# Capítulo 1

# Magnitudes físicas

## 1.1. Sistema internacional de unidades

Una magnitud es toda propiedad medible de un cuerpo. Medir es comparar esa propiedad con otra de la misma naturaleza que tomamos como patrón o unidad. P.e. la longitud de una mesa es 2 m porque al compararla con el patrón o unidad estándar (que es el metro) resultó ser dos veces esa cantidad.

Magnitudes fundamentales son aquellas que no se pueden definir en función de otra (e.g. el tiempo). Magnitudes derivadas son aquellas que se definen a partir de otras (e.g. la velocidad).

El Sistema Internacional (S.I.) establece una serie de magnitudes con sus respectivas unidades:

| Magnitud | Unidad | Símbolo |
|---|---|---|
| tiempo | segundo | s |
| longitud | metro | m |
| masa | kilogramo | kg |
| temperatura | kelvin | K |
| carga eléctrica | culombio | C |
| cantidad sustancia | mol | mol |
| intensidad luminosa | candela | cd |

Cuadro 1.1: Magnitudes **fundamentales** del Sistema Internacional (S.I.).

| Magnitud | Unidad | Símbolo |
|---|---|---|
| fuerza | newton | N |
| energía | julio | J |
| potencia | vatio | W |
| presión | pascal | Pa |
| intensidad eléctrica | amperio | A |
| diferencia de potencial | voltio | V |

Cuadro 1.2: Algunas magnitudes **derivadas** del Sistema Internacional (S.I.).

Algunas de las unidades anteriores son, a menudo, muy grandes o muy pequeñas para medir las correspondientes magnitudes. En estos casos se utilizan múltiplos y submúltiplos de la unidad mediante los siguientes prefijos:

| tera | giga | mega | kilo | mili | micro | nano | pico |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | G | M | k | m | $\mu$ | n | p |
| $10^{12}$ | $10^{9}$ | $10^{6}$ | $10^{3}$ | $10^{-3}$ | $10^{-6}$ | $10^{-9}$ | $10^{-12}$ |

Cuadro 1.3: Prefijos de las unidades del S.I.

De esta forma, un milisegundo (1 ms) representa $10^{-3}$ s (i.e. $0'001$ segundos).

## 1.2. Magnitudes escalares y vectoriales

Una magnitud escalar es aquella que queda definida perfectamente con un numero y su correspondiente unidad. P.e. el tiempo, la masa o la superficie.

Por contra, las magnitudes vectoriales no pueden ser descritas con un número y su unidad, si no que necesitamos conocer la dirección y sentido de ese número. P.e. la velocidad del viento en un determinado lugar, además de su intensidad en m/s (cuanto sopla) es necesario especificar su dirección y sentido (de donde sopla). Otros ejemplos son la aceleración, la gravedad terrestre, etc.

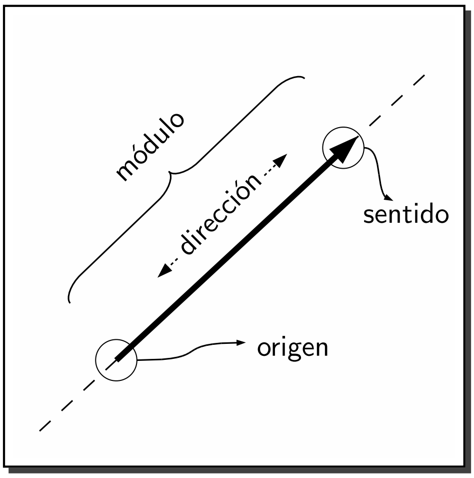


Figura 1.1: Elementos característicos de un vector.

