Problema 05_01_03

Un rayo descarga una carga dada en un tiempo breve conocido. El cable que conduce a tierra la carga desde el pararrayos puede fabricarse de dos materiales diferentes, cuyas propiedades son conocidas. Determinar:

- el calentamiento que se produce en el cable debido a la descarga eléctrica
- el diámetro que debe tener el cable para que la temperatura máxima que alcance éste mantenga un margen de seguridad respecto al punto de fusión
- seleccionar cuál de los dos materiales es más adecuado, exclusivamente desde el punto de vista económico.

Datos:

- el rayo descarga: $Q = 50 \quad C$
- longitud del cable: $l = 46 \quad m$
- duración de la descarga: $\Delta t = 10^{-3} \quad s$
- margen de seguridad: $\Delta T = 200 \quad K$
- temperatura ambiente: $T_{amb} = 300 \quad K$

Materiales:

	Aluminio	Cobre
densidad	$\rho_{dens} = 2700 \quad kg/m^3$	$\rho_{dens} = 8920 \quad kg/m^3$
punto de fusión	$T_f = 933 \quad K$	$T_f = 1356 \quad K$
capacidad calorífica	$C_p = 0.898 \quad kJ/kg \cdot K$	$C_p = 0.384 \quad kJ/kg \cdot K$
resistividad de referencia a 0 K	$\rho_0 = 2.7 \times 10^{-8} \quad \Omega \cdot m$	$\rho_0 = 1.6 \times 10^{-8} \quad \Omega \cdot m$
coeficiente térmico de resistividad	$\alpha_T = 0.0039 \quad K^{-1}$	$\alpha_T = 0.0039 \quad K^{-1}$
precio (relativo)	1	2.2

Problema 05_01_03

La descarga del rayo produce una intensidad de corriente media durante la duración del mismo de $i = Q/\Delta t$

La potencia disipada como calor durante la duración de la descarga es: $W = Ri^2 = \rho_r \dfrac{l}{A}\dfrac{Q^2}{(\Delta t)^2}$

y la energía disipada es: $W\,\Delta t = \rho_r \dfrac{l}{A}\dfrac{Q^2}{\Delta t}$

Esta energía se emplea prácticamente toda en calentar el cable, ya que dada la duración tan reducida de la descarga, no hay tiempo a que se conduzca calor al entorno (aproximación adiabática). Por tanto se cumple:

$$W\,\Delta t = \rho_r \frac{l}{A}\frac{Q^2}{\Delta t} = lA\rho_{dens}C_p[(T_f - \Delta T) - T_{amb}]$$

Y despejando la sección del cable: $\boxed{A = Q\sqrt{\dfrac{\rho_r}{\Delta t\,\rho_{dens}C_p[(T_f - \Delta T) - T_{amb}]}}}$

(como ejercicio, razona por qué es independiente de la longitud del cable.)

Sustituyendo los datos resulta:

$$\boxed{\begin{array}{ll} A_{Al} = 1.39 \times 10^{-5} \quad m^2 & \text{radio} = 2.10 \times 10^{-3} \quad m \\ A_{Cu} = 7.24 \times 10^{-6} \quad m^2 & \text{radio} = 1.52 \times 10^{-3} \quad m \end{array}}$$

Finalmente, la relación de precios: $\dfrac{\text{Coste}_{Cu}}{\text{Coste}_{Al}} = \dfrac{A_{Cu}l\rho_{Cu}\text{Precio}_{Cu}}{A_{Al}l\rho_{Al}\text{Precio}_{Al}} = \dfrac{7.24 \times 10^{-6}}{1.39 \times 10^{-5}}\dfrac{8920}{2700}2.2 = 3.8$

Pese a su mejor conductividad eléctrica, el cobre resulta como material en esta aplicación 4 veces más caro que el aluminio.

(sin embargo, en esta aplicación se usa el cobre casi sin excepción. ¿A qué crees que se puede deber?)

Problema 05_01_03

En la parte anterior hemos usado como resistividad eléctrica los valores:

$\rho_{r,Al} = 8.139\times10^{-8} \quad \Omega\cdot m \quad (\text{a } 516.6 \text{ K}) \qquad \rho_{r,Cu} = 6.143\times10^{-8} \quad \Omega\cdot m \quad (\text{a } 728 \text{ K})$

que estaban calculados a una temperatura intermedia entre la ambiente y la máxima que va a alcanzarse durante la descarga $\dfrac{(T_f - \Delta T) + T_{amb}}{2}$

Para realizar un cálculo más preciso, podemos tener en cuenta que la resistividad no es constante durante la descarga, sino que varía con la temperatura (pag. 150 del texto)

$$\rho_r(T) = \rho_0(1+\alpha_T T) \quad \Omega\cdot m$$

Esta variación obliga a calcular el calentamiento de modo diferencial e integrar sobre la duración de la descarga. Durante un elemento de tiempo, la energía disipada es: $W dt = \rho_r(T)\dfrac{l}{A}\dfrac{Q^2}{(\Delta t)^2}dt$

