Mecánica Clásica
Tema 5
Estática

EIAE

21 de octubre de 2011

Estática

La Estática es la parte de la Mecánica que estudia un movimiento concreto: el reposo o equilibrio.

- El equilibrio puede ser absoluto (respecto a ejes inerciales) o relativo (respecto a ejes móviles).
- Problemas que considera la estática:
  - Conocidas las fuerzas, determinar las configuraciones de equilibrio.
  - Para una configuración de equilibrio, calcular las fuerzas de ligadura.
  - Fuerzas necesarias para que una configuración dada sea de equilibrio.
- La estabilidad del equilibrio es ya parte de la dinámica, pues depende del tipo de movimiento resultante al perturbar el equilibrio.
- En la estática se basan la resistencia de materiales, elasticidad, cálculo de estructuras, y parte del diseño de máquinas.

Equilibrio

- Sea un sistema material cuya configuración está determinada por n coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ (coordenadas cartesianas o curvilíneas de puntos, parámetros de actitud de sólidos, etc.).
- El sistema tiene una configuración de equilibrio $q_i = q_i^e$ cuando, si se abandona el sistema *en reposo* en dicha configuración, permanece indefinidamente en ella:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{q}(0) &= \mathbf{q}^e \\ \dot{\mathbf{q}}(0) &= \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^e \;\; \forall t$$

- Un sistema puede tener una configuración de equilibrio $\mathbf{q}^e$, y no estar de hecho en equilibrio: porque no se dejó inicialmente en esa posición, o porque no se dejó en reposo.

Equilibrio de la partícula libre

La condición necesaria y suficiente para que una partícula libre sometida a una fuerza general $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ tenga una posición de equilibrio $\mathbf{r} = \mathbf{r}^e$ es que se anule la resultante de las fuerzas en esa posición:

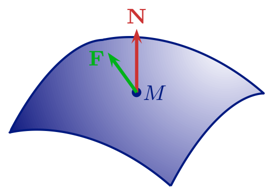
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}^e, \mathbf{0}, t) = \mathbf{0} \;\; \forall t$$

- Es necesaria: si no se anula la fuerza, aparece una aceleración $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}/m \neq \mathbf{0}$ que empieza a mover a la partícula.
- Es suficiente: La ecuación del movimiento se puede poner como un sistema de primer orden $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}\begin{Bmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{r}\end{Bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \begin{Bmatrix}\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)/m\\ \mathbf{v}\end{Bmatrix}$; por el teorema de existencia y unicidad de soluciones, si la fuerza es continua y cumple la condición de Lipschitz en un intervalo (que las fuerzas comunes cumplen), la solución $\mathbf{r} = \mathbf{r}^e$ existe y es única.
- Sistema algebraico no lineal: puede haber infinitas soluciones, algunas, una o ninguna.

Partícula sometida a ligaduras

Superficie lisa: la posición $\mathbf{r}$ tiene cumplir la ecuación de la superficie (-1 GDL):

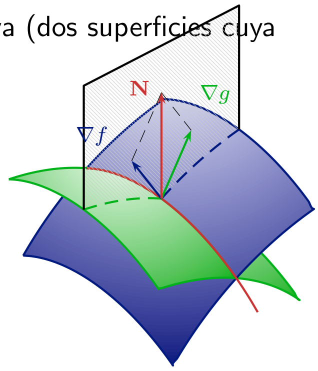
$$f(\mathbf{r},t)=0 \qquad \mathbf{N}=\lambda\,\nabla f$$



Aparece una fuerza de ligadura normal, que será la necesaria para que la partícula no abandone la superficie.