Para representar magnitudes vectoriales se usan vectores (de ahí su nombre). Desde el punto de vista geométrico, un vector **a** es una "flecha" en la que cabe distinguir los siguientes elementos:

1. Módulo o longitud: La longitud de la flecha. Lo representaremos como $|\mathbf{a}|$.

2. Dirección: La recta sobre la que se sitúa el vector.

3. Sentido: Hacia donde apunta la flecha.

4. Origen o punto de aplicación: Donde comienza el vector.

# 1.3. Operaciones con vectores

## 1.3.1. Suma de vectores

La suma de dos vectores **a** y **b** es otro vector que se obtiene geométricamente de la forma siguiente: se sitúa el origen de **b** en el extremo de **a**, el vector que une el origen de **a** con el extremo de **b** es el vector suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

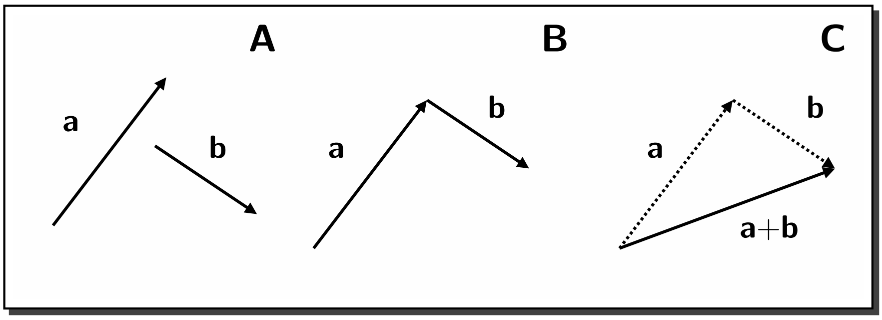


Figura 1.2: (A) Queremos sumar los vectores **a** y **b**. (B) Colocamos consecutivamente ambos vectores. (C) El vector suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ es el que resulta de unir el origen de **a** con el final de **b**.

## 1.3.2. Producto de un número por un vector

El producto de un número n y un vector **a** es otro vector de igual dirección que **a** cuyo módulo es el producto del módulo del vector inicial por el número (es decir, $n|\mathbf{a}|$) y con sentido dado por el signo del número (es decir, el mismo sentido que **a**, si n es positivo, y sentido contrario si n es negativo).

## 1.3.3. Diferencia de vectores

La diferencia de los vectores **a** y **b** es otro vector que se obtiene como la suma de **a** mas el vector opuesto de **b** (que se obtiene multiplicando **b** por -1). Es decir, $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-1 \cdot \mathbf{b})$.

## 1.3.4. Componentes cartesianas

Cualquier vector del espacio puede escribirse como una suma (combinación lineal) de tres vectores, a los que llamaremos **i**, **j** y **k**, que se caracterizan por tener módulo uno y ser perpendiculares entre si. Esto es, todo vector **a** se puede escribir como:

$$\mathbf{a} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} = (x, y, z).$$

Los vectores **i**, **j** y **k**, y su origen común, definen un sistema de referencia. Los números $(x, y, z)$ reciben el nombre de componentes cartesianas y son únicas para cada vector (una vez se ha fijado el sistema de referencia).

Cuando se trabaja con el sistema de referencia anterior (esto es, con los vectores expresados en componentes cartesianas), se verifica que:

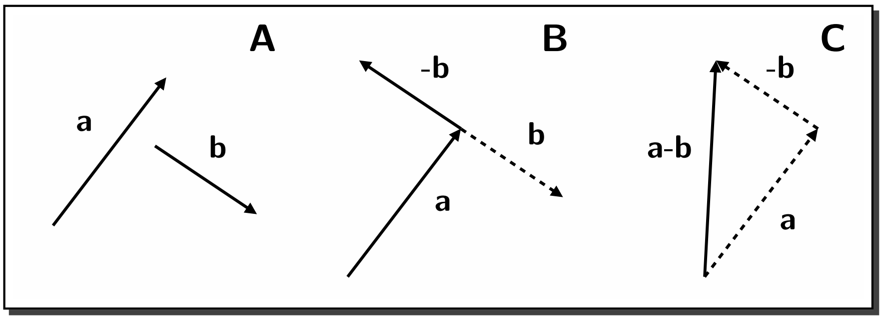


Figura 1.3: (A) Queremos restar los vectores **a** y **b**. (B) Colocamos consecutivamente ambos vectores y calculamos el vector opuesto a **b**. (C) El vector diferencia $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ es el vector que resulta de unir el origen de **a** con el extremo de -**b**.

