed{-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega B_x \quad ; \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -i\omega B_y \quad ; \quad 0 = -i\omega B_z} \quad (3.8)$$

Análogamente, para la ley de Ampère se tiene:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -i\omega\mu_0\varepsilon_0(E_x\vec{u}_x + E_y\vec{u}_y + E_z\vec{u}_z) \quad (3.9)$$

obteniéndose las siguientes ecuaciones para las componentes:

$$\boxed{-\frac{\partial B_y}{\partial z} = i\omega\mu_0\varepsilon_0 E_x \quad ; \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = i\omega\mu_0\varepsilon_0 E_y \quad ; \quad 0 = i\omega\mu_0\varepsilon_0 E_z} \quad (3.10)$$

Analizando los conjuntos de ecuaciones (3.8) y (3.10) concluimos que:

- a) $E_z = B_z = 0$. Para una onda plana uniforme no hay componentes de los campos en la dirección de propagación. Ello es consecuencia de la condición (2) impuesta.

b) Las ecuaciones entre B_x y E_y están acopladas: una actúa como fuente de la otra. Lo mismo ocurre con las componentes B_y y E_x . Por tanto, identificamos dos pares independientes (E_x, B_y) y (E_y, B_x) de campos y, sin pérdida de generalidad, consideraremos en adelante que sólo existe (E_x, B_y) mientras que el otro par es nulo.

Nos queda resolver las ecuaciones para (E_x, B_y) . Derivando con respecto a z en la segunda ecuación de (3.8) y teniendo en cuenta la primera de (3.10) resulta:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -i\omega \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 E_x \rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 E_x = 0 \quad (3.11)$$

que es la ecuación de onda escalar para E_x . Puesto que la única derivación es con respecto a z , podemos poner:

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 E_x = 0. \quad (3.12)$$

La solución general de (3.12) es de la forma:

$$E_x = C_1 e^{-ikz} + C_2 e^{ikz} \quad (3.13)$$

donde C_1 y C_2 son constantes complejas en general y $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. Observemos que las ondas se propagan en las direcciones $\pm z$ y que el cambio en la fase depende de la cantidad k ; esta constante se denomina *constante de fase*. C_1 y C_2 van a representar las amplitudes de las ondas; supondremos que son números reales y los simbolizamos por E_m^+ y E_m^- , respectivamente. Queda entonces:

$$E_x = E_m^+ e^{-ikz} + E_m^- e^{ikz} \quad (3.14)$$

Ahora, para obtener la solución completa, debemos incluir la dependencia con el tiempo y tomar la parte real de la expresión resultante:

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= \text{Re}(E_x e^{i\omega t}) = \text{Re}\left[E_m^+ e^{i(\omega t - kz)} + E_m^- e^{i(\omega t + kz)}\right] = \\ &= \underbrace{E_m^+ \cos(\omega t - kz)}_{\text{onda viajando en el sentido } z > 0} + \underbrace{E_m^- \cos(\omega t + kz)}_{\text{onda viajando en el sentido } z < 0} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Normalmente tomamos la solución que representa la onda viajando en el sentido $z > 0$. Sin embargo, cuando se estudian fenómenos de reflexión habrá que considerar ambos tipos.

Ahora ya podemos ver qué pasa con la componente asociada B_y . Operando en la segunda ecuación de (3.8) se tiene:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial (E_m^+ e^{-ikz})}{\partial z} = -i\omega B_y \quad \rightarrow \quad (-ik) E_m^+ e^{-ikz} = -i\omega B_y \quad (3.16)$$

Despejando,

$$\begin{aligned} B_y &= \frac{k}{\omega} E_m^+ e^{-ikz} = \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{\omega} E_m^+ e^{-ikz} = \\ &= \frac{E_m^+}{c} e^{-ikz} = \frac{E_x}{c} \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \simeq 3 \times 10^8$ m/s es la velocidad de propagación de la onda en el vacío.

Observemos que existe una sencilla relación entre ambos campos, sólo necesitamos calcular uno de ellos.

Para la onda que viaja en el sentido $z < 0$ se verifica:

$$\frac{\partial (E_m^- e^{ikz})}{\partial z} = -i\omega B_y \quad \rightarrow \quad (ik) E_m^- e^{ikz} = -i\omega B_y \quad (3.18)$$

y por tanto,

$$B_y = -\frac{E_m^-}{c} e^{ikz} = -\frac{E_x}{c} \quad (3.19)$$

lo que nos indica una inversión en el signo del vector del campo magnético con respecto al caso anterior, aunque la relación siga siendo a través del mismo factor c . En ambos casos, los vectores unitarios de \vec{E} , \vec{B} y la dirección de propagación forman un *triedro tri-rectángulo*.

Es frecuente utilizar el cociente entre las intensidades de campo eléctrico y magnético, E y H . Si analizamos las dimensiones de éste:

$$\left[\frac{E}{H} \right] = \frac{\text{voltios/metro}}{\text{amperios/metro}} = \text{ohmios}$$

Entonces,

$$\mu_0 H_y = \frac{E_x}{c} \quad \rightarrow \quad \frac{E_x}{H_y} = \mu_0 c = \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (3.20)$$

Este cociente con dimensiones de Ω se denomina *impedancia intrínseca de la onda* en el medio libre, η_0 ,

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega. \quad (3.21)$$

Este resultado es un número real y nos dice que los campos en el medio libre se *propagan en fase*, como se ilustra en la Figura 3.1.

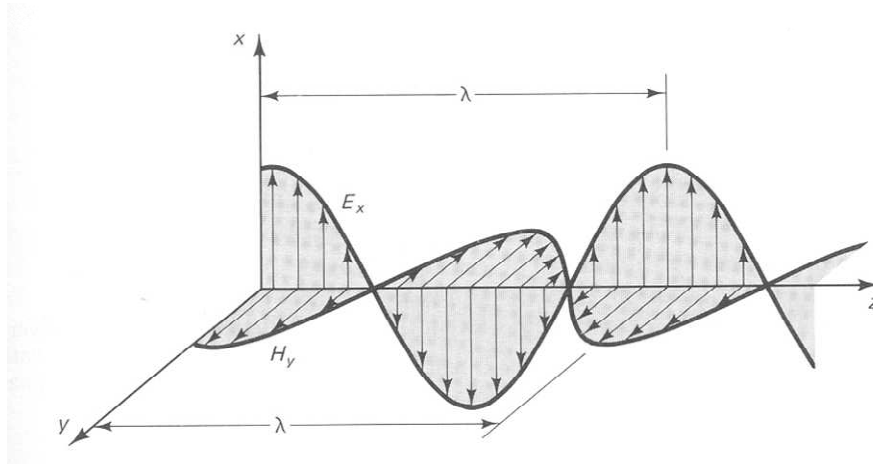


Figura 3.1. Campos eléctrico y magnético asociados con la propagación en el sentido $z > 0$.

Vamos a describir los parámetros característicos de la onda.

- 1) *Longitud de onda*, λ : el término de fase relativo a la propagación a lo largo de z es e^{-ikz} . La distancia que debe viajar la onda para que la fase cambie en 2π radianes es lo que llamamos longitud de onda,

$$k\lambda = 2\pi \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (3.22)$$

- 2) *Periodo*, T : el tiempo que tarda la onda en realizar una oscilación completa. Teniendo en cuenta la variación temporal $e^{i\omega t}$,

$$\omega T = 2\pi \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.23)$$

También es importante el inverso del periodo al que llamamos *frecuencia*, f .

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (3.24)$$

Se mide en unidades de s^{-1} o hercios (Hz). Teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores podemos ver que:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \frac{c}{f} \quad (3.25)$$

que es una ecuación frecuentemente utilizada.

- 3) *Velocidad de fase*, v_f : para medir la velocidad de propagación imaginemos un observador montado sobre la onda en un punto específico como se muestra en la gráfica de la Figura 3.2. Notemos que viaja en un plano de fase constante y se mueve con la onda a una velocidad que se conoce como velocidad de fase v_f . Dicho observador ha de medir el tiempo requerido para viajar una cierta distancia z' . Puesto que el término de fase completo en la onda es $\omega t - kz$, para hallar la velocidad con que se mueve, igualamos este término a una constante y derivamos z con respecto a t

$$\omega t - kz = Cte \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = v_f = \frac{\omega}{k} \quad (3.26)$$

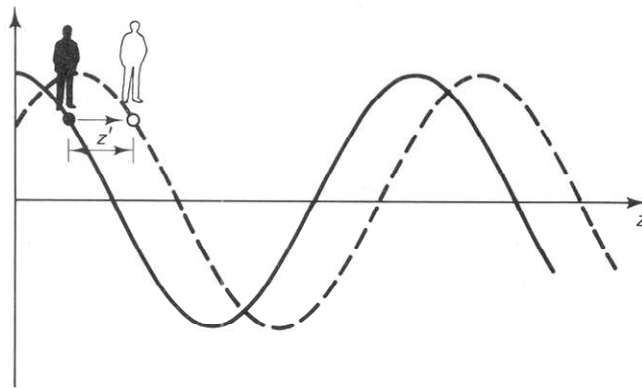


Figura 3.2. Un observador ‘viajando’ en la onda se mueve con v_f .

3.3. Propagación en dieléctricos y conductores

Como ya hemos visto en el Tema 2, en un dieléctrico las ecuaciones de Maxwell son análogas a las del vacío sustituyendo $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$, $\mu_0 \rightarrow \mu$. El estudio de la propagación se puede realizar siguiendo los mismos desarrollos y haciendo estas sustituciones. Por ejemplo, para la constante de fase y la velocidad de fase obtenemos:

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \quad ; \quad v_f = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (3.27)$$

Cuando el medio es *conductor* ($\sigma \neq 0$) las ecuaciones que han de cumplir los campos que se propaguen en dicho medio deben incluir la contribución de la corriente de conducción:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -i\omega\mu\vec{H} & \vec{\nabla} \times \vec{H} &= i\omega\left(\epsilon - i\frac{\sigma}{\omega}\right)\vec{E}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Podemos aprovechar todo el estudio hecho para el medio libre si hacemos las sustituciones:

$$\mu_0 \rightarrow \mu = \mu_r \mu_0 \quad ; \quad \epsilon_0 \rightarrow \left(\epsilon - i\frac{\sigma}{\omega}\right) \tag{3.29}$$

Es sencillo hacer la primera sustitución ya que sólo se diferencian en una constante. La segunda tiene más implicaciones ya que de un número real pasamos a un número complejo; ello añadirá nuevas características a la propagación. Si suponemos una onda oscilando en el eje x , la solución para el campo eléctrico será de la forma:

$$E_x = E_m^+ e^{-\gamma z} \tag{3.30}$$

donde γ es un número complejo dado por:

$$\gamma = i\omega\sqrt{\mu\left(\epsilon - i\frac{\sigma}{\omega}\right)} = \alpha + i\beta \tag{3.31}$$

α y β son la parte real e imaginaria de la *constante de propagación compleja*.

Se puede demostrar que

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1\right]} \quad ; \quad \beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1\right]} \tag{3.32}$$

Si sustituimos en la expresión del campo queda:

$$E_x = E_m^+ e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} \tag{3.33}$$

y tomando parte reales queda finalmente:

$$E_x = \text{Re}\left(E_x e^{i\omega t}\right) = E_m e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi) \tag{3.34}$$

donde hemos supuesto que

$$E_m^+ = E_m e^{i\phi} \tag{3.35}$$

Vemos que la onda se atenúa exponencialmente a medida que avanza en el medio conductor debido al término $e^{-\alpha z}$. Esta es una diferencia fundamental con la propagación en el vacío o en medios dieléctricos, como se muestra en la Figura 3.3.

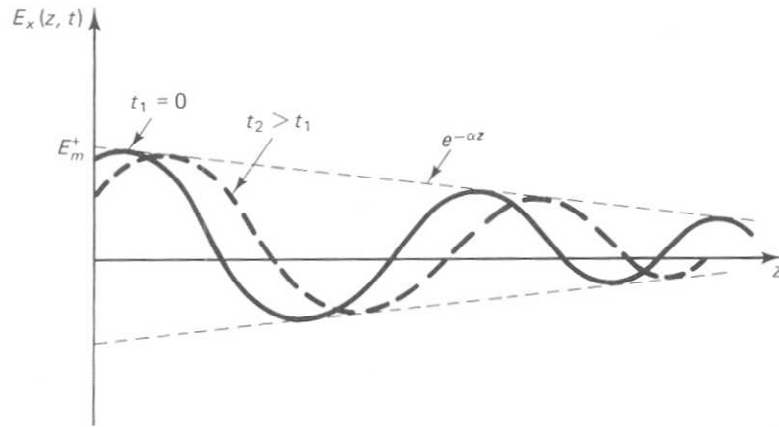


Figura 3.3. Propagación del campo eléctrico de una onda plana en un medio conductor.

La distancia a la que la amplitud de la onda disminuye a un valor $1/e$ se llama *profundidad de penetración*:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \quad (3.36)$$

Si el medio es un conductor perfecto, es decir, $\sigma \rightarrow \infty$, el coeficiente $\alpha \rightarrow \infty$ y en consecuencia $\delta \rightarrow 0$. *El campo electromagnético no puede penetrar en un conductor perfecto.*

Si el medio es buen conductor, es decir $\sigma \gg \omega\epsilon$, se tiene:

$$\alpha = \beta \approx \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}. \quad (3.37)$$

El cociente entre los campos E y H nos da la impedancia de la onda:

$$\frac{E_x}{H_y} = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - i\frac{\sigma}{\omega}}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right]^{1/4}} e^{i\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)} \quad (3.38)$$

A diferencia de la propagación en vacío, esta impedancia es compleja y por tanto los campos están desfasados. Se puede demostrar que el desfase entre \vec{E} y \vec{H} vale:

$$\chi = \frac{1}{2} \text{tg}^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right) \quad (3.39)$$

Notemos que para buenos conductores $\chi \rightarrow 45^\circ$.

La Figura 3.4 muestra las características de esta propagación.

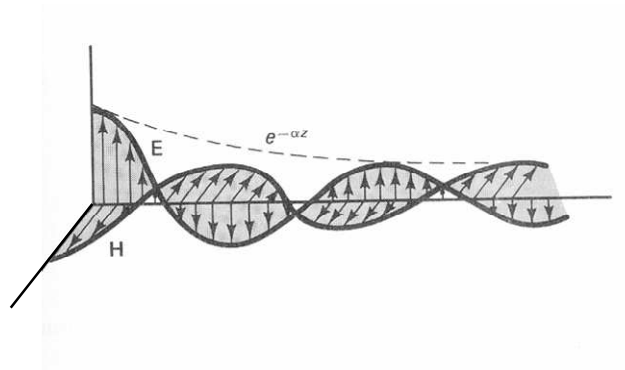


Figura 3.4. Propagación de los campos eléctrico y magnético de una onda plana en un medio conductor.

La onda electromagnética se propaga según el diagrama de la figura con una velocidad de fase:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta}$$

3.4. Polarización de las ondas planas

Hemos visto en una sección anterior que hay dos pares independientes de campos electromagnéticos (E_x, B_y) y (E_y, B_x) que son soluciones de las ecuaciones de onda. Hemos resuelto el primer par y podríamos resolver el segundo siguiendo un razonamiento análogo. Nos surge la pregunta: ¿qué ocurre si tenemos una combinación de ambos? Esto nos lleva a plantear el tema de polarización de la onda que es importante también en aplicaciones tales como señales transmitidas por antenas, observación de luz emitida por estrellas, etc.

Supongamos el caso general de un campo eléctrico dado por:

$$\vec{E} = (A\vec{u}_x + B\vec{u}_y)e^{-ikz} \quad (3.40)$$

donde las amplitudes A y B son en general números complejos,

$$A = |A|e^{ia} \quad ; \quad B = |B|e^{ib}. \quad (3.41)$$

Vamos a estudiar diferentes casos:

- 1) A y B tienen el mismo ángulo de fase, $a = b$. Ello implica que las componentes x e y del campo están en fase y por tanto:

$$\vec{E} = (|A|\vec{u}_x + |B|\vec{u}_y) e^{-i(kz-a)} \quad (3.42)$$

y la parte real (incluyendo dependencia temporal) de esta expresión será de la forma:

$$\text{Re}(\vec{E}) = (|A|\vec{u}_x + |B|\vec{u}_y) \cos(\omega t - kz + a) \quad (3.43)$$

De cualquiera de estas expresiones deducimos que el campo eléctrico oscila un plano perpendicular al eje z e inclinado respecto del eje x un ángulo α tal que:

$$\text{tg } \alpha = \frac{|B|}{|A|} \quad (3.44)$$

Este tipo de polarización se denomina *polarización lineal*, Figura 3.5a.

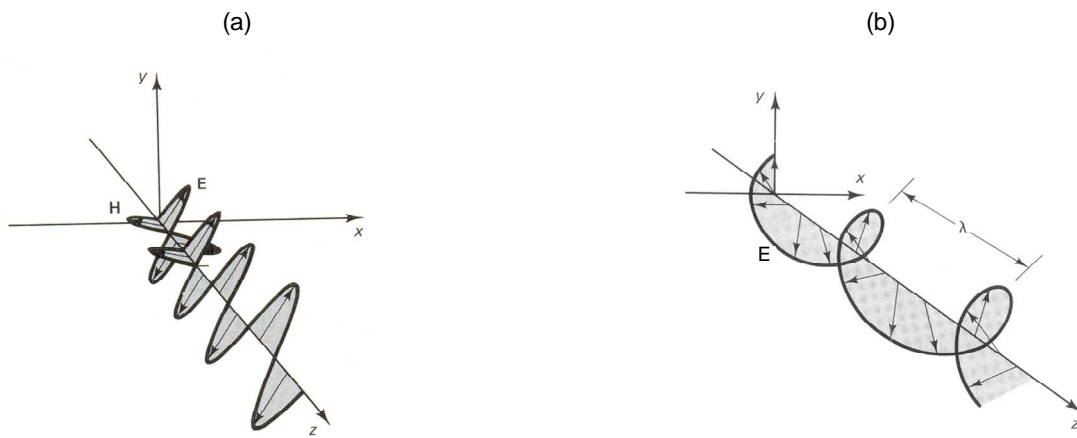


Figura 3.5.- Polarización de una onda plana: a) lineal; b) elíptica.

2) A y B tienen ángulos de fase distintos. El campo no permanece oscilando en un único plano sino que describe una elipse:

$$\vec{E} = |A|e^{i(a-kz)}\vec{u}_x + |B|e^{i(b-kz)}\vec{u}_y \quad (3.45)$$

y pasando a la representación real,

$$E_x = |A|\cos(\omega t + a - kz) \quad (3.46)$$

$$E_y = |B|\cos(\omega t + b - kz) \quad (3.47)$$

Se dice que la onda tiene *polarización elíptica*. La Figura 3.5b muestra la forma en que avanza el campo eléctrico de la onda para esta polarización.

4) Para el caso particular en que A y B tienen el mismo módulo y su diferencia de fase es $\pi/2$, la elipse \rightarrow circunferencia y se dice que la onda tiene *polarización circular*.

3.5 Densidad y flujo de energía electromagnética

Hemos visto en el Temario del Electromagnetismo I, que los campos eléctrico y magnético existentes en una región del espacio almacenan energías cuya densidad viene dada por:

$$w_e(t) = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \quad ; \quad w_m(t) = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \quad (3.48)$$

En las ecuaciones (3.48), los valores de los campos son valores instantáneos y lo mismo sucede con las densidades de energía asociadas. Esto lo podemos aplicar también a las ondas planas estudiadas pero como empleamos fasores en su estudio, estas variables se suelen caracterizar por su *valor medio integrado a lo largo de un ciclo*:

$$w_{e,av} = \frac{1}{T} \int_0^T w_e(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} dt \quad ; \quad w_{m,av} = \frac{1}{T} \int_0^T w_m(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} dt \quad (3.49)$$

Vamos a desarrollar los cálculos para la densidad de energía eléctrica. Expresamos los fasores como cantidades con parte real, E_r, D_r y parte imaginaria, E_i, D_i . Entonces, si el campo eléctrico oscila en el eje x , los campos \vec{E} y \vec{D} vienen dados por:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \text{Re}[(E_r + iE_i)e^{i\omega t}] \vec{u}_x = (E_r \cos \omega t - E_i \text{sen} \omega t) \vec{u}_x \\ \vec{D} &= \text{Re}[(D_r + iD_i)e^{i\omega t}] \vec{u}_x = (D_r \cos \omega t - D_i \text{sen} \omega t) \vec{u}_x \end{aligned} \quad (3.50)$$

y la densidad de energía instantánea:

$$w_e(t) = \frac{1}{2} [E_r D_r \cos^2 \omega t + E_i D_i \text{sen}^2 \omega t - E_i D_r \text{sen} \omega t \cos \omega t - E_r D_i \text{sen} \omega t \cos \omega t] \quad (3.51)$$

Al promediar a un ciclo tendremos en cuenta que las cantidades en las que aparece el producto de un seno por un coseno se anulan, y que el valor medio del seno cuadrado y coseno cuadrado es $T/2$:

$$w_{e,av} = \frac{1}{T} \int_0^T w_e(t) dt = \frac{1}{2T} \left[\frac{T}{2} E_r D_r + \frac{T}{2} E_i D_i \right] = \frac{1}{4} (E_r D_r + E_i D_i) \quad (3.52)$$

Mediante un cálculo análogo se llega a que la densidad media de energía magnética es:

$$w_{m,av} = \frac{1}{T} \int_0^T w_m(t) dt = \frac{1}{2T} \left[\frac{T}{2} B_r H_r + \frac{T}{2} B_i H_i \right] = \frac{1}{4} (B_r H_r + H_i B_i) \quad (3.53)$$

Se puede comprobar que se obtiene el mismo resultado, si partimos de las expresiones:

$$w_{e,av} = \frac{1}{4} \vec{E} \cdot \vec{D}^* \quad ; \quad w_{m,av} = \frac{1}{4} \vec{B} \cdot \vec{H}^* \quad (3.54)$$

El hecho de que exista una propagación implica asimismo un flujo de energía que podemos caracterizar mediante el vector de Poynting, \vec{S} :

$$\vec{S}(t) = \vec{E} \times \vec{H} \quad (3.55)$$

que nos da el flujo de energía electromagnética que atraviesa una superficie por unidad de área y unidad de tiempo. Expresado de esta forma, \vec{S} depende del instante t en que se hace la medida. Sin embargo, para campos armónicos tiene más interés caracterizar el valor medio del *flujo integrado a un ciclo*, que es el valor que nos dan los aparatos de medida. Para calcularlo, partimos de la forma explícita de los fasores de los campos; suponiendo que el campo eléctrico oscila en el eje x y tomando la parte real de las soluciones tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \text{Re} \left[(E_r + iE_i) e^{i\omega t} \right] \vec{u}_x = (E_r \cos \omega t - E_i \text{sen} \omega t) \vec{u}_x \\ \vec{H} &= \text{Re} \left[(H_r + iH_i) e^{i\omega t} \right] \vec{u}_y = (H_r \cos \omega t - H_i \text{sen} \omega t) \vec{u}_y \end{aligned} \quad (3.56)$$

El vector de Poynting en el instante t vendrá dado por:

$$\vec{S}(t) = \vec{E} \times \vec{H} = \left[E_r H_r \cos^2 \omega t + E_i H_i \text{sen}^2 \omega t - E_r H_i \text{sen} \omega t \cos \omega t - E_i H_r \text{sen} \omega t \cos \omega t \right] \vec{u}_z$$

y su valor medio en un ciclo:

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(t) dt = \left(\frac{1}{2} E_r H_r + \frac{1}{2} E_i H_i \right) \vec{u}_z \quad (3.57)$$

La ecuación (3.57) nos indica que *la energía fluye en la dirección de propagación*. También podemos llegar a este resultado partiendo directamente de los campos complejos:

$$\begin{aligned} \vec{S}_{av} &= \frac{1}{2} \text{Re} (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{1}{2} \text{Re} \left[(E_r + iE_i) \vec{u}_x \times (H_r - iH_i) \vec{u}_y \right] = \\ &= \frac{1}{2} (E_r H_r + E_i H_i) \vec{u}_z \end{aligned} \quad (3.58)$$

que coincide con la expresión obtenida en el cálculo anterior.

Estos resultados serán útiles para estudiar la energía que transportan las ondas que emiten los sistemas radiantes.

Se puede comprobar que se obtiene el mismo resultado, si partimos de la expresión:

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*)$$

Reflexión y refracción en medios dieléctricos y conductores

Supongamos el medio 1-caracterizado por los parámetros $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ - separado por una interfaz plana del medio 2, cuyos parámetros son $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$. En el medio 1 se propaga una onda plana en el sentido positivo de z y con su campo eléctrico polarizado a lo largo del eje x . La onda incide normalmente en la superficie que separa los dos medios, como se ilustra en la figura 1.

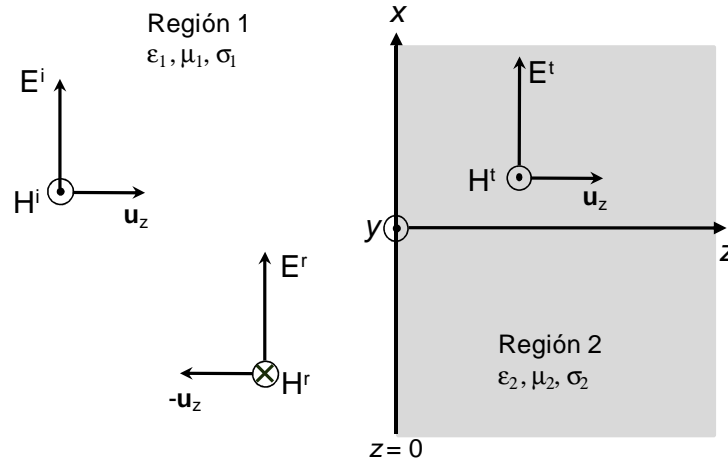


Fig. 1: Onda plana que incide \perp en la interfaz $z=0$ entre los medios 1 y 2.

Los campos asociados a la onda incidente serán:

$$E_x^i = E_{1m}^+ e^{-\gamma_1 z} \quad ; \quad H_y^i = \frac{E_{1m}^+}{\eta_1} e^{-\gamma_1 z}$$

siendo $\gamma_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ la constante de propagación en la región 1, mientras que η_1 es la impedancia de la onda en dicho medio. Parte de la onda pasará al medio 2 a través de la interfaz, dando lugar a los campos transmitidos o refractados:

$$E_x^t = E_{2m}^+ e^{-\gamma_2 z} \quad ; \quad H_y^t = \frac{E_{2m}^+}{\eta_2} e^{-\gamma_2 z}$$

siendo γ_2 y η_2 la constante de propagación y la impedancia de la onda en el medio 2. Por ser incidencia normal tanto E como H tienen sus componentes tangenciales a la superficie; imponiendo las condiciones de contorno se ve que no es posible cumplirlas a menos que se añadan las componentes de los campos reflejados que se muestran en la figura 1 propagándose en el medio 1 y en el sentido de z negativo:

$$E_x^r = E_{1m}^- e^{\gamma_1 z} \quad ; \quad H_y^r = -\frac{E_{1m}^-}{\eta_1} e^{\gamma_1 z}$$

Ahora podemos escribir las condiciones de contorno para las componentes tangenciales de los campos. Por ejemplo la del campo eléctrico se conserva y por tanto:

$$\left(E_x^i + E_x^r\right)\Big|_{z=0} = E_x^t\Big|_{z=0} \quad \rightarrow \quad E_{1m}^+ + E_{1m}^- = E_{2m}^+$$

Análogamente, imponiendo la continuidad de la componente tangencial de H, tenemos:

$$\left(H_y^i + H_y^r\right)\Big|_{z=0} = H_y^t\Big|_{z=0} \quad \rightarrow \quad \frac{E_{1m}^+}{\eta_1} - \frac{E_{1m}^-}{\eta_1} = \frac{E_{2m}^+}{\eta_2}$$

Eliminando entre las dos ecuaciones la parte de onda reflejada, E_{1m}^- , se llega a:

$$E_{2m}^+ = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} E_{1m}^+$$

El coeficiente de proporcionalidad entre la onda refractada y la incidente se denomina *coeficiente de transmisión*:

$$T = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$$

Resolviendo para hallar la amplitud de la onda reflejada se obtiene:

$$E_{1m}^- = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} E_{1m}^+$$

El coeficiente de proporcionalidad entre la onda reflejada y la incidente se denomina *coeficiente de reflexión*:

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2}$$

Observemos que se cumple la relación:

$$1 + \Gamma = T$$

Ambos coeficientes son en general complejos y además $0 \leq \Gamma \leq 1$.

Analicemos el caso especial en que el medio 1 es un dieléctrico perfecto, $\sigma_1 = 0$, y el medio 2 un conductor perfecto, $\sigma_2 \rightarrow \infty$. La impedancia del medio 2 será:

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2 - i \frac{\sigma_2}{\omega}}} = 0 \quad \text{para } \sigma_2 \rightarrow \infty$$

Sustituyendo este resultado en los coeficientes de reflexión y transmisión queda:

$$T = 0 \quad ; \quad \Gamma = -1$$

El valor nulo del coeficiente de transmisión implica que la onda no se propaga en el medio 2; ello es coherente con los resultados que vimos en un punto anterior, donde obtuvimos una profundidad de penetración nula también.

Por tanto sólo habrá onda incidente y reflejada en el medio 1, de forma que:

$$E_{1m}^- = \Gamma E_{1m}^+ = -E_{1m}^+ \quad (\text{suponemos amplitudes reales})$$

La onda reflejada tiene la misma amplitud que la onda incidente y fase opuesta. El campo resultante de la superposición de ambos será (recordemos que $\sigma_1 = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0$):

$$\vec{E}^{tot} = \vec{E}^i + \vec{E}^r = E_{1m}^+ e^{-i\beta_1 z} \vec{u}_x + E_{1m}^- e^{i\beta_1 z} \vec{u}_x$$

Sustituyendo la amplitud de la reflejada,

$$\vec{E}^{tot} = E_{1m}^+ (e^{-i\beta_1 z} - e^{i\beta_1 z}) \vec{u}_x = -2i E_{1m}^+ \text{sen} \beta_1 z \vec{u}_x$$

Notemos que en la superficie de separación el campo total es nulo y se cumple la condición de contorno impuesta.

Para ver qué características presenta la propagación, procedemos a calcular la parte real:

$$\vec{E}^{tot}(z, t) = \text{Re}(e^{i\omega t} \vec{E}^{tot}) = E_{1m}^+ (e^{-i\beta_1 z} - e^{i\beta_1 z}) \vec{u}_x = 2E_{1m}^+ \text{sen} \beta_1 z \text{sen} \omega t \vec{u}_x$$

En la Figura 2 se muestra el campo resultante. Concluimos que se ha formado una onda cuya amplitud es el doble de la del campo incidente. Estos máximos de amplitud tienen lugar en determinadas posiciones ($z = \lambda/4, 3\lambda/4, \text{etc.}$) y determinados instantes

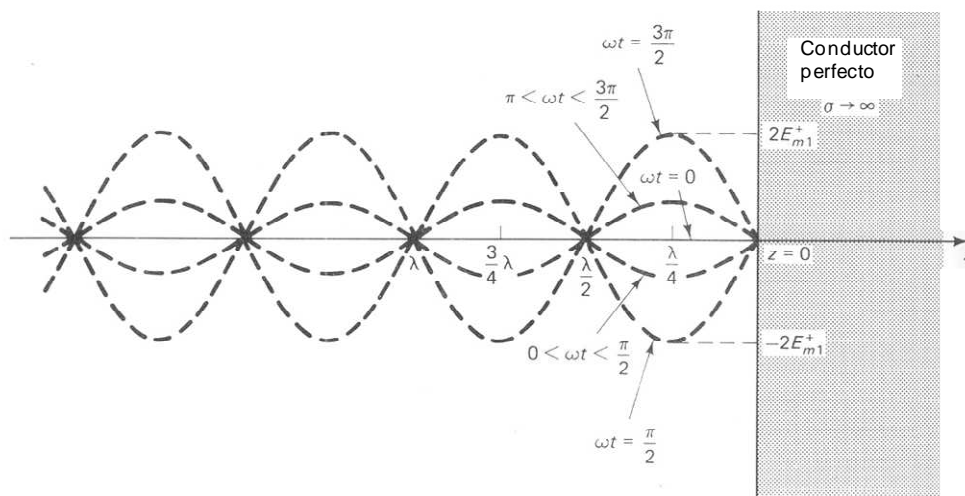


Figura 2 Variación del campo eléctrico en las proximidades de una pared perfectamente conductora en función de z y para diversos intervalos ωt .

($\omega t = \pi/2, 3\pi/2, \text{etc.}$) en los que la onda incidente y reflejada interfieren constructivamente. Por el contrario en las posiciones $z = \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2, \text{etc.}$, las ondas siempre interfieren destructivamente y el campo es nulo en todo instante.

Debido a estas características no existe propagación como tal sino que se ha formado una onda *estacionaria*.

El campo magnético lo podemos hallar fácilmente siguiendo un procedimiento análogo:

$$\vec{H}^{tot} = \vec{H}^i + \vec{H}^r = \left(\frac{E_{1m}^+}{\eta_1} e^{-\beta_1 z} - \frac{E_{1m}^-}{\eta_1} e^{+\beta_1 z} \right) \vec{u}_y$$

Sustituyendo $E_{1m}^- = -E_{1m}^+$ queda:

$$\vec{H}^{tot} = \frac{E_{1m}^+}{\eta_1} (e^{-\beta_1 z} + e^{+\beta_1 z}) \vec{u}_y = 2 \frac{E_{1m}^+}{\eta_1} \cos \beta_1 z \vec{u}_y$$

Incluyendo la variación temporal y tomando la parte real queda finalmente:

$$\vec{H}^{tot}(z, t) = 2 \frac{E_{1m}^+}{\eta_1} \cos \beta_1 z \cos \omega t \vec{u}_y$$

Se trata de una señal estacionaria con valor máximo en $z = 0, \lambda/2, \lambda, \text{etc.}$, y nulos en $z = \lambda/4, 3\lambda/4, \text{etc.}$, como se ilustra en la Figura 3.

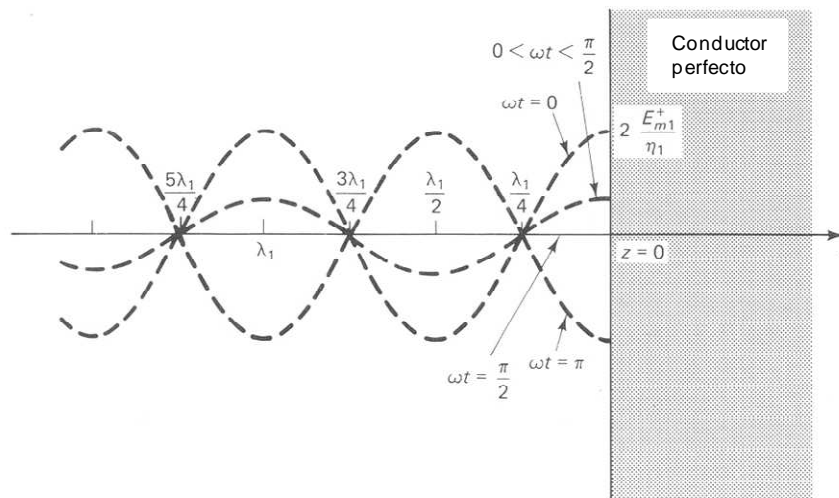


Figura 3. Variación del campo magnético en las proximidades de una pared perfectamente conductora en función de z y para diversos intervalos ωt .

Comparando las Figuras 2 y 3 vemos que existe un desfase de 90° entre E y H .

Tema 3. Ondas planas monocromáticas.

Campos armónicos. Representación fasorial. Ondas planas uniformes monocromáticas. Propagación en dieléctricos y conductores. Polarización de ondas planas. Densidad y flujo de energía electromagnética.

Problemas

1.- ¿En qué tipo de medio: a) vacío; b) dieléctrico perfecto; c) dieléctrico con pérdidas; d) conductor perfecto, se propaga una onda electromagnética con un campo eléctrico del tipo $\vec{E} = 10e^{-2z}\cos(10^8t - 3z)\vec{u}_x$? Calcule el campo magnético asociado a dicha onda teniendo en cuenta que el medio es no magnético.

2.- Una onda electromagnética plana de frecuencia $f = 5$ MHz se propaga por un medio de parámetros $\sigma = 4$ S/m, $\mu_r = 1$ y $\epsilon_r = 72$. El campo eléctrico de la onda viene dado por $\vec{E} = E_0e^{-\gamma z}\vec{u}_x + E_0e^{-\gamma z}\vec{u}_y$. Determinar: a) la constante de atenuación, de fase de propagación y la velocidad de fase a la frecuencia de la onda; b) el campo \vec{H} asociado al campo \vec{E} ; c) el valor medio de la densidad de potencia y la dirección en la que se propaga.

3.- Una onda plana, con polarización lineal y con frecuencia 10 MHz se propaga en un medio de permeabilidad μ_0 cuyo índice de refracción es 1.5. Un carrete de prueba, cuadrado de lado $a = 10$ cm, que tiene 100 vueltas, se orienta de modo que detecta la máxima fem inducida posible. Ésta resulta ser de 250 mV. Calcular:

- a) Los valores instantáneos de los campos.
- b) La intensidad media de la onda.
- c) Si se pudiese aumentar suficientemente la frecuencia de la onda, ¿podría darse el caso de que la fem detectada con la misma orientación que antes era máxima fuese ahora mínima? ¿Qué valor debería tener la frecuencia correspondiente?

4.- El campo eléctrico de una onda plana de frecuencia 150 MHz tiene una amplitud de 100 V/m en la dirección x , y se propaga en un medio con $\mu_r = 1$ e impedancia de onda $\eta = 100 \Omega$. Si la onda incide normalmente sobre un plano conductor perfecto:

- a) Analizar la formación de una onda estacionaria por superposición de las ondas incidente y reflejada.
- b) Determinar la posición de los dos primeros nulos del campo eléctrico frente al plano conductor. Hallar la posición del primer nulo del campo magnético.
- c) Hallar la magnitud de los campos \vec{E} y \vec{H} a una distancia $z = -2$ m del plano.

5.- La constante solar es la densidad de potencia radiante que llega a la Tierra procedente del Sol, o sea $P/4\pi R^2$, siendo P la potencia solar y R la distancia Tierra-Sol.

Su valor es 1.35 kW/m^2 . Aproximando la radiación solar por una onda plana, calcular los campos \vec{E} y \vec{H} así como el aprovechamiento de esta energía en los siguientes casos:

a) Para calefacción y agua caliente en paneles térmicos con un 70% de rendimiento, estimando la superficie necesaria para abastecer un circuito calefactor de 5 kW.

b) Para el funcionamiento de un televisor de 200 W, mediante paneles fotovoltaicos con rendimiento del 20%, estimando la superficie necesaria.

Supóngase en ambos casos que la inclinación de los rayos solares es de 30° respecto a la vertical.

6.- Demostrar que la profundidad de penetración en un mal conductor es independiente de la frecuencia. Hallar la profundidad de penetración en agua pura ($\rho = 2.5 \times 10^5 \Omega\text{m}$; $\varepsilon = 80.1 \varepsilon_0$; $\mu = \mu_0$)

7.- Considerando que el campo eléctrico asociada a una onda plana electromagnética viene dada por: $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \sqrt{\varepsilon\mu}\omega z) \vec{u}_x + E_0 \sin(\omega t - \sqrt{\varepsilon\mu}\omega z) \vec{u}_y \left(\frac{V}{m}\right)$. Calcule el campo magnético \vec{H} y el vector de Poynting para esta onda electromagnética.