Curva lisa: la posición $\mathbf{r}$ tiene que cumplir las ecuaciones implícitas de la curva (dos superficies cuya intersección define la curva: -2 GDL)

$$g(\mathbf{r},t)=0 \qquad f(\mathbf{r},t)=0$$

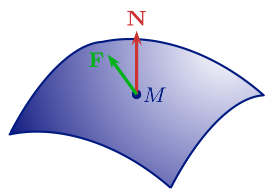


Aparece una fuerza de ligadura con dos componentes, contenida en el plano normal a la curva: está definido por los dos vectores gradiente de las superficies en ese punto, o por dos direcciones independientes $\perp$ a la curva:

$$\mathbf{N}=\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_2=\lambda\,\nabla g+\mu\,\nabla f$$

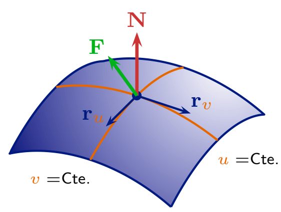
Partícula sobre superficie lisa

Ecuación implícita: $f(\mathbf{r},t)=0$. La posición de equilibrio tiene que cumplir la ecuación de la superficie. La ecuación de equilibrio es la misma, pero con la fuerza de ligadura:



$$\left.\begin{array}{l} f(\mathbf{r}^e,t)=0 \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}^e,0,t)+\lambda\,\nabla f(\mathbf{r}^e,t)=\mathbf{0} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} \mathbf{r}^e & 4 \text{ Ecs.} \\ \lambda(t) & 4 \text{ Incog.} \end{array}$$

Ecuación paramétrica: $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v,t)$. Los vectores $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ definen el plano tangente. Proyectando en ese plano la ecuación de equilibrio, desaparece la reacción normal:

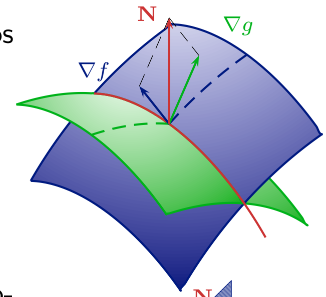


$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{F}[\mathbf{r}(u,v,t),0,t]\cdot\mathbf{r}_u=0 \\ \mathbf{F}[\mathbf{r}(u,v,t),0,t]\cdot\mathbf{r}_v=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} u^e & 2 \text{ Ecs.} \\ v^e & 2 \text{ Incog.} \end{array}$$

$$\mathbf{N}=\lambda\,\mathbf{n}=\lambda\,(\mathbf{r}_u\wedge\mathbf{r}_v)=-\mathbf{F}[\mathbf{r}(u^e,v^e,t),0,t]$$

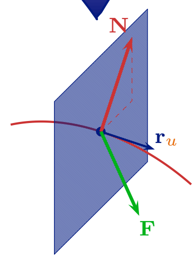
Si la fuerza o la superficie varían con el tiempo, solo son posiciones de equilibrio los puntos fijos de la superficie que cumplan la ecuación $\forall t$. Normalmente, es mejor resolverlo por analítica o dinámica relativa.

Partícula sobre curva lisa



Ecuaciones implícitas: la posición $\mathbf{r}^e$ tiene cumplir las ecuaciones de las dos superficies que definen la curva. Hay que contar la fuerza de ligadura.

$$\left.\begin{array}{l} g(\mathbf{r}^e, t) = 0 \\ f(\mathbf{r}^e, t) = 0 \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}^e, 0, t) + \lambda\,\nabla g + \mu\,\nabla f = \mathbf{0} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} \mathbf{r}^e & \text{5 Ecs.} \\ \lambda & \\ \mu & \text{5 Incog.} \end{array}$$



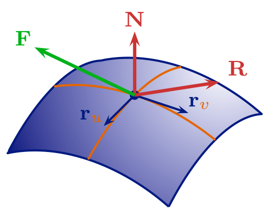
Ecuación paramétrica: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, t)$. El vector $\mathbf{r}_u$ es tangente a la curva. Proyectando en esa dirección la ecuación de equilibrio, desaparece la reacción normal:

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}(u^e, t), 0, t] \cdot \mathbf{r}_u = 0 \quad \rightarrow \quad u^e \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{1 Ec.} \\ \text{1 Incog.} \end{array} \right.$$

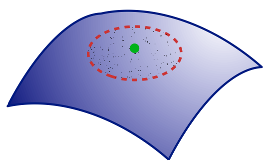
$$\mathbf{N} = -\mathbf{F}[\mathbf{r}(u^e, t), 0, t]$$

Si aparece el tiempo, las soluciones tienen que serlo $\forall t$.