1. El módulo o longitud de un vector **a** con componentes $(x, y, z)$ se calcula así:

$$\boxed{|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.}$$

   P.e. el módulo del vector $\mathbf{a} = (2, -1, 3)$ es

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

2. El producto de un número n por un vector $\mathbf{a} = (x, y, z)$ se obtiene de esta forma:

$$\boxed{n\mathbf{a} = nx\,\mathbf{i} + ny\,\mathbf{j} + nz\,\mathbf{k} = (nx, ny, nz).}$$

   P.e. si $\mathbf{a} = (2, -1, 3)$, se verifica que

$$-2\mathbf{a} = -2(2, -1, 3) = (-4, 2, -6).$$

3. La suma de los vectores $\mathbf{a_1} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{a_2} = (x_2, y_2, z_2)$ es

$$\boxed{\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1 + x_2)\,\mathbf{i} + (y_1 + y_2)\,\mathbf{j} + (z_1 + z_2)\,\mathbf{k} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2),}$$

   P.e. la suma de $\mathbf{a_1} = (2, -1, 3)$ y $\mathbf{a_2} = (1, 2, -3)$ es

$$\mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} = (2 + 1, -1 + 2, 3 - 3) = (3, 1, 0).$$

4. La diferencia de los vectores $\mathbf{a_1} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{a_2} = (x_2, y_2, z_2)$ es

$$\boxed{\mathbf{a} - \mathbf{b} = (x_1 - x_2)\,\mathbf{i} + (y_1 - y_2)\,\mathbf{j} + (z_1 - z_2)\,\mathbf{k} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).}$$

   P.e. la diferencia de $\mathbf{a_1} = (2, -1, 3)$ y $\mathbf{a_2} = (1, 2, -3)$ es

$$\mathbf{a_1} - \mathbf{a_2} = (2 - 1, -1 - 2, 3 - (-3)) = (1, -3, 6).$$

Además de las operaciones anteriores, podemos definir dos más que serán importantes en capítulos posteriores:

### Producto escalar

El producto escalar de los vectores $\mathbf{a_1} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{a_2} = (x_2, y_2, z_2)$ es

$$\boxed{\mathbf{a_1} \cdot \mathbf{a_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,}$$

y se caracteriza por las siguientes propiedades:

1. El resultado es un número y NO otro vector. P.e. el producto escalar de $\mathbf{a_1} = (2, -1, 3)$ y $\mathbf{a_2} = (1, 2, -3)$ es

$$\mathbf{a_1} \cdot \mathbf{a_2} = (2)(1) + (-1)(2) + (3)(-3) = 2 - 2 - 9 = -9.$$

2. Es conmutativo (es decir, el orden de los factores no altera el producto):

$$\mathbf{a_1} \cdot \mathbf{a_2} = \mathbf{a_2} \cdot \mathbf{a_1}.$$

3. El producto escalar es igual al producto de los módulos de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\mathbf{a_1} \cdot \mathbf{a_2}}{|\mathbf{a_1}||\mathbf{a_2}|}.}$$

P.e. el ángulo $\alpha$ que forman los vectores $\mathbf{a_1} = (2, -1, 3)$ y $\mathbf{a_2} = (1, 2, -3)$ es

$$\cos\alpha = \frac{-9}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = -\frac{9}{14} \Longrightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{-9}{14}\right) = 50^o.$$

4. Como consecuencia del resultado anterior, el producto escalar de dos vectores ortogonales (es decir, perpendiculares) es nulo. Si $\mathbf{a_1} \perp \mathbf{a_2}$ entonces $\mathbf{a_1} \cdot \mathbf{a_2} = 0$.