8.- Una onda electromagnética plana se propaga en la dirección OZ en un buen conductor de conductividad σ que ocupa el semiespacio $z \geq 0$. Calcular la potencia total disipada por metro cuadrado en ese semiespacio y demostrar que es igual a $\langle \vec{S} \rangle$ en $z = 0$, comprobando así el teorema de Poynting.

9.- Una onda electromagnética, plana y monocromática, se propaga en un buen conductor ($\sigma \gg \omega\varepsilon$) siguiendo la dirección positiva del eje OZ , con una velocidad de $112 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. La profundidad de penetración de la onda en el medio es $\delta = 11.2 \times 10^{-2} \text{ m}$, y la impedancia intrínseca de dicho medio es $|\eta| = 1.265 \times 10^{-4} \Omega$. Si el valor máximo de la intensidad del campo eléctrico, medido en $z = 0$, es de $1 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$, se desea saber:

a) La expresión de los vectores \vec{E} , \vec{H} y \vec{S} , en función de la posición y el tiempo.

b) Los valores de ω , σ y μ .

c) El valor medio del vector de Poynting, \vec{S} , en los puntos $z = 0$ y $z = \delta$.

d) La potencia media disipada por efecto Joule en un paralelepípedo rectangular con bases cuadradas de $1 \times 1 \text{ m}^2$ en $z = 0$ y $z = \delta$.

10.- Existe una continua discusión sobre los peligros para la salud humana debidos a la exposición a una radiación electromagnética.

a) El estándar de seguridad utilizado en USA para seguridad personal en un entorno de microondas es que la densidad de potencia sea inferior a 10 mW/cm^2 . Calcular el correspondiente estándar de seguridad en términos de la intensidad de campo eléctrico y en términos de la intensidad de campo magnético.

b) Si se estima que en un día soleado, la tierra recibe una densidad de energía radiada del sol de valor 1.3 kW/m^2 , y suponiendo ondas monocromáticas planas, calcular las amplitudes equivalentes de los vectores \vec{E} , y \vec{H} .

11.- Una onda plana que se propaga en un medio con $\epsilon_r = 2$, $\mu_r = 1$, tiene un campo magnético caracterizado por $\vec{H} = 0.2 \cos(\omega t - \beta z) \vec{u}_y \left(\frac{A}{m}\right)$. Encuentre la potencia que atraviesa:

- a) un cuadrado de lado 10 cm que está en el plano $x + z = 1$
- b) un disco de radio 5 cm que está en el plano $z = 1$.

SOLUCIONES EJERCICIOS TEMA 3. Propagación de ondas en la dirección del eje z.

1.- SOLUCIÓN

El medio en el que se propaga la onda es un dieléctrico con pérdidas ya que la ecuación para el campo eléctrico contiene un factor exponencial del tipo $e^{-\alpha z}$. De la ecuación del campo eléctrico podemos extraer el valor de α , β y ω .

$$\alpha = 2 \text{ m}^{-1} \text{ y } \beta = 3 \text{ m}^{-1}. \quad \omega = 10^8 \text{ rad/s.}$$

A partir de las expresiones de α y β podemos calcular el cociente $\sigma/\omega\varepsilon$.

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}} \left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} \right)^{1/2} ; \quad \beta = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} \right)^{1/2}$$

Dividimos α entre β teniendo en cuenta además sus valores numéricos.

$$\frac{2}{3} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} \right)^{1/2}}{\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} \right)^{1/2}} ; \quad \frac{4}{9} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}} ;$$

$$4 + 4 \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} = -9 + 9 \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} ; \quad 5 \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} = 13$$

$$\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2 = 5,76 ; \quad \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = 2,4$$

Del valor de α , sabiendo cuánto vale el cociente $\sigma/\omega\varepsilon$ y ω y que el medio es no magnético.

$$2 = \alpha = \frac{10^8}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0\varepsilon} \left(-1 + \sqrt{1 + (2,4)^2} \right)^{1/2} ; \quad \varepsilon = 3,98 \cdot 10^{-10} \frac{\text{F}}{\text{m}} ; \quad \varepsilon_r = 45$$

La impedancia del medio es compleja ya que $\alpha \neq 0$.

$$|\eta| = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}}{\left(1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right)^{1/4}} = 34,9 \Omega ; \quad \text{tg}(2\theta_n) = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = 2,4 ; \quad \theta_n = 0,59 \text{ rad}$$

El campo eléctrico está polarizado según la dirección \vec{u}_x y la onda se propaga según la dirección \vec{u}_z , por lo que el campo \vec{H} se encuentra polarizado según la dirección \vec{u}_y y vendrá dado por la expresión:

$$\vec{H} = -0,29 \cdot e^{-2z} \cos(10^8 t - 3z - 0,59) \vec{u}_y \left(\frac{A}{m} \right)$$

2.- SOLUCIÓN

$$f = 5 \text{ MHz}; \quad \sigma = 4 \text{ S/m}; \quad \mu_r = 1 \text{ y } \epsilon_r = 72$$

El campo eléctrico de la onda es $\mathbf{E} = E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{u}_x + E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{u}_y$ (se ha omitido la dependencia temporal $e^{i\omega t}$); se propaga en el sentido $z > 0$.

a) Constantes de atenuación y de fase de propagación: $\gamma = \alpha + i\beta$

$$\alpha = \frac{\omega \sqrt{\mu \epsilon}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} - 1 \right]^{1/2} = 8.86 \text{ m}^{-1} \quad ; \quad \beta = \frac{\omega \sqrt{\mu \epsilon}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} + 1 \right]^{1/2} = 8.9 \text{ m}^{-1}$$

Velocidad de fase:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = 3.53 \times 10^6 \text{ m/s}$$

b) La relación entre los campos es por medio de la impedancia compleja η :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{E}}{\eta} = \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - i \frac{\sigma}{\omega}}}}$$

En nuestro caso,

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - i \frac{\sigma}{\omega}}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 \right]^{1/4}} e^{i\phi} \quad \text{con} \quad \phi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right) = 0.78; \quad \eta = 3.14 e^{i0.78}$$

El campo magnético tiene un desfase respecto al campo eléctrico (retraso) de valor $\phi = 0.78$ rad. Teniendo además en cuenta que $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ ha de ser un vector en la dirección de propagación, el campo magnético viene dado por:

$$\mathbf{H} = \frac{E_0}{3.14} e^{-\gamma z} e^{-i0.78z} \mathbf{u}_y - \frac{E_0}{3.14} e^{-\gamma z} e^{-i0.78z} \mathbf{u}_x$$

c) Valor medio de la densidad de potencia:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{av} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ E_0 e^{-(\alpha+i\beta)z} & E_0 e^{-(\alpha+i\beta)z} & 0 \\ -\frac{E_0}{3.14} e^{-(\alpha-i\beta)z} e^{i0.78z} & \frac{E_0}{3.14} e^{-(\alpha-i\beta)z} e^{i0.78z} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{E_0^2}{3.14} e^{-2\alpha z} \operatorname{Re}(e^{i0.78z}) \mathbf{u}_z = \frac{E_0^2}{3.14} e^{-2\alpha z} \cos(0.78z) \mathbf{u}_z \end{aligned}$$

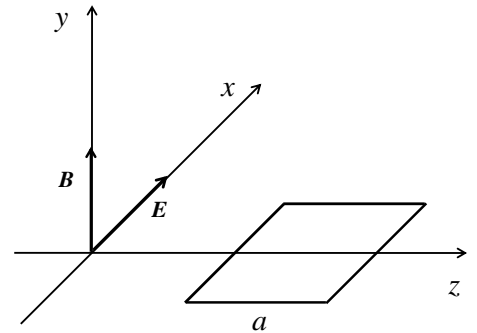
3.- SOLUCIÓN

Índice de refracción $n = \sqrt{\epsilon_r} = 1.5$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3 \times 10^8 / 1.5}{10^7} = 20 \text{ m}$$

$$\frac{a}{\lambda} = \frac{0.1}{20} = 0.005 \ll 1$$

$$N = 100 \text{ vueltas}; A = a^2 = 0.01 \text{ m}^2$$



Si el campo magnético está orientado en la dirección del eje y , para inducir máxima fem el carrete ha de estar situado en el plano xz , como se muestra en la figura.

a) Como $a \ll \lambda$ podemos considerar el campo magnético constante en toda la sección de la espira y calcular el flujo magnético como producto del campo por el área. La fem inducida en el carrete será:

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_m}{dt} = -NA\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = -iNa^2\mu_0 \frac{E_0\omega}{\eta} e^{i(\omega t - kz)}$$

y su valor máximo:

$$\mathcal{E}_{\max} = Na^2\mu_0 \frac{E_0\omega}{\eta} = 100 \times 0.01 \times 4\pi \times 10^{-7} \cdot \frac{2\pi \times 10^7}{377/1.5} E_0 = 0.25 \text{ V}$$

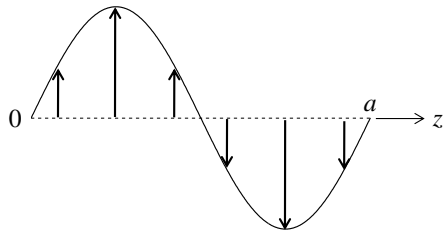
Operando se obtienen las amplitudes de los campos eléctrico y magnético:

$$E_0 = 0.796 \text{ V/m} ; H_0 = \frac{E_0}{\eta} = 3.166 \times 10^{-3} \text{ A/m}$$

b) Valor medio del módulo del vector de Poynting:

$$|\vec{S}_{av}| = \frac{1}{2} \left| \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \right| = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{1}{2} 0.796 \times 3.166 \times 10^{-3} = 1.26 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2$$

c) Si $f \uparrow$, $\lambda \downarrow$, puede ocurrir que a lo largo del carrito el campo magnético tome los mismos valores positivos que negativos



$$\Phi_m = \int_{\text{carrete}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \frac{d\Phi_m}{dt} = 0$$

y la fem inducida es nula.

La condición para que esto ocurra es $\lambda = a = 0.1 \text{ m}$

$$\text{Por tanto, } \frac{v}{f} = \frac{c}{1.5f} = 0.1 \Rightarrow f = 2 \times 10^9 \text{ Hz} = 2 \text{ GHz.}$$

4.- SOLUCIÓN

$f = 150 \text{ MHz}$, $E_0 = 100 \text{ V/m}$, $\mu_r = 1$, $\eta = 100 \Omega$. La onda incide normalmente sobre un plano conductor perfecto.

a) Calculamos la permitividad relativa del medio:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = 100 \Omega \rightarrow \epsilon_r = 14.21$$

La constante de propagación y la longitud de onda vendrán dadas por:

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r} = 11.84 \text{ m}^{-1} \quad ; \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 0.53 \text{ m}$$

b) Los dos primeros nulos del campo eléctrico tienen lugar en

$$z = 0 \text{ y } z = \frac{\lambda}{2} = 0.27 \text{ m}$$

Para el campo magnético el primer nulo se encuentra en:

$$z = \frac{\lambda}{4} = 0.135 \text{ m}$$

c) De acuerdo con el estudio de campos estacionarios formados por incidencia normal en un conductor perfecto, las expresiones de los campos son:

$$\vec{E} = 200 \sin(11.84z) \sin(9.4 \times 10^8 t) \vec{u}_x$$

$$\vec{H} = 2 \cos(11.84z) \cos(9.4 \times 10^8 t) \vec{u}_y$$

La amplitud del campo magnético en el origen es:

$$|\vec{H}(0, t)| = 2 \cos(9.4 \times 10^8 t) \text{ A/m}$$

En la posición $z = -2$ m:

$$|\vec{H}(-2, t)| = 2 \cos(-23.68) \cos(9.4 \times 10^8 t) = 1.83 \cos(9.4 \times 10^8 t) \text{ A/m}$$

5.- SOLUCIÓN

Para una onda plana propagándose en el aire $|\vec{H}| = \frac{|\vec{E}|}{\eta_0}$; $\eta_0 = 377 \Omega$

$$\text{Contante solar} \equiv \vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \frac{1}{2} \frac{|\vec{E}|^2}{\eta_0}$$

Por tanto,

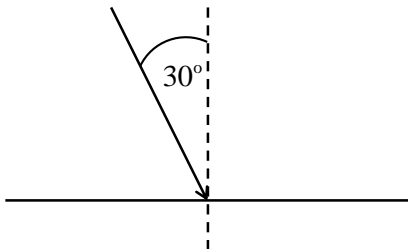
$$|\vec{E}|^2 = 2\eta_0 \vec{S}_{av} = 2 \cdot 377 \cdot 1350 \Rightarrow |\vec{E}| = 1009 \text{ V/m}$$

$$|\vec{H}| = |\vec{E}| \eta_0 = 2.7 \text{ A/m}$$

a) Calefacción con 70% de rendimiento:

Si la incidencia es normal se necesitan $\frac{5}{0.7} = 7.14$ kW, que se obtienen de una

$$\text{superficie } A = \frac{7.14}{1.35} = 5.29 \text{ m}^2$$



Si la inclinación de los rayos solares es de 30° , hay que proyectar sobre la normal. Se ve que sólo contribuye la fracción

$$1.35 \cos 30^\circ$$

$$\text{Por tanto } A' = \frac{7.14}{1.35 \cos 30^\circ} = 6.1 \text{ m}^2$$

b) Televisor con 20% de rendimiento:

Razonando de forma análoga, se necesitan $\frac{200}{0.2} = 1000\text{W} = 1\text{ kW}$ que se obtienen de una superficie:

$$A = \frac{1}{1.35 \cos 30^\circ} = 0.86 \text{ m}^2$$

6.- SOLUCIÓN

La constante de atenuación viene dada por: $\alpha = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} \right)^{1/2}$

Como estamos considerando el caso en el que se tenga un mal conductor: $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$ de tal forma que podemos utilizar la aproximación de Taylor

$$\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{x}{2} \text{ porque } x = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$$

$$\alpha \approx \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left(-1 + 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 \right)^{1/2} = \omega \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{2} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right) = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

La longitud de penetración viene dada por: $\delta = \frac{1}{\alpha}$

$$\delta = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} = 2\rho \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} = 2 \cdot 2,5 \cdot 10^5 \cdot \sqrt{\frac{80,1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{4\pi \cdot 10^{-7}}} = 11,9 \text{ km}$$

7.- SOLUCIÓN

Teniendo en cuenta que la onda se está propagando en un medio sin pérdidas en la dirección positiva del eje z, el campo magnético vendrá dado por:

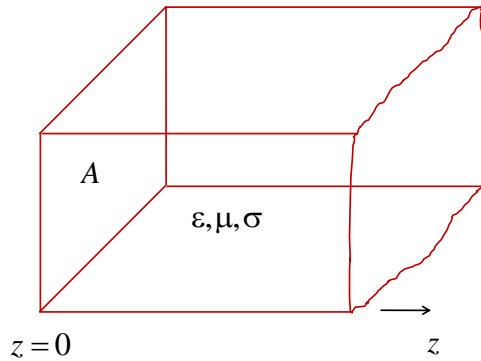
$$\vec{H} = \frac{E_0}{\eta} \left[-\text{sen}(\omega t - \sqrt{\epsilon\mu}\omega z) \vec{u}_x + \text{cos}(\omega t - \sqrt{\epsilon\mu}\omega z) \vec{u}_y \right] \left(\frac{\text{A}}{\text{m}}\right)$$

Para calcular el vector de Poynting: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

$$\vec{S} = \frac{E_0^2}{\eta} \left[\text{cos}^2(\omega t - \sqrt{\epsilon\mu}\omega z) + \text{sen}^2(\omega t - \sqrt{\epsilon\mu}\omega z) \right] \vec{u}_z = \frac{E_0^2}{\eta} \vec{u}_z (\text{W/m}^2)$$

8.- SOLUCIÓN

Onda plana propagándose en un buen conductor: $\sigma \gg \omega\epsilon$.



$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}$$

$$\phi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} e^{i\pi/4}$$

Los campos vienen dados por:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \beta z)} e^{-\alpha z} \quad ; \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \beta z)} e^{-\alpha z} e^{-i\pi/4}$$

La densidad media de potencia en $z = 0$ será:

$$\vec{S}_{av} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\vec{E} \times \vec{H}^* \right) \Big|_{z=0} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{|\eta|} \cos(\pi/4) \vec{u}_z = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{E_0^2}{\sqrt{\omega\mu/\sigma}} \vec{u}_z$$

Y su módulo:

$$|\vec{S}_{av} \Big|_{z=0}| = \sqrt{\frac{\sigma}{8\omega\mu}} E_0^2 \quad (\text{W/m}^2)$$

Por otra parte, la potencia media disipada en un paralelepípedo de sección A (ver figura) será:

$$P_{av} = \int_V \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\vec{J} \cdot \vec{E}^*) dV = A \int_0^\infty \frac{1}{2} \sigma E_0^2 e^{-2\alpha z} dz = \frac{\sigma A E_0^2}{2} \left[\frac{e^{-2\alpha z}}{-2\alpha} \right]_0^\infty = \frac{\sigma A E_0^2}{2} \frac{1}{2\alpha}$$

Sustituyendo α en función de los parámetros del medio y dividiendo por el área:

$$\frac{P_{av}}{A} = \frac{\sigma E_0^2}{4} \frac{1}{\sqrt{\omega\mu\sigma/2}} = \sqrt{\frac{\sigma}{8\omega\mu}} E_0^2 \quad (\text{W/m}^2)$$

Por tanto, la onda se propaga atenuándose y disipando esta energía en forma de calor por efecto Joule.

9.- SOLUCIÓN

Onda plana propagándose en un buen conductor: $\sigma \gg \omega\epsilon$.

$$\delta = 11.2 \times 10^{-2} \text{ m}; \quad |\eta| = 1.265 \times 10^{-4} \Omega; \quad E_0(z=0) = 1 \text{ V/m.}$$

a) En la aproximación de buen conductor $\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}$, $\phi = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right) = \frac{\pi}{4}$ y

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}} e^{i\pi/4}.$$

Nos dan $\delta \rightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{\delta} = 8.93 \text{ m}^{-1}$; y los campos vienen dados por

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - \beta z)} e^{-\alpha z} \vec{u}_x$$

$$\vec{H} = H_0 e^{i(\omega t - \beta z)} e^{-\alpha z} \vec{u}_y; \quad H_0 = \frac{E_0}{\eta} = E_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\mu\omega}} e^{-i\pi/4}$$

Valor instantáneo del vector de Poynting:

$$\vec{S} = \text{Re}(\vec{E}) \times \text{Re}(\vec{H})$$

b) La velocidad de fase es 112 m/s. Junto con los datos del apartado a) se tiene:

$$\omega = v\beta = \frac{v}{\delta} = \frac{112}{11.2 \times 10^{-2}} = 10^3 \text{ s}^{-1}; \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{500}{\pi} \text{ Hz.}$$

$$|\eta| \cdot \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \cdot \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}; \quad \sigma = \frac{\sqrt{2}}{|\eta| \cdot \delta} = \frac{\sqrt{2}}{1.265 \times 10^{-4} \cdot 11.2 \times 10^{-2}} = 99817.4 \text{ S/m}$$

$$\mu = \frac{2\alpha^2}{\sigma\omega} = 1.6 \times 10^{-6} \text{ H/m}$$

c) Densidad media de potencia:

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{|\eta|} \cos(\pi/4) e^{-2\alpha z} \vec{u}_z$$

$$\vec{S}_{av}(z=0) = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{|\eta|} \cos(\pi/4) \vec{u}_z; \quad \vec{S}_{av}(z=\delta) = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{|\eta|} \cos(\pi/4) e^{-2} \vec{u}_z$$

d) Potencia disipada = flujo del vector de Poynting:

$$-\int_{z=0}^{z=\delta} \vec{S}_{av} \cdot d\vec{S} = -1 \times 1 \left[\vec{S}_{av} \right]_0^{\delta} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{|\eta|} \cos(\pi/4) (1 - e^{-2}) = 2416.6 \text{ W}$$

10.- SOLUCIÓN

a) La densidad media de potencia viene dada por:

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \quad ; \quad |\vec{S}_{av}| = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta_0} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{377} \quad \rightarrow \quad E_0 = \sqrt{754 |\vec{S}_{av}|}$$

El límite de densidad de potencia es $10 \text{ mW/cm}^2 = 10 \cdot 10^{-3} / 10^{-4} \text{ W/m}^2 = 100 \text{ W/m}^2$.

Por tanto el límite para E y H será:

$$E_{0\text{max}} = \sqrt{754 \times 100} = 274.6 \text{ V/m} \quad ; \quad H_{0\text{max}} = \frac{E_{0\text{max}}}{377} = 0.728 \text{ A/m}$$

b) En un día soleado $|\vec{S}_{av}| = 1300 \text{ W/m}^2 \Rightarrow E_0 = 990 \text{ V/m} \quad ; \quad H_0 = 2.63 \text{ A/m}$

Son valores muy superiores a los límites recomendados.

11.- SOLUCIÓN

El campo \vec{H} no presenta ningún factor exponencial del tipo $e^{-\alpha z}$ por lo que la onda se está propagando en un medio sin pérdidas, $\sigma = 0$. La impedancia del medio es real y viene dada por:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 266,4 \Omega$$

La onda se propaga según la dirección $+\vec{u}_z$ estando el campo magnético polarizado según el eje y . El campo eléctrico está por tanto polarizado según la dirección \vec{u}_x y vendrá dado por: $\vec{E} = 0.2 \cdot 266,4 \cdot \cos(\omega t - \beta z) \vec{u}_x = 53,3 \cdot \cos(\omega t - \beta z) \vec{u}_x \left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right)$

El vector de Poynting viene dado por:

$$\vec{S} = 0.2^2 \eta \cos^2(\omega t - \beta z) \vec{u}_z \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right) \quad \text{y su valor medio es: } \vec{S}_{ave} = \frac{0.2^2 \cdot 266}{2} \vec{u}_z \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right) = 5,3 \vec{u}_z \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right)$$

a) El vector normal al plano $x + z = 1$ es $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1)$ y $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$. La potencia que atraviesa un cuadrado de lado 10 cm que está en el plano $x + z = 1$ viene dada por:

$$\int_{\text{cuadrado}} \vec{S}_{ave} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{cuadrado}} 5,3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dS = 5,3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (0,1 \times 0,1) = 0,038 \text{ W}$$

b) El vector normal al plano $z = 1$ es $\vec{n} = (0, 0, 1)$ y $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$. La potencia que atraviesa un disco de radio 5 cm que está en dicho plano $x = 1$ viene dada por:

$$\int_{\text{disco}} \vec{S}_{\text{ave}} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{disco}} 5,3 \cdot dS = 5,3 \cdot (\pi \times 0,05^2) = 0,042 \text{ W}$$

Tema 4: Ondas guiadas

Introducción. Modos TEM, modos TE y modos TM. Líneas de transmisión (láminas plano paralelas y coaxial). Guía de onda rectangular. Cavidades resonantes.

Introducción

Una onda electromagnética lleva asociada una densidad de potencia (vector de Poynting) que se propaga en el espacio libre a la velocidad de la luz. Esta densidad de potencia es muy baja a grandes distancias, por lo que la transmisión desde una fuente a un receptor por el espacio libre es muy ineficiente, incluso utilizando una antena altamente direccional. Para una transmisión eficiente de potencia hay que guiar la onda desde el emisor al receptor.

El guiado de ondas se puede hacer mediante líneas de transmisión (formadas por dos o más conductores) o por guías de ondas (formadas por un único conductor). En este Tema no entraremos en la propagación a través de guías dieléctricas (fibras ópticas).

En el espacio libre, la estructura de campos de una onda electromagnética corresponde a una TEM (transversal electromagnética), donde no hay componentes de los campos E y H en la dirección de propagación.

En la propagación de ondas guiadas, el estudio es más complejo ya que las condiciones de contorno de los campos en las líneas y en las guías se pueden satisfacer con distribuciones de campos que tienen componentes en la dirección de propagación.

Las líneas de transmisión son capaces de propagar campos EM con una configuración igual a la de una onda plana, es decir, pueden propagar ondas TEM. En las guías de onda, por el contrario no se pueden satisfacer todas las condiciones de contorno en los conductores cuando las 2 componentes E_z y H_z de los campos son nulas (suponiendo que la propagación se realiza a lo largo del eje z). Las configuraciones de campo (que se suelen denominar MODOS) corresponden a modos TE (con $E_z = 0$) o bien a modos TM (con $H_z = 0$).

Una línea de transmisión puede propagar también modos TE o modos TM, sin embargo salvo aplicaciones muy específicas, su uso está prácticamente restringido a propagación de modos TEM. La ventaja de este sistema de transmisión es que permite la propagación de cualquier valor de frecuencia de la señal (incluso DC!!) y su estudio es más sencillo que en guías, ya que se puede estudiar en términos de ondas de voltaje y corriente asociados unívocamente a los campos E y H respectivamente. Esta correspondencia biunívoca entre $E—V$ y $H—I$ se debe a que la configuración de campos existente en una línea de transmisión en cualquier plano transversal es exactamente igual a la correspondiente en el caso

electrostático entre dos conductores con $\pm V$ y circulando corrientes $\pm I$. Es posible entonces aplicar toda la teoría de circuitos.

En guías de onda, la configuración de campos en su interior es muy distinta a la de una onda plana y no es posible un análisis circuital. El análisis hay que hacerlo expresamente resolviendo las ecuaciones de Maxwell. El análisis demuestra que hay un número doblemente infinito de soluciones que satisfacen las condiciones de contorno. Este número doblemente infinito se identifica mediante dos subíndices m y n (TE_{mn} , TM_{mn}) asociados a los lados ancho y estrecho de la guía (para guías rectangulares) o a las variaciones azimutales y radiales (en las guías cilíndricas). La configuración de los modos TE y TM da lugar a la existencia de frecuencias de corte (para frecuencias de la señal inferiores a la de corte no hay propagación) dependientes de la geometría de la línea y del medio existente en su interior.

Tanto las líneas como las guías se caracterizan por su simetría traslacional, es decir, en cualquier plano a lo largo de la dirección de propagación, la sección transversal siempre presenta la misma geometría.

4.1 Modos TEM, modos TE y modos TM

Suponemos que la propagación se realiza a lo largo del eje z dando lugar a un problema con simetría de traslación en dicha dirección. La ventaja de esta hipótesis es que, para campos armónicos, podemos expresar las soluciones en la forma:

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z, t) &= \vec{E}(x, y) e^{i\omega t - \gamma z} \\ \vec{H}(x, y, z, t) &= \vec{H}(x, y) e^{i\omega t - \gamma z}\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde γ es la *constante de propagación*, en general compleja:

$$\gamma = \alpha + i\beta \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\gamma \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \gamma^2\tag{4.2}$$

Para regiones donde no hay fuentes, la ley de Faraday se expresa como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\omega\mu \vec{H}\tag{4.3}$$

Por tanto,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -i\omega\mu (H_x \vec{u}_x + H_y \vec{u}_y + H_z \vec{u}_z) \quad (4.4)$$

Igualando por componentes queda:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y = -i\omega\mu H_x \quad (4.5-a)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma E_x = i\omega\mu H_y \quad (4.5-b)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu H_z \quad (4.5-c)$$

Análogamente, para la ley de Ampère se tiene:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = i\omega\epsilon (E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y + E_z \vec{u}_z) \quad (4.6)$$

que da lugar a las siguientes ecuaciones para las componentes:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = i\omega\epsilon E_x \quad (4.7-a)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} + \gamma H_x = -i\omega\epsilon E_y \quad (4.7-b)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega\epsilon E_z \quad (4.7-c)$$

Operando en las ecuaciones (4.5) y (4.7) se obtiene para las componentes transversales:

$$\boxed{\begin{aligned} E_x &= -\frac{1}{\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon} \left(\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} + i\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \\ E_y &= \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon} \left(i\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \\ H_x &= \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon} \left(i\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\ H_y &= -\frac{1}{\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon} \left(i\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \end{aligned}} \quad (4.8)$$

Estas ecuaciones nos muestran que:

1) Todas las componentes transversales se expresan en función de las componentes axiales E_z y H_z . Por tanto, para resolver el problema de la distribución de campos *sólo necesitaremos hallar estas dos componentes*.

2) Para obtener la solución podemos suponer además que:

a) La componente $E_z \neq 0$ mientras que $H_z = 0$. En este caso el campo \vec{H} sólo tendrá componentes transversales y las soluciones que la cumplen se denominan *modos transversales magnéticos* (TM).

b) La componente $E_z = 0$ mientras que $H_z \neq 0$. Ahora el campo \vec{E} sólo tendrá componentes transversales y las soluciones que la cumplen se denominan *modos transversales eléctricos* (TE).

c) Las dos componentes axiales son *no nulas*. Estas soluciones se denominan *modos híbridos*.

3) Si hacemos $E_z = 0$ y $H_z = 0$, las otras componentes se anulan también, salvo que impongamos la condición:

$$\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon = \gamma^2 + k^2 = 0 \quad (4.9)$$

que da lugar a una indeterminación. Una onda de este tipo se denomina *transversal electromagnética* (TEM)

Empezaremos estudiando las líneas de transmisión, primero con una estructura de láminas plano paralelas (que se usa en muchos experimentos donde se desea disponer de un campo uniforme en una pequeña región, ej. las células GTEM) y después analizaremos la línea coaxial, de gran interés práctico por ser la que más se emplea.

4.2 Líneas de transmisión

4.2.1 Línea de láminas plano paralelas (LLPP)

Consideremos dos láminas plano paralelas perfectamente conductoras, de anchura w y separadas una distancia d , donde se supone $w \gg d$ (Figura 4.1). El medio entre los conductores puede ser el espacio libre o cualquier medio dieléctrico y la propagación tiene lugar a lo largo del eje z . Suponemos que la placa inferior está conectada a tierra y la superior a un potencial armónico de amplitud V_0 .

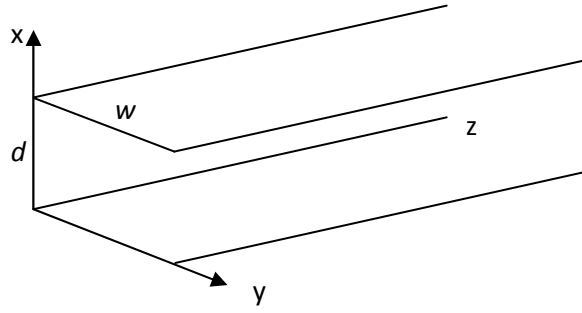


Figura 4.1. Línea de placas paralelas.

Vamos a analizar las características de la propagación del modo TEM en esta línea. Partimos de la ecuación de onda para el potencial Φ :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \Phi = 0 \quad (4.10)$$

Aplicando la condición (4.9) para propagación del modo TEM, la ec. (4.10) se reduce a:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi = 0 \quad (4.11)$$

Esta es la ecuación de Laplace para un problema bidimensional. Podemos por tanto utilizar los métodos ya vistos para resolverla en el plano $z = 0$ (recordemos que $w \gg d$):

$$\nabla^2 \Phi(x, y) = 0 \quad ; \quad 0 \leq x \leq d \quad , \quad 0 \leq y \leq w \quad (4.12)$$

con las condiciones de contorno:

$$\Phi(0, y) = 0 \quad ; \quad \Phi(d, y) = V_0 \quad (4.13)$$

La solución general será:

$$\Phi(x, y) = Ax + B \quad (4.14)$$

Imponiendo las condiciones (4.13) obtenemos $A = V_0 / d$; $B = 0$. La solución es:

$$\Phi(x, y) = \frac{V_0}{d} x \quad (4.15)$$

El campo eléctrico lo obtenemos hallando el gradiente de esta función cambiado de signo:

$$\vec{E}(x, y) = -\nabla \Phi = -\frac{V_0}{d} \vec{u}_x \quad (4.16)$$

Esta es la solución del problema bidimensional. Añadiendo la dependencia con z queda:

$$\vec{E}(x, y, z) = -\frac{V_0}{d} e^{-\gamma z} \vec{u}_x \quad (4.17)$$

El campo magnético se obtiene de (4.17):

$$\vec{H}(x, y, z) = \frac{1}{\eta} \vec{u}_z \times \vec{E} = -\frac{V_0}{\eta d} e^{-\gamma z} \vec{u}_y \quad (4.18)$$

El potencial de la placa superior con respecto a la inferior, conectada a tierra, será:

$$V(z) = - \int_{x=0}^{x=d} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{x=0}^{x=d} \vec{E} \cdot \vec{u}_x dx = V_0 e^{-\gamma z} \quad (4.19)$$

La razón de que la superficie conductora no sea equipotencial en la dirección z es la ley de

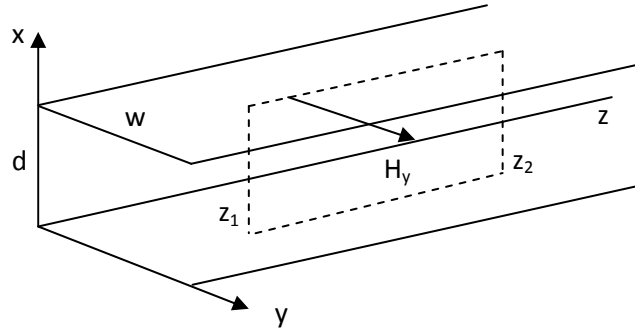


Figura 4.2. Esquema para aplicar la ley de Faraday en la línea.

Faraday que, integrada a lo largo de un lazo $x - z$, encierra un campo magnético, H_y , variable con el tiempo (Figura 4.2).

La intensidad de corriente en la placa superior puede calcularse a partir de la condición de contorno para el campo magnético en dicha superficie:

$$\vec{n} \times \vec{H} = \vec{J}_s \quad \rightarrow \quad -\vec{u}_x \times \left(-\frac{V_0}{\eta d} e^{-\gamma z} \vec{u}_y \right) = \frac{V_0}{\eta d} e^{-\gamma z} \vec{u}_z = \vec{J}_s \quad (4.20)$$

siendo \vec{J}_s la densidad superficial de corriente (A/m). Integrando a una línea entre $y = 0$ e $y = w$ se tiene la corriente total:

$$I(z) = \int_{y=0}^{y=w} \vec{J}_s \cdot \vec{u}_z dy = \frac{wV_0}{\eta d} e^{-\gamma z} \quad (4.21)$$

Esta corriente se cierra en todo instante con la que circula por la placa inferior que tiene el mismo módulo y sentido opuesto.

Se denomina *impedancia característica*, Z_c , de la línea al cociente del voltaje entre los conductores y la corriente total que circula por uno de los conductores, es decir,

$$Z_c = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{E_x d}{H_y w} = \frac{\eta d}{w} \quad (4.22)$$

Vemos que la impedancia característica de una línea de transmisión es función de su geometría y del medio existente entre los conductores.

La solución incluyendo la dependencia temporal se obtiene multiplicando los campos, voltajes y corrientes por el factor $e^{i\omega t}$.

Para campos armónicos, la potencia media transmitida por la línea es:

$$P_{av} = \int_{x=0}^{x=d} \int_{y=0}^{y=w} \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{V_0}{d}\right)^2 d w e^{-2\alpha z} \quad (4.23)$$

Vemos que esta potencia en términos de campos, coincide con la potencia en términos de voltajes y corrientes:

$$P_{av} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V I^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\left[V_0 e^{-(\alpha+i\beta)z} \right] \left[\frac{wV_0}{\eta d} e^{-(\alpha-i\beta)z} \right] \right) = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{V_0}{d}\right)^2 d w e^{-2\alpha z} \quad (4.24)$$

4.2.2 Línea coaxial

La línea de transmisión más empleada es la línea coaxial, cuya geometría se muestra en la Figura 4.3. Está formada por dos conductores cilíndricos concéntricos, de forma que encierran totalmente los campos. El medio entre los conductores es un dieléctrico de bajas pérdidas y normalmente el conductor exterior se conecta a tierra ($\Phi = 0$), y el conductor interior a un potencial armónico de amplitud V_0 .

Esta línea de transmisión puede propagar un modo TEM. Para obtener los campos en su interior seguiremos un desarrollo análogo al de la línea de placas paralelas.

Suponiendo que la propagación es a lo largo del eje z , resolvemos la ecuación de Laplace para el potencial bidimensional en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 \Phi(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \quad (4.25)$$

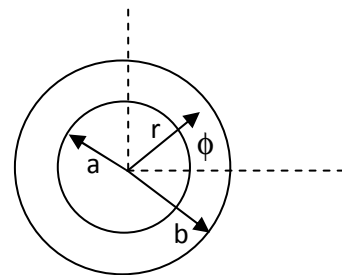


Figura 4.3. Línea coaxial.

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} \Phi(r) \Big|_{r=a} &= V_0 \\ \Phi(r) \Big|_{r=b} &= 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

la solución para el potencial $\Phi(r)$ es

$$\Phi(r) = V_0 \frac{\ln\left(\frac{r}{b}\right)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \quad (4.27)$$

Los campos E y H los podemos obtener de

$$\begin{aligned} \vec{E}(r) &= -\vec{\nabla}\Phi(r) \\ \vec{H}(r) &= \frac{1}{\eta} \vec{u}_z \times \vec{E}(r) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Sustituyendo el valor del potencial e incluyendo la dependencia con z , se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{E}(r, z) &= -\vec{u}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} e^{-\gamma z} = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{e^{-\gamma z}}{r} \vec{u}_r \\ \vec{H}(r, z) &= \frac{1}{\eta} \vec{u}_z \times \vec{E}(r) e^{-\gamma z} = \frac{V_0}{\eta \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{e^{-\gamma z}}{r} \vec{u}_\phi \end{aligned} \quad (4.29)$$

Vemos que el campo eléctrico es radial, mientras que el campo magnético es azimutal. La onda de voltaje asociada al campo eléctrico es:

$$V(z) = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_a^b \frac{V_0}{\ln \frac{b}{a}} e^{-\gamma z} \frac{dr}{r} = V_0 e^{-\gamma z} \quad (4.30)$$

La densidad lineal de corriente (A/m) sobre uno cualquiera de los conductores (por ejemplo el interno) es:

$$\vec{J}_s = \vec{u}_r \times \vec{H} = \frac{V_0}{\eta a \ln \frac{b}{a}} e^{-\gamma z} \vec{u}_z \quad (4.31)$$

y la corriente total que circula por el conductor interno es

$$I(z) = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \vec{J}_s \cdot \vec{u}_z a d\phi = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{V_0}{\eta a \ln \frac{b}{a}} e^{-\gamma z} a d\phi = \frac{2\pi V_0}{\eta \ln \frac{b}{a}} e^{-\gamma z} = I_0 e^{-\gamma z} \quad (4.32)$$

Esta corriente se cierra en todo instante con la del conductor externo que circula en sentido opuesto.

La impedancia característica de la línea es:

$$Z_C = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{\eta}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (\Omega) \quad (4.33)$$

La potencia media transmitida a lo largo de la línea se puede calcular a partir de los campos:

$$P_{av} = \int \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{S} = \frac{e^{-2\alpha z}}{2\eta} \frac{V_0^2}{\left(\ln \frac{b}{a}\right)^2} \int_{r=a}^{r=b} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{1}{r^2} r dr d\phi = \frac{1}{2} V_0^2 \frac{2\pi}{\eta \ln \frac{b}{a}} e^{-2\alpha z} \quad (4.34-a)$$

O también a partir de voltajes y corrientes:

$$P_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}(V I^*) = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\left[V_0 e^{-(\alpha+i\beta)z} \right] \left[\frac{2\pi V_0}{\eta \ln \frac{b}{a}} e^{-(\alpha-i\beta)z} \right] \right) = \frac{1}{2} V_0^2 \frac{2\pi}{\eta \ln \frac{b}{a}} e^{-2\alpha z} \quad (4.34-b)$$

4.3. Guía rectangular

En la práctica las guías más utilizadas son las que tienen un corte transversal en forma de rectángulo de lados a y b como se muestra en la Figura 4.4.