Equilibrio sobre superficie rugosa



- Ecuación paramétrica: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$.
- Plano tangente: $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$
- Normal: $\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v$
- Rozamiento de Coulomb: $\mathbf{R} \perp \mathbf{n}$; $|\mathbf{R}| \leq \mu|\mathbf{N}|$



Proyectamos según la normal y el plano tangente:

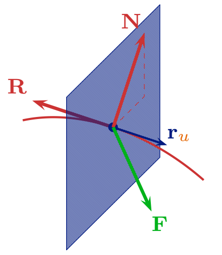
$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{N} = -\mathbf{F}_n \\ \mathbf{R} = -\mathbf{F}_t \end{array}\right\} \quad |\mathbf{F}_t(u, v)| \leq \mu|\mathbf{F}_n(u, v)|$$

Hay infinitas soluciones. Tomando el signo $=$, se puede determinar la curva que limita la zona de equilibrio, que contiene un punto de equilibrio de la superficie lisa:

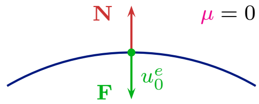
$$|\mathbf{F}_t(u, v)| = \mu|\mathbf{F}_n(u, v)| \quad \rightarrow \quad f(u, v, \mu) = 0$$

Cuando $\mu \to 0$, la zona se reduce y tiende al punto de equilibrio liso u_0^e, v_0^e.

Equilibrio sobre curva rugosa

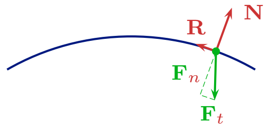


- Ecuación paramétrica: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$.
- Vector tangente: $\mathbf{r}_u$ $(\perp \mathbf{N})$
- Rozamiento de Coulomb: $\mathbf{R} \parallel \mathbf{r}_u$; $|\mathbf{R}| \leq \mu|\mathbf{N}|$



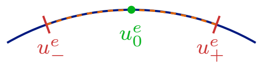
Proyectamos según la tangente y el plano normal:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{N} = -\mathbf{F}_n \\ \mathbf{R} = -\mathbf{F}_t \end{array}\right\} \quad |\mathbf{F}_t(u)| \leq \mu\, |\mathbf{F}_n(u)|$$



Hay infinitas soluciones. Tomando el signo $=$, se pueden determinar los límites del arco de equilibrio, que contiene un punto de equilibrio de la curva lisa:

$$|\mathbf{F}_t(u)| = \mu\, |\mathbf{F}_n(u)| \quad \rightarrow \quad f(u, \mu) = 0 \quad \rightarrow \quad u_-^e, u_+^e$$



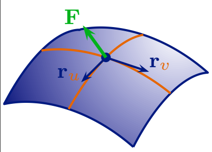
Cuando $\mu \rightarrow 0$, el arco se reduce y tiende al punto de equilibrio liso u_0^e.

Punto bajo fuerza potencial

- Libre: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial V}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow$

  $\rightarrow \quad dV(\mathbf{r}) = 0 \quad \rightarrow$ EQ $\equiv$ Pto. estacionario de $V(\mathbf{r})$

- Superficie lisa:

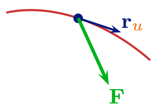


$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_u = -\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{\partial V(u,v)}{\partial u} = 0 \\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_v = -\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{\partial V(u,v)}{\partial v} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow \quad dV(u,v) = 0 \quad \rightarrow$ EQ $\equiv$ Pto. estacionario de $V(u,v)$

- Curva lisa:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_u = -\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{\partial V(u)}{\partial u} = 0$$



$\rightarrow \quad dV(u) = 0 \quad \rightarrow$ EQ $\equiv$ Pto. estacionario de $V(u)$

Equilibrio de un sólido

- Configuración dada por 6 parámetros: $\mathbf{q} = [\overbrace{x_G, y_G, z_G}^{\mathbf{r}_G}, \overbrace{\psi, \theta, \varphi}^{\mathsf{Q}}]$
- La condición necesaria y suficiente para que un sólido tenga una configuración de equilibrio $\mathbf{q} = \mathbf{q}^e$ es que se anule la resultante y el momento resultante[a] $\forall t$ en esta configuración.