### Producto vectorial

El producto vectorial de los vectores $\mathbf{a_1} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{a_2} = (x_2, y_2, z_2)$ es

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{a_1} \times \mathbf{a_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} \\ &= (y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2) = \mathbf{a_1} \times \mathbf{a_2}. \end{aligned}}$$

y se caracteriza por las siguientes propiedades:

1. El resultado es un vector perpendicular al plano que forman los vectores $\mathbf{a_1}$ y $\mathbf{a_2}$. P.e. el producto vectorial de $\mathbf{a_1} = (2, -1, 3)$ y $\mathbf{a_2} = (1, 2, -3)$ es

$$\mathbf{a_1} \times \mathbf{a_2} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{k} = (-3, 9, 5).$$

y se cumple que:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a_1} \times \mathbf{a_2}) \cdot \mathbf{a_1} &= (-3, 9, 5) \cdot (2, -1, 3) = -6 - 9 + 15 = 0, \\ (\mathbf{a_1} \times \mathbf{a_2}) \cdot \mathbf{a_2} &= (-3, 9, 5) \cdot (1, 2, -3) = -3 + 18 - 15 = 0, \end{aligned}$$

que implica que $\mathbf{a_1} \times \mathbf{a_2}$ es perpendicular a $\mathbf{a_1}$ y $\mathbf{a_2}$.

2. El sentido del producto vectorial coincide con el del avance de un tornillo cuando se gira desde el primer vector al segundo siguiendo el ángulo menor, después de trasladarlos a un origen común (regla del tornillo o de la mano derecha).

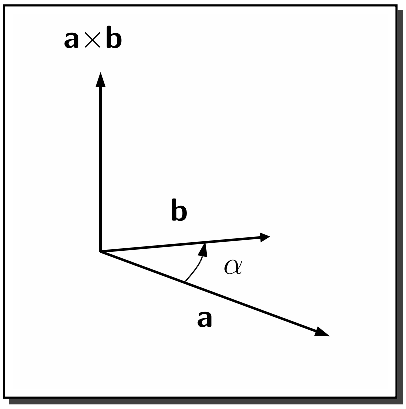


Figura 1.4: El producto vectorial de **a** y **b** es un vector perpendicular al plano que ambos forman y con sentido dado por la regla del tornillo.

3. No es conmutativo pues se verifica que $\mathbf{a_1} \times \mathbf{a_2} = -\mathbf{a_2} \times \mathbf{a_1}$.

4. El módulo del producto vectorial es igual al producto de los módulos de ambos vectores por el seno del ángulo que forman:

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \frac{|\mathbf{a_1} \times \mathbf{a_2}|}{|\mathbf{a_1}||\mathbf{a_2}|}.}$$

   P.e. el ángulo $\alpha$ que forman los vectores $\mathbf{a_1} = (2, -1, 3)$ y $\mathbf{a_2} = (1, 2, -3)$ es

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{115}}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = 0{,}766 \Longrightarrow \alpha = \operatorname{arc\,sen}(0{,}766) = 50^o.$$

5. Del resultado anterior se deduce que si $\mathbf{a_1}$ y $\mathbf{a_2}$ son paralelos, su producto vectorial es nulo. Esto matemáticamente se escribe así: si $\mathbf{a_1} \parallel \mathbf{a_2}$ entonces $\mathbf{a_1} \times \mathbf{a_2} = 0$.

## 1.4. Problemas resueltos

1. *Calcula el momento lineal de una partícula de 5 kg de masa que se mueve con velocidad* $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ *(en unidades del S.I.).*

   RESPUESTA:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = 5(2, 3, -1) = (10, 15, -5) \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

2. *Dados los vectores* $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ *y* $\mathbf{c} = -3\mathbf{j}$, *encuentra el vector suma* $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

   RESPUESTA:

   $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = (4,-1)+(-3,2)+(0,-3) = (4-3+0,-1+2-3) = (1,-2) = \mathbf{i}-2\mathbf{j}$.