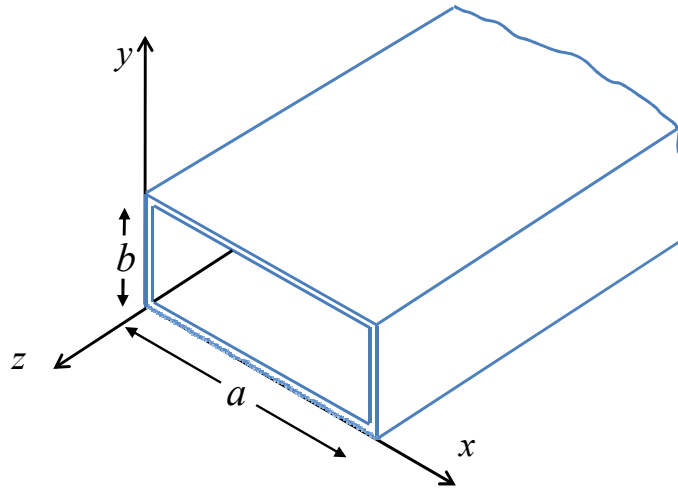


Figura 4.4. Guía rectangular.

En lo que sigue, vamos a buscar soluciones para los modos TM y TE. Si se necesita una solución más general, puede obtenerse por superposición.

Para hallar las componentes axiales de \vec{E} y \vec{H} , volvemos a las ecs. de Faraday y Ampère:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\omega\mu\vec{H} \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = i\omega\epsilon\vec{E}$$

Tomando rotacionales en ambos miembros de la ecuación de Faraday y teniendo en cuenta que en ausencia de carga $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, queda:

$$(\vec{\nabla}^2 + \omega^2\mu\epsilon)\vec{E} = 0$$

donde el operador laplaciano, $\vec{\nabla}^2$, se aplica a cada una de las componentes del campo. Vemos que se trata de una ecuación de onda homogénea para el campo armónico. En el caso de la componente z esta ecuación es:

$$(\nabla^2 + \omega^2 \mu \epsilon) E_z = 0$$

Partiendo de la ley de Ampère y razonando análogamente llegamos a:

$$(\nabla^2 + \omega^2 \mu \epsilon) H_z = 0$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que en coordenadas cartesianas:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \triangleq \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

y que hemos supuesto que hay una dependencia con z de la forma $e^{-\gamma z}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} [\nabla_t^2 + (\omega^2 \mu \epsilon + \gamma^2)] E_z &= 0 \\ [\nabla_t^2 + (\omega^2 \mu \epsilon + \gamma^2)] H_z &= 0 \end{aligned}$$

Para el modo TM sólo tenemos que resolver la primera de estas ecuaciones, mientras que para el modo TE sólo nos ocuparemos de la segunda. Además, tendremos que imponer las condiciones de contorno adecuadas a la geometría del sistema.

Modos TM: Para el problema de modos TM propagándose en esta guía, asumiremos que éste se puede resolver mediante separación de variables, es decir,

$$E_z(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) e^{-\gamma z} \quad (4.35)$$

Sustituyendo en la ecuación para esta componente queda:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) = 0 \quad (4.36)$$

Dadas las características de las funciones X e Y las únicas soluciones posibles son:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -M^2, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -N^2 \quad (4.37)$$

siendo M y N constantes tales que:

$$-M^2 - N^2 + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) = 0 \quad (4.38)$$

Las soluciones de estas ecuaciones son del tipo:

$$X = A \sen Mx + B \cos Mx \quad ; \quad Y = C \sen Ny + D \cos Ny \quad (4.39)$$

donde A , B , C y D son constantes a determinar.

En consecuencia, la solución completa de E_z para los modos TM en la guía es:

$$E_z = (A \sen Mx + B \cos Mx) \cdot (C \sen Ny + D \cos Ny) e^{-\gamma z} \quad (4.40)$$

Para hallar las constantes imponemos las condiciones de contorno. Así, en ausencia de carga superficial ρ_s , el campo eléctrico sólo puede tener componente normal a las paredes de la guía conductora:

$$\begin{aligned} E_z &= 0 & \text{en } x &= 0 \\ E_z &= 0 & \text{en } x &= a \\ E_z &= 0 & \text{en } y &= 0 \\ E_z &= 0 & \text{en } y &= b \end{aligned} \quad (4.41)$$

Aplicando la primera y tercera de estas condiciones a (4.40) encontramos que las constantes B y D han de ser nulas, ya que el $\cos 0^\circ = 1$. Queda entonces:

$$E_z = E_0 \sin Mx \sin Ny e^{-\gamma z} \quad (4.42)$$

siendo $E_0 = AC$, una constante relacionada con la amplitud de la señal que se propaga. Las dos constantes que faltan podemos obtenerlas de las condiciones de contorno en las paredes $x = a$, $y = b$. Imponiendo $E_z = 0$ en $x = a$ resulta:

$$E_0 \sin Ma \sin Ny = 0 \quad \rightarrow \quad Ma = m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.43)$$

Análogamente, para la condición $E_z = 0$ en $y = b$ obtenemos:

$$Nb = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.44)$$

Por tanto, las constantes vienen dadas por:

$$M = \frac{m\pi}{a} \quad ; \quad N = \frac{n\pi}{b} \quad (4.45)$$

vemos que son parámetros que dependen de las dimensiones de la guía.

Ahora ya podemos escribir *la solución* para los *modos* TM:

$$\boxed{E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z}} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.46)$$

Aparece un *conjunto infinito de soluciones* que dependen de los valores de los índices m y n . Estos modos se designan modos TM_{mn} ; el modo con los índices más bajos es el modo TM_{11} , el cual se denomina modo *fundamental*.

Sustituyendo M y N en la ecuación:

$$-M^2 - N^2 + (\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon) = 0 \quad (4.47)$$

resulta,

$$-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + (\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon) = 0 \quad (4.48)$$

Así, en una guía rectangular la constante de propagación γ vale:

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon} \quad (4.49)$$

Vamos a suponer que el medio no tiene pérdidas. Entonces γ es imaginario puro:

$$\gamma = i\beta_{mn} = i\sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (4.50)$$

Ya estamos en condiciones de hallar la solución: multiplicando E_z por $e^{i\omega t}$ y tomando la parte real de la misma llegamos a:

$$\begin{aligned} E_z(x, y, z, t) &= E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \operatorname{Re}\left[e^{-\gamma z} e^{i\omega t}\right] \\ &= E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos(\omega t - \beta_{mn}z) \end{aligned} \quad (4.51)$$

que representa una onda viajando en el sentido $z > 0$.

Vamos a analizar las implicaciones que tiene la solución obtenida en las características de la propagación, con respecto a las de la onda libre. En la expresión (4.50) el radicando ha de ser un número positivo, es decir,

$$\omega^2\mu\epsilon > \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

ya que en caso contrario, la constante de propagación sería real y la onda se atenuaría exponencialmente. Esto nos lleva a definir una *constante de corte*, k_c , y una *frecuencia de corte*, $f_c = \omega_c / 2\pi$, para una guía de dimensiones dadas, por debajo de la cual no se propagan las señales:

$$k_c = \omega_c \sqrt{\mu\epsilon} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \rightarrow \quad (4.52)$$

$$\boxed{f_{c,mn} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} \quad (4.53)$$

Para frecuencias $f > f_{c,mn}$, la constante de propagación será un número imaginario puro; en ese caso β_{mn} es la *constante de fase*:

$$\boxed{\beta_{mn} = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} \quad (4.54)$$

Esta es la *relación de dispersión* para los modos TM_{mn} en la guía rectangular. En función de la frecuencia de corte podemos expresarla como:

$$\beta_{mn} = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c,mn}}{f}\right)^2} \quad (4.55)$$

Asociada a la constante de fase tenemos la longitud de onda con que se propaga la señal dentro de la guía:

$$\lambda_{mn} = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c,mn}}{f}\right)^2}} \quad (4.56)$$

donde $\lambda = 2\pi / \omega \sqrt{\mu\epsilon}$ es la longitud de onda en el medio libre. Vemos que $\lambda_{mn} > \lambda$ para una onda de la misma frecuencia.

La velocidad de fase para los modos TM_{mn} viene dada por la relación:

$$v_{f,mn} = \frac{\omega}{\beta_{mn}} = \frac{1/\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c,mn}}{f}\right)^2}} = \frac{v_f}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c,mn}}{f}\right)^2}} \quad (4.57)$$

que nos muestra que la velocidad de fase es mayor que en el medio libre. Esta es la velocidad de los frentes de onda de fase constante y puede ser mayor que la de la luz en el medio que llena la guía. Sin embargo no representa la velocidad con la que se propaga la energía que transporta la onda.

Vamos a hallar la expresión de los fasores de los campos para el modo TM. Partiendo del valor de E_z calculado:

$$E_z = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-i\beta_{mn}z} \quad (4.58)$$

las restantes componentes vienen dadas por las ecuaciones (4.8), con $H_z = 0$. Para las componentes transversales del campo eléctrico resulta:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{-i\beta_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right)}{k_c^2} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-i\beta_{mn}z} \\ E_y &= \frac{-i\beta_{mn} \left(\frac{n\pi}{b}\right)}{k_c^2} E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-i\beta_{mn}z} \end{aligned} \quad (4.59-a)$$

y para las componentes transversales del campo magnético:

$$\boxed{\begin{aligned} H_x &= \frac{i\omega\epsilon\left(\frac{n\pi}{b}\right)}{k_c^2} E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-i\beta_{mn}z} \\ H_y &= \frac{-i\omega\epsilon\left(\frac{m\pi}{a}\right)}{k_c^2} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-i\beta_{mn}z} \end{aligned}} \quad (4.59-b)$$

Hemos sustituido $\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon$ por su equivalente $k_c^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$ en este caso.

Si hallamos el cociente entre E_x y H_y obtenemos:

$$\frac{E_x}{H_y} = Z_{TM_{mn}} \quad ; \quad \text{siendo} \quad Z_{TM_{mn}} = \frac{\beta_{mn}}{\omega\epsilon} = \frac{\beta_{mn}\sqrt{\mu\epsilon}}{k\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\beta_{mn}}{k} = \eta \frac{\beta_{mn}}{k} \quad (4.60)$$

Mientras que para las otras dos componentes queda:

$$\frac{E_y}{H_x} = -Z_{TM_{mn}} \quad (4.61)$$

Estas relaciones sugieren que podemos asociar una impedancia intrínseca $Z_{TM_{mn}}$ a los modos transversales magnéticos.

Modo TE

En este caso, la componente axial del campo eléctrico es nula, $E_z = 0$. Por tanto buscaremos la solución para H_z y a partir de ella obtendremos las restantes componentes. Haciendo separación de variables llegamos a que la solución general es de la forma:

$$H_z = (A \operatorname{sen} Mx + B \cos Mx) \cdot (C \operatorname{sen} Ny + D \cos Ny) e^{-\gamma z} \quad (4.62)$$

donde se ha supuesto una propagación en el sentido $z > 0$. Para hallar las constantes necesitamos imponer condiciones de contorno. No es trivial imponerlas para H_z , por lo que lo haremos sobre las componentes transversales del campo eléctrico, que sólo pueden tener componente normal a las paredes. Recordemos que para el modo TE tiene:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i\omega\mu}{\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ E_y &= \frac{i\omega\mu}{\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Por tanto, las condiciones de contorno que debemos imponer son:

$$\begin{aligned}
E_y &= 0 & \text{en } x &= 0 \\
E_y &= 0 & \text{en } x &= a \\
E_x &= 0 & \text{en } y &= 0 \\
E_x &= 0 & \text{en } y &= b
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Operando en (4.62) con las condiciones para $x=0, y=0$, se llega a la expresión para H_z :

$$H_z = H_0 \cos Mx \cos Ny e^{-\gamma z} \tag{4.65}$$

donde $H_0 = BD$ es una constante relacionada con la amplitud de la señal que se propaga. Si calculamos para los casos $x=a, y=b$, se encuentra que:

$$\text{sen } Ma = 0 \quad \rightarrow \quad Ma = m\pi, \quad \text{o bien} \quad M = \frac{m\pi}{a} \quad m = 0, 1, 2, \dots \tag{4.66}$$

$$\text{sen } Nb = 0 \quad \rightarrow \quad Nb = n\pi, \quad \text{o bien} \quad N = \frac{n\pi}{b} \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{4.67}$$

Sustituyendo estos resultados en la expresión de H_z queda:

$$\boxed{H_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z}} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{4.68}$$

Siguiendo un razonamiento análogo al del modo TM, llegamos a que:

$$\gamma_{mn} = i\beta_{mn} = i\sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \tag{4.69}$$

Hemos de imponer que se γ_{mn} sea imaginario puro y ello implica que:

$$\omega^2\mu\epsilon > \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \tag{4.70}$$

ya que en caso contrario, la constante de propagación sería real y la onda se atenuaría exponencialmente. Podemos definir una *frecuencia de corte*, $f_c = \omega_c / 2\pi$, para una guía de dimensiones dadas, por debajo de la cual no se propagan las señales:

$$k_c = \omega_c \sqrt{\mu\epsilon} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad \rightarrow \tag{4.71}$$

$$\boxed{f_{c,mn} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} \tag{4.72}$$

que tiene la misma expresión que para los modos TM. Teniendo en cuenta (4.72), la relación entre β_{mn} y ω queda en la forma:

$$\frac{\beta_{mn}}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} = \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c,mn}}{f}\right)^2} \quad (4.73)$$

La Figura 4.5 muestra la variación de esta función con la frecuencia de la señal para distintos modos TE y TM. El modo que tiene la frecuencia de corte más baja y, por tanto, empieza a propagarse antes que los restantes es el TE_{10} ; éste es el *modo TE fundamental*. A medida que aumenta la frecuencia, la función crece tendiendo asintóticamente a 1, es decir al valor que corresponde a la propagación en el medio libre. Los siguientes modos en comenzar a propagarse son el TE_{01} y el TE_{20} que se representan en la misma curva debido a la especial

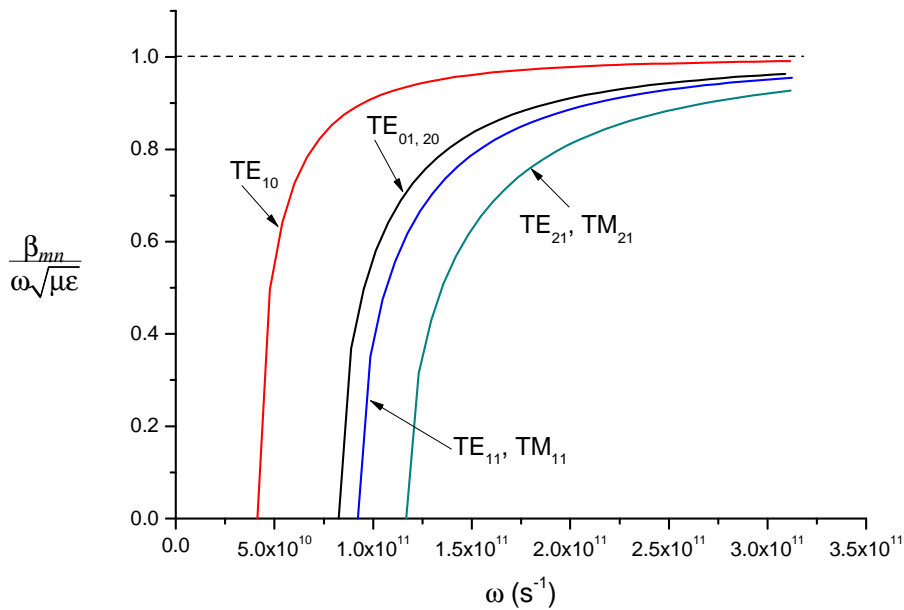


Figura 4.5. Variación relativa de la constante de propagación en una guía rectangular con parámetros ϵ_0, μ_0 y de dimensiones $a = 2.28$ cm, $b = a/2$.

geometría de la guía, $b = a/2$. Cerca de ellos empiezan a propagarse el TE_{11} y el TM_{11} , que es primer modo TM en salir del corte. Finalmente se traza la curva de los modos TE_{21} y TM_{21} .

Veamos ahora cuál es la expresión de los fasores de los campos para el modo TE. Partiendo del valor de H_z calculado en (4.68), las restantes componentes vienen dadas por las ecuaciones (4.8) con $E_z = 0$. Para las componentes transversales del campo eléctrico resulta:

$$\begin{aligned}
E_x &= \frac{i\omega\mu\left(\frac{n\pi}{b}\right)}{k_c^2} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-i\beta_{mn}z} \\
E_y &= \frac{-i\omega\mu\left(\frac{m\pi}{a}\right)}{k_c^2} H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-i\beta_{mn}z}
\end{aligned}
\tag{4.74-a}$$

mientras que para las componentes del campo magnético se obtiene:

$$\begin{aligned}
H_x &= \frac{i\beta_{mn}\left(\frac{m\pi}{a}\right)}{k_c^2} H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-i\beta_{mn}z} \\
H_y &= \frac{i\beta_{mn}\left(\frac{n\pi}{b}\right)}{k_c^2} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-i\beta_{mn}z}
\end{aligned}
\tag{4.74-b}$$

Si hallamos el cociente entre E_x y H_y obtenemos:

$$\frac{E_x}{H_y} = Z_{TE_{mn}} \quad ; \quad \text{siendo} \quad Z_{TE_{mn}} = \frac{\omega\mu}{\beta_{mn}} = \frac{k\mu}{\beta_{mn}\sqrt{\mu\epsilon}} = \eta \frac{k}{\beta_{mn}}
\tag{4.75}$$

Mientras que para las otras dos componentes queda:

$$\frac{E_y}{H_x} = -Z_{TE_{mn}}
\tag{4.76}$$

Estas relaciones nos permiten asociar una impedancia intrínseca $Z_{TE_{mn}}$ a los modos transversales eléctricos.

En la mayoría de las aplicaciones, las dimensiones de la guía y las frecuencias de trabajo son aquellas que permiten la propagación el modo TE_{10} exclusivamente. Particularizando los índices a los valores $m=1, n=0$, la expresión de los campos para este modo se reduce a:

$$\begin{aligned}
H_z &= H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta_{10}z} \\
E_y &= -\frac{i\omega\mu a}{\pi} H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta_{10}z} \\
H_x &= \frac{i\beta_{10}a}{\pi} H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta_{10}z} \\
E_x &= E_z = H_y = 0.
\end{aligned}
\tag{4.77}$$

siendo $\beta_{10} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - (\pi/a)^2}$. Las Figuras 4.6(a)-(b) muestran la distribución de las líneas de los campos en los planos YZ y XZ , respectivamente.

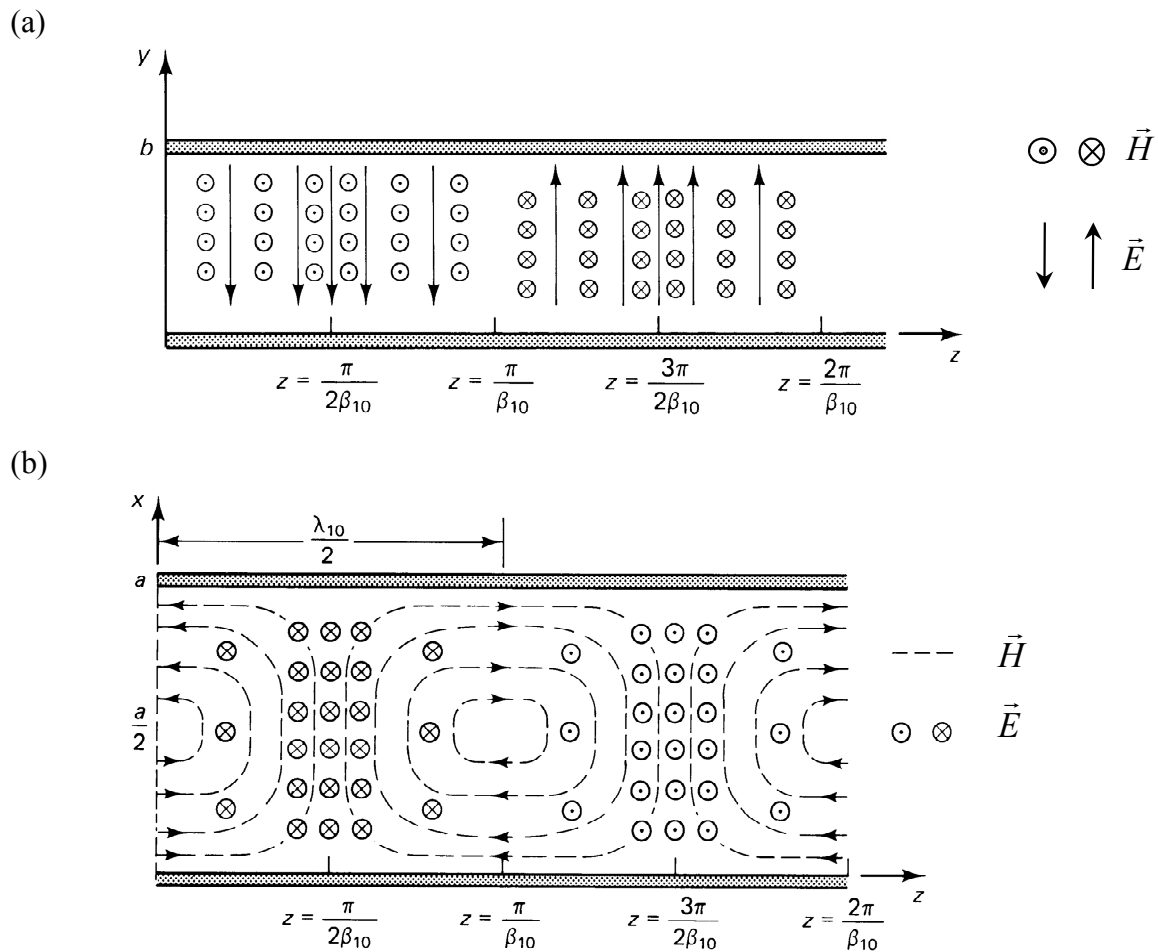


Figura 4.6. Distribución de las líneas de \vec{E} y \vec{H} en una guía rectangular para el modo TE_{10} . a) Plano YZ ; b) Plano XZ .

Estos campos tienen una expresión sencilla por lo que resulta fácil calcular el flujo de energía que transportan en la guía. Según vimos en el Tema 3, para campos armónicos la densidad media de energía por unidad de área y unidad de tiempo viene dada por:

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \quad (4.78)$$

Para hallar la potencia media integramos esta cantidad en la sección transversal de la guía. Así, integrando al rectángulo de lados a y b (Figura 4.4):

$$\begin{aligned}
P_{av} &= \int_S \vec{S}_{av} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{u}_z \, dx \, dy \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} E_y H_x \, dx \, dy \\
&= \frac{\omega \mu \beta_{10} a^2}{2\pi^2} H_0^2 \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx \, dy \\
&= \frac{\omega \mu \beta_{10} a^3 b}{4\pi^2} H_0^2
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Vemos que para el modo TE₁₀ la potencia transmitida depende de las dimensiones de la guía, de los parámetros μ , ϵ , y de la amplitud y frecuencia de la señal. Generalmente, una parte de esta potencia se pierde por efecto Joule porque los campos dan lugar a corrientes en las paredes de la guía. Para minimizar estas pérdidas, las paredes se construyen con materiales que son buenos conductores como por ejemplo plata o cobre.

4.4. Cavidades resonantes

Podemos construir una estructura resonante a partir de una guía rectangular. Para ello, cortocircuitamos los dos extremos formando una caja o cavidad de paredes metálicas.

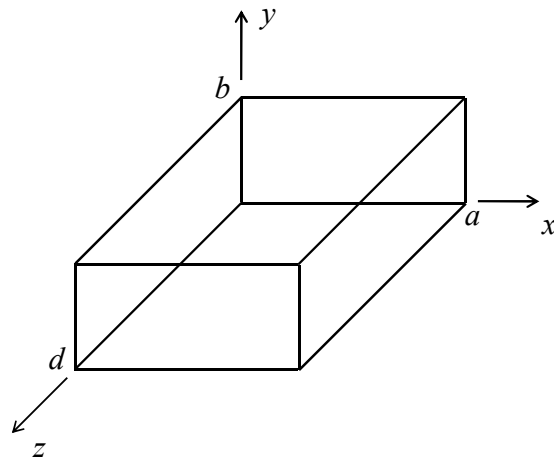


Figura 4.7. Cavidad resonante rectangular

En la figura 4.7 se muestra una cavidad formada a partir de una guía de sección $a \cdot b$ en la que se han colocado paredes conductoras en $z=0$ y $z=d$. Podríamos resolver este problema partiendo de la ecuación de ondas y utilizando separación de variables + condiciones de contorno en las seis paredes; pero es más fácil partir de las soluciones obtenidas para los modos TE y TM que satisfacen las condiciones de contorno en cuatro de ellas. Sólo nos falta imponer las condiciones:

Como no hemos considerado hasta ahora la posibilidad de que existan ondas reflejadas en el sentido $z < 0$, es necesario añadirlas. Agrupando $E_x + E_y$ como componentes transversales, la expresión del campo transversal para este caso, \vec{E}_t , será:

$$\vec{E}_t(x, y, z) = \vec{e}_t(x, y) [E_0^+ e^{-i\beta_{mn}z} + E_0^- e^{i\beta_{mn}z}] \quad (4.80)$$

donde $\vec{e}_t(x, y)$ da cuenta de las variaciones que son función de (x, y) , y E_0^+, E_0^- son las amplitudes de las ondas incidente y reflejada. Al imponer $\vec{E}_t = 0$ en $z = 0$ se obtiene

$$E_0^- = -E_0^+$$

como es de esperar cuando la onda se refleja en un plano conductor perfecto. La condición $\vec{E}_t = 0$ en $z = d$ implica que,

$$\begin{aligned} \vec{E}_t(x, y, z) &= \vec{e}_t(x, y) [E_0^+ e^{-i\beta_{mn}d} + E_0^- e^{i\beta_{mn}d}] = 0 \\ \Rightarrow \vec{e}_t(x, y) 2iE_0^+ \operatorname{sen} \beta_{mn}d &= 0 \\ \Rightarrow \beta_{mn}d &= l\pi, \quad l = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Esto significa que la cavidad debe tener una longitud d tal que

$$\frac{2\pi}{\lambda_{mn}} d = l\pi \quad \rightarrow \quad \boxed{d = \frac{\lambda_{mn}}{2} l} \quad (4.81)$$

Es decir, d ha de ser múltiplo de la semilongitud de onda para que el modo mn pueda establecerse en la cavidad. Se define la constante de corte:

$$k_{mnl} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2} \quad (4.82)$$

y entonces hablamos de los modos TE_{mnl} o TM_{mnl} resonantes. Las frecuencias de resonancia vendrán dadas por

$$f_{mnl} = \frac{ck_{mnl}}{2\pi\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2} \quad (4.83)$$

Si se cumple $b < a < d$, el modo resonante TE mas bajo es el TE_{101} y para el TM el TM_{111} .

Tema 4. Ondas guiadas.

Introducción. Modos TEM, modos TE y modos TM. Líneas de transmisión (láminas plano paralelas y coaxial). Guía de onda rectangular. Cavidades resonantes.

PROBLEMAS

1.- Considérese una guía de ondas formada por dos placas paralelas conductoras separadas una distancia $d = 3$ cm, anchura $W \gg d$ y con aire entre ellas. Determinar la máxima potencia media que puede propagarse por unidad de anchura sin que se produzca la ruptura dieléctrica, cuando se propaga un modo a) TEM, b) TM_1 y c) TE_1 . Frecuencia de trabajo $f = 10^{10}$ Hz.

2.- La expresión instantánea para E_z de un modo TM en una guía de ondas rectangular rellena de aire, con $a = 2.5$ cm y $b = 0.5$ cm es

$$E_z = E_0 \sin(200\pi x) \sin(200\pi y) \cos(2\pi 10^{11} t - \beta z) \text{ V/m.}$$

a) ¿Cuál es el modo de operación? b) Calcular f_c , β , Z_{TM} y λ_g .

3.- Una guía de ondas con $a = 2$ cm y $b = 1$ cm está llena de agua desionizada, con $\epsilon_r = 81$. Si la frecuencia de operación es de 2.0 GHz, determinar: a) todos los posibles modos de propagación y sus frecuencias de corte; b) la impedancia del modo (o modos) de mayor frecuencia; y c) la velocidad de fase del modo de menor frecuencia.

4.- En una guía de ondas rectangular de dimensiones $a = 2.25$ cm y $b = 1$ cm llena de aire, se propaga su modo fundamental a la frecuencia $f = 10$ GHz. Determinar el valor máximo de la potencia media que se puede transmitir sin producirse la ruptura en la guía.

5. Un túnel se comporta como una guía de ondas. Para un túnel de sección aproximadamente rectangular, de dimensiones a , b ,

a) Hallar el rango de frecuencias para las cuales se propaga solo el modo fundamental.
b) Explicar por qué las señales de radio AM se reciben dentro de un túnel con mayor dificultad que las FM.

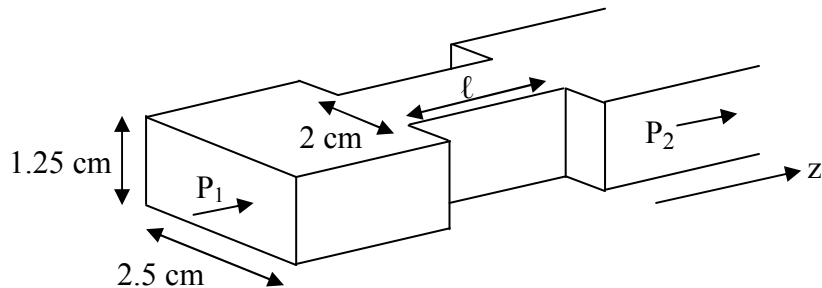
6. En una guía rectangular, la expresión de la componente transversal del campo eléctrico viene dada por:

$$E_x = A \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{b} y\right) \sin(7\pi \times 10^{10} t - \beta z)$$

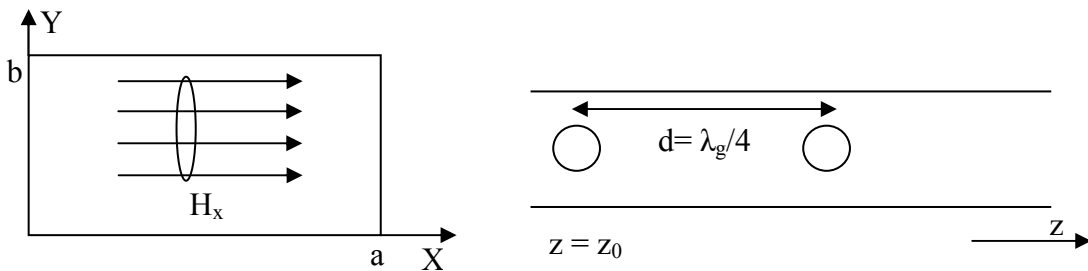
Dermínese: a) El modo de operación; b) La frecuencia de operación; c) La constante de propagación β si las dimensiones de la guía son $a = 2.3$ cm y $b = 1.2$ cm; y d) La frecuencia de corte y la impedancia de onda. Supóngase la guía llena de aire.

7. Una guía rectangular opera en el modo TE_{10} . Sus dimensiones son $a = 7.62$ cm y $b = 4.0$ cm, y la potencia total transmitida es 1.2 W a una frecuencia de operación un 30% más elevada que la de corte. Determinar: a) las frecuencias de corte y de operación, así como la impedancia de onda para el caso en que la guía está llena de aire; b) la amplitud del campo eléctrico asociada a la potencia transmitida; c) escribir las expresiones de los campos eléctricos y magnéticos (sustituyendo los valores numéricos en su caso) asociados a este modo de operación.

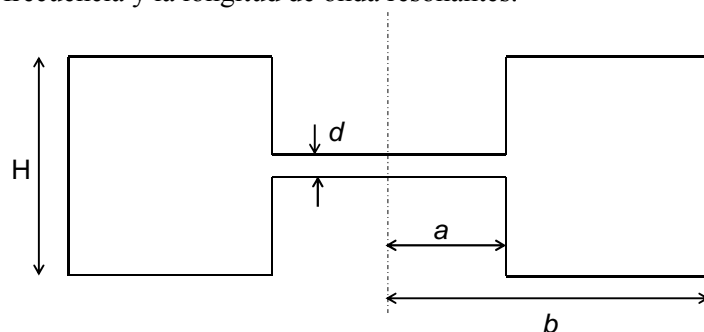
8.- En una guía de ondas de dimensiones $a = 2.5$ cm y $b = 1.25$ cm se intercala una sección de guía más estrecha de dimensiones $a' = 2$ cm y $b = 1.25$ cm. Si en la guía de ondas se propaga una onda de frecuencia $f = 7$ GHz, siendo la amplitud del campo eléctrico $E_0 = 10$ V/m, calcular: a) modo de propagación en la guía ancha; b) potencia que se propaga por la guía ancha; c) constante de atenuación en la guía estrecha; d) longitud ℓ que tiene que tener la sección intercalada de guía estrecha para que la potencia P_2 sea 10 veces inferior a la potencia P_1 ; e) ¿se podría eliminar la reducción en potencia rellenando la guía con un dieléctrico? ¿Cuál sería el valor mínimo de la permitividad relativa de ese dieléctrico?



9.- Se sabe que el modo que se propaga por una guía de ondas rectangular de dimensiones $a \times b$ es el fundamental TE_{10} , siendo la frecuencia f . Para determinar la potencia que se propaga por la guía, se coloca en su centro una pequeña espira circular de diámetro D . Para una posición z_0 de la espira se induce una fem máxima de \mathcal{E}_0 y para otra separada d cm a lo largo del eje z se induce una fem = 0 V: a) indicar en el dibujo de una sección transversal de la guía, cómo tiene que orientarse el eje de la espira para medir la fem \mathcal{E}_0 ; b) calcular la constante de fase de propagación, frecuencia de la señal y longitud de onda en la guía; c) determinar las amplitudes de los campos E y H . Calcular el valor de la potencia transmitida; y d) en la posición z_0 de espira, ¿hasta dónde se podría subir la frecuencia para que se detectase algún valor de fem inducida en la espira?

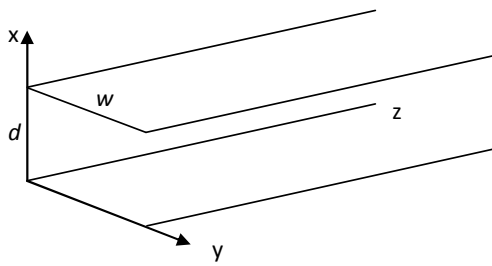


10.- En algunas aplicaciones de microondas se utiliza una cavidad resonante en forma de anillo con una sección transversal igual a la que se muestra en la figura, donde el valor de d es muy pequeño comparado con la longitud de onda en resonancia. Si consideramos que este resonador se puede representar como una combinación en paralelo del condensador formado por la parte central estrecha y por la bobina formada por el resto de la estructura, calcular los valores aproximados de la frecuencia y la longitud de onda resonantes.



P1-T4

$$f = 10^{10} \text{ Hz}$$



- a) Si el dieléctrico es aire, la transmisión se hace sin pérdidas ($\alpha = 0$). Para el modo TEM la potencia media viene dada por:

$$P_{av} = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{V_0}{d} \right)^2 \cdot d \cdot w = \frac{1}{2\eta} (E_0)^2 \cdot d \cdot w$$

El campo de ruptura del aire es $E_{0\max} = 3 \times 10^6 \text{ V/m}$, por tanto la máxima potencia por unidad de anchura de la línea vale:

$$\left. \frac{P_{av}}{w} \right|_{\max} = \frac{1}{2\eta} (E_{0\max})^2 \cdot d = \frac{1}{2 \cdot 377} (3 \times 10^6)^2 \cdot 0,03 = 358 \times 10^6 \text{ W/m} = 358 \text{ MW/m}$$

- b) La ecuación de onda para la componente E_z de un modo TM ($H_z = 0$) es:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_c^2 \right) E_z = 0; \quad k_c^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2$$

La solución de esta ecuación es de la forma:

$$E_z(x) = A \operatorname{sen} k_c x + B \operatorname{cos} k_c x$$

sujeta a las condiciones de contorno:

$$E_z(x=0) = 0 \quad ; \quad E_z(x=d) = 0$$

Esto implica $B = 0$; $k_c d = n\pi \rightarrow \boxed{k_c = \frac{n\pi}{d}, \quad n = 1, 2, 3, \dots}$

Vemos que la constante de corte k_c está condicionada a tomar valores múltiplos de π/d .