Necesaria:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^e = \text{Cte} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0} \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{F}(\mathbf{q}^e, \mathbf{0}, t) & = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_G(\mathbf{q}^e, \mathbf{0}, t) & = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

Suficiente. Para fuerzas continuas y lipschitzianas:

$$\left. \begin{array}{lll} \mathbf{F}(\mathbf{q}^e, \mathbf{0}, t) & = m\ddot{\mathbf{r}}_G\big|_{t=0} & = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_G(\mathbf{q}^e, \mathbf{0}, t) & = \frac{d}{dt}\mathbf{L}_G\big|_{t=0} & = \mathbf{0} \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}^e \,, & \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0} & \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \text{La solución} \\ \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^e \\ \text{existe y es única} \end{array}$$

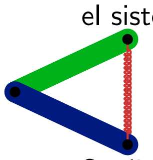
[a]Si $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{M}_P = \mathbf{0}$, $\mathbf{M}_Q = \mathbf{0}$ $\forall Q$

Equilibrio de un sistema

- Sea un sistema formado por n partículas y m sólidos.
- La condición necesaria y suficiente para que el sistema tenga una configuración de equilibrio, es que sea de equilibrio para cada partícula y sólido del sistema.

$$\mathbf{F}_i = 0 \,, \quad i = 1 \dots n \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{F}_j & = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_j^G & = \mathbf{0} \end{array} \right\} , \quad j = 1 \dots m$$

- Es condición necesaria pero no suficiente que se anule la resultante y momento resultante sobre el sistema:



$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{m} \mathbf{F}_j = \mathbf{0} \; ; \quad \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{m} (\mathbf{r}_j^G \wedge \mathbf{F}_j + \mathbf{M}_j^G) = \mathbf{0}$$

- Se divide el sistema en partes hasta obtener condiciones suficientes.

Sólido bajo fuerzas potenciales únicamente

- Configuración: $\mathbf{q} = [x_G, y_G, z_G, \psi, \theta, \varphi]$; Potencial: $V(\mathbf{q})$.
- Los puntos de equilibrio son los estacionarios del potencial:

$$dW = \left(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}^P + \mathbf{M}_P \cdot \boldsymbol{\omega}\right)\, dt = -dV(\mathbf{q}) = -\nabla V_{\mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q} = 0 \quad \forall d\mathbf{q}$$

$$\{\mathbf{R} = \mathbf{0}\,;\ \mathbf{M}_P = \mathbf{0}\} \ \Leftrightarrow \ \left\{\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0\,,\ i = 1 \ldots 6\right\}$$

- Sólido con ligaduras lisas y estacionarias:
  - Aparecen Fuerzas/Momentos de ligadura en $\mathbf{R}$ y $\mathbf{M}_P$, pero no en el trabajo.
  - Con las ecuaciones de ligadura, se dejan solo las q_i independientes en V.
  - El equilibrio sigue siendo $V_{q_i} = 0$, pero solo con las q_i independientes: los puntos estacionarios del potencial, sobre la ligadura.
- Si hay rozamiento o fuerzas no potenciales cuyo trabajo no es nulo, o ligaduras móviles (ascensor) $dW \neq -dV$, y no se puede aplicar lo anterior.

Principio de los trabajos virtuales

- En el equilibrio, $T \equiv 0$ y $d\mathbf{r} = \mathbf{0}$; la ecuación de la energía no sirve: $0 = 0$.
- Es útil si se introduce el concepto de desplazamiento virtual: imaginar que se da a cada partícula i/sólido j un desplazamiento $\delta\mathbf{r}_i$/giro $\delta\boldsymbol{\theta}_j$ arbitrarios, en los que se produce el trabajo virtual

$$\delta W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i + \sum_j \mathbf{F}_j \cdot \delta\mathbf{r}_j + \sum_j \mathbf{M}_i^G \cdot \delta\boldsymbol{\theta}_j$$

