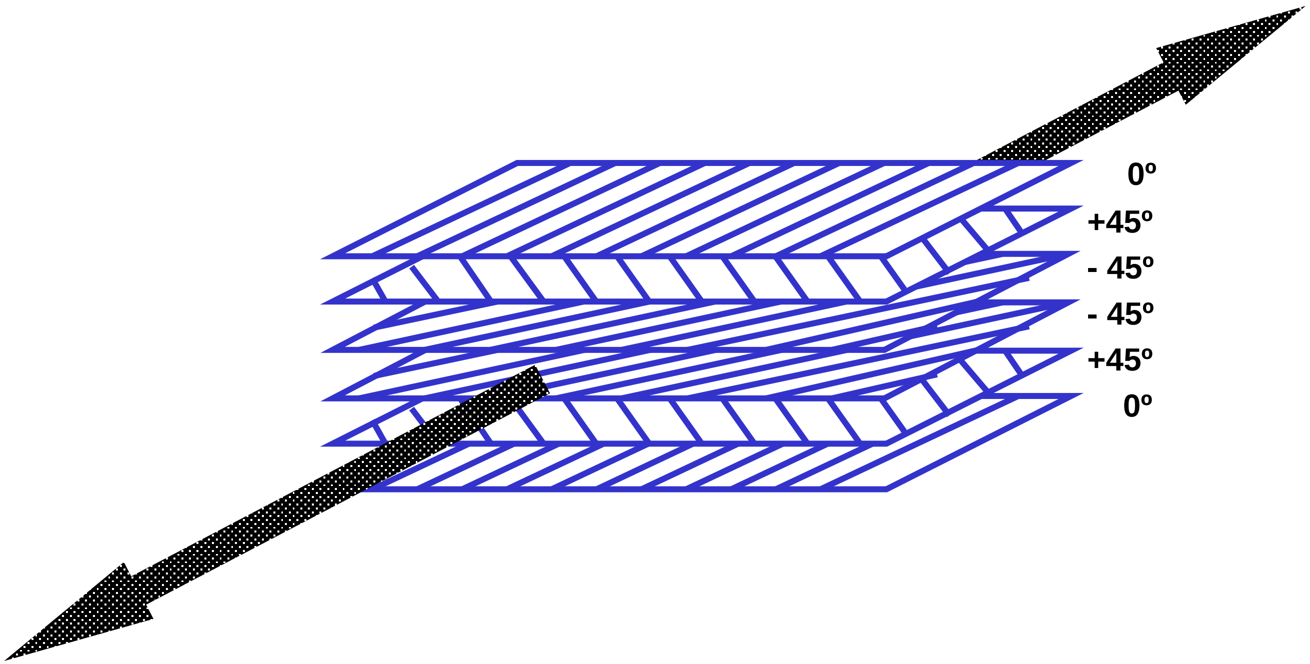
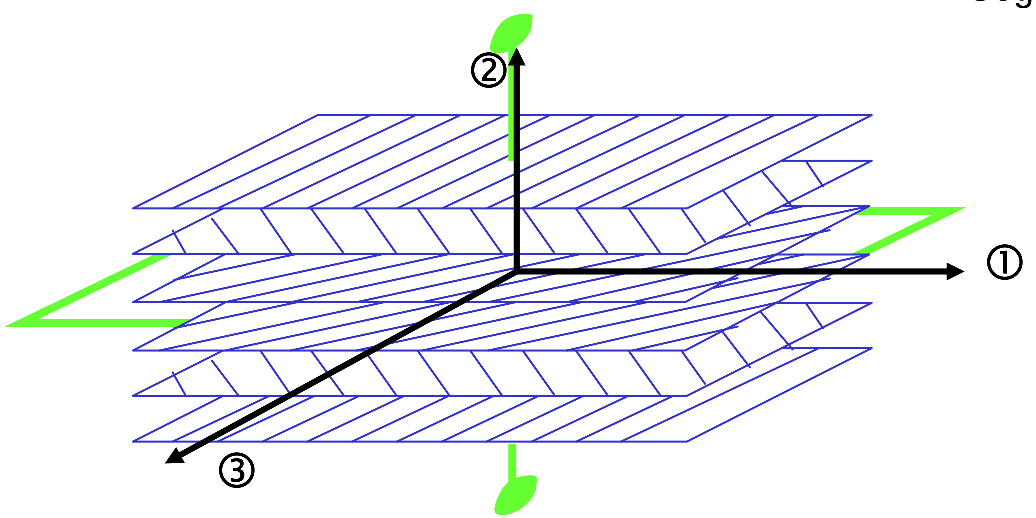
Problema 09_02_02