Por tanto, la constante de propagación queda expresada como:

$$\beta_n = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - k_c^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2}$$

En particular, para $n = 1$ se tiene:

$$k_c = \frac{\pi}{d}; \quad \beta_1 = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{\pi}{d} \right)^2} \quad ; \quad f_c = \frac{1}{2d \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 5 \times 10^9 \text{ Hz}$$

$$E_z = A \operatorname{sen} k_c x e^{-\beta z}; \quad E_x = -i \underbrace{\frac{\beta}{k_c}}_{E_0} A \operatorname{cos} k_c x e^{-\beta z}; \quad H_y = -i \frac{\omega \epsilon}{k_c} A \operatorname{cos} k_c x e^{-\beta z}$$

La impedancia del modo viene dada por:

$$Z_{TM_1} = \frac{E_x}{H_y} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

Por tanto, la potencia transmitida por unidad de anchura de línea será en este caso:

$$\frac{P_{av}}{w} = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=d} \frac{E_0^2}{\eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \cos^2 \frac{\pi}{d} x dx = \frac{d \cdot E_0^2}{4\eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

Sustituyendo para los datos del problema se obtiene:

$$\left. \frac{P_{av}}{w} \right|_{\max} = \frac{0,03 \cdot (3 \times 10^6)^2}{4 \cdot 377 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{5}{10}\right)^2}} = 207 \text{ MW/m}$$

c) Por último analizamos el modo TE ($E_z = 0$):

La ecuación de onda es en este caso,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_c^2 \right) H_z = 0 \rightarrow H_z = A \operatorname{sen} k_c x + B \operatorname{cos} k_c x$$

Aplicamos las condiciones de contorno a la componente transversal del campo eléctrico:

$$E_y(x) = \frac{1}{k_c^2} i\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{1}{k_c} i\omega\mu (A \operatorname{cos} k_c x - B \operatorname{sen} k_c x)$$

$$E_y(x=0) = 0 \quad ; \quad E_y(x=d) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0, \quad k_c = \frac{n\pi}{d}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

En particular, los campos transversales para el modo TE₁ quedan en la forma:

$$E_y = E_0 \operatorname{sen} \frac{\pi}{d} x \quad ; \quad H_x = \frac{E_0}{\eta} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{d} x$$

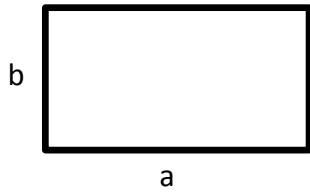
Y la potencia media por unidad de anchura se expresa en la forma:

$$\frac{P_{av}}{w} = \frac{1}{2} \int_0^d \frac{E_0^2}{\eta} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{d} x dx = \frac{d E_0^2}{4\eta} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

Sustituyendo los datos para el campo de ruptura queda:

$$\left. \frac{P_{av}}{w} \right|_{\max} = \frac{0,03 \cdot (3 \times 10^6)^2}{4 \cdot 377} \sqrt{1 - \left(\frac{5}{10}\right)^2} = 1,55 \times 10^8 \text{ W/m} = 155 \text{ MW/m}$$

P2-T4



$$a = 2.5 \text{ cm y } b = 0.5 \text{ cm}$$

$$E_z = E_0 \sin(200\pi x) \sin(200\pi y) \cos(2\pi 10^{11} t - \beta z)$$

a) Modo de operación:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{m}{a} = 200, \quad m = 200a = 200 \times 0.025 = 5 \\ \frac{n}{b} = 200, \quad n = 200b = 200 \times 0.005 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{TM}_{51}$$

b) Frecuencia de corte, constante de propagación:

$$f_c = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} = \frac{3 \times 10^8}{2} \sqrt{\left(\frac{5}{2.5 \times 10^{-2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{0.5 \times 10^{-2}}\right)^2}$$

$$= 4.24 \times 10^{10} \text{ Hz} = 42.4 \text{ GHz}$$

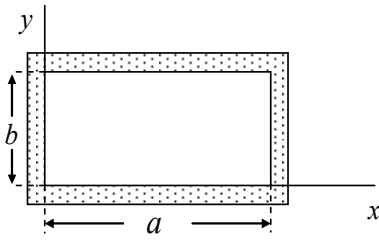
$$\beta = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2\pi \times 10^{11}}{3 \times 10^8}\right)^2 - \left(\frac{5\pi}{2.5 \times 10^{-2}}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{0.5 \times 10^{-2}}\right)^2} = 1.90 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$$

Impedancia y longitud de onda en la guía:

$$Z_{TM} = \frac{\beta}{\omega \epsilon_0} = \frac{1.9 \times 10^3}{2\pi \times 10^{11} \times 8.85 \times 10^{-12}} = 341.2 \text{ } \Omega \quad ; \quad \lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = 3.3 \times 10^{-3} \text{ m.}$$

P3-T4



$$a = 2 \text{ cm}; \quad b = 1 \text{ cm}; \quad \mu_r = 1 \text{ y } \epsilon_r = 81.$$

a) La frecuencia de corte de los modos TE_{mn} y TM_{mn} viene dada por:

$$(f_c)_{mn} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} = \frac{c}{18} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Si sustituimos los datos del problema, la expresión de las frecuencias de corte queda:

$$\begin{aligned} (f_c)_{mn} &= \frac{3 \times 10^8}{18} \sqrt{\left(\frac{m}{2 \times 10^{-2}}\right)^2 + \left(\frac{n}{1 \times 10^{-2}}\right)^2} \\ &= \frac{3 \times 10^8}{18 \times 10^{-2}} \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + 4n^2} = \frac{5}{6} \sqrt{m^2 + 4n^2} \text{ (GHz)} \end{aligned}$$

Los modos que se pueden propagar son los marcados con (*):

Modo	Frecuencia (GHz)
TE_{10}^*	0.8333
TE_{20}^*, TE_{01}^*	1.667
TE_{11}^*, TM_{11}^*	1.863
TE_{21}, TM_{21}	2.357
TE_{30}	2.5
TE_{31}, TM_{31}	3
TE_{40}, TM_{02}	3.333
TE_{41}, TM_{41}	3.727
$TE_{50}, TE_{32}, TM_{32}$	4.167
TE_{51}, TM_{51}	4.488

b) Impedancia del modo de mayor frecuencia de corte: Es la de los modos TE₁₁, TM₁₁:

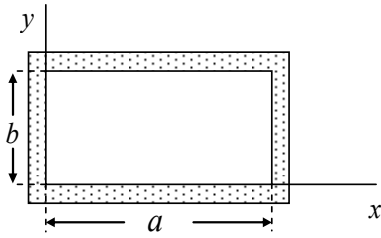
$$Z_{TE_{11}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1-(f_{c,11}/f)^2}} = \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}}{81 \times 8.85 \times 10^{-12}}} \frac{1}{\sqrt{1-(1.863/2)^2}} = 115.1 \Omega$$

$$Z_{TM_{11}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{1-(f_{c,11}/f)^2} = \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}}{81 \times 8.85 \times 10^{-12}}} \sqrt{1-(1.863/2)^2} = 15.2 \Omega$$

c) velocidad de fase del modo de menor frecuencia de corte:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \frac{1}{\sqrt{1-(f_{c,10}/f)^2}} = \frac{3 \times 10^8}{9} \frac{1}{\sqrt{1-(0.8333/2)^2}} = \frac{3 \times 10^8}{9} \times 1.1 = 3.67 \times 10^7 \text{ ms}^{-1}$$

P4-T4



$$a = 2.25 \text{ cm} ; \quad b = 1 \text{ cm} ; \quad f = 10 \text{ GHz}$$

Para el modo TE_{10} los campos transversales vienen dados por:

$$E_y = -\frac{i\omega\mu a}{\pi} H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta_{10}z} \quad ; \quad H_x = \frac{i\beta_{10}a}{\pi} H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta_{10}z}$$

Para el modo TE_{10} la potencia media que se propaga en la guía viene dada por:

$$P_{av} = \int_S \vec{S}_{av} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{u}_z \, dx \, dy$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} E_y H_x \, dx \, dy = \frac{\omega\mu\beta_{10}a^3b}{4\pi^2} H_0^2$$

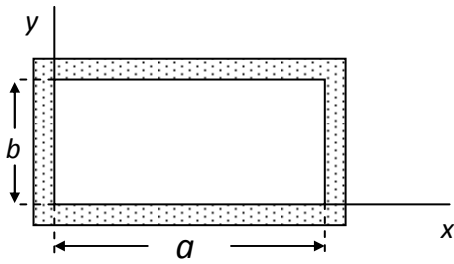
En este caso,

$$f_{c10} = \frac{c}{2a} = 6,7 \times 10^9 \text{ Hz} \quad ; \quad E_0 = 3 \times 10^6 \text{ V/m} \quad ; \quad \eta = 377 \, \Omega \quad ; \quad Z_{TE_{10}} = -\frac{E_y}{H_x}$$

Y la máxima potencia que se puede transmitir vale:

$$P_{av}|_{\max} = 10^6 \text{ W} = 1 \text{ MW}$$

P5-T4



La frecuencia de corte del modo TE_{mn} viene dada por:

$$(f_c)_{mn} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

a) Comparamos las frecuencias de corte de los primeros modos:

$$f_{10} = \frac{c}{2a} \quad ; \quad f_{01} = \frac{c}{2b} \quad ; \quad f_{20} = \frac{c}{a}$$

Ejemplo: $a = 8$ m, $b = 3.5$ m

$$f_{10} = 18.75 \text{ MHz}, \quad f_{01} = 42.86 \text{ MHz}, \quad f_{20} = 37.5 \text{ MHz}$$

Entre 18.75MHz y 37.5 MHz sólo se propaga el modo fundamental; luego se suma el modo TE_{20} y a 42.86 MHz se añade el modo TE_{01} .

b) Es debido al rango de frecuencias en que se emiten ambas señales:

$$f_{AM} \approx 1 \text{ MHz} \quad < \quad f_{10}$$

$$f_{FM} \approx 100 \text{ MHz} \quad > \quad f_{10}$$

Las señales de AM están por debajo del corte y no se propagan.

P6-T4

$$E_x = A \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{b}y\right) \sin(7\pi \times 10^{10}t - \beta z)$$

1) De la expresión deducimos que $m = 1$; $n = 2 \rightarrow$ se propagan los modos TE_{12} y TM_{12}

2) Frecuencia de operación:

$$\omega = 7\pi \times 10^{10} \text{ rad/s} \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = 35 \text{ GHz}$$

3) $a = 2.3 \text{ cm}$; $b = 1.2 \text{ cm}$; $\epsilon_r = 1$; $\mu_r = 1$. Constante de propagación:

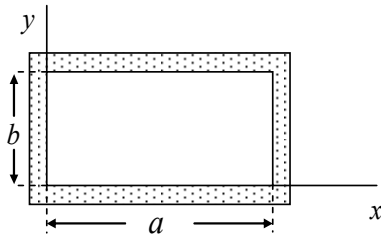
$$\beta_{12} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2} = 495.2 \text{ rad/m}$$

4) Frecuencia de corte e impedancias:

$$(f_c)_{12} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \left[\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2} \right] = 25.8 \text{ GHz}$$

$$Z_{TE} = \eta \frac{k}{\beta_{12}} = \frac{\omega\mu}{\beta_{12}} = 558 \Omega \quad ; \quad Z_{TM} = \eta \frac{\beta_{12}}{k} = \eta \frac{\beta_{12}}{\omega\epsilon} = 254.3 \Omega$$

P7-T4



$$a = 7.62 \text{ cm}; \quad b = 4.0 \text{ cm}; \quad \mu_r = 1 \text{ y } \epsilon_r = 1.$$

Modo TE₁₀

Potencia transmitida 1.2 W, a una f 30% sobre f_c

a) Frecuencia de corte para el modo TE₁₀:

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \left(\frac{\pi}{a} \right) = 1.97 \text{ GHz}$$

La frecuencia de trabajo es un 30% mayor que la de corte:

$$f = (1+0.30)f_c = 2.56 \text{ GHz} \quad ; \quad \omega = 1.61 \times 10^{10} \text{ rad/s}$$

Constante de propagación

$$\beta_{10} = \sqrt{\omega^2\mu_0\epsilon_0 - \left(\frac{\pi}{a} \right)^2} = 34.33 \text{ m}^{-1}$$

Impedancia:

$$(Z_{TE})_{10} = \frac{\omega\mu}{\beta_{10}} = 588.7 \Omega$$

2) De los datos del problema podemos deducir la amplitud de H_z :

$$P_{av} = \frac{\omega\mu\beta_{10}a^3b}{4\pi^2} H_0^2 \quad \rightarrow \quad H_0 = 2\pi \sqrt{\frac{P_{av}}{\omega\mu\beta_{10}a^3b}} = 1.96 \text{ A/m}$$

Amplitud de E_y

$$E_y = \frac{\omega\mu a}{\pi} H_0 = 962.8 \text{ V/m}$$

3) Fasores de las componentes:

$$H_z = 1.96 \cos\left(\frac{\pi}{0.0762}x\right) e^{-i34.33z} \quad ; \quad E_y = -i962.8 \sin\left(\frac{\pi}{0.0762}x\right) e^{-i34.33z}$$

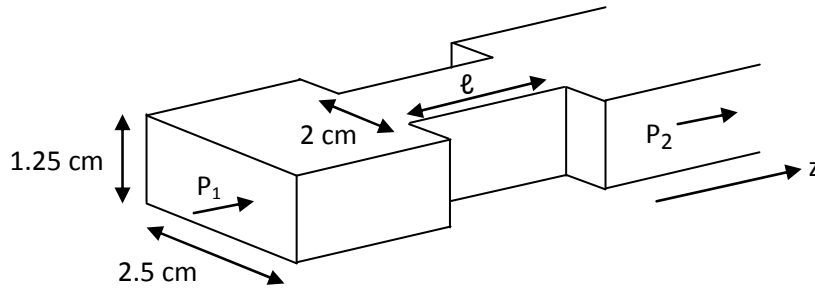
$$H_x = -\frac{E_y}{Z_{TE}} = i1.64 \sin\left(\frac{\pi}{0.0762}x\right) e^{-i34.33z}$$

Valor instantáneo de H_z :

$$H_z(x, z, t) = 1.96 \cos\left(\frac{\pi}{0.0762}x\right) \cos(1.61 \times 10^{10}t - 34.33z) \quad \text{A/m}$$

Las restantes componentes se obtienen de forma análoga.

P8-T4



El generador entrega una señal de frecuencia $f = 7 \text{ GHz}$ con $E_0 = 10 \text{ V/m}$

a) Modo de propagación en la *guía ancha*:

$$(f_c)_{10} = \frac{c}{2a} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 0,025} = 6 \text{ GHz}; \quad (f_c)_{20} = \frac{c}{a} = 12 \text{ GHz}; \quad (f_c)_{01} = \frac{c}{2b} = 12 \text{ GHz}$$

Vemos que a la frecuencia de trabajo sólo se propaga el modo TE_{10} .

b) Para dicho modo, la amplitud del campo magnético viene dada por (ec. 4.77):

$$H_0 = \frac{\pi E_0}{\omega \mu a} = 2,27 \cdot 10^{-2} \text{ A/m}$$

y la constante de propagación valdrá:

$$\beta_{10} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - (\pi/a)^2} = 75,7 \text{ m}^{-1}$$

En función de estas cantidades, la potencia transmitida será:

$$P_1 \equiv P_{av} = \frac{\omega \mu_0 \beta_{10} a^3 b}{4\pi^2} H_0^2 = 1,07 \cdot 10^{-5} \text{ W.}$$

c) Para la *guía estrecha* la frecuencia de corte es:

$$(f'_c)_{10} = \frac{c}{2a'} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 0,02} = 7,495 \text{ GHz}$$

Por tanto la propagación se hace con una constante

$$\gamma' = i\beta'_{10} = i\sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - (\pi/a')^2} = i\sqrt{-[(\pi/a')^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0]} = \pm 56,1 \text{ m}^{-1}$$

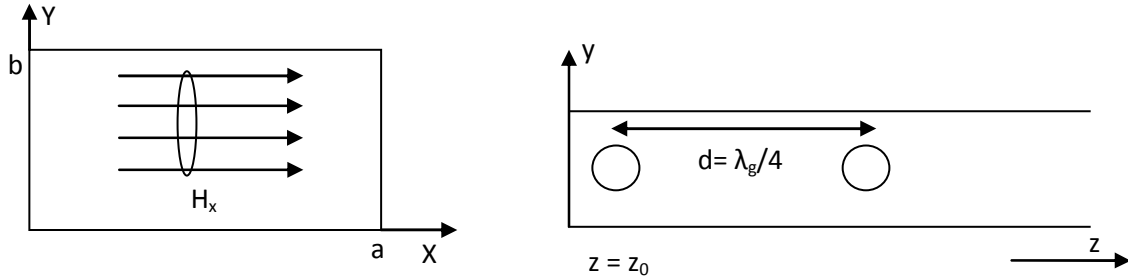
Elegimos el valor positivo que –llevado a la fórmula– atenúa la señal a lo largo del eje z . Si queremos que $P_2 = P_1 / 10$ la longitud de la *guía estrecha* ha de ser tal que:

$$P_2 = P_1 \cdot e^{-2\gamma'\ell} = 1,07 \cdot 10^{-6} \text{ W} \rightarrow e^{-2\gamma'\ell} = 0,1 \rightarrow \ell = \frac{\ln(0,1)}{-2\gamma'} = 2,05 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

d) La permitividad del dieléctrico a partir la cual la *guía estrecha* empieza a propagar el TE_{10} a $f = 7 \text{ GHz}$, es tal que se cumple:

$$\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r = (\pi/a')^2 \rightarrow \epsilon_r = 1,15$$

P9-T4



a) Para que se induzca una fem en la espira, tiene que haber un flujo magnético variable con el tiempo asociado a la espira. Para el modo fundamental TE_{10} , la única componente de campo \mathbf{H} es H_x , por lo que la espira debe estar situada en el plano ZY , con su vector unitario \mathbf{n} en la dirección del eje X .

La componente de campo magnético en la dirección del eje X para el modo TE_{10} es

$$H_x = H_{0x} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta_{10}z}, \text{ y el valor instantáneo: } H_x(x, z, t) = H_{0x} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - \beta_{10}z)$$

La fem inducida para la espira situada en el centro de la guía ($x = a/2$):

$$\mathcal{E} = -\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \cdot \underbrace{\left(\pi \frac{D^2}{4}\right)}_{\text{area espira}=A} = \mu_0 \omega A H_{0x} \sin(\omega t - \beta_{10}z)$$

que es una señal sinusoidal de amplitud $\mathcal{E}_{\max} = \mu_0 \omega A H_{0x}$

b) Como hemos visto, en un diagrama de onda estacionaria, la distancia entre un máximo ($z = z_0$) y un mínimo ($z = z_0 + d$) es $\lambda_g / 4$. Por tanto:

$$\lambda_g = 4d; \quad \beta_{10} = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{\pi}{2d}; \quad \beta_{10}^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \rightarrow f = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{2d}\right)^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2}$$

c) Si examinamos las ecuaciones de los campos para el modo TE_{10} en función de la amplitud de la fem inducida \mathcal{E}_0 , obtenemos:

$$H_{0x} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\mu_0 \omega A}; \quad H_{0z} = \frac{\pi}{\beta_{10} a} H_{0x} = \frac{\pi \mathcal{E}_{\max}}{\mu_0 \omega A \beta_{10} a}; \quad E_{0y} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{A \beta_{10}}$$

La potencia transmitida será:

$$P_{av} = \frac{\omega \mu_0 \beta_{10} a^3 b}{4\pi^2} H_{0z}^2 = \frac{\omega \mu_0 \beta_{10} a^3 b}{4\pi^2} \cdot \left(\frac{\pi \mathcal{E}_{\max}}{\mu_0 \omega A \beta_{10} a}\right)^2 = \frac{ab \mathcal{E}_{\max}^2}{4\mu_0 \omega \beta_{10} A^2}; \quad A = \pi \frac{D^2}{4}$$

d) En la posición z_0 de la espira, si la frecuencia se aumenta de forma que $D = \lambda_g$ el flujo neto a través de la espira será nulo. Para este caso, la constante de propagación es:

$$\beta = \frac{2\pi}{D}$$

y la frecuencia valdrá:

$$f = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{2}{D}\right)^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2}$$

Tema 5: Campos creados por cargas en movimiento. Radiación

Solución de la ecuación de ondas. Potenciales retardados. Potenciales de Liénard-Wiechert. Campos creados por cargas en movimiento arbitrario: Campos de velocidad y aceleración. Campos creados por una carga en movimiento uniforme. Radiación emitida por una carga acelerada: radiación a baja velocidad y a velocidades arbitrarias. Radiación dipolar eléctrica. Radiación dipolar magnética. Radiación de fuentes arbitrarias.

Nos plantearemos la solución de la ecuación de ondas con fuentes dependientes del tiempo. Obtendremos así los potenciales retardados. A partir de ellos se deducirán los potenciales de Liénard-Wiechert para una carga puntual. El resultado se aplicará a la determinación de los campos creados por partículas cargadas en movimiento uniforme y por partículas con aceleración lineal, estudiando los campos emitidos y los correspondientes diagramas de radiación. Analizaremos los campos de radiación de un dipolo eléctrico y de un dipolo magnético oscilantes y las correspondientes distribuciones angulares de la radiación emitida. Finalizaremos haciendo una introducción al estudio de radiación de fuentes con distribuciones de carga y corriente arbitrarias.

5.1. Solución de la ecuación de ondas. Potenciales retardados.

Como hemos visto en la Lección 1, las ecuaciones de Maxwell junto con la condición de Lorentz, conducen a que para campos variables con el tiempo las ecuaciones a resolver para los potenciales (en el vacío) son:

$$\begin{aligned}\square^2 \Phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \square^2 \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{J}\end{aligned}\tag{5.1}$$

con $\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \equiv \square^2$ (D'Alembertiano) y la condición de *gauge de Lorentz*,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

En el caso estático, las ecuaciones (5.1) se reducen a ecuaciones de Poisson:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{J}\end{aligned}\tag{5.2}$$

con las soluciones bien conocidas:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dV' \quad (5.3)$$

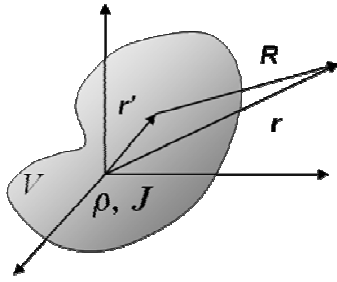


Figura 5.1. Campos creados por una distribución de carga

donde R es la distancia del punto fuente al punto campo (figura 5.1).

Dado que sabemos que las interacciones electromagnéticas no son instantáneas sino que se propagan con la velocidad $c = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$, parece intuitivo admitir que los potenciales en un punto \mathbf{r} vendrán determinados por los valores de las fuentes en un instante anterior:

$$t_r = t - \frac{R}{c}, \quad \text{tiempo retardado} \quad (5.4)$$

es decir,

$$\boxed{\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{R} dV', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{R} dV'} \quad \begin{array}{l} \text{potenciales} \\ \text{retardados} \end{array} \quad (5.5)$$

Hay que observar que no hay un tiempo retardado único para toda la distribución de carga; el tiempo retardado depende de la posición \mathbf{r}' de la carga, ya que $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.

Los resultados (5.5) parecen razonables y muy sencillos. Conviene sin embargo demostrarlos ya que la intuición no es siempre fiable. Por ejemplo, aunque demostraremos que las ecuaciones (5.5) son correctas, el mismo razonamiento intuitivo, aplicado a los campos, no es válido, es decir,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \neq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{R^2} \mathbf{u}_R dV', \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \neq \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r) \times \mathbf{u}_R}{R^2} dV',$$

donde $\mathbf{u}_R = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$.

Demostración

Consideremos la ec. (5.1) para el potencial escalar y para una fuente puntual y elemental, que (obviando su carácter diferencial) llamaremos $q(t) = \rho(t) dV$, situada en el origen. La solución para una fuente arbitraria, distribuida en el espacio podrá obtenerse después por superposición.

Para puntos fuera del origen, donde no hay carga, la solución será la de la ecuación homogénea,

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (5.6)$$

que dado que hay simetría esférica, puede escribirse:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (5.7)$$

y si hacemos el cambio de variable $\phi(r, t) = \frac{\chi(r, t)}{r}$, queda

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 \quad (5.8)$$

que, formalmente, como hemos visto en la lección 4, tiene soluciones del tipo de ondas que se propagan con velocidad c ,

$$\chi(r, t) = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right), \quad (5.9)$$

o sea, combinaciones de ondas viajeras que se propagan en el sentido de r crecientes o decrecientes. Las soluciones para ϕ van a ser ondas esféricas, salientes desde $r = 0$ y convergentes hacia el origen, respectivamente. Éstas últimas pueden descartarse como carentes de significado físico. Así, tomaremos para ϕ

$$\phi(r, t) = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \quad (5.10)$$

Esta solución que hemos encontrado para $r \neq 0$, debe satisfacer también el comportamiento adecuado en el origen. Debe ser tal que al integrar el primer miembro de la ec. (5.1) con ϕ dado por (5.10), a un volumen esférico en torno al origen, cuyo radio tiende a cero, debe dar la integral del segundo miembro que es la carga encerrada, $\rho(t') dV'$ multiplicada por la constante $(-1/\epsilon_0)$,

$$\int_{\substack{\Delta V \\ r \rightarrow 0}} \left(\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) dV' = -\frac{q(t)}{\epsilon_0} \quad (5.11)$$

Sustituyendo (5.10) en esta ecuación, queda

$$\int_{\substack{\Delta V \\ r \rightarrow 0}} f\left(t - \frac{r}{c}\right) \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) dV' = -\frac{q(t)}{\epsilon_0} \quad (5.12)$$

Cuando $r \rightarrow 0$, $f\left(t - \frac{r}{c}\right) \approx f(t)$ y se tiene

$$f(t) \int_{\Delta V} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dV' = -4\pi f(t) = -\frac{q(t)}{\epsilon_0} \quad (5.13)$$

donde hemos tenido en cuenta que $\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(r)$ y que la integral de una delta a un volumen que encierra el origen es la unidad. Así pues, para la carga elemental $q(t) = \rho(t) dV$ considerada,

$$\phi(r, t) = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} = \frac{q\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (5.14)$$

Esta es la solución para una carga elemental en el origen, $q\left(t - \frac{r}{c}\right) \equiv \rho\left(t - \frac{r}{c}\right) dV$. Si consideramos ahora una distribución de carga en un volumen V , por superposición el potencial será

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 R} dV', \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (\text{c.q.d.}) \quad (5.15)$$

Y análogamente para \mathbf{A} .

Un potencial retardado puede visualizarse de la siguiente forma: Consideremos un observador localizado en \mathbf{r} y una esfera con centro en \mathbf{r} que se contrae con velocidad radial c , convergiendo hacia el observador de forma que llega a él justamente en el instante t de observación. La *esfera colectora de información* va barriendo el espacio y pasa por la fuente de campo eléctrico, situada en \mathbf{r}' en el instante t_{ret} , cuyo efecto será

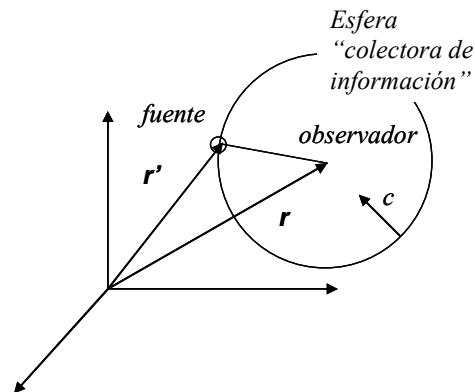


Figura 5.2. Esfera colectora de información para los potenciales retardados

observado posteriormente en \mathbf{r} , en el tiempo t (figura 5.2).

Observemos que el segundo tipo de solución, que hemos descartado en (5.9), nos llevaría a soluciones para los potenciales de la forma:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_a)}{R} dV', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_a)}{R} dV', \quad (5.16)$$

con $t_a = t + \frac{R}{c}$. A dichas soluciones, matemáticamente también válidas, se les llama *potenciales avanzados*. Representan potenciales en el instante t que dependen del estado de las cargas y corrientes en un instante *futuro* y violan así el *principio de causalidad*. Aunque se han utilizado en algunos desarrollos teóricos, los descartaremos como carentes de significado físico.

5.2. Potenciales de Liénard-Wiechert

Admitiendo la validez general de los potenciales retardados (5.5) como soluciones para cualquier problema de fuentes que varían en el tiempo, los aplicaremos al cálculo de potenciales y campos de partículas cargadas en movimiento arbitrario. El problema es de gran importancia conceptual y práctica, ya que nos llevará a entender el origen y características de la radiación electromagnética.

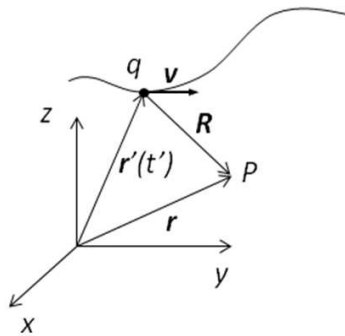


Figura 5.3. Trayectoria de partícula cargada: Punto campo y posición retardada.

Supongamos una partícula puntual de carga q , que se mueve, describiendo una trayectoria $\mathbf{r}'(t')$ con velocidad $\mathbf{v}(t')$, como se muestra en la figura (5.3). El tiempo retardado para la observación de los potenciales o campos de la carga está definido implícitamente por

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t_r)| = c(t - t_r) \quad (5.17)$$

Observemos que para cada instante t solo existe un punto \mathbf{r}' , desde el cual se emite el potencial observado en \mathbf{r} . En efecto, si existiesen dos puntos que verificasen (5.5), con tiempos retardados t_{r1} y t_{r2} ,

$$R_1 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1(t_{r1})| = c(t - t_{r1}), \quad R_2 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2(t_{r2})| = c(t - t_{r2})$$

de donde

$$R_1 - R_2 = c(t_{r2} - t_{r1})$$

y resultaría que la velocidad media de la partícula *en la dirección hacia el punto P* sería igual a c (sin contar con componentes de velocidad en otras direcciones), lo que, de acuerdo con la teoría de la Relatividad, no es posible. Así pues, *solo una posición retardada contribuye a los potenciales en cada instante*. (Dicho de otra forma, un observador *ve* a la partícula en una única posición en cada instante. Por el contrario, un observador puede *oir* una fuente de sonido en dos posiciones, en el mismo instante, es decir, puede oír a la vez sonidos emitidos por una fuente en dos posiciones retardadas distintas).

Podría pensarse que el potencial de la carga en movimiento es simplemente el potencial electrostático pero con la distancia tomada a la posición retardada de la carga; esto, sin embargo, no es cierto,

$$\Phi(\mathbf{r}, t) \neq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_{ret}}$$

Si bien es verdad que para una carga puntual, R en el denominador de (5.15) puede sacarse fuera de la integral, en cambio, no es cierto que $\int_V \rho(\mathbf{r}', t_r) dV'$ sea igual a q . El retardo obliga a evaluar las contribuciones del integrando en diferentes instantes de tiempo ya que t_r depende de \mathbf{r}' , lo que distorsiona la carga de la partícula. Esto es así incluso para una carga puntual, ya que las ecuaciones de Maxwell deben trabajar con fuentes, cargas o corrientes, representadas de forma continua, por sus densidades, aunque éstas estén concentradas en un volumen que en el límite, tiende a cero, como demostraremos en la sección siguiente.

El resultado correcto para el potencial escalar resulta ser:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \right]_{ret}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c} \quad (5.18)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad de la carga en el instante retardado y \mathbf{R} es el vector desde la posición retardada de la carga al punto campo.

La solución análoga para el potencial vector es

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \left[\frac{q \boldsymbol{\beta}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \right]_{ret} = \left[\frac{\Phi \boldsymbol{\beta}}{c} \right]_{ret} \quad (5.19)$$

Estos potenciales son conocidos como *potenciales de Liénard-Wiechert* y expresan los valores de Φ y \mathbf{A} en la localización y el tiempo del observador, producidos por la carga en movimiento con velocidad \mathbf{v} en la posición y el instante retardados.

Demostración

Como hemos comentado, las diferentes contribuciones del integrando $\rho_{ret} dV'$ deben ser evaluadas en instantes de tiempo diferentes. Durante el tiempo en que la esfera colectora de información “barre” la distribución de carga, ésta se mueve y se observa así más o

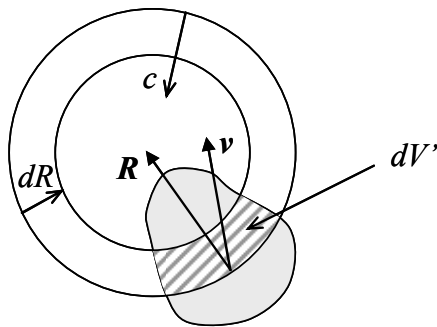


Figura 5.4 Elemento de carga observado por la esfera colectora de información

menos densa de lo que realmente es.

La situación puede considerarse análoga a la de la evaluación del censo de la población de un país. Supongamos un grupo de censores que converge hacia un centro de información con una cierta velocidad, midiendo la densidad de población, o sea, la cantidad de personas que van

encontrando a medida que avanzan. Si la población se mueve, por ejemplo hacia el centro de información, cada persona puede ser contada más de una vez y el censo total será mayor que la población real. Algo análogo ocurre con los potenciales retardados de una carga en movimiento (figura 5.4). El potencial retardado de una carga que se aproxima al observador será mayor que el de una carga que se aleja, situada a la misma distancia.

Consideremos el campo de una carga cuya velocidad es comparable a c . Si la carga estuviese en reposo la cantidad de carga que un elemento de área dS de la esfera cruza

durante un tiempo dt en que recorre dR , es $\rho_{ret} dS dR$. Pero si la carga se mueve con \mathbf{v} distinta de cero, hay una cantidad de carga $\rho_{ret} dS \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} \right) dt$ que escapa del alcance de la esfera, y por tanto la cantidad de carga observada en ese intervalo es

$$dq = \rho_{ret} dV' - \rho_{ret} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{R} dS dt, \quad \text{con} \quad dt = \frac{dR}{c} \quad \text{y} \quad dS dR = dV' \quad (5.20)$$

Despejando la densidad de carga retardada, queda

$$\frac{\rho_{ret} dV'}{R} = \frac{dq}{R - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c}} \quad (5.21)$$

donde las cantidades del denominador también deben evaluarse en el instante retardado. Los potenciales, quedan así:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c}} \quad (5.22)$$

Análogamente,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{v} dq}{R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c}}, \quad (5.23)$$

En el límite de una carga puntual, los términos del denominador se pueden considerar constantes y salen fuera de la integral y $\int dq = q$, resultando

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \right]_{ret} \quad (5.24)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{q \mathbf{v}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \right]_{ret} = \left[\frac{\Phi \boldsymbol{\beta}}{c} \right]_{ret}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c} \quad (5.25)$$

El subíndice *ret* indica que las magnitudes entre corchetes deben calcularse en el instante retardado.

5.3. Campos creados por cargas en movimiento arbitrario: Campos de velocidad y aceleración.

Para obtener los campos que derivan de los potenciales anteriores, necesitamos hallar ∇ y $\partial/\partial t$ de los potenciales y por tanto de las variables \mathbf{R}, t_{ret} (que por simplicidad llamaremos a partir de ahora $t', t_{ret} \equiv t'$) y $\boldsymbol{\beta}_{ret}$, que dependen de \mathbf{r} y t . Por ejemplo, calcular $\frac{\partial t'}{\partial t}$ requiere los pasos siguientes:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{1}{2R} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) = \mathbf{u}_R \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \mathbf{u}_R \left(-\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t} \right) = -\mathbf{u}_R \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\mathbf{u}_R c \boldsymbol{\beta} \frac{\partial t'}{\partial t} \quad (5.26)$$

donde $\mathbf{u}_R \equiv \frac{\mathbf{R}}{R}$. Por otra parte,

$$t' = t - \frac{R}{c} \quad ; \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{c \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}_R}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}_R},$$

con lo que finalmente se obtiene,

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}_R}. \quad (5.27)$$

Vemos así que hay una diferencia en la escala de tiempos de movimiento de la fuente y la de tiempos de observación. Físicamente puede interpretarse de la forma siguiente (ver figura 5.5):

La señal emitida en t' alcanza \mathbf{r} en t ; la señal emitida un instante $\Delta t'$ posterior, o sea, en $t' + \Delta t'$, alcanza \mathbf{r} en el tiempo $t + \Delta t$, después de recorrer $\approx R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_R \Delta t'$. Por otra parte,

$$R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_R \Delta t' = c([t + \Delta t] - [t' + \Delta t']) = R - c(\Delta t' - \Delta t) \Rightarrow \Delta t = \Delta t'(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}_R).$$

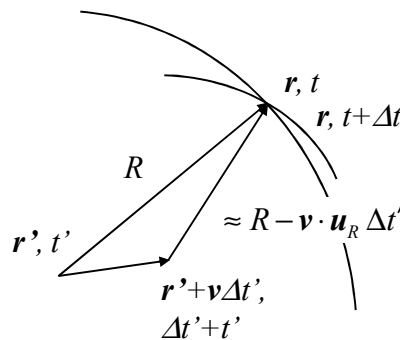


Figura 5.5. Diagrama de posiciones para determinar la relación entre escalas de tiempo.

Siguiendo un procedimiento análogo puede obtenerse la siguiente tabla de derivadas:

$$\begin{aligned}\nabla_i R_j &= \delta_{ij} + \frac{\beta_j u_{Ri}}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}_R} \quad ; \quad \nabla_i \beta_j = -\frac{\dot{\beta}_j u_{Ri} / c}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}_R} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} &= -\frac{\boldsymbol{\beta}}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}_R} \quad ; \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t} = \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}} / c}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}_R}\end{aligned}$$

A partir de los potenciales (5.24) y (5.25) pueden hallarse entonces los campos:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad , \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A};$$

obteniéndose dos contribuciones bien diferenciadas,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_v + \mathbf{E}_a \quad , \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_v + \mathbf{B}_a.$$

Los denominados *campos de velocidad* ó *convectivos*,

$$\mathbf{E}_v(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}_R)^3} (\mathbf{u}_R - \boldsymbol{\beta}) \right]_{ret} \quad , \quad \mathbf{B}_v = \frac{\boldsymbol{\beta}}{c} \times \mathbf{E}_v = \frac{\mathbf{u}_R}{c} \times \mathbf{E}_v |_{ret} \quad (5.28)$$

poseen la dependencia R^{-2} de los campos estáticos. Los segundos términos son los *campos de aceleración* ó *campos de radiación*:

$$\mathbf{E}_a(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{1}{R} \frac{\mathbf{u}_R \times [(\mathbf{u}_R - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}_R)^3} \right]_{ret} \quad ; \quad \mathbf{B}_a = \frac{\mathbf{u}_R}{c} \times \mathbf{E}_a |_{ret} \quad (5.29)$$

varían con R^{-1} y dan un flujo neto de energía a través de una superficie que rodee a la carga.

5.4. Campos creados por una carga en movimiento uniforme

Para una carga en movimiento uniforme $\dot{\mathbf{v}} = 0$ y solo hay campos de velocidad:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}_R)^3} (\mathbf{u}_R - \boldsymbol{\beta}) |_{ret} \quad ; \quad \mathbf{B} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{c} \times \mathbf{E}. \quad (5.30)$$

Puesto que se conoce la trayectoria de la partícula, es posible expresar los campos en función de la posición “presente” (figura 5.6). Para ello tenemos que calcular primero:

$$\mathbf{u}_R - \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{R} (\mathbf{R} - \boldsymbol{\beta} R) = \frac{\mathbf{R}_0}{R}. \quad (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}_R)^2 = 1 + \frac{(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^2}{R^2} - 2 \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}}{R};$$

Hacemos uso de:

$$|\mathbf{R} \times \boldsymbol{\beta}|^2 = |\mathbf{R}_0 \times \boldsymbol{\beta}|^2 \Rightarrow R^2 \beta^2 - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 = R_0^2 \beta^2 - (\mathbf{R}_0 \cdot \boldsymbol{\beta})^2.$$

Queda entonces:

$$(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}_R)^2 = 1 + \beta^2 - \frac{R_0^2 \beta^2}{R^2} + \frac{(\mathbf{R}_0 \cdot \boldsymbol{\beta})^2}{R^2} - 2 \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}}{R}$$

y como se cumple que

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{R} - \boldsymbol{\beta} R \Rightarrow R_0^2 = R^2 - 2R(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) + R^2 \beta^2,$$

sustituyendo, resulta

$$(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}_R)^2 = \frac{1}{R^2} (R_0^2 - R_0^2 \beta^2 + (\mathbf{R}_0 \cdot \boldsymbol{\beta})^2) = \frac{R_0^2}{R^2} (1 - \beta^2 \sin^2 \psi),$$

y los campos resultan:

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(1 - \beta^2) \mathbf{R}_0}{R_0^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \psi)^{3/2}}; \quad \mathbf{B} = \frac{\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}}{c}} \quad (5.31)$$

Para velocidades bajas $\beta \ll 1$ y las ecuaciones (5.31) se reducen a los campos de Coulomb y Biot y Savart.

Para un cociente v/c apreciable, el campo eléctrico aumenta en dirección normal al movimiento, en un factor $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, mientras que en la dirección de movimiento decrece en un factor γ^{-2} , respecto al coulombiano. A velocidades crecientes el campo se asemeja más y más al campo de una onda plana. Cuando un electrón pasa cerca de un observador a velocidad muy elevada, éste ve unos campos prácticamente transversales a la dirección del movimiento, muy semejantes a una onda plana. Estos campos, sin embargo, no son campos radiados, en el sentido de que no representan un flujo de energía alejándose del electrón, sino que se mueven convectivamente con la carga.

