Problema 05_01_04

Una muestra en forma de cubo de un material conductor tetragonal se somete a medidas de resistividad eléctrica y se obtiene el siguiente resultado:

$$\underline{\underline{\rho}} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{bmatrix} \mu\Omega.\mathrm{m}$$

Determinar cómo está cortada la muestra respecto a los ejes principales y expresar la resistividad en estos ejes.

La resistividad, expresada en el sistema de los ejes principales, debe teber forma diagonal (éste es precisamente el criterio de definición de los ejes principales). Para determinar las direcciones principales es preciso resolver el problema de autovalores/autovectores:

$$\underline{E} = \underline{\underline{\rho}} \cdot \underline{J} = \lambda \underline{J}$$

es decir, buscar las direcciones en las que el campo y la densidad de corriente son colineales. Los autovalores se obtienen de la ecuación secular:

$$\begin{vmatrix} 16-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 10-\lambda & -6 \\ 0 & -6 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (16-\lambda)\left[(10-\lambda)^2 - 36\right] = 0 \qquad \text{y son:} \qquad \lambda = 16, 16, 4$$

Problema 05_01_04

Los autovectores asociados con estos autovalores se obtienen de:

$$\lambda = 16 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} 0x_1 = 0 \\ -6x_2 - 6x_3 = 0 \\ -6x_2 - 6x_3 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} x_1 \text{ cualquiera} \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array}$$

$$\lambda_1 = 16 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 4 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} 12x_1 = 0 \\ 6x_2 - 6x_3 = 0 \\ -6x_2 + 6x_3 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array}$$

$$\lambda_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 16 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

Los tres autovectores los escogemos de modo que formen un triedro a derechas. La matriz de giro del sistema original ("antiguo") al nuevo, en el que la resistividad es diagonal, se construye colocando por filas los vectores de la base nueva expresados en la base antigua, es decir:

$$\underset{\sim}{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

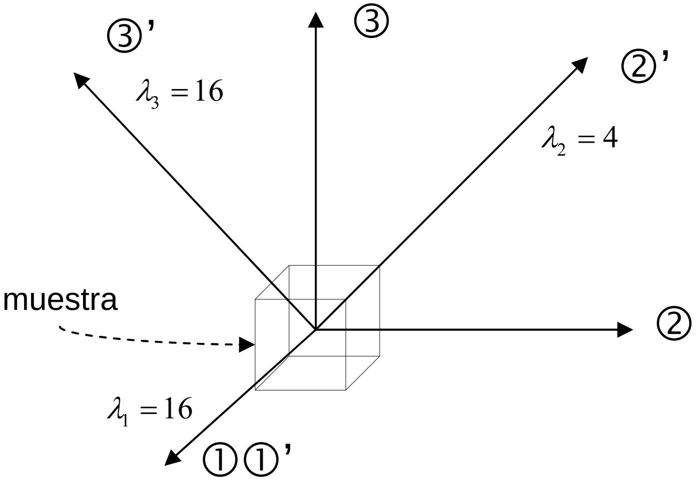
Problema 05_01_04

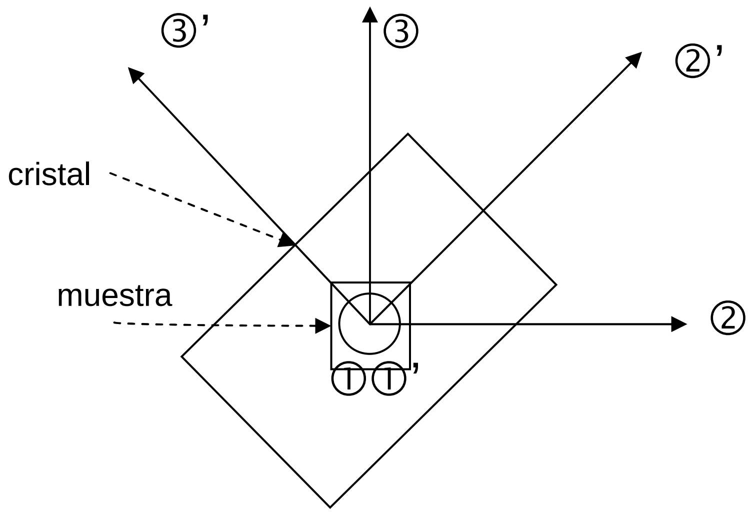
La resistividad expresada en el sistema $\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2 \quad \vec{u}_3$ se obtiene como:

$$\underline{\underline{\rho}}' = \underset{\sim}{L}\,\underline{\underline{\rho}}\,\underset{\sim}{L}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} =$$

$$\underline{\underline{\rho}}' = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & -8\sqrt{2} & 8\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