Un material compuesto "ortótropo" $(0º \pm 45º)_s$ se somete a tracción en la dirección indicada en la figura. Determinar, de modo cualitativo, cómo se deforma.



Problema 09_02_02

Según el problema 09_02_01, este material es monoclínico y pertenece a la clase $2/m$



La orientación convencional de los ejes es la de la figura. Para la orientación convencional, la matriz de complianza (recordar que es simétrica) tiene la estructura:

$$\underset{\sim}{s} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ & & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ & & & \bullet & \cdot & \bullet \\ & & & & \bullet & \cdot \\ & & & & & \bullet \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet \end{bmatrix}$$

Usando notación de Voigt, la deformación se obtiene de $\vec{\varepsilon} = \underset{\sim}{s}\vec{\tau}$

Para la tracción indicada,tenemos fuerza en dirección ③ que actúa sobre un plano cuya normal apunta en dirección ③, es decir, τ_{33} que en notación de Voigt es τ_3

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

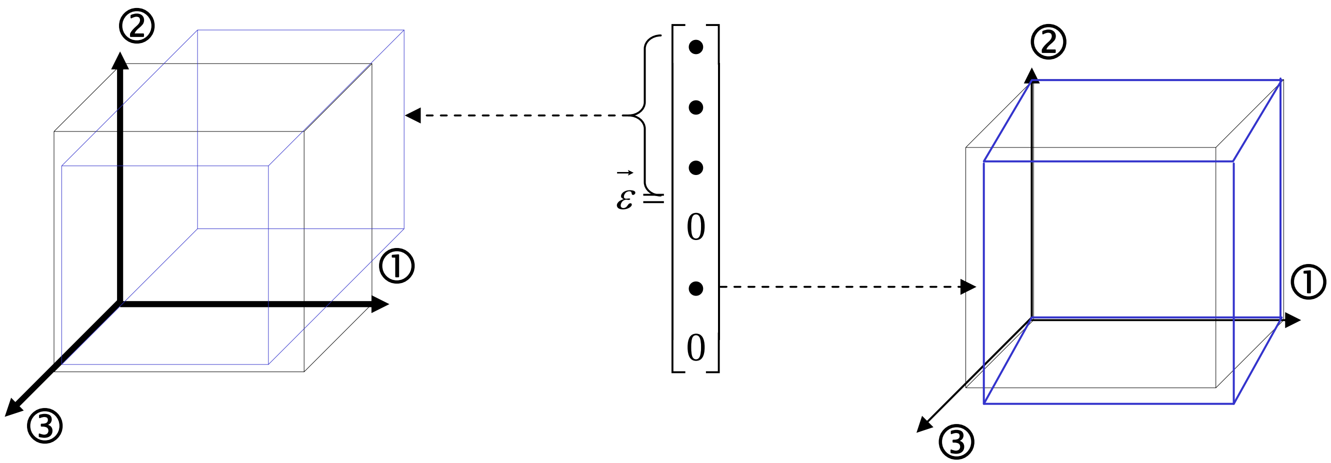
Y por tanto el producto de la matriz de complianza por este vector deformación tiene esta estructura:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ 0 \\ \bullet \\ 0 \end{bmatrix}$$

Problema 09_02_02

Quiere decir que la fuerza aplicada, exclusivamente en dirección 3, produce deformaciones longitudinales en las direcciones ①, ② y ③, pero también cortadura en el plano ①③, por el elemento $\varepsilon_5 (\equiv \varepsilon_{13})$

Cualitativamente, la distorsión que sufre en paralelepípedo recto de este material compuesto es la superposición de elongación en dirección ③, contracción en direcciones ② y ① (si la relación de Poisson es positiva como en casi todos los materiales) y cortadura en el plano ①③.