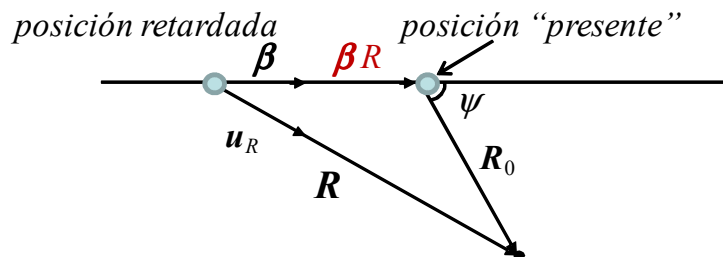


Figura 5.6. Posiciones retardada y presente de una carga en movimiento uniforme.

5.5. Radiación emitida por una carga acelerada: radiación a baja velocidad y a velocidades arbitrarias.

Los campos de aceleración son no nulos únicamente para cargas aceleradas y vendrán dados, en general, por las expresiones (5.29). Éstos, a diferencia de los campos de velocidad, se separan de las fuentes y tienen una existencia independiente de ellas.

Vamos a calcular la energía radiada por unidad de tiempo por una carga acelerada. Esta vendrá dada, por unidad de superficie normal al flujo energético, por el vector de Poynting:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_a \times \mathbf{B}_a = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_a \times \left(\frac{\mathbf{u}_R}{c} \times \mathbf{E}_a \right) = \frac{1}{\mu_0 c} E_a^2 \mathbf{u}_R = \frac{c}{\mu_0} B_a^2 \mathbf{u}_R; \quad (5.32)$$

$$|\mathbf{S}| = \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_R = \frac{E_a^2}{\mu_0 c} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c R^2} \frac{\left\{ \mathbf{u}_R \times [(\mathbf{u}_R - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \right\}^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}_R)^6}. \quad (5.33)$$

El módulo del vector de Poynting mide una energía por unidad de área y unidad de tiempo de observación de los campos, t . Si queremos medirla por unidad de tiempo de emisión habrá que multiplicarla por el factor de escala $\frac{dt}{dt'} = 1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}_R$ (ver ec. 5.27). Es decir

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = |\mathbf{S}| R^2 \frac{dt}{dt'} = |\mathbf{S}| R^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}_R).$$

De la ec. (5.33) resulta:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{\left\{ \mathbf{u}_R \times [(\mathbf{u}_R - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \right\}^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}_R)^5}. \quad (5.34)$$

La energía total radiada en todas las direcciones puede obtenerse integrando al ángulo sólido:

$$P = \frac{q^2}{6\pi \epsilon_0 c} \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{(1 - \beta^2)^3}, \quad (5.35)$$

que es no nula siempre que $\dot{\boldsymbol{\beta}} \neq 0$.

Vamos a analizar distintas aproximaciones en función de la velocidad.

a) Radiación a baja velocidad ($\beta \ll 1$)

La ec. (5.35) se reduce a la expresión

$$P \approx \frac{q^2 \dot{v}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (5.36)$$

Esta es la *fórmula de Larmor*, que corresponde a los campos aproximados:

$$\mathbf{E}_a \cong \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c R} \mathbf{u}_R \times (\mathbf{u}_R \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) \quad (v \ll c) \quad (5.37)$$

$$\mathbf{B}_a \cong \frac{\mu_0 q}{4\pi R} (\dot{\boldsymbol{\beta}} \times \mathbf{u}_R) \quad (v \ll c) \quad (5.38)$$

La potencia radiada por unidad de ángulo sólido es entonces (tomando $dt \approx dt'$),

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} |\mathbf{u}_R \times \dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 = \frac{q^2 \dot{\boldsymbol{\beta}}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \text{sen}^2 \theta. \quad (5.39)$$

En la figura 5.7 se representan los diagramas polares del campo eléctrico y de la potencia radiada por unidad de ángulo sólido.

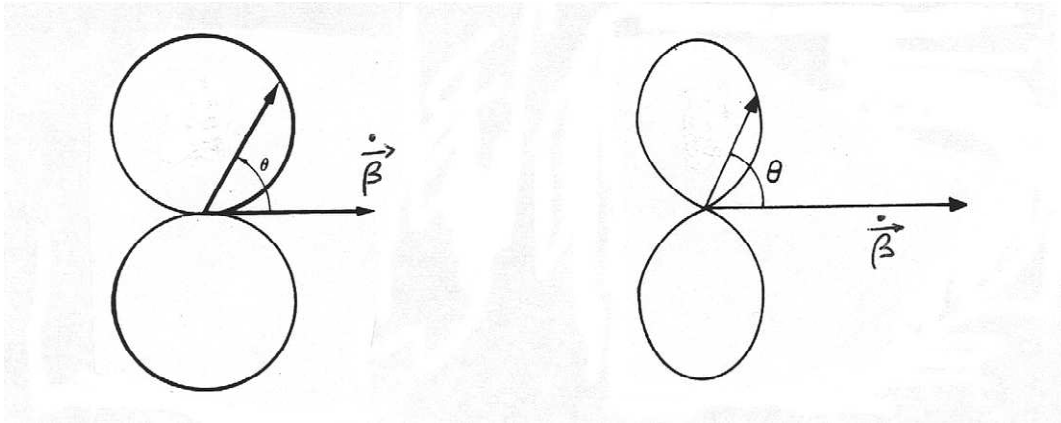


Figura 5.7 diagrama polar de $|\mathbf{E}|$ y de $\frac{dP}{d\Omega}$

b) *Velocidades arbitrarias*

La radiación que emite una partícula puede llegar a ser muy significativa cuando alcanza velocidades próximas a las de la luz. Para un instante en el que $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ forma un ángulo χ con $\boldsymbol{\beta}$, el numerador de la ec. (5.35) se puede poner como:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - \beta^2 \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \text{sen}^2 \chi &= \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 (1 - \beta^2 \text{sen}^2 \chi) \\ &= \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 (\text{sen}^2 \chi + \text{cos}^2 \chi - \beta^2 \text{sen}^2 \chi) = \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 (\text{cos}^2 \chi + \gamma^{-2} \text{sen}^2 \chi), \end{aligned}$$

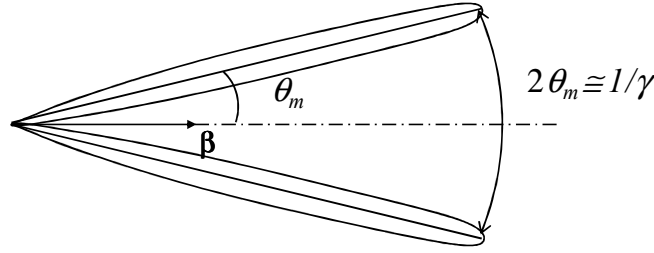


Figura 5.8. Distribución angular de la radiación emitida por una carga en la dirección de su movimiento para $v \sim c$.

y la potencia total radiada queda:

$$P = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c} \gamma^4 \dot{\beta}^2 (\gamma^2 \cos^2 \chi + \text{sen}^2 \chi), \quad (5.40)$$

que tiende a infinito como γ^6 para $\chi = 0$, y como γ^4 para $\chi = \pi/2$.

Analizaremos la distribución angular de la radiación en algunos casos de interés:

i) Aceleración paralela a la velocidad: se tiene $\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}} = 0$ y la ec. (5.34) queda

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{\dot{\beta}^2 \text{sen}^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}. \quad (5.41)$$

Podemos estimar el ángulo para el que la intensidad es máxima:

$$\frac{d}{d(\cos \theta)} \left(\frac{dP}{d\Omega} \right) = \text{Cte} \frac{-2 \cos \theta (1 - \beta \cos \theta)^5 + 5 \beta (1 - \beta \cos \theta)^4 \text{sen}^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^{10}} = 0;$$

se obtiene una ecuación de segundo grado en $\cos \theta_m$, que para $\beta \rightarrow 1$ depende de γ en la forma:

$$\cos \theta_m \cong 1 - \frac{1}{8\gamma^2} + \dots \cong 1 - \frac{1}{2} \theta_m^2,$$

lo que da para velocidades ultrarrelativistas ($v \sim c$), (figura 5.8),

$$\theta_m \cong \frac{1}{2\gamma} \ll 1$$

ii) Aceleración perpendicular a la velocidad: $\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} = 0$; transformamos (5.34) según las variables representadas en la figura 5.9.

Para el numerador de (5.34) tenemos

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{u}_R \times [(\mathbf{u}_R - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \right\} &= (\mathbf{u}_R - \boldsymbol{\beta})(\mathbf{u}_R \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \dot{\boldsymbol{\beta}}(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}_R); \\ \{ \}^2 &= \dot{\beta}^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}_R)^2 - (1 - \beta^2)(\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{u}_R)^2. \end{aligned}$$

También se cumple:

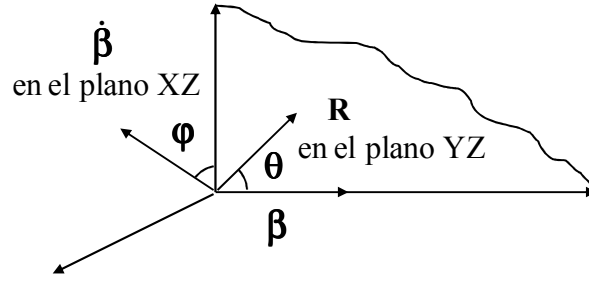


Figura 5.9. Definición de variables para el caso $\beta \perp \dot{\beta}$.

$$\beta \cdot \mathbf{u}_R = \beta \cos \theta \quad , \quad \dot{\beta} \cdot \mathbf{u}_R = \dot{\beta} \sin \theta \cos \varphi.$$

Por tanto la expresión para la distribución angular queda en la forma:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 \dot{\beta}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left[1 - \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta)^2} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \right] \quad (5.42)$$

cuyo diagrama se muestra en la figura 5.10 para velocidades elevadas.

Vemos que la radiación está confinada en un cono, con máximos secundarios poco importantes. Asimismo, el observador recibe un pulso cada vez que \mathbf{v} apunta en su dirección.

Las ecuaciones (5.41) y (5.42) son esenciales para analizar el comportamiento de las partículas cargadas en aceleradores lineales o circulares (radiación sincrotrón), así como la radiación emitida por cuerpos celestes tales como radiofuentes de planetas, púlsares, etc.

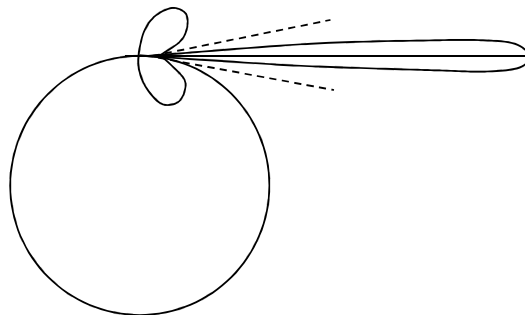


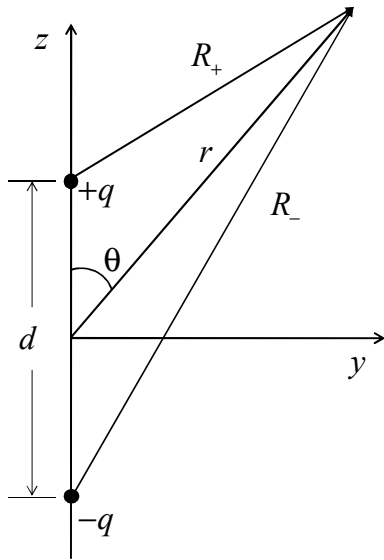
Figura 5.10. Distribución de la potencia radiada en el plano orbital de una carga con movimiento circular para $v \sim c$.

5.6. Radiación dipolar

Vamos a analizar la radiación de fuentes cuya distribución de carga y corriente viene descrita por una forma sencilla como es el caso de los dipolos eléctrico y magnético alimentados por una señal sinusoidal.

Dipolo eléctrico

Supongamos dos pequeñas esferas metálicas separadas una distancia d y conectadas por un alambre delgado, como se muestra en la Figura 5.11.



En el instante t la carga de la esfera superior es $q(t)$ y en la esfera inferior $-q(t)$. Esta carga oscila a través del alambre con una frecuencia ω :

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) \quad (5.43)$$

Ello da lugar a un dipolo eléctrico oscilante:

$$\mathbf{p}(t) = p_0 \cos(\omega t) \mathbf{u}_z; \quad p_0 = q_0 d \quad (5.44)$$

Figura 5.11. Dipolo eléctrico oscilante

El potencial retardado en un punto $\mathbf{r}(r, \theta)$ será:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_0 \cos\{\omega(t - R_+ / c)\}}{R_+} - \frac{q_0 \cos\{\omega(t - R_- / c)\}}{R_-} \right] \quad (5.45)$$

Por el teorema del coseno las distancias de las cargas al punto de observación serán:

$$R_{\pm} = \sqrt{r^2 \mp rd \cos \theta + (d/2)^2}$$

Vamos a realizar varias aproximaciones con el fin de obtener una expresión sencilla del potencial. En primer lugar supondremos que el dipolo es elemental, es decir, la distancia entre cargas es mucho menor que la distancia al punto de observación r .

- Aproximación de dipolo elemental: $d \ll r$

Podemos despreciar términos en d/r de segundo orden o mayores:

$$R_{\pm} \approx r \left(1 \mp \frac{d}{2r} \cos \theta \right)$$

$$\frac{1}{R_{\pm}} = \frac{1}{r \sqrt{1 \mp d \cos \theta / r + (d/2r)^2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta \right)$$

Por otra parte,

$$\cos\{\omega(t - R_{\pm}/c)\} \approx \cos\left\{\omega(t - r/c) \pm \frac{\omega d}{2c} \cos \theta\right\} =$$

$$= \cos\{\omega(t - r/c)\} \cos\left(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta\right) \mp \sin\{\omega(t - r/c)\} \sin\left(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta\right)$$

• Para el dipolo elemental también se verifica $d \ll \lambda$, lo que es equivalente a $d \ll \frac{c}{\omega}$ ya que las señales de frecuencia ω tienen longitud de onda $\lambda = 2\pi c / \omega$. Por tanto:

$$\cos\{\omega(t - R_{\pm}/c)\} \approx \cos\{\omega(t - r/c)\} \mp \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \sin\{\omega(t - r/c)\}$$

donde hemos aproximado el coseno de un ángulo próximo a cero por la unidad, y el seno por dicho ángulo.

Llevando estas aproximaciones a la expresión del potencial retardado resulta:

$$\Phi(r, \theta, t) = \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left[-\frac{\omega}{c} \sin\{\omega(t - r/c)\} + \frac{1}{r} \cos\{\omega(t - r/c)\} \right]$$

En el límite estático, $\omega \rightarrow 0$, el potencial se reduce al resultado ya conocido:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

• Si el punto de observación se encuentra muy alejado del origen, podemos aplicar una tercera aproximación que se denomina aproximación de *campo lejano* o de *zona de radiación*. En este caso se verifica $r \gg \lambda \rightarrow r \gg \frac{c}{\omega}$. Para esta región el potencial se reduce a:

$$\Phi(r, \theta, t) = -\frac{p_0 \omega}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\cos \theta}{r} \sin\{\omega(t - r/c)\} \quad (5.46)$$

Por otra parte, el potencial vector se obtiene a partir de la distribución de corriente en el alambre. Teniendo en cuenta (5.43):

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} \mathbf{u}_z = -q_0 \omega \sin(\omega t) \mathbf{u}_z \rightarrow$$

$$A(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_z \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{-q_0 \omega \sin\{\omega(t-r/c)\}}{r} dz \quad (5.47)$$

donde cualquier distancia desde el alambre al punto de integración se aproxima por la distancia al origen, $R \approx r$. El integrando no depende de la variable z y por tanto sale fuera, resultando:

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{-q_0 \omega \sin\{\omega(t-r/c)\}}{r} \mathbf{u}_z \int_{-d/2}^{d/2} dz = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \sin\{\omega(t-r/c)\} \mathbf{u}_z \quad (5.48)$$

Para hallar los campos eléctrico y magnético necesitamos calcular $\nabla\Phi$, $\partial A / \partial t$ y $\nabla \times A$.

Es conveniente pasar a coordenadas esféricas ($\mathbf{u}_r = \cos\theta \mathbf{u}_z$; $\mathbf{u}_\theta = -\sin\theta \mathbf{u}_z$). Así:

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \mathbf{u}_\theta =$$

$$= -\frac{p_0 \omega}{4\pi \epsilon_0 c} \left[\cos\theta \left(-\frac{1}{r^2} \sin\{\omega(t-r/c)\} - \frac{\omega}{rc} \cos\{\omega(t-r/c)\} \right) \mathbf{u}_r - \frac{\sin\theta}{r^2} \sin\{\omega(t-r/c)\} \mathbf{u}_\theta \right]$$

En la aproximación de campo lejano se desprecian los términos en $1/r^2$ y el gradiente queda:

$$\nabla\Phi \approx \frac{p_0 \omega^2}{4\pi \epsilon_0 c^2} \frac{\cos\theta}{r} \cos\{\omega(t-r/c)\} \mathbf{u}_r \quad (5.49)$$

La variación de A con t viene dada por:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \cos\{\omega(t-r/c)\} (\cos\theta \mathbf{u}_r - \sin\theta \mathbf{u}_\theta) \quad (5.50)$$

Y el campo eléctrico de radiación será:

$$\boxed{E = -\nabla\Phi - \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \cos\{\omega(t-r/c)\} \left(\frac{\sin\theta}{r} \right) \mathbf{u}_\theta} \quad (5.51)$$

Por otra parte,

$$\nabla \times A = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{u}_\phi =$$

$$= -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \left[\frac{\omega}{c} \sin\theta \cos\{\omega(t-r/c)\} + \frac{\sin\theta}{r} \sin\{\omega(t-r/c)\} \right] \mathbf{u}_\phi \quad (5.52)$$

Ignorando el término en $1/r^2$ queda para el campo magnético de radiación:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c} \cos\{\omega(t-r/c)\} \left(\frac{\sin \theta}{r}\right) \mathbf{u}_\phi \quad (5.53)$$

Si comparamos las expresiones de los campos vemos que son mutuamente perpendiculares y están en fase; ambos representan una onda monocromática de frecuencia ω viajando en la dirección radial a la velocidad de la luz. La relación entre sus módulos es $E_0 / B_0 = c$. Es, en realidad, una onda esférica con propiedades similares a las que obtuvimos para las ondas planas.

La potencia radiada por el dipolo eléctrico oscilante se obtiene partir del vector de Poynting:

$$\mathbf{S}(r, \theta, t) = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{\mu_0}{c} \left[\frac{p_0 \omega^2}{4\pi} \cos\{\omega(t-r/c)\} \left(\frac{\sin \theta}{r}\right) \right]^2 \mathbf{u}_r \quad (5.54)$$

El valor medio se obtiene integrando a un periodo este valor instantáneo y dividiendo por T :

$$\mathbf{S}_{av} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \left(\frac{\sin^2 \theta}{r^2}\right) \mathbf{u}_r \quad (5.55)$$

En la Figura 5.12 se muestra el diagrama polar de radiación resultante, que es $\propto \sin^2 \theta$.

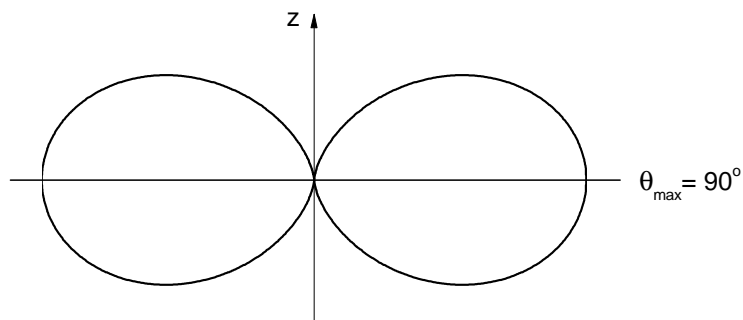


Figura 5.12. Diagrama polar de radiación de un dipolo elemental eléctrico.

El dipolo no radia en la dirección de su eje ($\sin \theta = 0$) y tiene su máximo en la dirección perpendicular como se ve en la figura. La potencia media total radiada la obtenemos integrando a una esfera de radio r el vector de Poynting:

$$P_{av} = \int \mathbf{S}_{av} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c} \quad (5.56)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$. Observamos que depende fuertemente

de la frecuencia de oscilación, $\propto \omega^4$, lo que explica por ejemplo el color del cielo. La luz del sol cubre un amplio rango de frecuencias; cuando incide en la atmósfera estimula a los átomos y moléculas de forma que oscilan como dipolos elementales. Pero la energía absorbida y re-radiada por los dipolos es bastante más intensa en las frecuencias del azul que en las del rojo y de ahí que el primero sea el color predominante.

Podemos expresar la potencia radiada en función de la corriente máxima en el dipolo, $I_0 = -q_0 \omega$, y de la longitud del dipolo, $d = p_0 / q_0$. Teniendo en cuenta, además, que $\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} = 120\pi$, $k = \omega / c$ y operando queda:

$$P_{av} = \frac{\eta(kd)^2}{12\pi} I_0^2 = \frac{\eta\pi}{3} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 I_0^2 = 80\pi^2 \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 I_{av}^2 \quad (5.57)$$

siendo $I_{av} = I_0 / \sqrt{2}$ el valor medio (o valor eficaz) de la intensidad. El término que multiplica a I_{av}^2 , tiene dimensiones de resistencia (Ω) y mide la eficiencia del dipolo eléctrico como sistema radiante. Ello permite definir la *resistencia de radiación* en la forma:

$$R_{rad} = \frac{P_{av}}{I_{av}^2} = \frac{2\eta_0\pi}{3} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 = 80\pi^2 \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \quad (5.58)$$

para el medio libre. En cualquier otro medio η_0 se sustituye por su impedancia intrínseca.

Otro parámetro que caracteriza al dipolo como sistema radiante es su *directividad*: es el *cociente entre la densidad media de potencia en la dirección de máxima radiación y la densidad de potencia promediada a todas las direcciones*. Esta última es igual a la potencia total radiada dividida por $4\pi r^2$, por tanto:

$$D = \frac{|\mathbf{S}_{av}|_{\theta=90^\circ}}{P_{av} / 4\pi r^2} = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta} = \frac{3}{2} \quad (5.59)$$

Ejemplo: Calcular la resistencia de radiación de un dipolo de 1 m de longitud a 1 MHz y a 6 MHz. Compararla con su resistencia óhmica suponiendo que es un alambre de Cu

de 1 mm de diámetro ($d = 1 \text{ m}$, radio $a = 5 \times 10^{-4} \text{ m}$; $\sigma_{Cu} = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$;). Profundidad de penetración en el Cu: $\delta = \sqrt{\pi f \mu_0 \sigma_{Cu}}$.

Solución: En primer lugar hay que comprobar si se cumple la aproximación de dipolo elemental. En términos de longitud de onda se suele imponer que $d \leq \frac{\lambda}{50}$.

Para 1 MHz, $d = \frac{\lambda}{300}$; a 6 MHz, $d = \frac{\lambda}{50}$. Ambos están dentro del margen de la aproximación de dipolo elemental. Las resistencias de radiación y óhmica serán:

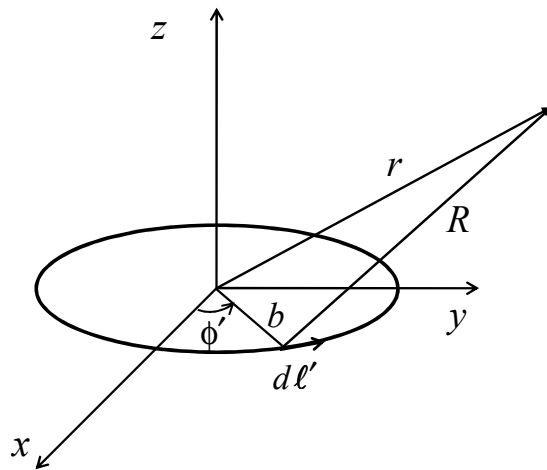
$$R_{rad}(10^6 \text{ Hz}) = 80\pi^2 \left(\frac{1}{300}\right)^2 = 8.8 \times 10^{-3} \Omega; \quad R_{rad}(6 \times 10^6 \text{ Hz}) = 0.32 \Omega$$

$$R_{ohm}(10^6 \text{ Hz}) = \frac{1}{\sigma_{Cu}} \frac{d}{2\pi [5 \times 10^{-4}] \delta} = 8.2 \times 10^{-2} \Omega; \quad R_{ohm}(6 \times 10^6 \text{ Hz}) = 0.2 \Omega$$

En el primer caso $R_{ohm} / R_{rad} = 9.3 \rightarrow$ la pérdida de potencia por efecto Joule en el dipolo supera a la potencia radiada en un factor casi 10 veces superior. En el segundo, $R_{rad} / R_{ohm} \simeq 1,6 \rightarrow$ domina el efecto de radiación sobre las pérdidas óhmicas.

Dipolo magnético

El otro radiador elemental es la espira de corriente de radio b representada en la figura 5.13. Suponemos que está alimentada con una corriente armónica:



$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

El momento dipolar magnético asociado será:

$$\mathbf{m}(t) = \pi b^2 I(t) \mathbf{u}_z = m_0 \cos(\omega t) \mathbf{u}_z \quad (5.60)$$

donde $m_0 = \pi b^2 I_0$ es su valor máximo.

Figura 5.13. Dipolo magnético oscilante

La espira está descargada y por tanto el potencial escalar es nulo, $\Phi = 0$.

El potencial vector será:

$$\mathbf{A}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{espira}} \frac{I_0 \cos\{\omega(t - R/c)\}}{R} d\ell' \quad (5.61)$$

Siguiendo un razonamiento análogo al del dipolo eléctrico, con las aproximaciones $b \ll \lambda \ll r$, se obtienen las siguientes expresiones para la zona de radiación:

$$\mathbf{A}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi c} \sin\{\omega(t - r/c)\} \left(\frac{\sin \theta}{r}\right) \mathbf{u}_\phi \quad (5.62a)$$

$$\mathbf{E}(r, \theta, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c} \cos\{\omega(t - r/c)\} \left(\frac{\sin \theta}{r}\right) \mathbf{u}_\phi \quad (5.62b)$$

$$\mathbf{B}(r, \theta, t) = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2} \cos\{\omega(t - r/c)\} \left(\frac{\sin \theta}{r}\right) \mathbf{u}_\theta \quad (5.62c)$$

Al igual que en el caso del dipolo eléctrico oscilante, observamos que los campos son perpendiculares entre sí y están en fase. La relación entre sus módulos es $E_0 / B_0 = c$ y se propagan en la dirección radial, como es de esperar para ondas electromagnéticas. Existen semejanzas entre los campos de ambos dipolos, sólo que ahora \mathbf{E} tiene dirección acimutal y \mathbf{B} está dirigido según el ángulo polar.

La densidad de potencia radiada en el instante t será:

$$\mathbf{S}(r, \theta, t) = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{\mu_0}{c} \left[\frac{m_0 \omega^2}{4\pi c} \cos\{\omega(t - r/c)\} \left(\frac{\sin \theta}{r}\right) \right]^2 \mathbf{u}_r \quad (5.63)$$

y su valor medio,

$$\mathbf{S}_{av} = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3} \left(\frac{\sin^2 \theta}{r^2}\right) \mathbf{u}_r \quad (5.64)$$

El diagrama de radiación es también $\propto \sin^2 \theta$, como el dibujado en la figura 5.12. La espira no radia en la dirección de su eje y alcanza el máximo en el plano que la contiene, $\theta = 90^\circ$.

La potencia media total radiada la obtenemos integrando a una esfera de radio r el vector de Poynting:

$$P_{av} = \int \mathbf{S}_{av} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3} \quad (5.65)$$

que también es proporcional a ω^4 .

Para hallar la resistencia de radiación, ponemos $m_0 = \pi b^2 I_0 = \sqrt{2} \pi b^2 I_{av}$:

$$R_{rad} = \frac{P_{av}}{I_{av}^2} = 20\pi^2 (kb)^4 = 320\pi^6 \left(\frac{b}{\lambda}\right)^4 \quad (5.66)$$

Vemos que mientras el dipolo eléctrico tiene una resistencia de radiación proporcional a $(d/\lambda)^2$, la del magnético es proporcional a $(b/\lambda)^4$; para la misma frecuencia de trabajo y dimensiones similares, es más ineficiente el dipolo magnético.

La directividad es la misma que la del dipolo elemental eléctrico,

$$D = \frac{|\mathbf{S}_{av}|_{\theta=90^\circ}}{P_{av} / 4\pi r^2} = \frac{3}{2}$$

Ejemplo:

Con un tubo de cobre de 2 cm de diámetro se construye una espira de radio $b = 25$ cm.

Hallar R_{rad} y R_{ohm} a 1 MHz.

Solución: Comprobamos que frente a $\lambda = 300$ m el radio de la espira es mucho menor, $b/\lambda = 8.33 \times 10^{-4}$.

$$R_{rad} = 320\pi^6 \left(\frac{b}{\lambda}\right)^4 = 1,48 \times 10^{-7} \Omega \quad ; \quad R_{ohm} = \frac{1}{\sigma_{Cu}} \frac{2\pi b}{2\pi(0,01)\delta} = 6,5 \times 10^{-3} \Omega$$

Se trata de un radiador muy ineficiente.

5.7. Radiación de fuentes arbitrarias

Ahora vamos a extender los cálculos de la radiación al caso de distribuciones de carga y corriente arbitrarias, con la única restricción de estar localizadas dentro de un volumen finito, como se ilustra en la Figura 5.14.

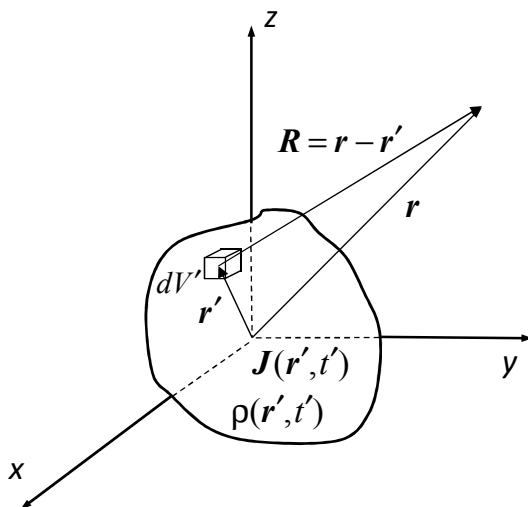


Figura 5.14. Distribución confinada de cargas y corrientes.

El potencial escalar retardado viene dado por la ec. (5.5):

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{R} dV'$$

siendo $t_r = t - R/c$ y $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}$. Como en los casos anteriores nos interesa hallar los campos en las regiones muy alejadas de la distribución. Para ello hacemos las siguientes aproximaciones:

• $r' \ll r$, al estar confinadas las fuentes, estamos imponiendo que el máximo valor de r' en V' sea mucho menor que la distancia del origen al punto de observación. Por tanto:

$$R \approx r \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right) \quad ; \quad \frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)$$

Para la distribución volúmica de carga también podemos utilizar esta aproximación:

$$\rho(\mathbf{r}', t - R/c) \approx \rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) \quad ; \quad \mathbf{u}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Desarrollando en serie de Taylor en t alrededor del *tiempo retardado en el origen*,

$$t_0 \equiv t - \frac{r}{c},$$

obtenemos:

$$\rho(\mathbf{r}', t - R/c) \approx \rho(\mathbf{r}', t_0) + \dot{\rho}(\mathbf{r}', t_0) \left(\frac{\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) + \frac{1}{2} \ddot{\rho} \left(\frac{\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}'}{c} \right)^2 + \frac{1}{3!} \dddot{\rho} \left(\frac{\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}'}{c} \right)^3 + \dots$$

Los puntos sobre la variable ρ denotan diferenciación con respecto a t . Los términos en $\ddot{\rho}$ y $\dddot{\rho}$ podemos despreciarlos si imponemos una segunda aproximación:

$$r' \ll \frac{c}{|\ddot{\rho}/\dot{\rho}|}, \frac{c}{|\ddot{\rho}/\dot{\rho}|^{1/2}}, \frac{c}{|\ddot{\rho}/\dot{\rho}|^{1/3}}, \dots$$

Para un sistema oscilante, cada uno de estos cocientes es $c/\omega = \lambda/2\pi$, con lo que obtenemos una condición similar a la de las aproximaciones dipolares, es decir $r' \ll \lambda$

Llevado este resultado a la expresión del potencial escalar,

$$\Phi(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\int_{V'} \rho(\mathbf{r}', t_0) dV' + \frac{\mathbf{u}_r}{r} \cdot \int_{V'} \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t_0) dV' + \frac{\mathbf{u}_r}{c} \cdot \frac{d}{dt} \int_{V'} \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t_0) dV' \right] \quad (5.67)$$

La primera integral es simplemente la carga total del sistema, Q . Puesto que la carga se conserva, este término es *independiente* del tiempo. Las otras dos integrales representan el momento dipolar eléctrico en t_0 . Por tanto,

$$\Phi(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p}(t_0)}{r^2} + \frac{\mathbf{u}_r \cdot \dot{\mathbf{p}}(t_0)}{r c} \right\} \quad (5.68)$$

Notemos que en el caso estático sólo contribuyen los dos primeros términos, quedando la conocida expresión del potencial en función de la contribución monopolar y dipolar electrostáticas.

Para el potencial vector partimos de la expresión general:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} dV'$$

Si $r' \ll r$, podemos tomar $R \approx r$ en el integrando,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}', t_0) dV'$$

Pero el término de la integral representa la derivada del momento dipolar de la distribución con respecto al tiempo; así pues queda:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t_0)}{r} \quad (5.69)$$

Ahora podemos hallar los campos asociados. Como nos interesa el estudio de la zona de radiación, despreciaremos aquellos términos que dependen de $1/r^2$. Por ejemplo, el término

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \mathbf{u}_r$$

que proviene del término monopolar de (5.68), no contribuye a la radiación electromagnética. Tampoco contribuye el segundo. Teniendo en cuenta que:

$$\nabla t_0 = -\frac{1}{c} \nabla r = -\frac{1}{c} \mathbf{u}_r$$

y operando con el tercer término de (5.68) se obtiene:

$$\nabla \Phi \approx \nabla \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{u}_r \cdot \dot{\mathbf{p}}(t_0)}{r c} \right] \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{u}_r \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t_0)}{r c} \right] \nabla t_0 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{[\mathbf{u}_r \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t_0)]}{r} \mathbf{u}_r \quad (5.70)$$

Análogamente,

$$\nabla \times \mathbf{A} \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} [\nabla \times \dot{\mathbf{p}}(t_0)] = \frac{\mu_0}{4\pi r} [(\nabla t_0) \times \ddot{\mathbf{p}}(t_0)] = -\frac{\mu_0}{4\pi r c} [\mathbf{u}_r \times \ddot{\mathbf{p}}(t_0)] \quad (5.71)$$

Para $\partial \mathbf{A} / \partial t$ resulta:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t_0)}{r}$$

Teniendo en cuenta estos resultados se obtienen los siguientes valores de los campos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} [(\mathbf{u}_r \cdot \ddot{\mathbf{p}}) \mathbf{u}_r - \ddot{\mathbf{p}}] \frac{1}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} [\mathbf{u}_r \times (\mathbf{u}_r \times \ddot{\mathbf{p}})] \left(\frac{1}{r}\right) \quad (5.72)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \approx -\frac{\mu_0}{4\pi c} [\mathbf{u}_r \times \ddot{\mathbf{p}}] \left(\frac{1}{r}\right) \quad (5.73)$$

donde $\ddot{\mathbf{p}}$ debe ser evaluado en el instante $t_0 = t - r/c$.

Introduciendo coordenadas esféricas, suponiendo que $\ddot{\mathbf{p}}(t_0)$ está alineada con el eje z y que el sistema presenta simetría acimutal, los campos se pueden expresar en la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r, \theta, t) &\approx \frac{\mu_0 \ddot{p}(t_0)}{4\pi} \left(\frac{\sin \theta}{r}\right) \mathbf{u}_\theta \\ \mathbf{B}(r, \theta, t) &\approx \frac{\mu_0 \ddot{p}(t_0)}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r}\right) \mathbf{u}_\phi \end{aligned} \quad (5.74)$$

El vector de Poynting instantáneo queda:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} [\ddot{p}(t_0)]^2 \left(\frac{\sin^2 \theta}{r^2}\right) \mathbf{u}_r \quad (5.75)$$

Y la potencia instantánea total radiada:

$$P \approx \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} [\ddot{p}(t_0)]^2 \left(\frac{\sin^2 \theta}{r^2}\right) \cancel{r^2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0}{6\pi c} [\ddot{p}(t_0)]^2 \quad (5.77)$$

Ejemplos:

a) En el caso de un dipolo eléctrico oscilante

$$p(t) = p_0 \cos(\omega t); \quad \dot{p}(t) = -p_0 \omega \sin(\omega t); \quad \ddot{p}(t) = -p_0 \omega^2 \cos(\omega t)$$

Para este caso, la potencia promediada a un ciclo será

$$P_{av} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

que coincide con el valor que ya obtuvimos para esta distribución.

b) Si tenemos una carga puntual, q , su momento será:

$$\mathbf{p}(t) = q \mathbf{d}(t)$$

$\mathbf{d}(t)$ es la posición de q con respecto al origen. Derivando con respecto a t :

$$\dot{\mathbf{p}} = q \mathbf{v}(t); \quad \ddot{\mathbf{p}} = q \mathbf{a}(t)$$

siendo \mathbf{v} y \mathbf{a} la velocidad y aceleración de la carga, respectivamente. Entonces la potencia instantánea radiada de acuerdo con nuestro resultado será:

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$$

Esta es la *fórmula de Larmor* que también hemos obtenido en una sección anterior. La potencia es proporcional al cuadrado de la aceleración de la partícula.

Desarrollo multipolar del potencial electrostático: distribución arbitraria de carga

Se tiene una distribución de carga confinada en un volumen V como se muestra en la Figura 1. El potencial electrostático en el punto \mathbf{r} de observación viene dado por:

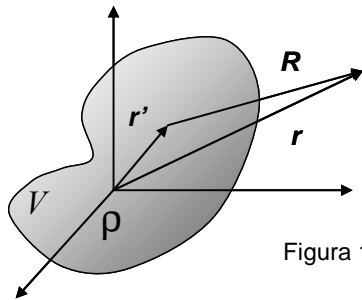


Figura 1.

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV \quad (1)$$

Para puntos de observación tales que $r \gg r'$, podemos desarrollar en serie el denominador de la integral y quedarnos con los términos más significativos:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = (r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[-\frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right] + \frac{3}{8} \left[\quad \right]^2 + \dots \right\}$$

Sustituyendo en la ecuación (1) y omitiendo los términos que contienen el cubo y potencias mayores de r' , se tiene:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left\{ \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{1}{2} \left[\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3} \right] + \dots \right\} \rho(\mathbf{r}') dV$$

Como \mathbf{r} se mantiene fijo en el proceso de integración, podemos sacarlo fuera:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \int_V \rho(\mathbf{r}') dV + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} \int_V (3x'_i x'_j - \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}') dV \right\}$$

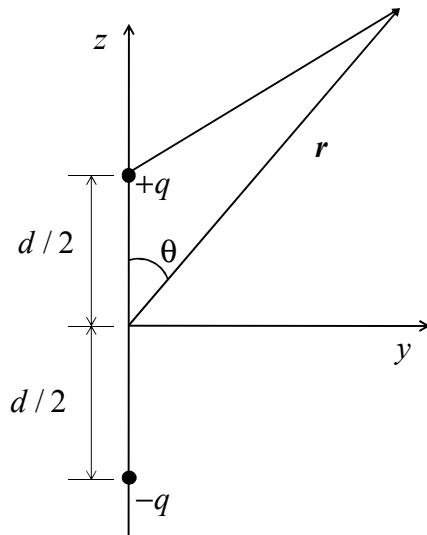
La primera integral representa la carga total de la distribución. La segunda integral es una generalización del concepto de momento dipolar para una distribución continua de carga y se llama *momento dipolar de la distribución de carga*. El segundo término del desarrollo es el potencial que resultaría si un dipolo puntual de igual momento se colocara en el origen.

