Materiales II

09_08_02.mcd

Verificar con un ejemplo numérico concreto que calculando la deformación de un objeto a) en un sistema de ejes dado y b) en otro girado respecto al primer se obtiene el mismo fenómeno físico (deformación).

Las componentes de los vectores de posición de todos los puntos del objeto, las componentes del tensor de deformación (tensor gradiente de desplazamiento) y las componentes de los vectores desplazamiento son diferentes en los dos sistemas, pero representan la misma situación física, expresada en dos sistemas de coordenadas diferentes.

Campo de deformación homogéneo (por ejemplo debido a cambio térmico, a variación del contenido en humedad, a esfuerzo aplicado, al efecto piezoeléctrico inverso, etc.)

$$\varepsilon := \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$u1(x_1, x_2) := \varepsilon_{1,1} \cdot x_1 + \varepsilon_{1,2} \cdot x_2 \qquad u2(x_1, x_2) := \varepsilon_{1,2} \cdot x_1 + \varepsilon_{2,2} \cdot x_2$$

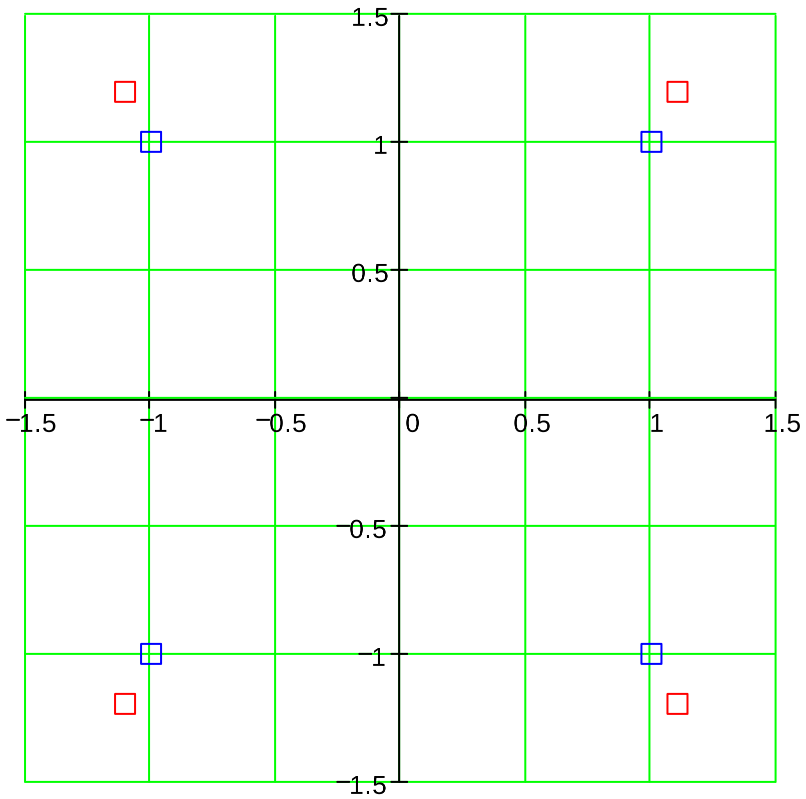
Deformamos un cuadrado cuyos vértices son:

$$P := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad Q := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad R := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad S := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Coordenadas de los vértices tras la deformación:

$$P\_def := \begin{pmatrix} P_1 + u1(P_1, P_2) \\ P_2 + u2(P_1, P_2) \end{pmatrix} \qquad P\_def = \begin{pmatrix} 1.1 \\ -1.2 \end{pmatrix} \qquad Q\_def := \begin{pmatrix} Q_1 + u1(Q_1, Q_2) \\ Q_2 + u2(Q_1, Q_2) \end{pmatrix} \qquad Q\_def = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.2 \end{pmatrix}$$

$$R\_def := \begin{pmatrix} R_1 + u1(R_1, R_2) \\ R_2 + u2(R_1, R_2) \end{pmatrix} \qquad R\_def = \begin{pmatrix} -1.1 \\ 1.2 \end{pmatrix} \qquad S\_def := \begin{pmatrix} S_1 + u1(S_1, S_2) \\ S_2 + u2(S_1, S_2) \end{pmatrix} \qquad S\_def = \begin{pmatrix} -1.1 \\ -1.2 \end{pmatrix}$$



Repetimos ahora el cálculo, pero en un sistema girado -45º respecto al primero. Giramos los vértices y ε por medio de la matriz L; acto seguido deformamos:

$$L = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad Pg = L \cdot P \qquad Qg = L \cdot Q \qquad Rg = L \cdot R \qquad Sg = L \cdot S$$

$$\varepsilon g = L \cdot \varepsilon \cdot L^{T}$$

$$\varepsilon g = \begin{pmatrix} 0.15 & -0.05 \\ -0.05 & 0.15 \end{pmatrix}$$

Nuevo tensor de deformación; contiene elementos tanto en la diagonal como fuera de ella.