Y esta energía disipada diferencial se emplea en calentar el cable un diferencial de temperatura:

$$W dt = \rho_r(T)\frac{l}{A}\frac{Q^2}{(\Delta t)^2}dt = lA\rho_{dens}C_p dT$$

$$\frac{Q^2}{\rho_{dens}C_p A^2(\Delta t)^2}dt = \frac{dT}{\rho_r(T)} = \frac{dT}{\rho_o(1+\alpha_T T)} \qquad (*)$$

$$\frac{Q^2}{\rho_{dens}C_p A^2\Delta t} = \int_{T_{amb}}^{T_f-\Delta T}\frac{dT}{\rho_o(1+\alpha_T T)} = \frac{1}{\rho_o\alpha_T}\int_{T_{amb}}^{T_f-\Delta T}\frac{\alpha_T dT}{(1+\alpha_T T)} = \frac{1}{\rho_o\alpha_T}\ln\frac{1+\alpha_T(T_f-\Delta T)}{1+\alpha_T T_{amb}}$$

Problema 05_01_03

con lo cual $$\frac{Q^2}{\rho_{dens}C_p A^2\Delta t} = \frac{1}{\rho_o\alpha_T}\ln\frac{1+\alpha_T(T_f-\Delta T)}{1+\alpha_T T_{amb}}$$

$$\boxed{A = Q\sqrt{\frac{\rho_0\alpha_T}{\Delta t\,\rho_{dens}C_p\ln\dfrac{1+\alpha_T(T_f-\Delta T)}{1+\alpha_T T_{amb}}}}}$$

sustituyendo:

$$\boxed{\begin{array}{ll} A_{Al} = 1.373\times10^{-5} \quad m^2 & \text{radio} = 2.09\times10^{-3} \quad m \\ A_{Cu} = 6.992\times10^{-6} \quad m^2 & \text{radio} = 1.49\times10^{-3} \quad m \end{array}}$$

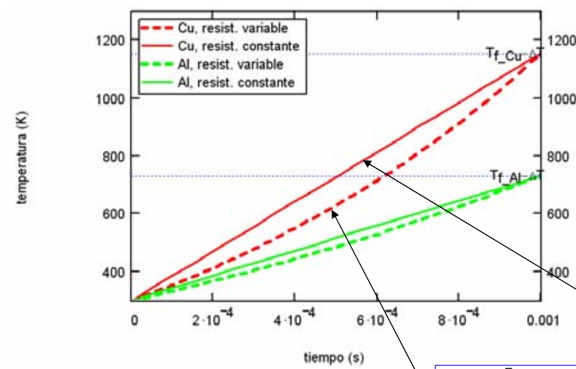
Se comprueba por tanto que el cálculo inicial, tomando un valor medio de la resistividad eléctrica es aceptable para una estimación (error en torno al 5%). Este pequeño error queda en la práctica absorbido en el factor de seguridad, que con frecuencia es muy superior a esta cifra.

Más aún: en la práctica, los materiales no están disponibles en todos los calibres, sino que es preciso usar tamaños (diámetros) estandarizados, típicamente el inmediato por encima del resultado del cálculo + factor de seguridad, lo que hace aún menos importante un error del 5%.

De todas maneras, la fuente mayor de error en este ejemplo está en el conocimiento limitado de cómo tiene lugar la descarga eléctrica, es decir, de la cantidad de electricidad descargada, de la duración de la descarga y de la variación temporal de esta descarga (suponer que durante la descarga la intensidad es constante e igual al valor medio es sólo una primera aproximación).

Problema 05_01_03

Integrando (*) entre límites genéricos podemos obtener la evolución de la temperatura en el conductor en el supuesto de que la resistividad es variable y (para $\alpha_T = 0$) de que la resistividad es constante. En el primer caso, la variación de la temperatura es lineal en el tiempo y en el segundo es exponencial. En ambos casos se cumple la especificación de temperatura máxima (líneas horizontales azules) para ambos materiales:



$$T = T_{amb} + \frac{Q^2 \rho_r}{A^2 (\Delta t)^2 \rho_{dens} C_p} t$$

$$T = \frac{1}{\alpha_T}\left[(1+\alpha_T T_{amb})\exp\left(\frac{Q^2 \alpha_T \rho_r}{A^2 (\Delta t)^2 \rho_{dens} C_p} t\right) - 1\right]$$

Problema 05_01_03

En este segundo cálculo hemos supuesto el calor específico constante. En el intervalo de temperaturas considerado, es en realidad y con buena aproximación una función lineal de la temperatura, análoga a la resistividad eléctrica:

$$C_p(T) = C_p(1 + \beta T)$$

Como ejercicio, realiza un cálculo más preciso de la sección del cable, teniendo ahora además en cuenta que el calor específico también es variable. ¿Es la densidad también variable?

¿Cómo resolverías el problema si la variación de la corriente descargada con el tiempo fuera conocida? (es decir, $i(t)$ conocida y no necesariamente constante)