La integral del tercer término es un tensor de nueve componentes que se denomina momento cuadrupolar de la distribución.

Ejemplo: Dipolo eléctrico

La distribución consiste en dos cargas $\pm q$ situadas en el eje z y separadas una distancia d como se muestra en la Figura 2:

Figura 2.



En este caso el primer término del desarrollo multipolar se anula ya que la carga total es cero. El segundo término es:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV \\ &= \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \left[\frac{d}{2} q \mathbf{u}_z + \left(\frac{d}{2} \right) (-q) (-\mathbf{u}_z) \right] \\ &= \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot [q d \mathbf{u}_z] \end{aligned}$$

La cantidad entre corchetes es por definición el *momento dipolar* \mathbf{p} . Si se cumple $d \ll r$, los restantes términos del desarrollo son despreciables y decimos que se trata de un *dipolo eléctrico puntual* (o ideal). El potencial eléctrico viene dado por:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2}$$

De esta expresión podemos derivar las componentes del campo eléctrico:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^3} \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin\theta}{r^3} \\ E_\phi &= 0 \end{aligned}$$

Tema 5: CAMPOS CREADOS POR CARGAS EN MOVIMIENTO. RADIACIÓN.

Solución de la ecuación de ondas. Potenciales retardados. Potenciales de Liénard-Wiechert. Campos creados por cargas en movimiento: campos de velocidad y aceleración. Campos creados por una carga en movimiento uniforme. Radiación emitida por una carga acelerada. Radiación dipolar eléctrica. Radiación dipolar magnética. Radiación de fuentes arbitrarias.

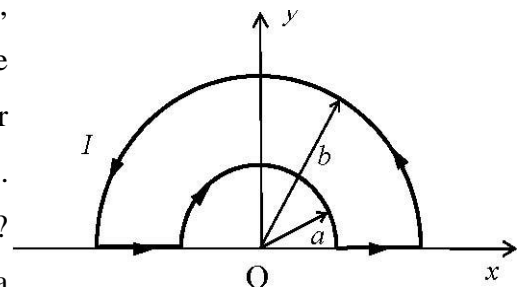
PROBLEMAS:

1. Se tiene un alambre conductor infinito a lo largo del eje Z. A partir del instante $t = 0$, se aplica una corriente constante en todo el alambre, es decir:

$$I(z, t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ I, & t \geq 0 \end{cases}$$

Hallar los campos \mathbf{E} , \mathbf{B} y el vector de Poynting \mathbf{S} en todo el espacio.

2. Una espira de alambre, con la forma indicada en la figura, está recorrida por una corriente que aumenta linealmente con el tiempo $I(t) = kt$. Hallar el potencial vector retardado \mathbf{A} en el centro O. Hallar el campo eléctrico \mathbf{E} en O. ¿Por qué el alambre neutro produce un campo eléctrico? ¿Por qué no podemos determinar el campo \mathbf{B} a partir de la expresión encontrada para \mathbf{A} ?



3. A partir de los campos de una carga puntual en movimiento uniforme, hallar los campos creados por una línea de carga a lo largo del eje x, con densidad λ , moviéndose en la dirección x con velocidad v.

4. Una partícula cargada con velocidad v_0 impacta sobre un medio, frenándose con una fuerza proporcional a la velocidad $\mathbf{F} = -\alpha\mathbf{v}$, hasta el reposo. Hallar la energía total emitida en forma de radiación (suponer que el medio actúa prácticamente como el vacío para la radiación).

Ayuda: $\int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{(1+\beta x)^5} dx = \frac{4}{3}\gamma^6$

5. Una partícula α se acelera, partiendo del reposo, por un potencial V correspondiente a una energía de 7.12 MeV.

a) Hallar la velocidad final de la partícula. (Ayuda: la energía de una partícula de masa m con velocidad v es $E = \gamma mc^2$).

b) Repetir el cálculo para el caso de que la partícula sea un electrón.

Las partículas siguen con movimiento uniforme:

c) Calcular el producto escalar $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ de los campos producidos por las partículas.

Si, finalmente, las partículas se frenan con aceleración constante paralela a la velocidad, de valor 10^{28} ms^{-2} :

d) Hallar la potencia radiada por la partícula α .

e) Hallar la energía radiada por unidad de ángulo sólido por el electrón en direcciones que forman ángulos $0, \pi/100$ y $\pi/4$ con la dirección de movimiento.

6. Un modelo clásico del átomo de hidrógeno (consistente en un electrón girando en una órbita circular de radio r_0 en torno a un protón) sería inconsistente puesto que la radiación emitida por el electrón provocaría que éste acabase cayendo en espiral sobre el núcleo atómico.

a) Analizar si es consistente la aproximación no-relativista ($v \ll c$).

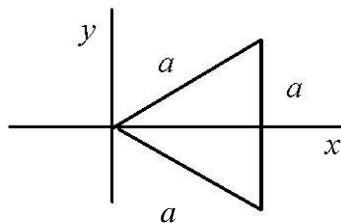
b) En ese caso, ¿cuánto tiempo tardaría el sistema en colapsar?

(Datos: $r_0 = 0.0526 \text{ nm}$; $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; $q_e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$)

7. Un electrón cuya energía cinética es de 1 KeV, gira en el plano perpendicular a un campo magnético de 1T. Compara la energía que radia en un ciclo con su energía cinética.

(Datos: $e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$)

8. Una pequeña espira con la forma de triángulo equilátero de lados de longitud a está recorrida por una corriente I_0 de frecuencia angular ω . Debido a que $\omega a \ll c$,



puede suponerse que la corriente en cualquier instante es la misma en toda la espira. Hallar el diagrama de radiación, la potencia media total radiada y la resistencia de radiación.

9. Un hilo conductor se coloca a lo largo el eje z con su centro en el origen, y es alimentado por una corriente $I_0 \text{ sen } \omega t$, donde $\omega = 5 \cdot 10^{10} \text{ rad/s}$, $I_0 = 1 \text{ A}$.

- a) Determinar la máxima longitud del hilo para que la aproximación de dipolo elemental sea válida y hallar su momento dipolar.
- b) Calcular la resistencia de radiación.

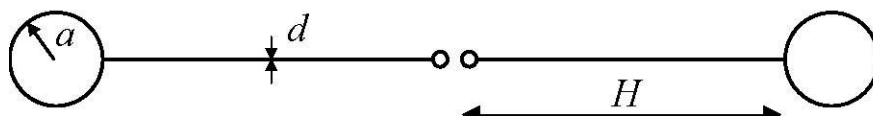
10. Sea un anillo de radio a sobre el que existe una densidad lineal de carga $\lambda = \lambda_0 \sin^2 \varphi$ (siendo $\lambda_0 > 0$ y $0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Si el anillo gira a una velocidad angular constante ω alrededor del eje z :

- a) Calcular la potencia radiada en la aproximación dipolar eléctrica.
- b) ¿Cómo cambia el resultado si el anillo estuviera cargado con $\lambda = \lambda_0 \sin \varphi$?

11. Una antena dipolar magnética de una emisora de radio se encuentra en el extremo de una torre de altura h sobre la tierra horizontal. La espira tiene radio a y está colocada con su eje vertical. Emite con frecuencia ω una potencia media total P_{av} . Los vecinos se quejan de interferencias varias y problemas médicos sospechosos. El técnico que ha medido el nivel de radiación ha encontrado valores inferiores a los límites establecidos por la normativa.

- a) Hallar la intensidad de radiación al nivel del suelo, a distancia R de la base de la torre (puede suponerse $a \ll c/\omega \ll h$).
- b) ¿A qué distancia de la base de la torre debería el técnico haber tomado las medidas? ¿Cuál es la intensidad en este punto?
- c) La potencia de salida de la antena es de 35 kW, su frecuencia 90 MHz, el radio de la antena 6 cm y la altura de la torre 200 m. ¿Cumplen los niveles de emisión la normativa (que supondremos establece un límite de $200 \mu\text{W}/\text{cm}^2$)?

12. Experimento de Hertz: Se tiene un dipolo formado por dos hilos rectos de diámetro $d = 5$ mm y longitud $H = 80$ cm cada uno. Los hilos están terminados en sus extremos más alejados por esferas de radio $a = 15$ cm.



- a) Hallar la capacidad y la autoinducción del sistema, así como su frecuencia de resonancia.
- b) Hallar también su directividad y resistencia de radiación utilizando la aproximación de dipolo elemental eléctrico.

(Ayuda: La autoinducción de un hilo de diámetro d y longitud $2H$ viene dada por la expresión:

$$L = 4 \times 10^{-7} H \{ \ln(8H/d) - 0.75 \}$$

13. Una pequeña esfera de masa m y carga q está unida a un resorte de constante k que cuelga verticalmente del techo de una sala. En el equilibrio la partícula está a una distancia h del suelo. El resorte se estira una longitud d desde el equilibrio y se suelta, oscilando libremente.

a) Suponiendo $d \ll \lambda \ll h$, calcular la potencia por unidad de área que incide sobre el suelo, a una distancia L desde la base de la vertical bajo q (despréciase cualquier efecto de carga imagen debida al suelo). ¿Para qué valor de L es máxima dicha intensidad de radiación?

b) Si el suelo es de extensión infinita, calcular la potencia media que llega globalmente al suelo. Compararla con la potencia media total que emite el dipolo (en todas direcciones).

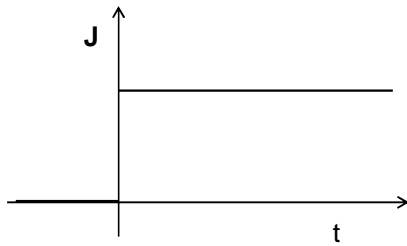
Ayuda:
$$\int_{L=0}^{\infty} \frac{x dx}{(x+h^2)^{5/2}} = \frac{4}{3h}$$

P1-T5

El potencial A viene dado por:

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{R} \Big|_{ret} dv'$$

donde la densidad de corriente se expresa mediante la función:

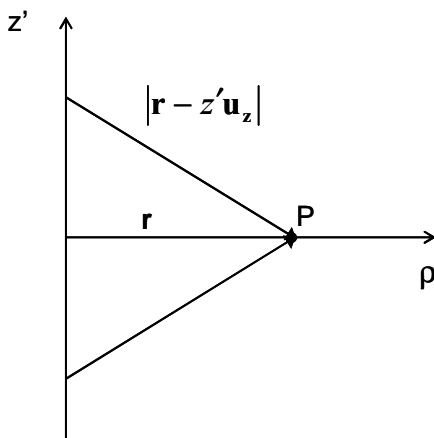


$$\mathbf{J}(\mathbf{r}', t') = I \cdot \delta(x') \cdot \delta(y') \cdot \Theta(t') \mathbf{u}_z$$

Por tanto,

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \mathbf{u}_z \int \frac{\Theta\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(x') \delta(y') dx' dy' dz'$$

$$\rightarrow A(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \mathbf{u}_z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Theta\left(t - \frac{|\mathbf{r} - z' \mathbf{u}_z|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - z' \mathbf{u}_z|} dz'$$



Definimos:

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{u}_\rho \quad \rightarrow \quad |\mathbf{r} - z' \mathbf{u}_z| = \sqrt{\rho^2 + z'^2}$$

Sólo contribuyen z' tales que

$$t - \frac{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}{c} > 0 \quad \rightarrow \quad ct > \sqrt{\rho^2 + z'^2}$$

$$\rightarrow z' < \left| \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2} \right| \quad \text{o bien}$$

$$-\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2} < z' < \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}$$

Por tanto la expresión de A queda en la forma:

P1-T5-cont.

$$\rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \mathbf{u}_z \int_{-a}^{+a} \frac{1}{\sqrt{z'^2 + \rho^2}} dz' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{c^2 t^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{c^2 t^2}}} \right) \mathbf{u}_z ; \quad a = \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}$$

Campo \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \mathbf{u}_\phi$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{c^2 t^2}} \right) = -\frac{\rho}{c^2 t^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{c^2 t^2}}} \rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{c^2 t^2}}} \mathbf{u}_\phi$$

Para $t \rightarrow \infty$ se obtiene la solución del caso estático, $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{u}_\phi$.

Campo \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{t \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{c^2 t^2}}} \mathbf{u}_z$$

Cuando $t \rightarrow \infty \rightarrow 0$.

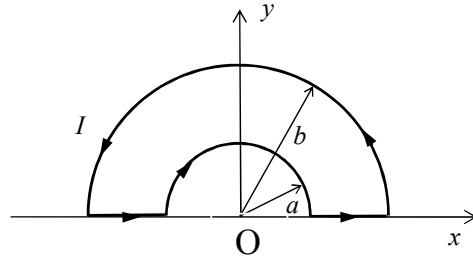
Vector de Poynting \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = + \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{\rho t \left(1 - \frac{\rho^2}{c^2 t^2} \right)} \mathbf{u}_\rho$$

Al igual que \mathbf{E} , se anula para tiempos grandes.

P2-T5

Corriente en la espira: $I(t) = kt$



El potencial vector A en el origen viene dado por:

$$A(O,t) = \frac{\mu_0 k}{4\pi} \int_{\text{espira}} \frac{(t - R/c)}{R} d\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 k}{4\pi} \left[t \int_{\text{espira}} \frac{d\mathbf{l}'}{R} - \frac{1}{c} \int_{\text{espira}} d\mathbf{l}' \right]$$

Al integrar $\int_{\text{espira}} d\mathbf{l}' = 0$, por tanto:

$$A(O,t) = \frac{\mu_0 kt}{4\pi} \left[\frac{1}{a} \int_{\text{circ int.}} d\mathbf{l}' + \frac{1}{b} \int_{\text{circ ext.}} d\mathbf{l}' + 2\mathbf{u}_x \int_a^b \frac{dx}{x} \right]$$

Para las dos primeras integrales se tiene (teniendo en cuenta que las componentes- y se anulan por la simetría):

$$\int_{\text{circ int.}} d\mathbf{l}' = 2a \mathbf{u}_x \quad ; \quad \int_{\text{circ ext.}} d\mathbf{l}' = -2b \mathbf{u}_x$$

Operando queda:

$$A(O,t) = \frac{\mu_0 kt}{4\pi} \left[\frac{1}{a}(2a) - \frac{1}{b}(2b) + 2 \ln(b/a) \right] \mathbf{u}_x \Rightarrow$$

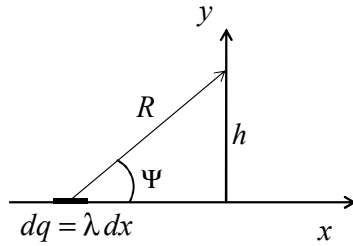
Campo eléctrico:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 k}{2\pi} \ln(b/a) \mathbf{u}_x$$

Puesto que no hay cargas en la espira, este campo eléctrico es producido por la intensidad de corriente y el campo magnético variable asociado a ella.

Puesto que sólo conocemos la expresión de A en el centro de la espira, no podemos calcular su rotacional para obtener \mathbf{B} .

P3 -T5



Línea de carga en el eje x ; densidad λ C/m.

El campo total será la suma de contribuciones elementales $dq = \lambda dx$ moviéndose con velocidad v en la dirección x .

Usaremos $\beta = v/c$ en las expresiones de los campos.

De acuerdo con la notación de la figura, el campo eléctrico creado por la línea será:

$$\mathbf{E} = \frac{q(1-\beta^2)\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{línea}} \frac{\mathbf{u}_R}{R^2} \frac{dx}{(1-\beta^2 \sin^2 \Psi)^{3/2}}$$

Las componentes horizontales se cancelan; sólo hay que sumar la contribución de las verticales. La distancia de la línea al punto campo es $h = R \sin \Psi$, por tanto:

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\sin^2 \Psi}{h^2}; \quad -\frac{x}{h} = \cot \Psi \Rightarrow dx = \frac{h}{\sin^2 \Psi} d\Psi; \quad \frac{1}{R} dx = \frac{d\Psi}{h}$$

Llevando esto a la expresión de \mathbf{E} ,

$$\mathbf{E} = \frac{q(1-\beta^2)\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{u}_y}{h}\right) \int_0^\pi \frac{\sin \Psi}{(1-\beta^2 \sin^2 \Psi)^{3/2}} d\Psi$$

Haciendo el cambio de variable $z = \cos \Psi$, de forma que $\sin^2 \Psi = 1 - z^2$,

$$\mathbf{E} = \frac{(1-\beta^2)\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{u}_y}{h}\right) \int_{-1}^1 \frac{1}{(1-\beta^2 + \beta^2 z^2)^{3/2}} dz = \frac{(1-\beta^2)\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{u}_y}{h}\right) \left[\frac{1}{\beta^3} \frac{z}{(\beta^{-2}-1)\sqrt{\beta^{-2}-1+z^2}} \right]_{-1}^1$$

Operando queda finalmente:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{h} \mathbf{u}_y$$

Este campo coincide con el de la línea en reposo. Además se crea un campo magnético: cada elemento dq se mueve con v constante, y el campo vendrá dado por:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{v\lambda}{h} (\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{v\lambda}{h} \mathbf{u}_z$$

El producto $v\lambda = I$ da la intensidad de corriente, por tanto hemos obtenido el campo de una línea recorrida por una corriente constante.

P4 – T5

Ecuación de movimiento (rectilíneo):

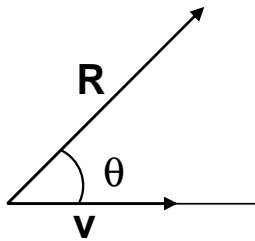
$$\frac{d}{dt}(\gamma m v) = -\alpha v \quad ; \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3 v \dot{v}}{c^2}$$

$$m \left(\frac{\gamma^3 v^2 \dot{v}}{c^2} + \gamma \dot{v} \right) = m \gamma^3 \dot{v} \left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) = -\alpha v$$

Como $\left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right) = 1$, la aceleración viene dada por:

$$\dot{v} = -\frac{\alpha v}{m \gamma^3} \quad (1)$$

Según el diagrama de la figura, el campo de radiación es:



$$E_{rad} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{R^2 \dot{v} \sin \theta}{s^3} \Big|_{ret} \quad ; \quad s = R \left(1 - \frac{v}{c} \sin \theta \right)$$

Potencia radiada por unidad de ángulo sólido ($v \parallel \dot{v}$):

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 \dot{v}^2}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^5}$$

Integrando, $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$:

$$\frac{dW}{dt'} = P = \frac{\mu_0 q^2 \dot{v}^2}{16\pi^2 c} \int \frac{\sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^5} 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dot{v}^2 \gamma^6 = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \frac{\alpha^2 v^2}{m}$$

$$\underbrace{\int \frac{\sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^5} 2\pi \sin \theta d\theta}_{2\pi \cdot \frac{4}{3} \gamma^6} \quad (1)$$

P4 –T5-cont.

Energía total emitida:

$$W = \frac{\mu_0^2 q^2 \alpha^2}{6\pi c m^2} \int_0^\infty v^2 dt' \quad ; \quad \text{hay que evaluar la integral teniendo en cuenta que inicialmente } v = v_0 .$$

$$(1) \quad \rightarrow \quad dv = -\frac{\alpha v}{m\gamma^3} dt' \quad ; \quad \frac{1}{2} d(v^2) = -\frac{\alpha}{m\gamma^3} v^2 dt'$$

por tanto:

$$\int_0^\infty v^2 dt' = -\int_{v_0}^0 \frac{m\gamma^3}{2\alpha} d(v^2) = -\frac{m}{2\alpha} \int_{u_0}^0 \frac{1}{\left(1 - \frac{u}{c^2}\right)^{3/2}} du$$

La energía total emitida será:

$$W = \frac{\mu_0 c q^2 \alpha}{6\pi m} (\gamma_0 - 1)$$

$$\text{con } \gamma_0 = \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

P5-T5

Las partículas α son núcleos de He ionizados; constan de dos protones y dos neutrones y su carga es positiva e igual al doble de la del protón.

Masa del electrón, $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg; masa de la partícula α , $m = 6,7 \times 10^{-27}$ kg

Carga del electrón, $e = -1,6 \times 10^{-19}$ C; carga de la partícula α , $q = 3,2 \times 10^{-19}$ C.

a) La energía cinética de la partícula después de ser acelerada partiendo del reposo será:

$$E_c = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1) mc^2$$

Esta energía proviene del potencial eléctrico aplicado, $E_{pot} = qV$. Igualando ambas:

$$(\gamma - 1) mc^2 = E_{pot} \quad (*)$$

Hemos de operar en esta expresión para obtener la velocidad de la partícula, teniendo en cuenta que

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \rightarrow 1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \rightarrow \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2}.$$

Despejando γ de (*),

$$\gamma = \frac{E_{pot} + mc^2}{mc^2} \rightarrow \frac{1}{\gamma^2} = \frac{m^2 c^4}{(E_{pot} + mc^2)^2} = 1 - \beta^2$$

Por tanto,

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{m^2 c^4}{(E_{pot} + mc^2)^2} \rightarrow \boxed{v = c \left(1 - \frac{m^2 c^4}{(E_{pot} + mc^2)^2} \right)^{1/2}}$$

En nuestro caso $E_{pot} = 7,12$ MeV = $1,14 \times 10^{-12}$ J.

Sustituyendo los datos para la partícula α se obtiene.

$$v = 1,84 \times 10^7 \text{ m/s} ; \beta = 6,14 \times 10^{-2}$$

b) Para el electrón la velocidad resulta ser:

$$v = 2,99 \times 10^8 \text{ m/s} ; \beta = 0,9977$$

c) Hemos visto que una partícula con movimiento uniforme rectilíneo crea unos campos

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(1 - \beta^2) \mathbf{R}_0}{R_0^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \psi)^{3/2}} ; \quad \mathbf{B} = \frac{\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}}{c}$$

Son perpendiculares entre sí, luego $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$.

P5-T5 (cont.)

d) Potencia radiada por la partícula α en el instante en que empieza a ser frenada:

$$P = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c} \gamma^4 \dot{\beta}^2 (\gamma^2 \cos^2 \chi + \sin^2 \chi) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c} \gamma^6 \dot{\beta}^2 \quad ; \quad \chi = 0.$$

En este caso $\dot{\beta} = \frac{\dot{v}}{c} = \frac{10^{28}}{c} \text{ s}^{-1}$, $\gamma = 1,0019$, $\gamma^6 = 1,011$.

Sustituyendo en la fórmula de la potencia radiada queda:

$$P = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c} \gamma^6 \dot{\beta}^2 = \frac{(3,2 \times 10^{-19})^2}{6 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \times 10^{-12} \cdot 3 \times 10^8} 1,011 \cdot \left(\frac{10^{28}}{3 \times 10^8} \right)^2 = 2298 \text{ W}$$

e) Energía por unidad de ángulo sólido radiada por el electrón, $\beta \parallel \dot{\beta}$:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{\dot{\beta}^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}.$$

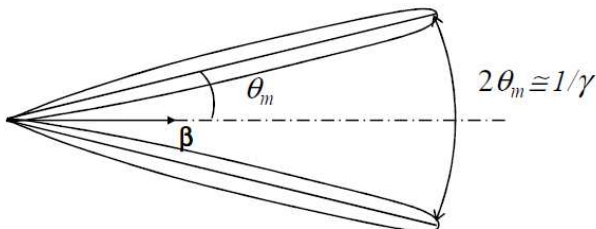
Particularizando a los distintos ángulos se tiene:

$$\theta = 0 \quad , \quad \frac{dP}{d\Omega} = 0$$

$$\theta = \pi/100 \quad , \quad \frac{dP}{d\Omega} = 4,3 \times 10^{11} \text{ W/sr}$$

$$\theta = \pi/4 \quad , \quad \frac{dP}{d\Omega} = 1,5 \times 10^4 \text{ W/sr}$$

Es una radiación con un máximo en $\theta_m \simeq \frac{1}{2\gamma} = 0,0335 \simeq 0,01 \pi$



P6-T5

a) La órbita circular del electrón debe cumplir que $F_{elect} = ma_c$; $q_e \cdot E = ma_c$

$$\left| \frac{q_p q_e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right| = m \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v(r_0) = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r} \right)^{1/2} \text{ m/s}$$

Para $r_0 = 0.0526 \text{ nm} \rightarrow v(r_0) = 2.19 \cdot 10^6 \text{ m/s}$, de modo que $v(r_0)/c = \beta = 0.0073 \ll 1$

A medida que el electrón radie energía, su radio irá disminuyendo (y su velocidad aumentará progresivamente). En el caso de que el radio pase a ser 100 veces menor que el inicial:

$$\beta = v \left(\frac{r_0}{100} \right) / c = 0.073 \ll 1$$

Por lo que podemos suponer que la aproximación no-relativista será válida durante la mayor parte del recorrido del electrón.

b) En este caso, al radiar el electrón ($\dot{v} \neq 0$) la ecuación de conservación de energía será:

$$\frac{d}{dt}(E_{total}) + P_{rad} = 0 \quad (1)$$

Donde:

$$\frac{d}{dt}(E_{total}) = \frac{d}{dt}(U_{elect.} + E_{cin.}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \right) = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} \frac{dr}{dt} \quad (2)$$

Calculamos la potencia radiada por el electrón mediante la fórmula de Larmor (ya que $v \ll c$):

$$P_{rad.} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{v^2}{r} \right)^2 \quad (3)$$

De este modo, sustituyendo (2) y (3) en (1) llegamos a:

$$\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} \frac{dr}{dt} + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{v^2}{r} \right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} + \frac{4}{3c^3} v^4 = 0$$

Sustituyendo $v = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r} \right)^{1/2}$ llegamos a:

$$\frac{dr}{dt} + \frac{4}{3c^3} \frac{e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} + \frac{\alpha}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 dr = -\alpha dt \quad (4)$$

Siendo la constante $\alpha = \frac{4}{3c^3} \frac{e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 m^2}$

$$\text{Resolviendo (4): } dt = -\int_{r_0}^0 \frac{r^2}{\alpha} dr \quad \Rightarrow \quad t = \frac{r_0^3}{3\alpha} = 1.445 \cdot 10^{-11} \text{ s}$$

P7-T5

$$\text{Velocidad de la partícula: } v = \sqrt{\frac{2|e|\cdot 10^3}{m_e}} = 1,87 \times 10^7 \text{ m/s.}$$

$$\text{energía cinética: } E_{cin} = 1,6 \times 10^{-19} \cdot 10^3 = 1,6 \times 10^{-16} \text{ J.}$$

$$\text{radio de la órbita: } r = \frac{m_e v}{qB} = 1,06 \times 10^{-4} \text{ m.}$$

$$\text{aceleración de la partícula: } \dot{v} = \frac{v^2}{r} = 3,3 \times 10^{18} \text{ m/s}^2.$$

En la órbita circular el periodo se puede obtener a partir de la velocidad angular:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} ; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi \cdot 9,11 \times 10^{-31}}{1,6 \times 10^{-19} \cdot 1} = 3,57 \times 10^{-11} \text{ s}$$

Se cumple $v \ll c$ y la potencia radiada se puede calcular con la fórmula de Larmor:

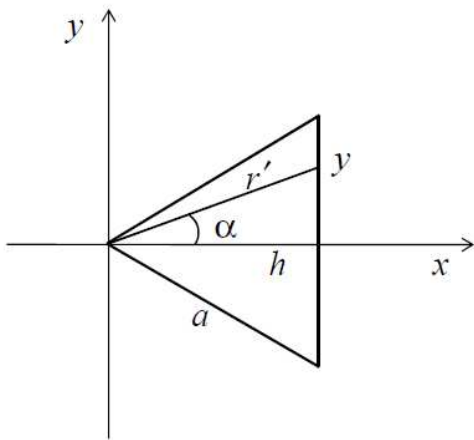
$$P = \frac{e^2 \dot{v}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = 2,5 \times 10^{-16} \text{ W}$$

Por tanto, la energía radiada en un ciclo será:

$$E_{rad} = P \cdot T = 8,9 \times 10^{-27} \text{ J}$$

$$\frac{E_{rad}}{E_{cin}} = 5,6 \times 10^{-11}$$

P8-T5



Momento de la espira:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_{\text{espira}} \mathbf{r}' \times I d\mathbf{l}'$$

Sólo contribuye el lado vertical ya que en los otros dos lados $\mathbf{r}' \times d\mathbf{l}' = 0$.

De acuerdo con la notación de la figura:

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}; h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{h}; \quad \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{dy}{h}; \quad r' = \frac{h}{\cos \alpha}$$

El momento de la espira vendrá dado por:

$$m_0 = \frac{1}{2} \int_{\alpha=-\pi/6}^{\alpha=\pi/6} \mathbf{r}' \times (I_0 dy) \mathbf{u}_y = \frac{1}{2} I_0 \mathbf{u}_z \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{h}{\cos \alpha} \cos \alpha \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$= \frac{1}{2} I_0 h^2 \mathbf{u}_z [\operatorname{tg} \alpha]_{-\pi/6}^{\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{4} I_0 a^2 \mathbf{u}_z \quad ; \quad \mathbf{m} = m_0 \cos \omega t$$

Campos de radiación:

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c} \cos\{\omega(t-r/c)\} \left(\frac{\sin \theta}{r}\right) \mathbf{u}_\theta \quad ; \quad \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2} \cos\{\omega(t-r/c)\} \left(\frac{\sin \theta}{r}\right) \mathbf{u}_\phi$$

Potencia media por unidad de ángulo sólido:

$$\frac{dP_{av}}{d\Omega} = \frac{1}{2\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_r r^2 = \frac{\mu_0 \omega^4 m_0^2}{32\pi^2 c^3} \sin^2 \theta$$

El diagrama de radiación es la función $\sin^2 \theta$, como en la espira circular.

La potencia media emitida es:

$$P_{av} = \int \mathbf{S}_{av} \cdot \mathbf{u}_r dS = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

Resistencia de radiación: $m_0^2 = \frac{3}{16} I_0^2 a^4 = \frac{3}{8} I_{av}^2 a^4$

$$R_{rad} = \frac{P_{av}}{I_{av}^2} = \frac{\mu_0 a^4 \omega^4}{32\pi c^3} = 240\pi^4 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4$$

P9-T5

$$\omega = 5 \times 10^{10} \text{ rad/s} \rightarrow f = 7.96 \times 10^9 \text{ Hz} ; \lambda = \frac{c}{f} = 0,0377 \text{ m}$$

a) La condición de dipolo elemental es que $d \leq \frac{\lambda}{50}$ por tanto la máxima longitud será

$$d = \frac{0,0377}{50} = 7,54 \times 10^{-4} \text{ m.}$$

Momento dipolar:

$$I = I_0 \sin \omega t \rightarrow q = -\frac{I_0}{\omega} \cos \omega t \rightarrow q_0 = \frac{I_0}{\omega} = \frac{1}{5 \times 10^{10}} = 2 \times 10^{-11} \text{ C}$$

Luego el momento dipolar será:

$$p = q_0 d \cos \omega t = 1,51 \times 10^{-14} \cos \omega t \text{ C} \cdot \text{m}$$

b) Resistencia de radiación:

$$R_{rad} = 80\pi^2 \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 = 80\pi^2 \left(\frac{1}{50} \right)^2 = 0,316 \Omega$$

P10-T5

a) En $t=0$ $\mathbf{p}(t=0) = \mathbf{p}_0 = \int \lambda a d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} (\lambda_0 \text{sen}^2 \varphi)(a \text{sen} \varphi \mathbf{u}_y + a \text{cos} \varphi \mathbf{u}_x) a d\varphi$

$$\mathbf{p}_0 = \lambda_0 a^2 \left[\mathbf{u}_y \int_0^{2\pi} \text{sen}^3 \varphi d\varphi + \mathbf{u}_x \int_0^{2\pi} \text{sen}^2 \varphi \text{cos} \varphi d\varphi \right] = \lambda_0 a^2 [0 \mathbf{u}_y + 0 \mathbf{u}_x] = 0$$

Por lo tanto la potencia total radiada será:

$$P_{AV} = \frac{\mu_0}{6\pi c} [\ddot{\mathbf{p}}(t_0)]^2 = 0$$

b) En $t=0$ $\mathbf{p}(t=0) = \mathbf{p}_0 = \int \lambda a d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} (\lambda_0 \text{sen} \varphi)(a \text{sen} \varphi \mathbf{u}_y + a \text{cos} \varphi \mathbf{u}_x) a d\varphi$

$$\mathbf{p}_0 = \lambda_0 a^2 \left[\mathbf{u}_y \int_0^{2\pi} \text{sen}^2 \varphi d\varphi + \mathbf{u}_x \int_0^{2\pi} \text{sen} \varphi \text{cos} \varphi d\varphi \right] = \lambda_0 a^2 [\pi \mathbf{u}_y + 0 \mathbf{u}_x] = \lambda_0 a^2 \pi \mathbf{u}_y$$

Como: $\mathbf{p}(t) = p_0 (\text{cos} \omega t \mathbf{u}_y - \text{sen} \omega t \mathbf{u}_x)$

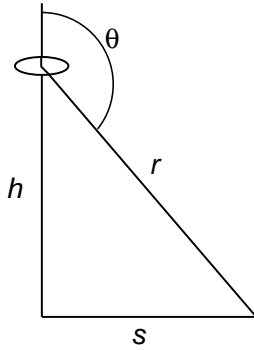
Derivando: $\dot{\mathbf{p}}(t) = p_0 \omega (-\text{sen} \omega t \mathbf{u}_y - \text{cos} \omega t \mathbf{u}_x)$

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) = -p_0 \omega^2 (\text{cos} \omega t \mathbf{u}_y - \text{sen} \omega t \mathbf{u}_x) = -\omega^2 \vec{\mathbf{p}}(t) \Rightarrow [\ddot{\mathbf{p}}(t_0)]^2 = \omega^4 p_0^2$$

La potencia total radiada es igual a:

$$P_{AV} = \frac{\mu_0}{6\pi c} [\ddot{\mathbf{p}}(t_0)]^2 = \frac{\mu_0}{6\pi c} (\omega^4 p_0^2) = \frac{\mu_0}{6\pi c} \omega^4 (\lambda_0 a^2 \pi \mathbf{u}_y)^2 = \frac{\pi \mu_0 \omega^4 a^4 \lambda_0^2}{6c}$$

P11-T5



Despreciamos el efecto del dipolo imagen.

Los campos creados por este dipolo magnético elemental vienen dados por:

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c} \cos\{\omega(t - r/c)\} \left(\frac{\sin\theta}{r}\right) \mathbf{u}_\phi \quad ; \quad \mathbf{B} = -\frac{\mathbf{E}}{c} \mathbf{u}_\theta$$

La densidad de potencia media (intensidad de radiación) y la potencia media serán:

$$|\mathbf{S}_{av}| = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \quad ; \quad P_{av} = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

Comparando ambas expresiones y teniendo en cuenta la notación de la figura queda:

$$|\mathbf{S}_{av}| = \frac{3P_{av}}{8\pi} \frac{\sin^2\theta}{r^2} = \frac{3P_{av}}{8\pi} \frac{s^2}{r^4} = \frac{3P_{av}}{8\pi} \frac{s^2}{(h^2 + s^2)^2}$$

b) El técnico debe medir a la distancia en la que se tiene un máximo de intensidad,

$$\frac{d|\mathbf{S}_{av}|}{ds} = 0 \Rightarrow s = h$$

$$|\mathbf{S}_{av}|_{\max} = \frac{3P_{av}}{8\pi} \frac{1}{4h^2} = \frac{3}{32\pi h^2} P_{av}$$

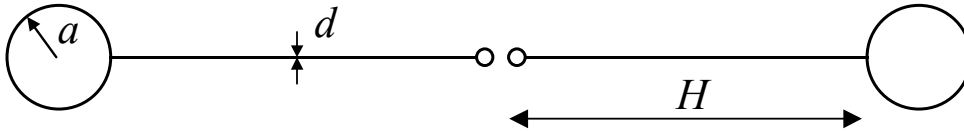
c) Para los datos del problema:

$$|\mathbf{S}_{av}|_{\max} = \frac{3}{32\pi h^2} P_{av} = \frac{3}{32\pi \cdot 200^2} \cdot 35 \times 10^3 = 0,0261 \text{ W/m}^2 = 2,61 \mu\text{W/cm}^2$$

Queda muy por debajo del límite establecido.

P12-T5

Experimento de Hertz



$$H = 80 \text{ cm}, \quad d = 5 \text{ mm}, \quad a = 15 \text{ cm}.$$

a) Hay que hallar la capacidad de dos esferas de radio a separadas una distancia $\approx 2H \gg a$.

Expresamos los potenciales de las esferas en función de la carga en ellas, Q_1 y Q_2 , y de los coeficientes de potencial:

$$\begin{aligned} V_1 &= P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2 \\ V_2 &= P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2 \end{aligned}$$

donde

$$P_{11} = \left. \frac{V_1}{Q_1} \right|_{Q_2=0} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a}, \quad P_{22} = P_{11}; \quad P_{12} = \left. \frac{V_1}{Q_2} \right|_{Q_1=0} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 (2H + 2a)}, \quad P_{21} = P_{12}$$

Si, como en este caso, $Q_1 = -Q_2 = Q$, el sistema de ecuaciones se reduce a:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= Q(P_{11} - P_{12}) \\ V_2 &= Q(P_{21} - P_{22}) \end{aligned} \right\} \rightarrow V_1 - V_2 = Q(P_{11} + P_{22} - P_{12} - P_{21})$$

y la capacidad vendrá dada por

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{1}{2P_{11} - 2P_{12}} = 9,06 \text{ pF}$$

La autoinducción de un hilo de diámetro d y longitud $2H$ viene dada aproximadamente por la expresión:

$$L = 4 \times 10^{-7} H \left[\ln \left(\frac{8H}{d} \right) - 0,75 \right] = 2,05 \text{ } \mu\text{H}$$

P12-T5 (cont.)