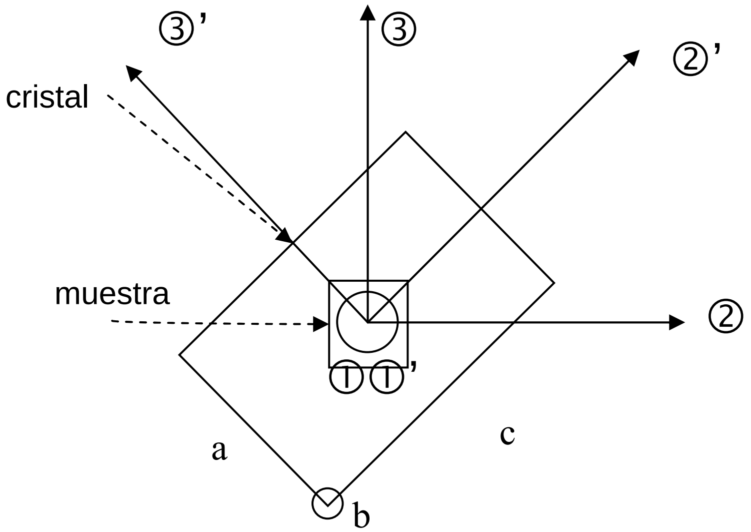
que es efectivamente diagonal. Podemos representar los ejes “antiguos” (los originales) y los “nuevos” (principales) gráficamente:





Problema 05_01_04

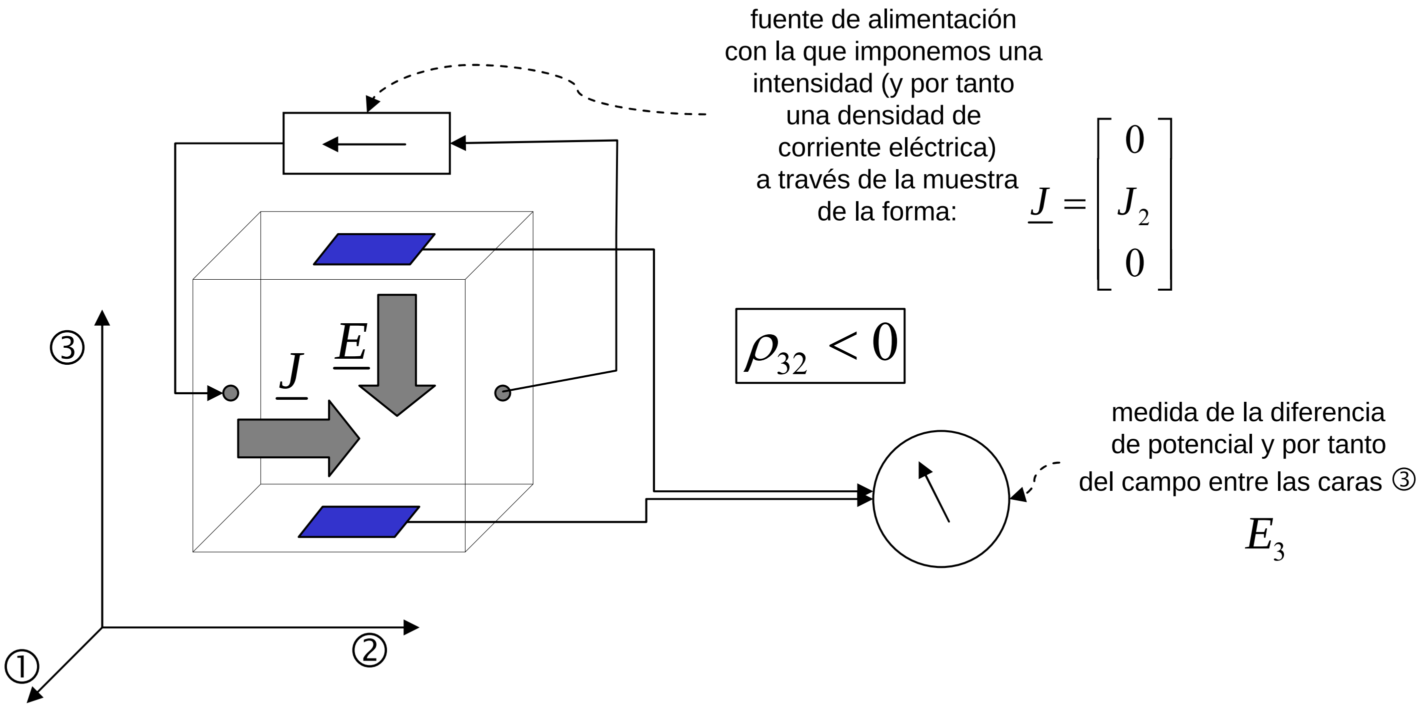
Por tanto, la muestra ha sido cortada del monocristal del material como se ilustra en la figura de la derecha. Los valores de la resistividad en los ejes principales son consistentes con el enunciado (material tetragonal), puesto que dos valores son iguales y el tercero es diferente. También es posible identificar como direcciones cristalográficas equivalentes a y b, es decir, las que definen la base del prisma tetragonal, planos $\{001\}$, las ①$'$ y ③$'$. La dirección ②$'$ es la del eje c.