Coordenadas de los cuatro vértices girados y antes de la deformación:

$$Pg = \begin{pmatrix} 1.414 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Qg = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.414 \end{pmatrix} \qquad Rg = \begin{pmatrix} -1.414 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Sg = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.414 \end{pmatrix}$$

$$u1(x1, x2) = \varepsilon g_{1,1} \cdot x1 + \varepsilon g_{1,2} \cdot x2 \qquad u2(x1, x2) = \varepsilon g_{2,2} \cdot x2 + \varepsilon g_{1,2} \cdot x1$$

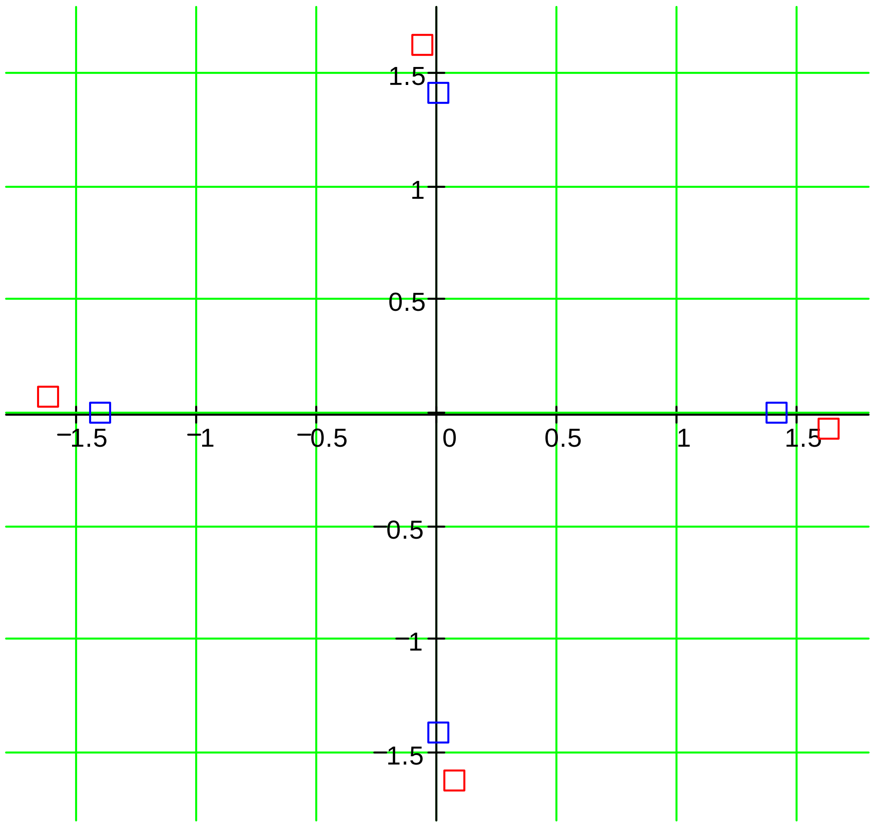
Coordenadas de los cuatro vértices girados y después de la deformación

$$Pg\_def := \begin{pmatrix} Pg_1 + u1(Pg_1, Pg_2) \\ Pg_2 + u2(Pg_1, Pg_2) \end{pmatrix} \qquad Pg\_def = \begin{pmatrix} 1.626 \\ -0.071 \end{pmatrix}$$

$$Rg\_def := \begin{pmatrix} Rg_1 + u1(Rg_1, Rg_2) \\ Rg_2 + u2(Rg_1, Rg_2) \end{pmatrix} \qquad Rg\_def = \begin{pmatrix} -1.626 \\ 0.071 \end{pmatrix}$$