Por tanto, la frecuencia de resonancia del circuito será:

$$f_{res} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 36,93 \text{ MHz}$$

Para esta frecuencia

$$\lambda = 8,12 \text{ m}; \quad k = 2\pi/\lambda = 0,773 \text{ m}^{-1}.$$

b) La forma del diagrama de radiación es la de un dipolo elemental, $\propto \sin^2\theta$, y su directividad vale

$$D = \frac{3}{2}$$

La resistencia de radiación en dicha aproximación viene dada por:

$$R_r \simeq 80\pi^2 \left(\frac{2H}{\lambda} \right)^2 = 30,7 \text{ } \Omega$$

P13-T5

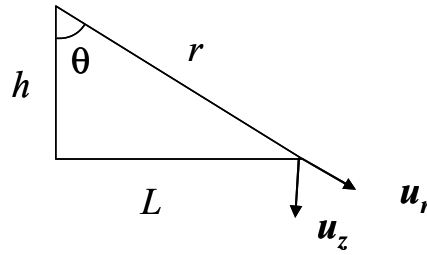
a) Dipolo eléctrico. Intensidad de radiación:

$$\mathbf{S}_{av} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \left(\frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) \mathbf{u}_r$$

Potencia por unidad de área de suelo:

$$\mathbf{S}_{av} \cdot \mathbf{u}_z = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{r^2}$$

$$\sin \theta = \frac{L}{r}, \quad \cos \theta = \frac{h}{r}, \quad r = \sqrt{h^2 + L^2}$$



$$I_s = \frac{dP_{av}}{dS} = \frac{\mu_0 q^2 d^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \frac{L^2 h}{(L^2 + h^2)^{5/2}}$$

$$\frac{dI_s}{dL} = \frac{\mu_0 q^2 d^2 \omega^4 h}{32\pi^2 c} \frac{d}{dL} \left[\frac{L^2}{(L^2 + h^2)^{5/2}} \right] = 0 \Rightarrow L = \sqrt{\frac{2}{3}} h \text{ máxima } I_s \left(\frac{d^2 I_s}{dL^2} < 0 \right)$$

b)

$$P_{av} = \int_{\text{suelo}} I_s dS = \int_{L=0}^{\infty} I_s \cdot 2\pi L dL = \frac{\mu_0 q^2 d^2 \omega^4}{16\pi c} h \int_{L=0}^{\infty} \frac{L^3 dL}{(L^2 + h^2)^{5/2}}$$

$$\text{Cambio de variable: } L^2 = x, \quad \int_{L=0}^{\infty} \frac{L^3 dL}{(L^2 + h^2)^{5/2}} = \frac{1}{2} \int_{L=0}^{\infty} \frac{x dx}{(x + h^2)^{5/2}} = \frac{1}{2h} \frac{\Gamma(2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(5/2)} = \frac{2}{3h}$$

$$P_{av} = \frac{\mu_0 q^2 d^2 \omega^4}{24\pi c}$$

Lógicamente, es la mitad de la potencia total emitida (la otra mitad va al techo)

Tema 6: Electromagnetismo y Relatividad

6.1 Teoría Especial de la Relatividad: Postulados de Einstein

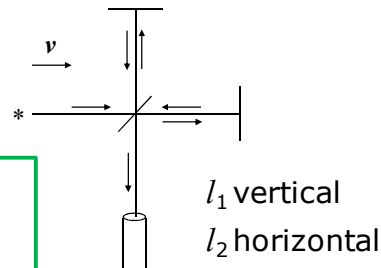
Encrucijada teórico-experimental ~ 1900: detección del *éter*

Experimentos clave:

- Experimento de Michelson-Morley

Diferencia de caminos ópticos:

$$c(t'_1 - t'_2) = \frac{2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(l_1 - \frac{l_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right),$$



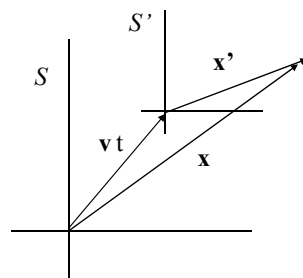
Contracción de longitudes (Lorentz y Fitzgerald): Postularon que, debido al movimiento respecto al *éter* estacionario, cualquier objeto se contraía en un factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ en la dirección del movimiento"

$$l_2 \rightarrow l_2 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Un efecto cancela al otro

Bases teóricas: relatividad de la Mecánica y el electromagnetismo

P. de Relatividad de Galileo: para la Mecánica se aplican las mismas leyes en cualquier **sistema inercial**



$$\text{TG} \begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}$$

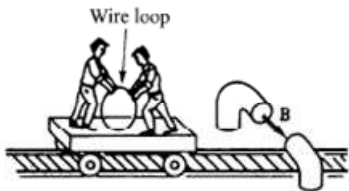
Ejemplo: juego de billar en un tren en movimiento

- 1) Si el tren se mueve con v constante, la forma de jugar sería exactamente la misma que si estuviere parado
- 2) Si el tren acelera o toma una curva, ya no se podría jugar de la misma manera \rightarrow las leyes no son las mismas cuando el sistema no es inercial

Para el Electromagnetismo el **P. de Relatividad de Galileo no es aplicable**

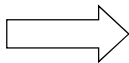
Ejemplos:

- Una carga en movimiento en un tren crea un campo magnético, Para un observador en el tren la carga está en reposo y no hay campo B.
- En las leyes del EM aparece con frecuencia 'la velocidad' de la carga o de los campos. Debe haber un sistema estacionario especial respecto al cual se mide esa velocidad
- Asimetría en la interpretación de un fenómeno (inducción em):



Desde el suelo: $\mathbf{f} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$

Desde el vagón: $\mathbf{v} = 0, \mathbf{f} = 0, \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$



No hay reposo absoluto, el movimiento es relativo, tanto para la Mecánica como para el EM y todas las leyes de la Física

Teoría de la Relatividad Especial

Postulados de Einstein:

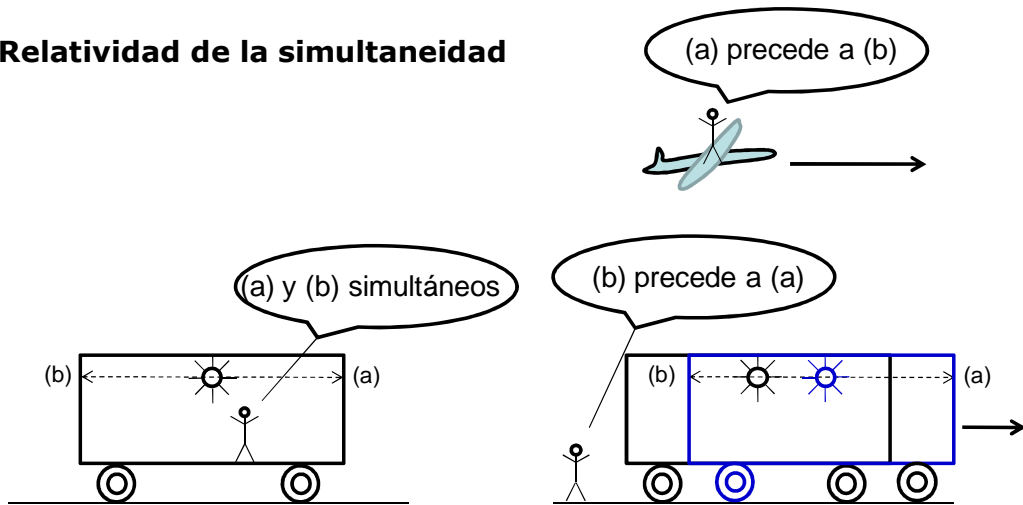
Postulado 1: *Las leyes de la Naturaleza son las mismas en todos los sistemas inerciales (Principio de Relatividad)*

Postulado 2: *La velocidad de la luz en el vacío es la misma para todos los observadores inerciales e independiente del movimiento de la fuente (Postulado de constancia de c)*

6.2 Simultaneidad, contracción de longitudes, dilatación temporal

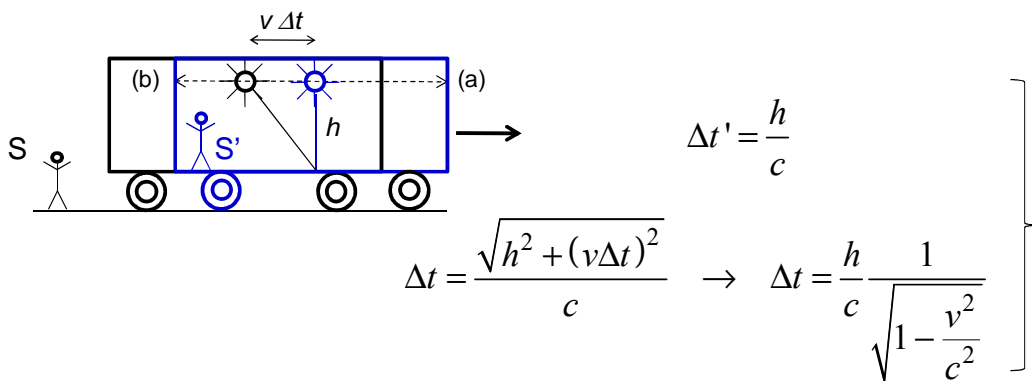
Consecuencias de los Postulados de Einstein:

i) Relatividad de la simultaneidad



Dos eventos que son simultáneos en un sistema no lo son, en general, en otro que se mueve con velocidad relativa respecto al primero

ii) Dilatación del tiempo



$$\Rightarrow \boxed{\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\gamma}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

El tiempo para el observador sobre el tren es más corto.
 ("Un reloj móvil va más lento")

Ejemplo: En un experimento de laboratorio se observa que un muón viaja 800m antes de desintegrarse. Un estudiante, a partir del tiempo de vida de un muón que se sabe es de $2 \mu\text{s}$, concluye que su velocidad es $800\text{m}/2\mu\text{s} = 4 \times 10^8 \text{ m/s}$, **imayor que la de la luz!** ¿Dónde está el error?

Solución:

No tuvo en cuenta la dilatación del tiempo. En el sistema del laboratorio, el muón tarda en desintegrarse un tiempo

$$\gamma\tau = \frac{\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

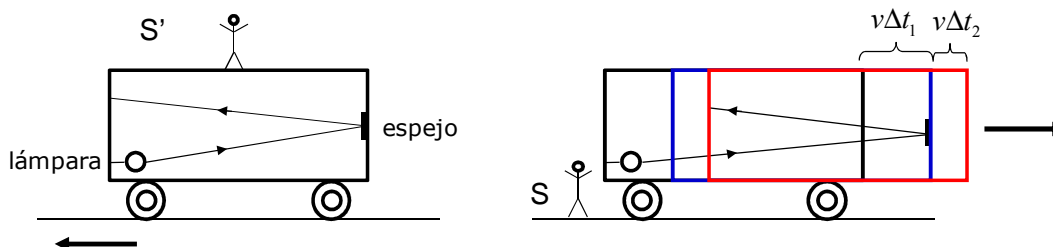
donde τ es el tiempo de vida 'propio', 2 ms. Así,

$$v = \frac{d}{\tau/\sqrt{1-v^2/c^2}}, \text{ donde } d = 800\text{m}$$

Despejando y sustituyendo valores, resulta:

$$v^2 = \frac{1}{(\tau/d)^2 + (1/c)^2}, \quad \boxed{v = \frac{4}{5}c}$$

iii) Contracción de longitudes



$$\Delta t' = 2 \frac{\Delta x'}{c} \quad (1)$$

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x + v\Delta t_1}{c}, \quad \Delta t_2 = \frac{\Delta x - v\Delta t_2}{c}$$

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x}{c-v}, \quad \Delta t_2 = \frac{\Delta x}{c+v}$$

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 2 \frac{\Delta x}{c} \frac{1}{(1-v^2/c^2)} \quad (2)$$

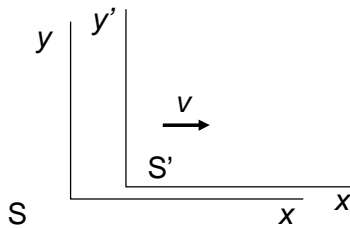
$$\Delta t' = \sqrt{1-v^2/c^2} \Delta t \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \boxed{\Delta x' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Delta x = \gamma \Delta x}$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}} \text{ Contracción de Lorentz}$$

6.3 Transformaciones de Lorentz

Evento: suceso en (x, y, z) en el instante t



The diagram shows two Cartesian coordinate systems, S and S'. System S has axes x and y. System S' has axes x' and y'. S' is moving to the right with velocity v relative to S. The origin of S' is at the origin of S at t=0.

$$\text{TG} \begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Postulados de Einstein \rightarrow un frente de onda de propagación de la luz debe mantenerse invariante en ambos sistemas, con la misma velocidad de la luz c

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

Junto con condiciones muy generales sobre el espacio-tiempo dan lugar a las Transformaciones de Lorentz:

$$\begin{array}{l} \text{Transformaciones de Lorentz} \\ \text{S} \rightarrow \text{S}' \end{array} \begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{S}' \rightarrow \text{S} \\ (v \rightarrow -v) \end{array} \begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{cases}$$

La simultaneidad relativa, dilatación del tiempo y contracción de Lorentz se derivan de esta transformación.

Ejemplo: Una varilla se mueve con velocidad v hacia la derecha

Su longitud medida en el sistema S' que se mueve con la varilla es:

$$\Delta x' = x'_f - x'_i$$

Un observador en S medirá en un instante t :

$$\Delta x = x_f - x_i$$

Por tanto,

$$\left. \begin{array}{l} x'_f = \gamma(x_f - vt) \\ x'_i = \gamma(x_i - vt) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}}$$

Fijamos t porque la medida se hace en S y se marcan los dos extremos de la varilla en el mismo instante de tiempo.

Cuestión:

Un suceso A ocurre en $x_A = 0, t_A = 0$.

Un suceso B ocurre en $x_B = b, t_B = 0$.

Son simultáneos en S , ¿serán simultáneos en S' que se mueve con v ?

Aplicamos la t. de Lorentz :

$$\begin{array}{l} x'_A = \gamma(x_A - vt_A) = 0 \\ x'_B = \gamma(x_B - vt_B) = \gamma b \end{array} \quad \begin{array}{l} t'_A = \gamma\left(t_A - \frac{v}{c^2}x_A\right) = 0 \\ t'_B = \gamma\left(t_B - \frac{v}{c^2}x_B\right) = \boxed{-\gamma\frac{v}{c^2}b} \end{array}$$

Por tanto, B ocurre antes que A en S'

6.4 Estructura del espacio-tiempo: intervalo y cono de luz

'Coordenada' temporal: $x^0 = ct$

Suceso: Fenómeno que ocurre en $x^\mu = (ct, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, \mathbf{r})$

$$\text{T. de Lorentz} \begin{cases} x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\text{En forma matricial:} \quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

O bien, $x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 A_\nu^\mu x^\nu$ siendo A la matriz de transformación de Lorentz

Intervalo s^2 : **invariante**

$$s^2 = c^2 (t_a - t_b)^2 - |\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2$$

Al pasar a otro sistema de referencia, Δt y Δx^i cambian, pero s^2 permanece invariante

Intervalo entre dos sucesos: $\left\{ \begin{array}{l} \text{de tipo } \textit{temporal} \ (s^2 > 0) \ (\text{pueden coincidir espacialmente}) \\ \text{de tipo } \textit{espacial} \ (s^2 < 0) \ (\text{pueden ser simultáneos}) \\ \text{conectados por } \textit{señal luminosa} \ (s^2 = 0) \end{array} \right.$

El signo $-$ de las coordenadas espaciales en el intervalo tiene profundas consecuencias en la geometría del espacio-tiempo

➤ La relación entre intervalo (o 'distancia') y las coordenadas, define la métrica del espacio.

➤ Así, la relación para el **espacio 3D ordinario**,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

que corresponde a la geometría euclídea basada en el Th de Pitágoras, define una **métrica definida positiva**

Si expresamos:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} dx^i dx^j$$

el tensor métrico (espacio 3D): $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

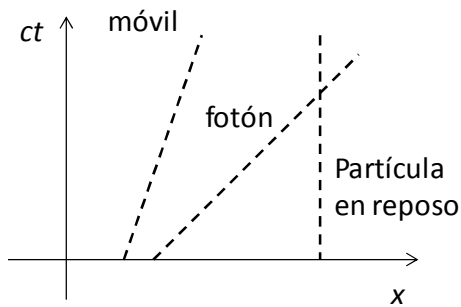
En el espacio-tiempo de la Relatividad Especial (espacio de Minkowski), la métrica euclidiana debe ser reemplazada por una métrica no definida, con el tensor métrico derivado de la relación

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2, \quad \text{o bien} \quad ds^2 = \sum_0^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tensor métrico

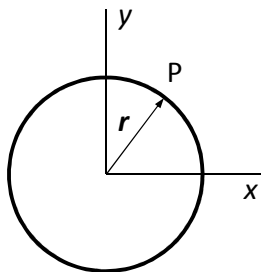
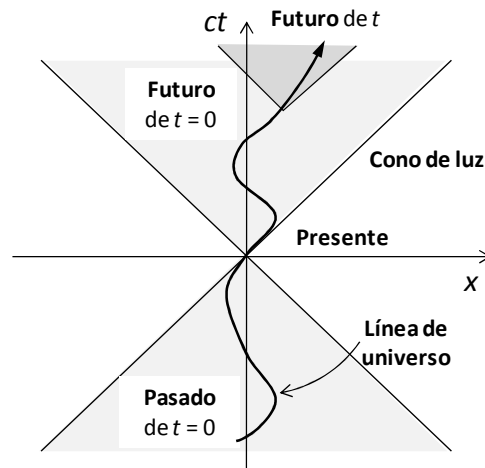
Diagramas en el espacio-tiempo (diagramas de Minkowski):



Velocidad = inversa de la pendiente
 Fotón → pendiente = 1

La pendiente de una trayectoria en el espacio-tiempo indica si el intervalo es espacial, temporal o rayo de luz.

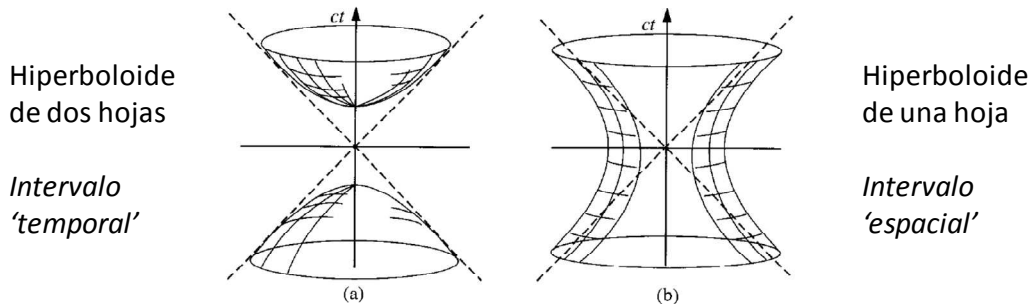
La zona no sombreada no es 'alcanzable' desde el origen por una señal causal (sucesos 'absolutamente separados')



El espacio 3D tiene una simetría circular, en el sentido de que por ejemplo, bajo rotaciones en el plano xy, un punto P describe una circunferencia, lugar geométrico de puntos con

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ constante}$$

En el espacio de Minkowski, en cambio, bajo transformaciones de Lorentz, lo que se mantiene constante es $s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2$. Esto da al espacio una simetría hiperbólica



Por TL podemos movernos sobre la misma hoja de hiperboloide

❖ **Simultaneidad y causalidad:** El orden temporal entre sucesos 'puede' invertirse cambiando de SRI, pero no siempre. Si el intervalo entre sucesos es *temporal*, su orden temporal es absoluto. Si es *espacial*, el orden depende del SRI desde el que es observado.

❖ Un suceso sobre la **hoja superior** del hiperboloide *temporal* siempre es **posterior al suceso (0,0)**, y uno sobre la **hoja inferior** siempre es **anterior**.

❖ Esto rescata la noción de **causalidad**. Todos los **sucesos conectados causalmente** están separados por **intervalos temporales**

4-vectores

3-vector = conjunto de tres componentes que se transforman bajo rotaciones 3D de la misma manera que lo hacen (x, y, z) .

4-vector = conjunto de cuatro componentes **que se transforman bajo una T. de Lorentz de la misma manera que (ct, x^1, x^2, x^3)** , o sea,

$$a'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 A_{\nu}^{\mu} a^{\nu}$$

(componentes de un tensor de orden 1 expresadas en forma contravariante)

Producto escalar?

Para tener en cuenta el signo menos en **el producto de coordenadas espaciales**, manteniendo el mismo convenio que en el caso 3D, conviene definir las **componentes covariantes a_{μ}** del vector, que difieren de las **contravariantes a^{μ}** en el signo de esas componentes:

$$a_{\mu} = (a_0, a_1, a_2, a_3) = (a^0, -a^1, -a^2, -a^3)$$

Su ley de transformación es por medio de la inversa de la matriz de Lorentz:

$$a'_\mu = \sum_{\nu=0}^3 (\Lambda_\nu^\mu)^{-1} a_\nu$$

Producto escalar $= \sum_{\mu=0}^3 a_\mu b^\mu$ o simplemente, $a_\mu b^\mu$

(convenio de suma de Einstein, sobre índices repetidos)

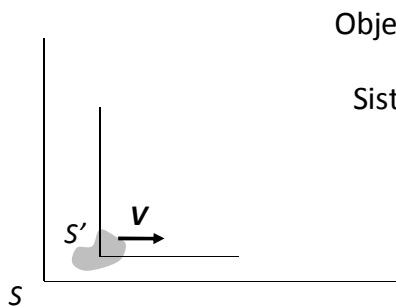
$$a_\mu b^\mu = a_0 b^0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3 = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

El intervalo no es más que el producto escalar $\Delta x_\mu \Delta x^\mu$ que es una cantidad **invariante bajo TL** (tensor de orden cero)

Análogamente al álgebra 3D, pueden definirse magnitudes tensoriales de cualquier orden, en particular **tensores de segundo orden**, que son muy importantes en relación con el Electromagnetismo

6.5 Mecánica y Dinámica relativistas

a) Composición de velocidades:



Objeto móvil con velocidad \mathbf{V} respecto al laboratorio S

Sistema solidario con el objeto, S' (*sistema propio*)

Tiempo propio (medido en S'):

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} = \sqrt{1 - v^2 / c^2} dt$$

Si escribimos el intervalo ds en la forma

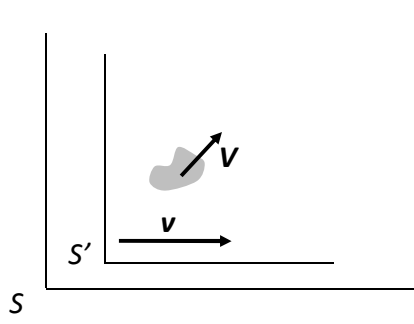
$$(ds)^2 = c^2 (dt)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = c^2 (dt)^2 \left(1 - \frac{(dl)^2}{c^2 (dt)^2} \right) = c^2 (dt)^2 (1 - v^2 / c^2)$$

Vemos que, puesto que $(ds)^2$ es invariante, *el tiempo propio también es invariante-Lorentz*

$$(ds)^2 = c^2 (d\tau)^2$$

La velocidad $V = \frac{dl}{dt}$

no es un cuadrivector. Su transformación en una TL de S a S' puede hallarse a partir de las transformaciones de los intervalos de las coordenadas y del intervalo de tiempo. El resultado es:



$$V'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{V_x - v}{1 - vV_x/c^2}$$

$$V'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{V_y}{\gamma(1 - vV_x/c^2)}$$

$$V'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{V_z}{\gamma(1 - vV_x/c^2)}$$

Ley de composición de velocidades

- Por composición de velocidades no se supera c
- Para $V, v \ll c$ se recupera la suma de velocidades galileana

Podemos definir una **magnitud velocidad** que sea el cociente de los desplazamientos dx^μ , medidos en el sistema de laboratorio, entre el tiempo transcurrido, $d\tau$, medido en el sistema propio.

✓ Como $d\tau$ es escalar (invariante), **esta magnitud será un cuadrivector**.

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

4-velocidad o velocidad propia

$$u^\mu = (u^0, \mathbf{u})$$

Su componente-0 es:

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Parte espacial:

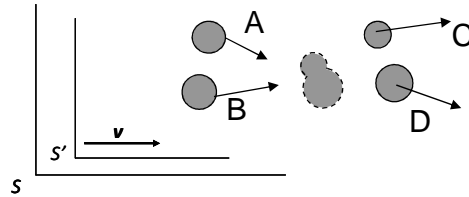
$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{\mathbf{V}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

b) Dinámica relativista: Energía y momento

Queremos extender el concepto de momento lineal $m\mathbf{V}$, al dominio relativista, ¿qué velocidad utilizar, \mathbf{V} o u^μ ?

Si utilizamos **momento** = $m\mathbf{V}$, no se va a cumplir la conservación del momento en diferentes sistemas inerciales.

Ejemplo: colisión



Dos masas A y B colisionan produciendo las masas C y D

$$\text{En S: } m_A V_A + m_B V_B = m_C V_C + m_D V_D$$

Si transformamos de S' a S:

$$\text{Componente - x } V_i = \frac{V'_i + v}{1 + V'_i v / c^2}$$

$$m_A \frac{V'_A + v}{1 + V'_A v / c^2} + m_B \frac{V'_B + v}{1 + V'_B v / c^2} = m_C \frac{V'_C + v}{1 + V'_C v / c^2} + m_D \frac{V'_D + v}{1 + V'_D v / c^2}$$

Como los denominadores son diferentes, $\Rightarrow m_A V'_A + m_B V'_B \neq m_C V'_C + m_D V'_D$
el momento así definido no se conserva en S'

Caso particular: masas iguales con $V_A = -V_B = v$, $V_C = V_D = 0$ (colisión inelástica en S, con momento 0 que se conserva en S, $0 = 0$)

$$\text{S' tal que } V'_A = 0, \quad V'_B = \frac{-2v}{1 + v^2/c^2}, \quad V'_C = V'_D = -v$$

$$\text{El 'momento' no se conserva en S': } m \frac{-2v}{1 + v^2/c^2} \neq -2mv$$

Definiremos

$$\boxed{p^\mu = (p^0, \mathbf{p}) = mu^\mu}$$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} = \frac{m\mathbf{V}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

4-momento (o 4-momento-energía)

Momento relativista

El momento así definido sí **se conserva en una colisión** al cambiar de SRI

Componente temporal:

$$p^0 = mu^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \equiv \frac{E}{c} \quad \left(\text{A veces, } m_{rel} = \frac{m}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \right)$$

donde

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad \text{Es la } \mathbf{energía relativista}$$

Para $V=0$, $E_{rep} = mc^2$

El resto es **energía cinética**: $E_{cin} \equiv E - mc^2 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - 1 \right)$

Para velocidades no relativistas, $v/c \ll 1$: $E_{cin} = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{3}{8}\frac{mV^4}{c^2} + \dots$

Hay que distinguir entre cantidades *conservadas* (en un proceso físico) y cantidades *invariantes* (en una transformación entre SRI)

La masa m es un escalar, *invariante*, pero *no se conserva* (transformación masa-energía); en realidad es una conversión de energía en reposo en energía cinética.

La energía *se conserva* (en un sistema aislado), pero *no es invariante*

La carga eléctrica *se conserva* y es *invariante*

La velocidad *ni se conserva ni es invariante*

$$p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \frac{m^2 c^2}{1 - V^2/c^2} - \frac{m^2 V^2}{1 - V^2/c^2} = m^2 c^2$$

Si el segundo miembro se escribe en función de E y p ,

$$\boxed{E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4}, \quad \text{que relaciona } E \text{ y } p$$

c) Dinámica relativista: fuerza

Leyes de Newton: $\left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \text{ ley: implícita en el P. relatividad} \\ 3^{\text{a}} \text{ ley: dejará de cumplirse, dado que} \\ \text{la simultaneidad es relativa} \\ 2^{\text{a}} \text{ ley: } \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \text{ va a ocurrir algo} \end{array} \right.$

parecido al caso de la velocidad. Hay que transformar numerador y denominador. Así,

$$F'_y = \frac{dp'_y}{dt'} = \frac{dp_y}{\gamma dt - \frac{\gamma\beta}{c} dx} = \frac{dp_y / dt}{\gamma \left(1 - \frac{\beta}{c} \frac{dx}{dt}\right)} = \frac{F_y}{\gamma(1 - \beta V_x / c)}$$

Análogamente,
$$F'_z = \frac{F_z}{\gamma(1 - \beta V_x / c)}$$

Para la componente -x,
$$F'_x = \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{\gamma dp_x - \gamma\beta dp^0}{\gamma dt - \frac{\gamma\beta}{c} dx}$$

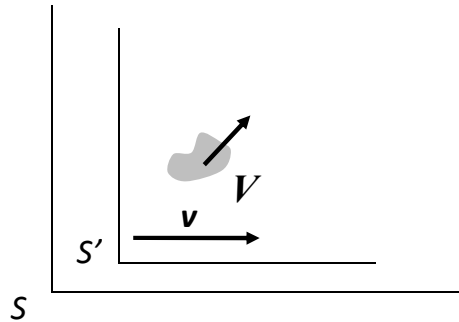
$$F'_x = \frac{\frac{dp_x}{dt} - \beta \frac{dp^0}{dt}}{1 - \frac{\beta}{c} \frac{dx}{dt}} = \frac{F_x - \frac{\beta}{c} \frac{dE}{dt}}{1 - \beta V_x / c} = \frac{F_x - \beta(\mathbf{V} \cdot \mathbf{F}) / c}{1 - \beta V_x / c}$$

Demostración de que $\frac{dE}{dt} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}$

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot \mathbf{F} &= \mathbf{V} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{V} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{V}}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}} \right) = \frac{m\mathbf{V}}{(1 - V^2 / c^2)^{3/2}} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}} \right) = \frac{dE}{dt} \end{aligned}$$

Transformación de fuerzas:

$$\begin{aligned}
 F'_x &= \frac{F_x - \beta(V \cdot \mathbf{F})/c}{1 - \beta V_x/c} \\
 F'_y &= \frac{F_y}{\gamma(1 - \beta V_x/c)} \\
 F'_z &= \frac{F_z}{\gamma(1 - \beta V_x/c)}
 \end{aligned}$$



Si $V = 0$, $\boxed{F'_{\parallel} = F_{\parallel}, \quad F'_{\perp} = F_{\perp} / \gamma}$

Se puede definir una fuerza 'propia', análoga a la velocidad 'propia', que sea un 4-vector: puesto que tenemos un 4-vector momento,

$$\boxed{K^{\mu} = \frac{dp^{\mu}}{d\tau}} \quad (1) \quad \text{4-vector fuerza o fuerza de Minkowski}$$

Componente temporal:

$$K^0 = \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau} \quad \text{Es, salvo el factor } 1/c, \text{ la potencia (propia) aportada a la partícula}$$

Componentes espaciales:

$$\mathbf{K} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \mathbf{F}$$

La ecuación (1) es la expresión de la 2ª Ley de Newton en forma covariante

Resumen

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

4-velocidad o velocidad propia

$$u^0 = \gamma c, \quad \mathbf{u} = \gamma \mathbf{V}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$p^\mu = (p^0, \mathbf{p}) = mu^\mu$$

4-momento (o 4-momento-energía)

$$p^0 = \gamma mc \equiv \frac{E}{c}, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{u} = \gamma m\mathbf{V} \quad E = \gamma mc^2$$

$$K^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}$$

4-vector fuerza o fuerza de Minkowski

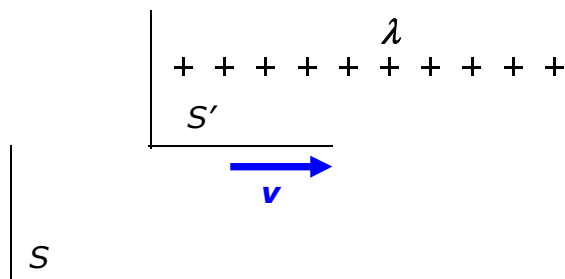
$$K^0 = \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau}, \quad \mathbf{K} = \gamma \mathbf{F}$$

6.6 Electrodinámica Relativista

El electromagnetismo está de acuerdo con la TR y no es necesario modificar sus ecuaciones. Pero se pueden formular de manera **covariante**

a) El campo magnético como efecto relativista

Electrostática + Relatividad \Rightarrow Magnetismo



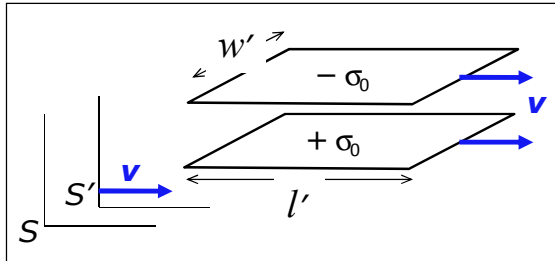
En S' las cargas están en reposo \rightarrow crean un campo eléctrico

En S las cargas se mueven con velocidad $\mathbf{v} \rightarrow$ aparece un campo magnético asociado a la corriente

$$I = \lambda v$$

b) Transformación de los campos

- La carga Q es invariante
- Los campos se deben transformar independientemente de cómo se hayan producido



i) Sistema con sólo campo *eléctrico*

$$\mathbf{E}' = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \mathbf{u}_y$$

$$\sigma_0 = \frac{Q}{A'} = \frac{Q}{l'w'}$$

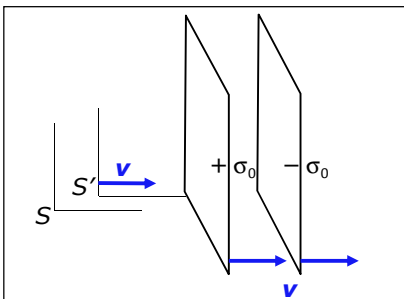
En S debe ser $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_y$

(Proviene de la Ley de Gauss, que debe valer igualmente en S)

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{lw}, \quad \text{por TL: } l = \frac{l'}{\gamma}, \quad w = w' \Rightarrow A = \frac{A'}{\gamma} \Rightarrow \boxed{\sigma = \gamma\sigma_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{\perp} = \gamma E'_{\perp}}$$

El campo en la dirección \perp al movimiento aumenta en el factor γ

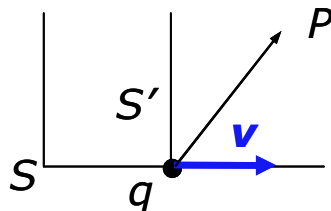


En este caso las longitudes de las placas no se modifican y evidentemente,

$$\boxed{\sigma = \sigma_0} \quad \text{y} \quad \boxed{E_{\parallel} = E'_{\parallel}}$$

El campo en la dirección \parallel al movimiento no cambia

Ejemplo: Campo eléctrico de una carga en movimiento uniforme



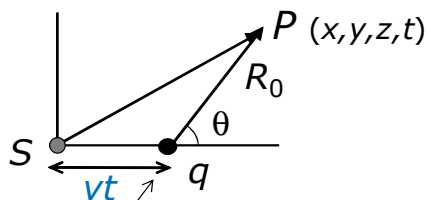
En $t = 0$, la carga está en el origen. El campo se observa en P al cabo de un tiempo t , en que la carga recorre un espacio vt

En S' :

$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \mathbf{u}_{r'} = \frac{q \mathbf{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E'_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \\ E'_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \\ E'_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} E_{\parallel} = E'_{\parallel} \\ E_{\perp} = \gamma E'_{\perp} \end{array} \right\} \begin{array}{l} E_x = E'_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \\ E_y = \gamma E'_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma y'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \\ E_z = \gamma E'_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma z'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \end{array}$$



De la TL, $\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) = \gamma R_{0x} \\ y' = y = R_{0y} \\ z' = z = R_{0z} \end{cases}$

Posición 'presente'

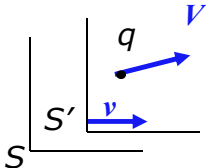
$$R_{0x} = R_0 \cos \theta, \quad R_{0y} = R_0 \sin \theta \cos \phi, \quad R_{0z} = R_0 \sin \theta \sin \phi$$

$$\begin{aligned} \boxed{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma R_0}{(\gamma^2 R_0^2 \cos^2 \theta + R_0^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma R_0}{[\gamma^2 (1 - \sin^2 \theta) + \sin^2 \theta]^{3/2}} R_0^3 \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{u}_{R0}}{\gamma^2 \left[1 + \frac{(1 - \gamma^2)}{\gamma^2} \sin^2 \theta \right]^{3/2}} R_0^2 \boxed{= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_0^2} \frac{(1 - v^2/c^2)}{[1 - (v^2/c^2) \sin^2 \theta]^{3/2}} \mathbf{u}_{R0}} \end{aligned}$$

mismo resultado que obtuvimos (lección 5) a partir de los potenciales de Liénard-Wiechert

ii) Sistema con campos \mathbf{E} y \mathbf{B}

Las transformaciones $E_{\parallel} = E'_{\parallel}$, $E_{\perp} = \gamma E'_{\perp}$ no son generales



The diagram shows two frames, S and S', with S' moving to the right relative to S. A charge q is shown with velocity vectors v and V.

$$\left. \begin{array}{l} \text{En } S, \quad \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \\ \text{En } S', \quad \mathbf{F}' = q(\mathbf{E}' + \mathbf{V}' \times \mathbf{B}') \end{array} \right\}$$

Conocemos la transformación de \mathbf{F} a \mathbf{F}' y \mathbf{v} a \mathbf{v}' y queremos hallar la de \mathbf{E} , \mathbf{B} a \mathbf{E}' , \mathbf{B}'

Por componentes:

$$\left. \begin{array}{l} F_x = q(E_x + V_y B_z - V_z B_y) \\ F_y = q(E_y + V_z B_x - V_x B_z) \\ F_z = q(E_z + V_x B_y - V_y B_x) \end{array} \right\}$$

De la transformación de la fuerza y velocidad:

$$\left. \begin{array}{l} F'_x = \frac{F_x - \beta(\mathbf{V} \cdot \mathbf{F})/c}{1 - \beta V_x/c} \\ F'_y = \frac{F_y}{\gamma(1 - \beta V_x/c)} \\ F'_z = \frac{F_z}{\gamma(1 - \beta V_x/c)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} V_x = \frac{V'_x + v}{1 + V'_x v/c^2} \\ V_y = \frac{V'_y}{\gamma(1 + V'_x v/c^2)} \\ V_z = \frac{V'_z}{\gamma(1 + V'_x v/c^2)} \end{array} \right.$$

Tomemos, por ejemplo,

$$F'_y = \frac{F_y}{\gamma(1 - \beta V_x/c)} = \frac{q(E_y + V_z B_x - V_x B_z)}{\gamma(1 - \beta V_x/c)}$$

El denominador:

$$\gamma(1 - \beta V_x/c) = \gamma \left[1 - \frac{(v/c^2)(V'_x + v)}{(1 + V'_x v/c^2)} \right] = \gamma \frac{1 - v^2/c^2}{(1 + V'_x v/c^2)} = \frac{1}{\gamma(1 + V'_x v/c^2)} \quad (1)$$

El numerador: $q(E_y + V_z' B_x - V_x' B_z) =$

$$= q \left(E_y + \frac{V_z'}{\gamma(1+V_x'v/c^2)} B_x - \frac{V_x'+v}{1+V_x'v/c^2} B_z \right) = \frac{q[\gamma(1+V_x'v/c^2)E_y + V_z' B_x - \gamma(V_x'+v)B_z]}{\gamma(1+V_x'v/c^2)}$$

$$= \frac{q[\gamma(E_y - v B_z) + V_z' B_x - V_x' \gamma(B_z - (v/c^2) E_y)]}{\gamma(1+V_x'v/c^2)} \quad (2)$$

$$F'_y = \frac{(2)}{(1)} = q[\gamma(E_y - v B_z) + V_z' B_x - V_x' \gamma(B_z - (v/c^2) E_y)]$$

$$\equiv q(E_y' + V_z' B_x' - V_x' B_z')$$

de donde:

$$\begin{cases} E_y' = \gamma(E_y - v B_z) \\ B_x' = B_x \\ B_z' = \gamma[B_z - (v/c^2) E_y] \end{cases}$$

Tenemos así la transformación de 3 de las 6 componentes de \mathbf{E}, \mathbf{B}

Repetiendo el proceso con F'_z se obtienen análogamente otras dos componentes:

$$\begin{cases} E_z' = \gamma(E_z + v B_y) \\ B_y' = \gamma[B_y + (v/c^2) E_z] \end{cases}$$

Por último para encontrar E_x' calculamos F'_x para el caso particular de $V_y = V_z = 0$ y se obtiene directamente

$$E_x' = E_x$$

En resumen:

Transformación de campos eléctrico y magnético

$E_x' = E_x$	$B_x' = B_x$
$E_y' = \gamma(E_y - v B_z)$	$B_y' = \gamma[B_y + (v/c^2) E_z]$
$E_z' = \gamma(E_z + v B_y)$	$B_z' = \gamma[B_z - (v/c^2) E_y]$

Se puede comprobar que se cumplen las igualdades:

$$c^2 B^2 - E^2 = c^2 B'^2 - E'^2 \quad \text{y} \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}'$$

Es decir, las cantidades $c^2 B^2 - E^2$ y $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ se mantienen

invariantes en una transformación de Lorentz, entre SRI

La transformación de S' a S se hará, lógicamente, invirtiendo el signo de la velocidad:

$E_x = E'_x$	$B_x = B'_x$
$E_y = \gamma(E'_y + v B'_z)$	$B_y = \gamma[B'_y - (v/c^2) E'_z]$
$E_z = \gamma(E'_z - v B'_y)$	$B_z = \gamma[B'_z + (v/c^2) E'_y]$

c) Formulación covariante del Electromagnetismo

Los conceptos y ecuaciones del EM se deben poder formular de forma **covariante**, es decir, expresando de manera explícita sus propiedades de transformación (escalares, vectores, tensores...)