El resultado final de un esfuerzo de elongación es una distorsión que combina elongación y cortadura (pese a que no se aplica ningún esfuerzo cortante). Este tipo de distorsiones combinadas para una solicitación de un solo tipo (longitudinal o a cortadura) se denomina con frecuencia “*alabeo*”.

Problema 09_02_02

Por la estructura de la matriz de complianzas, es evidente que el mismo fenómeno sucederá si es esfuerzo longitudinal se aplica en direcciones ① y ② (primeros dos elementos del vector esfuerzo). En todos los casos de esfuezo longitudinal aparece una deformación de cortadura en el plano ①③ (debida a los tres primeros elementos no nulos en la 5ª fila).

Se observa también que aplicando esfuerzo de cortadura en el plano ②③ (elemento 4 del vector esfuerzo) se obtiene un vector deformación con la estructura:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bullet \\ \cdot \\ \bullet \end{bmatrix}$$

Este esfuerzo de cortadura produce por tanto deformación angular no sólo en el plano ②③ sino también en el plano ①②.

La misma situación se aplica a un esfuerzo de cortadura en el plano ①② (elemento 6 del vector esfuerzo)

Sin embargo, aplicando esfuerzo de cortadura en el plano ①③ (elemento 5 del vector esfuerzo) se obtiene:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \cdot \\ \bullet \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Es decir, este esfuerzo de cortadura produce por tanto no sólo deformación angular en el plano ①③ sino también deformaciones longitudinales en las direcciones ①② y ③.

Problema 09_02_02

Este comportamiento mecánico no tiene análogo en los materiales isótropos. El acoplamiento entre esfuerzos longitudinales y deformaciones de cortadura, y entre esfuerzos de cortadura y deformaciones longitudinales es debido a la **presencia de elementos no nulos en el subbloque superior derecho (y, por simetría, en el inferior izquierdo) de las matrices de complianza y rigidez**:

acoplamiento entre esfuerzos y deformaciones longitudinales

acoplamiento entre esfuerzos a cortadura y deformaciones longitudinales

$$\underset{\sim}{s} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet \end{array}\right]$$

acoplamiento entre esfuerzos longitudinales y deformaciones a cortadura

acoplamiento entre esfuerzos y deformaciones a cortadura

A la vista de las estructuras de las matrices de complianza y rigidez, los materiales cuya estructura corresponda a los sistemas triclinico, monoclínico, tetragonal (clases 4, 4barra y 4/m) y trigonal presentan este efecto.

La mayoría de los materiales compuestos pertenecen a alguna de estas clases, lo que por un lado complica el diseño con estos materiales pero también permite funcionalidades no accesibles a materiales isótropos.

• El significado físico de estas constantes elásticas (complianzas) se obtiene como se describe a continuación.

• El método es análogo al aplicado en 02_01_02 para el material isótropo y en 09_02_03 para materiales hexagonal y de clases axisimétricas (con un eje de orden infinito).

deformación longitudinal 1-1 debida a esfuerzo long. 1-1

deformación longitudinal 1-1 debida a esfuerzo long. 2-2

deformación longitudinal 1-1 debida a esfuerzo cortante 1-3

$$\vec{\varepsilon} = \underset{\sim}{s}\vec{\tau}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= s_{11}\tau_1 + s_{12}\tau_2 + s_{13}\tau_3 + s_{15}\tau_5 \\
\varepsilon_2 &= s_{12}\tau_1 + s_{22}\tau_2 + s_{23}\tau_3 + s_{25}\tau_5 \\
\varepsilon_3 &= s_{13}\tau_1 + s_{23}\tau_2 + s_{33}\tau_3 + s_{35}\tau_5 \\
\varepsilon_4 &= s_{44}\tau_4 + s_{46}\tau_6 \\
\varepsilon_5 &= s_{15}\tau_1 + s_{25}\tau_2 + s_{35}\tau_3 + s_{55}\tau_5 \\
\varepsilon_6 &= s_{46}\tau_4 + s_{66}\tau_6
\end{aligned}$$

