Elementos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Examen final – Curso 2º – Grupo C – 31 de mayo de 2019

Apellidos, Nombre	

1. Se considera la ecuación diferencial: $y' = |y| \cos x + y^2$

- ¿En qué región del plano se cumplen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad de solución para dicha ecuación?
- Calcular alguna solución que pase por el punto $(0,0)$ y alguna que pase por el $(0,1)$.

(2 ptos.)

2. Supongamos que $y_1(x) = x$, $y_2(x) = \operatorname{sen} x$, son soluciones de $y'' + a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = 0$, donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones continuas en el intervalo $I = (0, \pi)$.

- Calcular el Wronskiano $W[y_1, y_2]$. ¿Son $\{y_1, y_2\}$ linealmente independientes en I?
- Resolver el correspondiente PVI con las condiciones iniciales $y(\pi/2) = 0$, $y'(\pi/2) = 2$.
- Probar que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes en el intervalo $J = (-\pi, \pi)$, y que no pueden ser soluciones en J de ninguna ecuación del tipo $y'' + A(x) \cdot y' + B(x) \cdot y = 0$ con $A(x)$ y $B(x)$ continuas en J.

(2 ptos.)

3. Para cada $a \in \mathbb{R}$, se considera el sistema:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

- Determinar algún valor de a para que el sistema tenga más de un punto de equilibrio. Hallar la solución general del sistema para dicho valor.
- Esbozar el diagrama de fases para $a = 0$.

(2 ptos.)

4. • Resolver el siguiente problema de valor inicial usando la transformada de Laplace:

$$y'' + 2y' - 3y = b(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$b(t) = \begin{cases} 4 & 0 \le t \le 5 \\ 0 & t > 5 \end{cases}$$

(Nota: $\mathcal{L}[e^{at}](s) = 1/(s-a); \mathcal{L}[f(t-a)H_a(t)](s) = e^{-as}\mathcal{L}[f(t)](s)$.)

- Determinar la solución general de la ecuación $y'' + 2y' - 3y = b(t)$.

(2 ptos.)

5. Se considera la ecuación diferencial: $(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0$.

- Probar que todas las soluciones de esta ecuación son analíticas en $x = 0$.
- Encontrar el desarrollo en serie de potencias para cada una de estas soluciones. Calcular el radio de convergencia de estas series.
- Determinar dos soluciones distintas que pasen por el $(0,0)$. ¿Contradice esto el teorema de existencia y unicidad de solución de una EDO?

(2 ptos.)