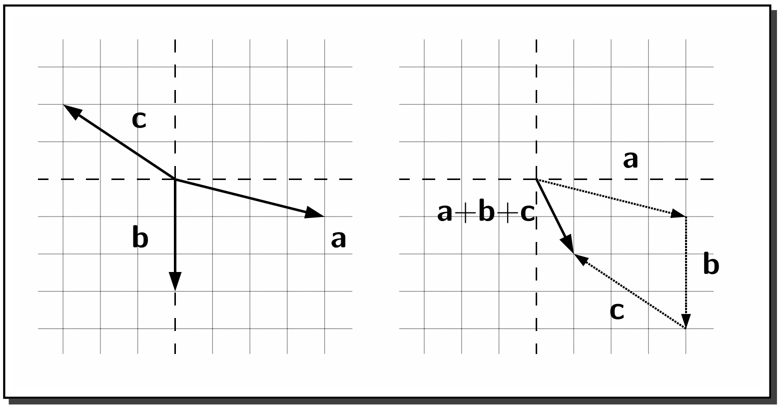


Figura 1.5: Suma geométrica de los vectores $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{c} = -3\mathbf{j}$.

3. *Calcular el módulo del vector* $\boldsymbol{r}$ *que tiene su origen en el punto A=(0,2) y su extremo en B=(1,1).*

   RESPUESTA:
   Se verifica que:

   $$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB},$$

   luego:

   $$\mathbf{r} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1,1) - (0,2) = (1,-1) = \mathbf{i} - \mathbf{j}.$$

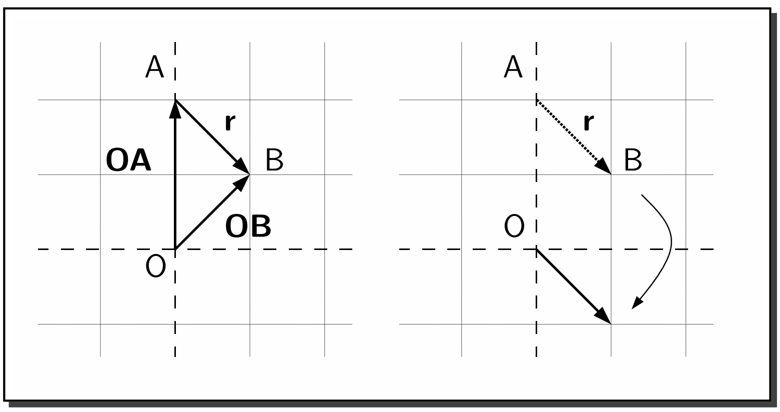


Figura 1.6: El vector **r** puede calcularse como **OB - OA**, o bien como el vector que resulta de trasladarlo hasta situar su origen en O.

4. *Dados los vectores* $\mathbf{a} = 3\mathbf{i}+3\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ *y* $\mathbf{b} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{k}$*, calcula el ángulo que forman.*

   RESPUESTA:
   Se sabe que el producto escalar verifica la siguiente propiedad:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|},$$

   luego tenemos que calcular:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{a}| &= \sqrt{3^2+3^2+(-3)^2} = \sqrt{27}, \\
|\mathbf{b}| &= \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}, \\
\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (3)(2)+(3)(0)+(-3)(3) = 6+0-9 = -3.
\end{aligned}$$

   Por consiguiente, tenemos que:

$$\cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{27}\sqrt{13}} = -0'160 \Longrightarrow \alpha = 1'73 \text{ rad} \approx 100^o.$$

5. *Toda carga eléctrica que entra con velocidad* $\boldsymbol{v}$ *en una región con campo magnético* $\boldsymbol{B}$ *experimenta una fuerza (llamada fuerza de Lorentz) de valor* $\mathbf{F} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$*. Calcula la fuerza que experimenta una carga* $q = 10^{-6}$ *C con velocidad* $\mathbf{v} = (2,-1,-3)$ *m/s cuando entra en una región con* $\mathbf{B} = (1,0,0)$ *T.*

   RESPUESTA:
   Tan sólo hay que calcular:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B} = 10^{-6}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 10^{-6}(-3\mathbf{j}+\mathbf{k}) \text{ N}.$$