Los términos de este producto provienen de la estructura de $\underset{\sim}{s}$
(ver ejemplo análogo para el material isótropo en 02_01_02)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{E_1}\tau_1 - \frac{\nu_{21}}{E_2}\tau_2 - \frac{\nu_{31}}{E_3}\tau_3 - \frac{\nu_{51}}{G_5}\tau_5 \\
\varepsilon_2 &= \frac{-\nu_{12}}{E_1}\tau_1 + \frac{1}{E_2}\tau_2 - \frac{\nu_{32}}{E_3}\tau_3 - \frac{\nu_{52}}{G_5}\tau_5 \\
\varepsilon_3 &= \frac{-\nu_{13}}{E_1}\tau_1 - \frac{\nu_{23}}{E_2}\tau_2 + \frac{1}{E_3}\tau_3 - \frac{\nu_{53}}{G_5}\tau_5 \\
\varepsilon_4 &= \frac{1}{G_4}\tau_4 - \frac{\nu_{64}}{G_6}\tau_6 \\
\varepsilon_5 &= -\frac{\nu_{15}}{E_1}\tau_1 - \frac{\nu_{25}}{E_2}\tau_2 - \frac{\nu_{35}}{E_3}\tau_3 + \frac{1}{G_5}\tau_5 \\
\varepsilon_6 &= -\frac{\nu_{46}}{G_4}\tau_4 + \frac{1}{G_6}\tau_6
\end{aligned}$$

deformación angular en el plano 2-3 debida a esfuerzo cortante 1-2

deformación angular en el plano 2-3 debida a esfuerzo cortante 2-3

deformación angular en el plano 1-3 debida a esfuerzo long. 3-3

Al identificar coeficientes se hace patente el significado físico de los 13 parámetros que son necesarios para describir completamente el comportamiento mecánico de este material compuesto:

$$\begin{array}{llllll}
s_{11} = 1/E_1 & s_{22} = 1/E_2 & s_{33} = 1/E_3 & s_{12} = -\nu_{21}/E_2 & s_{13} = -\nu_{31}/E_3 & s_{23} = -\nu_{32}/E_3 \\
s_{44} = 1/G_4 & s_{55} = 1/G_5 & s_{66} = 1/G_6 & s_{15} = -\nu_{51}/G_5 & s_{25} = -\nu_{52}/G_5 & s_{35} = -\nu_{53}/G_5 \\
s_{46} = -\nu_{64}/G_6 & & & & &
\end{array}$$

Problema 09_02_02

Además se obtienen las expresiones para el resto de las constantes elásticas (7, que no son independientes) en función de las 13 constantes independientes anteriores:

$$\boxed{\begin{array}{l} \nu_{12}/E_1 = \nu_{21}/E_2 \quad \nu_{13}/E_1 = \nu_{31}/E_3 \quad \nu_{23}/E_2 = \nu_{32}/E_3 \\ \nu_{46}/G_4 = \nu_{64}/G_6 \quad \nu_{15}/E_1 = \nu_{51}/G_5 \quad \nu_{25}/E_2 = \nu_{52}/G_5 \quad \nu_{35}/E_3 = \nu_{53}/G_5 \end{array}}$$

Entre estas constantes elásticas aparecen algunas que no tienen análogas en materiales isótropos o que pertenecen a clases más simétricas. Estas constantes son precisamente las responsables del acoplamiento entre elongaciones/esfuerzos a cortadura y de elongación. Ejemplos representativos:

$$\nu_{causa\_efecto}$$

ν_{51} relación de Poisson que describe el cambio longitudinal (1-1) causado por la deformación de cortadura en el plano 1-3.

ν_{15} relación de Poisson que describe el cambio angular (cortadura en el plano 1-3) causado por la deformación longitudinal (1-1).

ν_{64} relación de Poisson que describe el cambio angular (cortadura) en el plano 2-3 causado por la deformación de cortadura en el plano 1-2.