Los datos de resistividad también son consistentes con un material hexagonal o trigonal.
Con las medidas de resistividad disponibles no es posible diferenciar entre estas tres alternativas.
Los valores diferentes de las conductividades en las direcciones principales indican que el flujo de electrones tiene lugar con mayor facilidad en unas que en otras. En este caso, el material conduce mejor en la dirección ②'.

Problema 05_01_04

Los valores numéricos negativos para algunas componentes de la resistividad no representan ninguna contradicción física. Los experimentos en los que se mide la resistividad se realizan simplificadamente del siguiente modo:



La componente 3,2 negativa de la resistividad implica que cuando la corriente aplicada en la medida es positiva (hacia +②), el campo resultante es negativo (hacia -③).

Sin embargo, una vez que la resistividad está expresada en el sistema de direcciones principales, no puede contener elementos (diagonales) negativos que implicarían un flujo de carga en contra de la fuerza impuesta por el campo eléctrico.

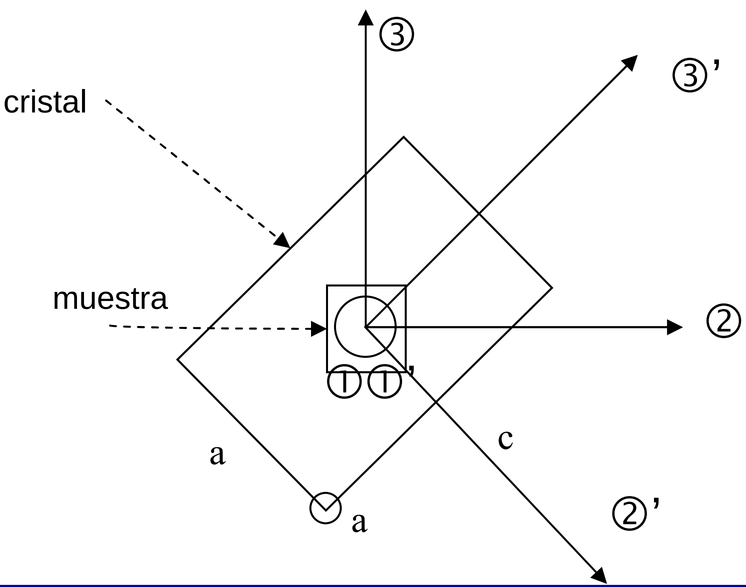
Problema 05_01_04

El problema se ha resuelto hasta este punto numerando arbitrariamente las direcciones principales, es decir, sin atender a la orientación de los ejes cristalográficos y convencionales. Por este motivo, la estructura del tensor de resistividad eléctrica (ver 02_01_02) no es:

$$\begin{bmatrix} \bullet & \cdot & \cdot \\ & \bullet & \cdot \\ & & \bullet \end{bmatrix}$$

sino que los dos elementos iguales aparecen en las posiciones ①① y ③③. Los ejes principales (direcciones propias) encontradas guardan relación con los ejes cristalográficos y con los ejes convencionales (ver 03_01_01). Si el material es tetragonal las direcciones de los ejes cristalográficos deben coinciden con los ejes principales y éstos con los ejes cartesianos en la orientación convencional.

Teniendo esto en cuenta, la numeración correcta de los ejes principales es la indicada en la figura.



La matriz de rotación de ejes coordenados es ahora:

$$\underset{\sim}{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\approx}{\rho}' = \underset{\sim}{L}\,\underset{\approx}{\rho}\,\underset{\sim}{L}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mu\Omega.\text{m}$$

que tiene los valores y la estructura correcta:

$$\begin{bmatrix} \bullet & \cdot & \cdot \\ & \bullet & \cdot \\ & & \bullet \end{bmatrix}$$