Carga Q: invariante

Densidad de carga y corriente:

Puesto que $\rho = \frac{Q}{V}$ y $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ parece lógico que ambas cantidades se van a transformar de manera análoga a la 4-velocidad, es decir, como componentes de un 4-vector:

$$\mathbf{J}^\mu = (c\rho, \mathbf{J}) = (c\rho, J_x, J_y, J_z) \quad \text{4 - vector densidad de corriente}$$

La ecuación de **continuidad o conservación de la carga** se generaliza así inmediatamente:

$$\nabla \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0}$$

donde, en general, $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}$ es la 4-divergencia del 4-vector A^μ

Expresión covariante de **potenciales y campos**:

La relación entre potenciales y campos:
$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

lleva de manera natural a definir:

$$\boxed{A^\mu = \left(\frac{\Phi}{c}, \mathbf{A} \right)} \quad \text{4-vector potencial}$$

Pero \mathbf{E} y \mathbf{B} , no son ya vectores sino componentes de un tensor de 2º orden:

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu} \quad \text{4-tensor campo electromagnético}$$

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}} \quad \text{Tensor campo electromagnético, antisimétrico}$$

Las ecuaciones de Maxwell se escriben:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \mathbf{E} &= \rho / \epsilon_0 \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \mathbf{J} \end{aligned} \right\} \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu}$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \boxed{\partial_\mu F_{\nu\kappa} + \partial_\nu F_{\kappa\mu} + \partial_\kappa F_{\mu\nu} = 0}$$

Resumen

Carga Q : invariante

$J^\mu = (c\rho, \mathbf{J}) = (c\rho, J_x, J_y, J_z)$ 4-vector densidad de corriente

$A^\mu = \left(\frac{\Phi}{c}, \mathbf{A}\right)$ 4-vector potencial

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

↓

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Tensor campo electromagnético, antisimétrico

Tema 6. Electromagnetismo y Relatividad

Teoría Especial de la Relatividad: Postulados de Einstein. Simultaneidad, contracción de longitudes, dilatación del tiempo. Transformaciones de Lorentz. Estructura del espacio-tiempo: intervalo y cono de luz. Cinemática relativista: tiempo propio, composición de velocidades. Dinámica relativista: energía y momento. Transformación de los campos eléctrico y magnético. El campo magnético como efecto relativista.

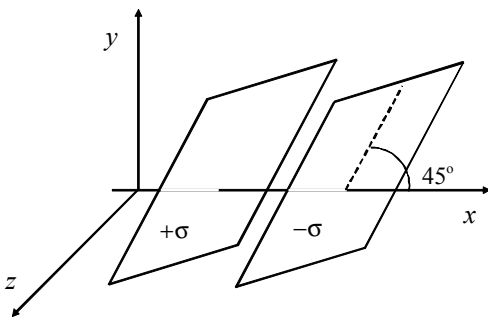
Problemas

1.- a) Comprobar (realizando en detalle la transformación de los campos) que las cantidades $c^2B^2 - E^2$ y $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ son invariantes en una transformación de Lorentz.

b) Si en un punto P de un sistema de referencia se mide $\mathbf{B} = 0$ y $\mathbf{E} \neq 0$, ¿es posible encontrar otro sistema en el que el campo eléctrico sea nulo en P ? c) Si en un cierto sistema de referencia los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} son perpendiculares. ¿Existirá algún sistema de referencia en el que dichos campos formen un ángulo de 45° ?

2. Hallar en el sistema de laboratorio los campos de un condensador plano, con densidad de carga σ en el sistema propio, que se mueve a) con velocidad \mathbf{v} paralela a las placas; b) con \mathbf{v} perpendicular a las placas. Comprobar los invariantes en la transformación.

3. Un condensador plano forma un ángulo de 45° con el eje x como se muestra en la figura y está cargado con $\pm\sigma$ C/m².



a) Hallar el campo eléctrico en el sistema propio S .

El sistema S' se mueve hacia la derecha con velocidad v respecto de S .

b) Hallar los campos en S'

c) ¿Qué ángulo forman las placas con el eje x ?

d) ¿Es perpendicular el campo eléctrico a las placas en S' ?

4. Se tiene un haz cilíndrico uniforme de electrones, de radio a . El haz ha sido acelerado mediante una d.d.p. V y lleva una intensidad de corriente total I . Halla la fuerza electromagnética sobre un electrón cualquiera del haz, en el sistema de laboratorio.

5. Dos líneas de carga paralelas muy próximas, orientadas en la dirección Ox , con densidades positiva y negativa respectivas λ y $-\lambda$, se mueven en la dirección de sus ejes con velocidades $+v$ y $-v$. En el sistema de laboratorio los campos que crean están dados aproximadamente por: $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} = (\mu_0 I / 2\pi r) \mathbf{u}_\phi$, con $I = 2\lambda v$.

a) A partir de los invariantes del campo, analizar si existirá algún sistema de referencia en el que $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} \neq 0$.

- b-1) Una carga q se mueve paralelamente a ambas líneas con velocidad \mathbf{u} . Hallar la fuerza sobre la carga en un sistema ligado a la misma por transformación de los campos.
- b-2) Hallar la fuerza sobre q usando la transformación del cuadrivector densidad de corriente

6. Un protón se mueve con velocidad uniforme $0,8c$ a lo largo del eje x en un sistema de referencia inercial. Un segundo protón se mueve con velocidad $0,6c$ a lo largo del eje y . Calcular la magnitud y dirección de las fuerzas en un instante dado en que la segunda carga está en la posición $(0, 10^{-4} \text{ m})$ y la primera en el origen.

7. Para una onda electromagnética progresiva en el vacío, el campo eléctrico, observado en el sistema de laboratorio, tiene la expresión $\mathbf{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \mathbf{u}_y$.

a) ¿Existirá algún sistema de referencia en el que el campo sea solamente eléctrico o solamente magnético?

Cuando la onda se observa desde un sistema de referencia que se mueve con velocidad $\mathbf{v} = v \mathbf{u}_x$,

b) La fase es invariante. Dar alguna razón que lo justifique.

c) Hallar las amplitudes y direcciones de los campos eléctrico y magnético en el nuevo sistema de referencia.

8. La inducción magnética en el interior de un solenoide recto de radio R , de N vueltas/m y recorrido por una corriente I , es $\mu_0 NI$. La inducción magnética en el exterior es cero.

a) Calcular los valores de \mathbf{E} y \mathbf{B} , dentro y fuera del solenoide, medidos por un observador estacionario, cuando el solenoide se mueve con velocidad \mathbf{v} en la dirección de su eje.

b) Ídem cuando se mueve en dirección perpendicular.

9. Calcular la fuerza, observada en el sistema de laboratorio, entre dos electrones que se mueven a lo largo de trayectorias paralelas separadas 1 mm , si cada uno de ellos tiene una energía cinética de: a) 1 eV , y b) 10^6 eV .

10. El cuadrivector potencial $A'^{\mu} = \left(0, -\frac{\mu_0 n' I'}{2} y', \frac{\mu_0 n' I'}{2} x', 0 \right)$ corresponde a un

solenoides ideal de n' espiras por unidad de longitud e intensidad de corriente I' en su sistema propio.

a) Determinar los campos \mathbf{E}' y \mathbf{B}' en el sistema propio.

b) Hallar los campos en el sistema de laboratorio respecto al cual el solenoide se mueve con velocidad $\mathbf{v} = v \mathbf{u}_x$.

c) Hallar los potenciales Φ y \mathbf{A} en el sistema de laboratorio por transformación del cuadrivector potencial desde el sistema propio.

11. Una partícula de carga e y masa m se mueve en un campo electrostático de potencial $\Phi = k(x^2 - y^2)$, donde la constante $k > 0$. La posición inicial es (x_0, y_0, z_0) y la velocidad inicial $(0, 0, v_0)$.

a) Escribe las ecuaciones relativistas de movimiento de la carga.

b) Suponiendo la aproximación no relativista, determina la trayectoria de la partícula.

P1-T6

a) Para una transformación entre sistemas con \mathbf{v} paralelo al eje x se tiene:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - vB_z) & B'_y &= \gamma(B_y + vE_z / c^2) \\ E'_z &= \gamma(E_z + vB_y) & B'_z &= \gamma(B_z - vE_y / c^2) \end{aligned}$$

Por tanto el producto escalar de los campos se transformará como:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' &= E'_x B'_x + E'_y B'_y + E'_z B'_z = E_x B_x + \gamma^2 (E_y - vB_z) \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) + \gamma^2 (E_z + vB_y) \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) \\ &= E_x B_x + \gamma^2 \left(E_y B_y + \cancel{\frac{v}{c^2} E_y E_z} - \cancel{v B_y B_z} - \frac{v^2}{c^2} E_z B_z + E_z B_z - \cancel{\frac{v}{c^2} E_y E_z} + \cancel{v B_y B_z} - \frac{v^2}{c^2} E_y B_y \right) \\ &= E_x B_x + \gamma^2 \left\{ E_y B_y \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + E_z B_z \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right\} = E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad (\text{c.q.d.}) \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} c^2 B'^2 - E'^2 &= c^2 \left\{ B_x^2 + \gamma^2 \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right)^2 + \gamma^2 \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right)^2 \right\} - \left\{ E_x^2 + \gamma^2 (E_y - vB_z)^2 + \gamma^2 (E_z + vB_y)^2 \right\} \\ &= c^2 B_x^2 + \gamma^2 \left(c^2 B_y^2 + \frac{v^2}{c^2} E_z^2 + \cancel{2v B_y E_z} \right) + \gamma^2 \left(c^2 B_z^2 + \frac{v^2}{c^2} E_y^2 - \cancel{2v B_z E_y} \right) - \\ &\quad - E_x^2 - \gamma^2 \left(E_y^2 + v^2 B_z^2 - \cancel{2v E_y B_z} \right) - \gamma^2 \left(E_z^2 + v^2 B_y^2 + \cancel{2v E_z B_y} \right) \end{aligned}$$

Reordenando queda:

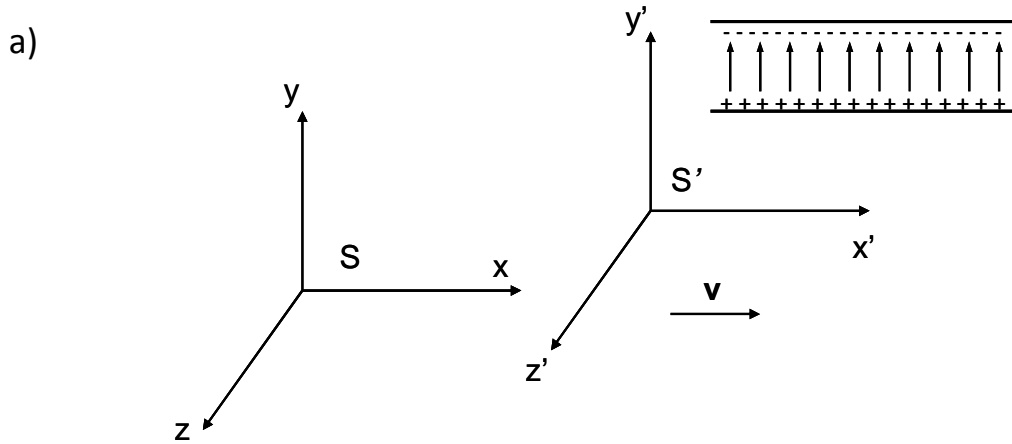
$$\begin{aligned} c^2 B'^2 - E'^2 &= c^2 B_x^2 - E_x^2 + \gamma^2 \left\{ c^2 B_y^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + c^2 B_z^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - E_y^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - E_z^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right\} \\ &= c^2 (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) - (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) = c^2 B^2 - E^2 \quad (\text{c.q.d.}) \end{aligned}$$

b) No es posible. Para el sistema con $B = 0$, el invariante $-E^2 < 0$; por tanto, tiene que haber un E' no nulo que asegure que $c^2 B'^2 - E'^2 < 0$.

c) No, serán perpendiculares en cualquier sistema de referencia:

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$$

P2-T6



Campos en el sistema S':

$$S' \begin{cases} E'_x = 0 & B'_x = 0 \\ E'_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0} & B'_y = 0 \\ E'_z = 0 & B'_z = 0 \end{cases}$$

Campos en S (velocidad $-v$ en la dirección x)

$$S \begin{cases} E_x = 0 & B_x = 0 \\ E_y = \gamma E'_y = \gamma \frac{\sigma}{\epsilon_0} & B_y = 0 \\ E_z = 0 & B_z = \gamma \frac{v}{c^2} E'_y = \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \end{cases}$$

Invariantes:

i) $\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = 0 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$

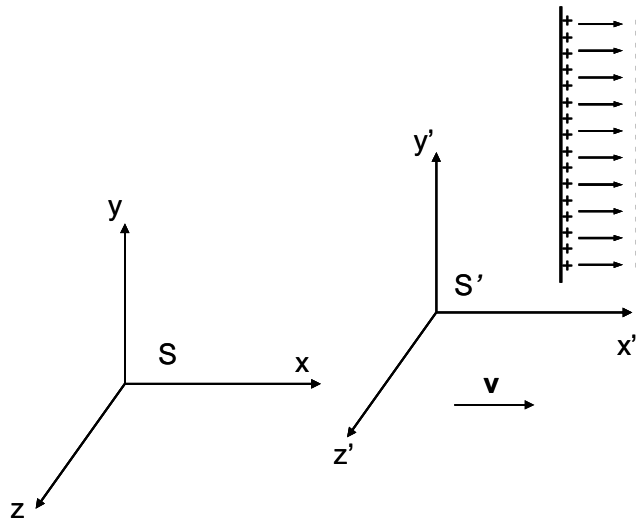
P2-T6-cont.

ii)

$$c^2 B'^2 - E'^2 = -E'^2$$

$$c^2 B^2 - E^2 = \left[\gamma^2 \frac{v^2}{c^2} - \gamma^2 \right] E'^2 = \gamma^2 \left[\frac{v^2}{c^2} - 1 \right] E'^2 = -E'^2$$

b)

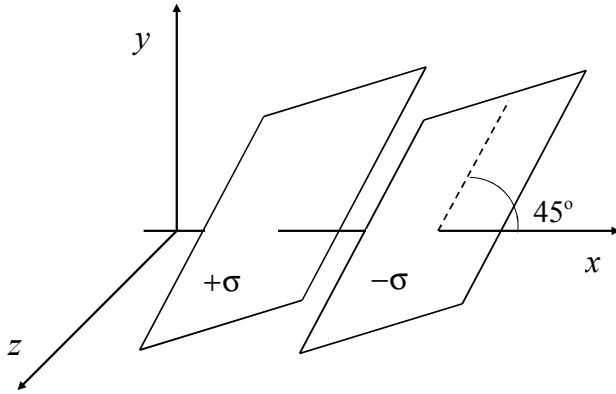


$$S' \left\{ \begin{array}{ll} E'_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0} & B'_x = 0 \\ E'_y = 0 & B'_y = 0 \\ E'_z = 0 & B'_z = 0 \end{array} \right.$$

$$S \left\{ \begin{array}{ll} E_x = E'_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0} & B_x = B_y = B_z = 0 \\ E_y = E_z = 0 & \end{array} \right.$$

No hay campo magnético en el S.L. y los invariantes son obvios.

P3-T6



a) El campo \mathbf{E} va desde la placa positiva a la negativa formando -45° con el eje x :

$$E_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cos(-\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad ; \quad E_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \sin(-\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

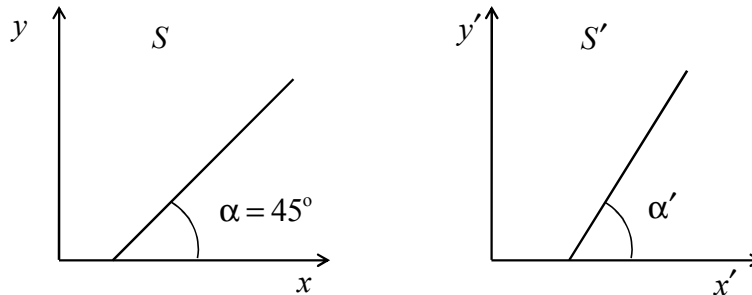
b) Transformamos los campos a S' que se mueve con velocidad $\mathbf{v} = v\mathbf{u}_x$:

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \Rightarrow E'_x = E_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma \mathbf{E}_{\perp} \Rightarrow E'_y = \gamma E_y = -\frac{\gamma}{\sqrt{2}} \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\mathbf{B}'_{\perp} = -\gamma \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp} / c^2 \Rightarrow B'_z = -\gamma v E_y / c^2 = \frac{\gamma v}{\sqrt{2} c^2} \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

c) Las placas se van a contraer en la dirección x y el ángulo aumentará:



$$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \quad ; \quad \tan \alpha' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \gamma \frac{\Delta y}{\Delta x} = \gamma \Rightarrow \alpha' = \arctan(\gamma)$$

P3-T6-cont.

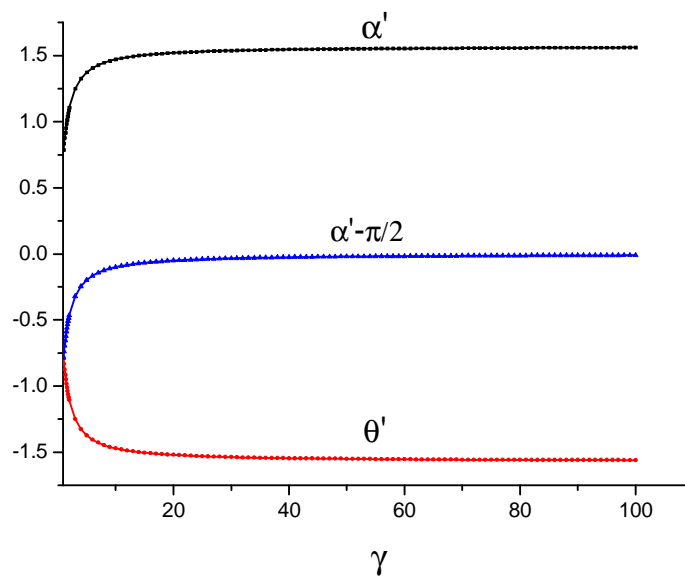
d) El campo eléctrico en S' vale:

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x - \gamma \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_y$$

El ángulo que forma este campo con el eje x' será:

$$\tan \theta' = \frac{E'_y}{E'_x} = -\gamma \Rightarrow \theta' = \arctan(-\gamma)$$

Para que fuera perpendicular a las placas se debería cumplir $\theta' = \alpha' - \pi/2$ lo cual no se cumple para ningún valor $\gamma > 1$, como se ve en la gráfica:

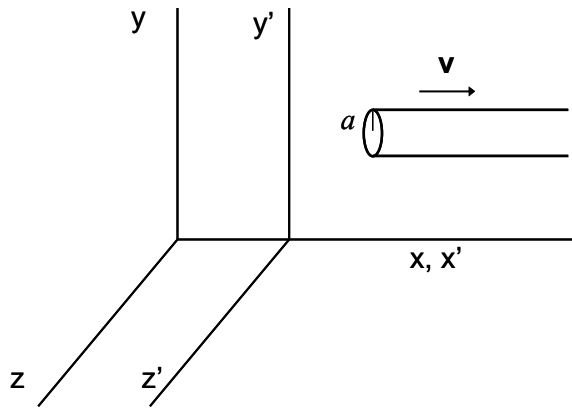


P4-T6

Suponemos que todos los electrones han sido acelerados desde el reposo:

$$\Delta E = mc^2(\gamma - 1) = eV$$

$$v = c \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{(eV + mc^2)^2}} = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{eV}{mc^2} + 1\right)^2}} \quad (1)$$



Tomando la dirección de observación en el eje y' :

$$S' \begin{cases} E'_y = \frac{1}{2\epsilon_0} \rho' r' & ; \quad r' < a \\ \mathbf{B}' = 0 \end{cases}$$

Transformando al sistema de laboratorio ($r = r'$ por ser \perp a \mathbf{v}):

$$S \begin{cases} E_y = \gamma E'_y = \frac{\gamma}{2\epsilon_0} \rho' r \\ B_z = \frac{\gamma v}{c^2} E'_y = \frac{\gamma v}{2\epsilon_0 c^2} \rho' r \end{cases}$$

En S tenemos pues $\rho = \gamma \rho'$ (contracción en la dirección x)

P4-T6-cont.

La fuerza sobre el electrón será:

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

que en este caso se reduce a:

$$F_y = -e(E_y - vB_z) = \frac{-e\rho}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) r$$

Para expresarlo en función de I transformamos el 4-vector J'^α :

$$\text{en } S' \quad J'^\alpha = (\rho'c, 0, 0, 0)$$

$$\text{en } S \quad J^\alpha = (\gamma\rho'c, \gamma v\rho', 0, 0) = (\rho c, J_x, 0, 0) \quad ; \quad \rho, \rho' < 0$$

Luego en S se observa una corriente en el sentido de las x negativas:

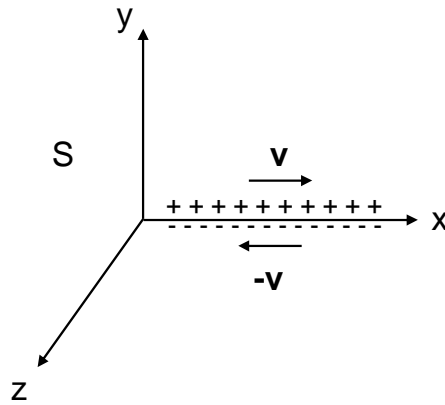
$$I = \rho v \pi a^2$$

y la fuerza sobre el electrón vendrá dada por:

$$\mathbf{F} = \frac{-e}{2\pi\epsilon_0} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) I}{va^2} r \mathbf{u}_y \quad ; \quad I < 0$$

con v calculada a partir de la expresión (1). Es una fuerza repulsiva que tiende a ensanchar el haz.

P5-T6



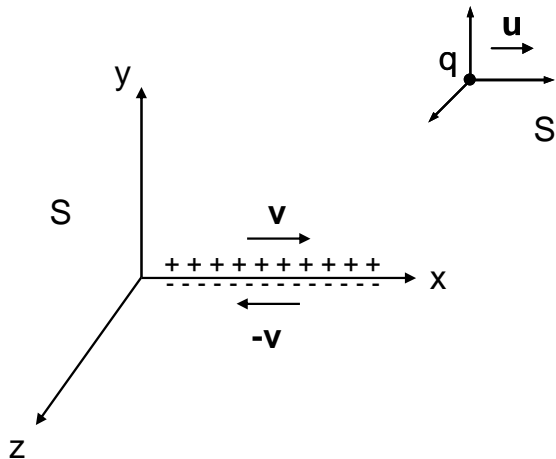
a) Los campos en el sistema de laboratorio son:

$$\mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{u}_\varphi, \quad I = 2\lambda v$$

Vemos que $c^2 B^2 - E^2 > 0$, por ser este invariante positivo no existirá ningún sistema de referencia en el que $\mathbf{B} = 0$.

b-1) Transformando al sistema propio de la carga q :



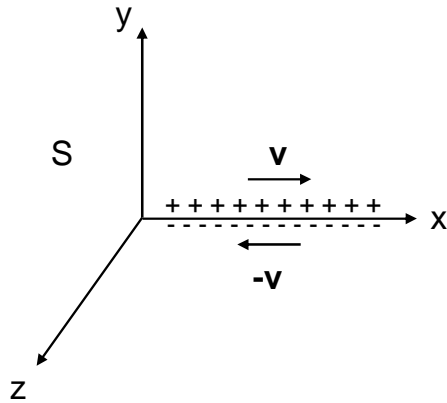
$$\mathbf{E}'_{\parallel} = 0$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_{\perp}) = \gamma \mathbf{u} \times \mathbf{B}_{\perp} \quad (\mathbf{B}_{\perp} \equiv \mathbf{B})$$

Por tanto la fuerza sobre q es (no habrá fuerza magnética):

$$\mathbf{F}' = q\mathbf{E}'_{\perp} = q\gamma u \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (-\mathbf{u}_r)$$

P5 – T6 – cont.



b-2) Otra forma de resolver el problema es por medio de la transformación del cuadrivector densidad de corriente.

Definimos en S la densidad volúmica de carga y la densidad de corriente:

$$\rho_{\pm} = \lambda_{\pm} \delta(y) \delta(z) \quad ; \quad \mathbf{J}_{\pm} = \rho_{\pm} \mathbf{v}_{\pm}$$

El cuadrivector densidad de corriente será entonces:

$$J^{\alpha} = J_{+}^{\alpha} + J_{-}^{\alpha} \quad \text{con} \quad \begin{cases} J_{+}^{\alpha} = (\rho c, \rho v, 0, 0) \\ J_{-}^{\alpha} = (-\rho c, (-\rho)(-v), 0, 0) \end{cases}$$

$$\rightarrow J^{\alpha} = (0, 2\rho v, 0, 0)$$

Transformando al sistema propio de la carga:

$$J'^{\alpha} = \left(\frac{-2\gamma\rho uv}{c}, 2\gamma\rho v, 0, 0 \right) \quad ; \quad \gamma = \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-1/2}$$

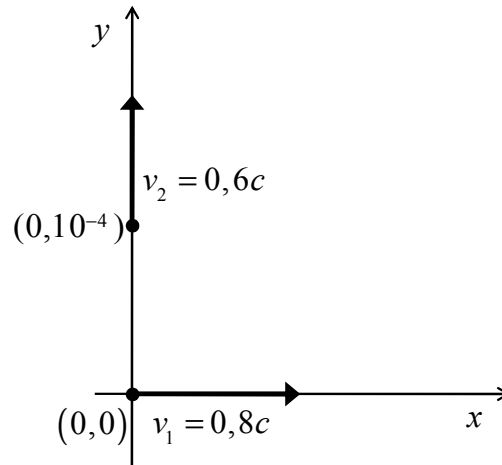
$$\rightarrow \text{en } S' \text{ se mide una carga por unidad de longitud } \lambda' = \frac{-2\gamma\lambda uv}{c^2}$$

Esta carga crea un campo eléctrico en S' :

$$\mathbf{E}' = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{u}_r$$

$$\text{y la fuerza sobre } q \text{ será: } \mathbf{F}' = q\mathbf{E}' = q \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{u}_r = q\gamma u \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (-\mathbf{u}_r)$$

P6-T6



Para hallar la fuerza que crea el protón (1) situado en el origen sobre el protón (2) situado sobre el eje y , hay que calcular los campos mediante transformación relativista.

En el sistema S'_1 en el que (1) se encuentra en reposo:

$$\mathbf{E}'_1(2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(10^{-4})^2} \mathbf{u}_y$$

En el sistema de laboratorio S , que se mueve con velocidad $-v_1 \mathbf{u}_x$ respecto de S'_1 :

$$\mathbf{E}_1(2) = \gamma_1 \mathbf{E}'_1(2) = \gamma_1 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(10^{-4})^2} \mathbf{u}_y \quad ; \quad \mathbf{B}_1(2) = \frac{\gamma_1}{c^2} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{E}'_1(2) = \frac{\gamma_1 v_1}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(10^{-4})^2} \mathbf{u}_z$$

Notemos que al estar la distancia de las cargas medida en una dirección perpendicular a \mathbf{v}_1 , no se contrae. El valor de la fuerza será:

$$\mathbf{F}_1(2) = q [\mathbf{E}_1(2) + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1(2)] = (3,845 \times 10^{-20} \mathbf{u}_y + 1,846 \times 10^{-20} \mathbf{u}_x) \text{ N}$$

Veamos ahora la fuerza del protón (2) sobre el (1).

En el sistema S'_2 en el que (2) se encuentra en reposo:

$$\mathbf{E}'_2(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(\gamma_2 10^{-4})^2} (-\mathbf{u}_y)$$

donde se ha tenido en cuenta la contracción que sufre la distancia medida en el sistema de laboratorio que se mueve con velocidad $-v_2 \mathbf{u}_y$ respecto de S'_2 . Además, se supone que el

P6-T6-cont

origen de ambos sistemas coincide en el instante $t = 0$. El campo en el sistema propio sólo tiene componente paralela a la velocidad, luego en S los campos serán:

$$\mathbf{E}_2(1) = \mathbf{E}'_2(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(\gamma_2 10^{-4})^2} (-\mathbf{u}_y) \quad ; \quad \mathbf{B}_2(1) = 0$$

y la fuerza vendrá dada por:

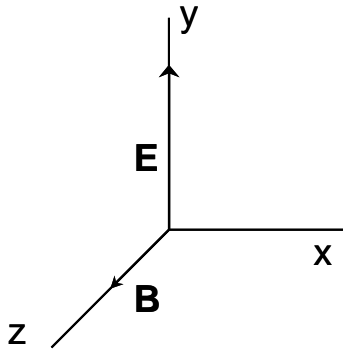
$$\boxed{\mathbf{F}_2(1) = q\mathbf{E}_2(1) = -1,477 \times 10^{-20} \mathbf{u}_y \text{ N}}$$

Las fuerzas no son ni iguales ni opuestas, lo que corresponde al hecho de que en los balances del momento lineal y angular hay que incluir las contribuciones de los campos asociados a las partículas.

También se puede resolver el problema utilizando las expresiones de los campos retardados en función de la posición presente. Comprobar que se obtienen los mismos resultados.

P7-T6

a) Onda em progresiva: $\mathbf{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \mathbf{u}_y$



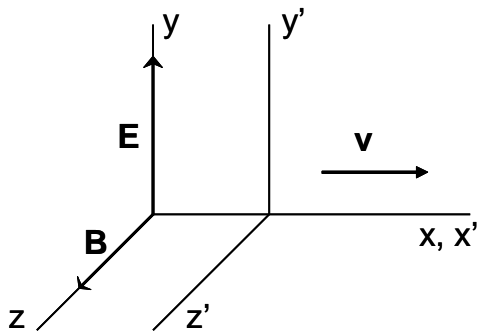
Teniendo en cuenta que para una onda em:

$$c^2 B^2 - E^2 = c^2 B'^2 - E'^2 = 0 \text{ (invariante),}$$

se deduce que no puede haber un SR donde sólo exista E ó B .

b) $e^{i(\omega t - kx)} = e^{i\varphi}$, la fase φ de la onda es el argumento de una exponencial: indica el nº de crestas/valles que han pasado en un intervalo de tiempo; debe ser un invariante

c) Cuando se observa desde un SR que se mueve con velocidad $\mathbf{v} = v \mathbf{u}_x$:



$$E'_x = E_x = 0$$

$$E'_y = \gamma(E_y - vB_z) = \gamma(E - vB) =$$

$$= \gamma\left(E - \frac{v}{c}E\right) = \gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right)E$$

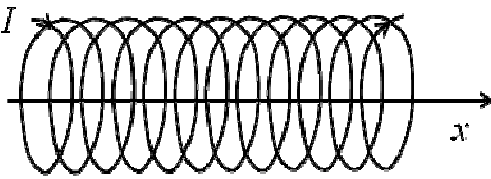
$$E'_z = 0$$

$$B'_x = B_x = 0$$

$$B'_y = B_y = 0$$

$$B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) = \gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right)B$$

P8-T6

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'_{\text{int}} &= \mu_0 N I \mathbf{u}_x \\ \mathbf{B}'_{\text{out}} &= 0 \end{aligned}$$


The diagram shows a solenoid with current I flowing to the right. An x -axis is drawn along the length of the solenoid, with an arrow pointing to the right.

a) Transformamos los campos desde el sistema propio al del SL que se mueve con velocidad $-\nu \mathbf{u}_x$ respecto de este:

Dentro del solenoide

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\parallel} &= 0 \quad ; \quad \mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{B}'_{\parallel} = \mu_0 N I \mathbf{u}_x \\ \mathbf{E}_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}'_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}'_{\perp}) = 0 \quad ; \quad \mathbf{B}_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}'_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{E}'_{\perp} / c^2) = 0 \end{aligned}$$

Fuera los campos son nulos.

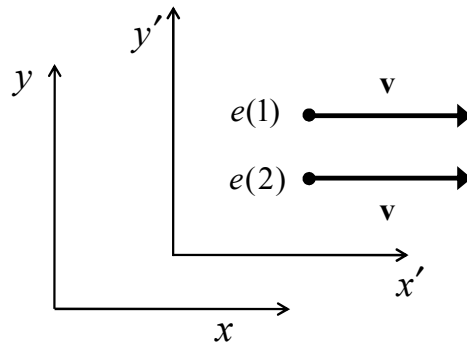
b) Transformamos los campos desde el sistema propio al del SL que se mueve con velocidad $-\nu \mathbf{u}_y$ respecto de este:

Dentro del solenoide

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\parallel} &= 0 \quad ; \quad \mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{B}'_{\parallel} = 0 \\ \mathbf{E}_{\perp} &= -\gamma \mathbf{v} \times \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \nu \mu_0 N I \mathbf{u}_z \quad ; \quad \mathbf{B}_{\perp} = \gamma \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \mu_0 N I \mathbf{u}_x \end{aligned}$$

Fuera del solenoide los campos son nulos

P9-T6



Para hallar la fuerza que crea el electrón (2) sobre el (1), hay que calcular los campos mediante transformación relativista.

En el sistema S' en el que (1) y (2) se encuentran en reposo ($e = -1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$):

$$\mathbf{E}'_2(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{(10^{-3})^2} \mathbf{u}_y$$

En el SL, que se mueve con velocidad $-v\mathbf{u}_x$ respecto de S' :

$$\mathbf{E}_2(1) = \gamma \mathbf{E}'_2(1) = \gamma \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{(10^{-3})^2} \mathbf{u}_y \quad ; \quad \mathbf{B}_2(1) = \frac{\gamma}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}'_2(1) = \frac{\gamma v}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{(10^{-3})^2} \mathbf{u}_z$$

Notemos que al estar la distancia de las cargas medida en una dirección perpendicular a \mathbf{v} , no se contrae. El valor de la fuerza será:

$$\boxed{\mathbf{F}_2(1) = e \left[\mathbf{E}_2(1) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_2(1) \right]}$$

Para $E_{pot} = 1 \text{ eV}$, $v = 5,93 \times 10^5 \text{ m/s}$,

$$\mathbf{F}_2(1) = \left(\underbrace{2,31 \times 10^{-22} \mathbf{u}_y}_{F_{elec}} - \underbrace{9,04 \times 10^{-28} \mathbf{u}_y}_{F_{mag}} \right) \text{ N} = 2,31 \times 10^{-22} \mathbf{u}_y \text{ N}$$

Para $E_{pot} = 10^6 \text{ eV}$, $v = 2,823 \times 10^8 \text{ m/s}$,

$$\mathbf{F}_2(1) = \left(\underbrace{6,83 \times 10^{-22} \mathbf{u}_y}_{F_{elec}} - \underbrace{6,05 \times 10^{-22} \mathbf{u}_y}_{F_{mag}} \right) = 7,8 \times 10^{-23} \mathbf{u}_y \text{ N}$$

En el primer caso la fuerza es casi igual a la fuerza eléctrica; en el segundo aumenta mucho el valor de la fuerza magnética hasta hacerse del mismo orden que la eléctrica.

P10-T6

a) Del cuádrivector potencial se deduce $\Phi' = 0$; $A' = \left(-\frac{\mu_0 n' I'}{2} y', \frac{\mu_0 n' I'}{2} x', 0 \right)$

Por tanto en el sistema propio se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -\nabla\Phi' - \frac{\partial A'}{\partial t} = 0 \\ \mathbf{B}' &= \nabla \times \mathbf{A}' = \mu_0 n' I' \mathbf{u}_z \end{aligned}$$

b) Transformación de los campos al sistema del laboratorio ($-v\mathbf{u}_x$):

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x & B_x &= B'_x \\ E_y &= \gamma(E'_y + vB'_z) & B_y &= \gamma[B'_y - (v/c^2)E'_z] \\ E_z &= \gamma(E'_z - vB'_y) & B_z &= \gamma[B'_z + (v/c^2)E'_y] \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} E_x &= 0; & E_y &= \gamma v B'_z = \gamma v \mu_0 n' I'; & E_z &= 0. \\ B_x &= 0; & B_y &= 0; & B_z &= \gamma B'_z = \gamma \mu_0 n' I' \end{aligned}$$

c) Por transformación de Lorentz de A'^μ :

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\mu_0 n' I'}{2} y' \\ \frac{\mu_0 n' I'}{2} x' \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\Phi}{c} = -\gamma\beta \frac{\mu_0 n' I'}{2} y' \rightarrow \Phi = -\gamma v \frac{\mu_0 n' I'}{2} y'$$

$$A_x = \gamma A'_x = -\gamma \frac{\mu_0 n' I'}{2} y'; \quad A_y = A'_y = \frac{\mu_0 n' I'}{2} x'; \quad A_z = 0.$$

P11-T6

El potencial viene dado por la función:

$$\Phi = k(x^2 - y^2) \quad , \quad k > 0$$

a) Campo eléctrico:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \quad \begin{cases} E_x = -2kx \\ E_y = 2ky \\ E_z = 0 \end{cases}$$

Ecuaciones relativistas de movimiento de la carga e :

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \mathbf{v}) = e\mathbf{E} \quad ; \quad \frac{d}{dt}(\gamma mc^2) = e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})$$

b) Para la aproximación no relativista $\gamma \approx 1$:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} \quad \begin{cases} m\ddot{x} = -2ekx \\ m\ddot{y} = 2eky \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \rightarrow \dot{z} = v_0 \rightarrow z = z_0 + v_0 t$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \rightarrow x = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{2ek}{m}}$$

$$\ddot{y} = \omega^2 y \rightarrow y = C \operatorname{ch} \omega t + D \operatorname{sh} \omega t$$

Aplicamos las condiciones iniciales para hallar las constantes:

$$t = 0 \quad \begin{cases} x_0 = A, \quad \dot{x}_0 = 0 \rightarrow B = 0 \\ y_0 = C, \quad \dot{y}_0 = 0 \rightarrow D = 0 \end{cases}$$

Por tanto, las ecuaciones que describen la trayectoria son:

$$x = x_0 \cos \omega t$$

$$y = y_0 \operatorname{ch} \omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{2ek}{m}}$$

$$z = z_0 + v_0 t$$