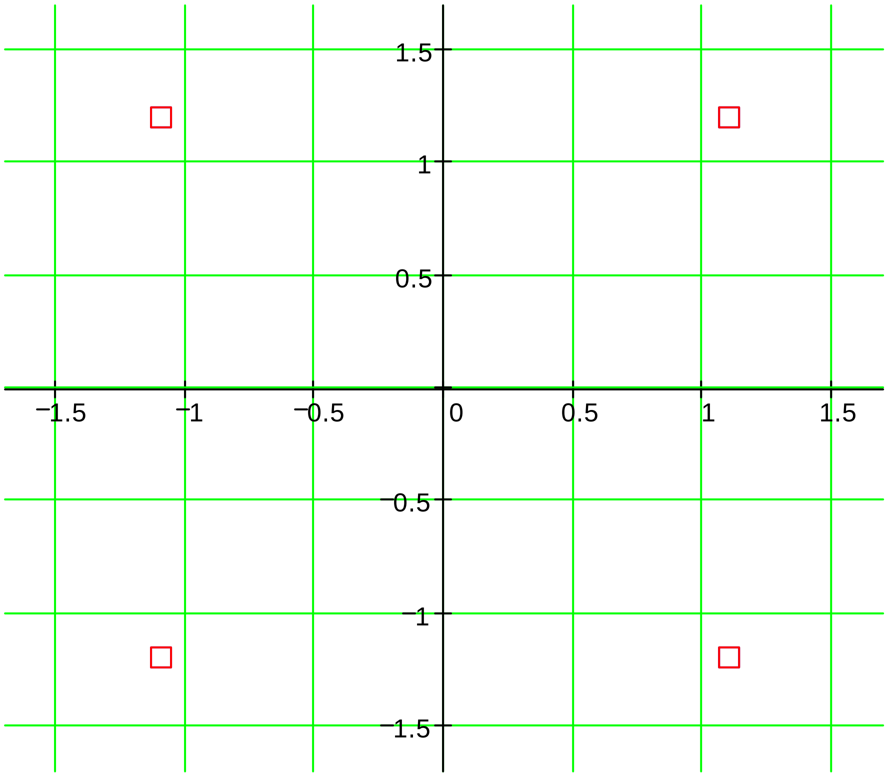
$$Qg\_def := \begin{pmatrix} Qg_1 + u1(Qg_1, Qg_2) \\ Qg_2 + u2(Qg_1, Qg_2) \end{pmatrix} \qquad Qg\_def = \begin{pmatrix} -0.071 \\ 1.626 \end{pmatrix}$$

$$Sg\_def := \begin{pmatrix} Sg_1 + u1(Sg_1, Sg_2) \\ Sg_2 + u2(Sg_1, Sg_2) \end{pmatrix} \qquad Sg\_def = \begin{pmatrix} 0.071 \\ -1.626 \end{pmatrix}$$



Giramos la sección deformada 45º y representamos la figura deformada en el sistema original (rojo) y la figura girada, deformada, y girada al revés (azul). Los símbolos en azul (Pgg, Qgg, etc) y en rojo (P_def, Q_def, etc.) se solapan exactamente, es decir la deformación calculada por las dos vías es exactamente la misma:

$Pgg = L^T \cdot Pg\_def \qquad Qgg = L^T \cdot Qg\_def \qquad Rgg = L^T \cdot Rg\_def \qquad Sgg = L^T \cdot Sg\_def$



$P\_def = \begin{pmatrix} 1.1 \\ -1.2 \end{pmatrix} \qquad Pgg = \begin{pmatrix} 1.1 \\ -1.2 \end{pmatrix}$

$Q\_def = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.2 \end{pmatrix} \qquad Qgg = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.2 \end{pmatrix}$

$R\_def = \begin{pmatrix} -1.1 \\ 1.2 \end{pmatrix} \qquad Rgg = \begin{pmatrix} -1.1 \\ 1.2 \end{pmatrix}$

$S\_def = \begin{pmatrix} -1.1 \\ -1.2 \end{pmatrix} \qquad Sgg = \begin{pmatrix} -1.1 \\ -1.2 \end{pmatrix}$

El hecho de que ε sea diagonal en el primer sistema es consecuencia de que ese sistema es el de las direcciones principales. El hecho de que el fenémeno físico (deformación) sea el mismo calculado en los dos sistemas es consecuencia de las leyes de transformación de tensores:

- transformamos ε: $\varepsilon' = L\varepsilon L^T$
- transformamos el vector de posición r: $r' = Lr$
- deformamos mediante $\varepsilon' \cdot r'$, es decir, $L \cdot \varepsilon \cdot L^T \cdot L \cdot r = L \cdot \varepsilon \cdot r$

el resultado final es evidentemente lo mismo que calcular $\varepsilon \cdot r$ en el primer sistema y luego girar mediante $L \cdot (\varepsilon \cdot r)$.