- Principio de los trabajos virtuales: En el equilibrio, las resultantes de fuerzas y momentos sobre cada punto y/o sólido son nulas, luego

$$\delta W = 0 \quad \forall\ \delta\mathbf{r}_i,\ \delta\mathbf{r}_j,\ \delta\boldsymbol{\theta}_j$$

- Escogiendo adecuadamente los desplazamientos, se obtienen las combinaciones lineales de las ecuaciones de equilibrio que haga falta.
- Si se dan desplazamientos compatibles con las ligaduras lisas (y estacionarias), se pueden omitir las fuerzas/momentos de ligadura en el cálculo del trabajo virtual porque no trabajan: se simplifica el cálculo.

Sistemas isostáticos

- Sistema libre con n grados de libertad (GDL): $\mathbf{q}(q_1, \cdots, q_n)$

$$n = 3 \times \text{N}^\text{o} \text{ puntos} + 6 \times \ \text{N}^\text{o} \text{ sólidos}$$
$$n \text{ ecuaciones } \leftrightarrow \ n \text{ incógnitas } q_1 \dots q_n$$

- Sistema con h ligaduras independientes: cada ligadura quita un grado de libertad distinto. Se dejan solo las coordenadas independientes (=GDL).

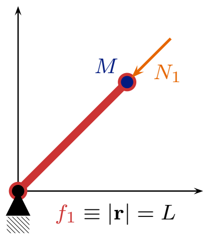
$$h \ \text{lig.} \ \rightarrow \begin{cases} -h & \text{GDL} & q_1 \dots q_{n-h} \\ +h & \text{Fza./Mt}^\text{o} \text{ de ligadura} & X_1 \dots X_h \end{cases}$$
$$n \ \text{ Ecuaciones } \leftrightarrow n \ \text{ Incognitas}$$

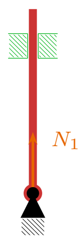
  Las ecuaciones son lineales en las fuerzas/momentos de ligadura.

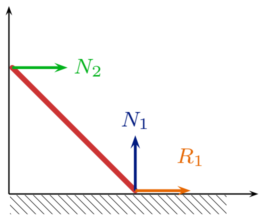
- Sistema isostático/estáticamente determinado: las ecuaciones de la estática permiten determinar todas las fuerzas/momentos de ligadura en cada posición de equilibrio.

Ligaduras independientes/redundantes

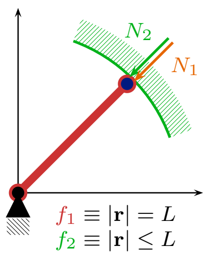
Ligadura redundante: quita un grado de libertad ya impedido por otra ligadura. ¿Cómo se reparten la tarea entre las dos fuerzas de ligadura?



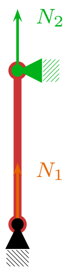




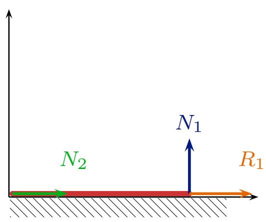
Apoyo liso en N_2, rugoso en R_1. Independientes.



f_2 redundante si se empuja hacia fuera



f_2 redundante en la dirección vertical



N_2 y R_1 redundantes en esta posición

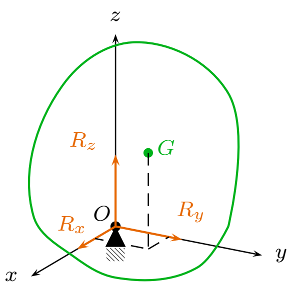
Sistemas hiperestáticos

- Sistema determinado por n parámetros cuando está libre.
- Se añaden:

$$
\begin{array}{lll}
+\,h \ \text{lig. independientes} & \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} -h & \text{GDL} \\ +h & \text{Fza./Mt}^{o} \text{ de ligadura} \end{array} \right. & \begin{array}{l} q_1 \dots q_{n-h} \\ X_1 \dots X_h \end{array} \\
+\,g \ \text{lig. redundantes} & \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} -0 & \text{GDL (ya están quitados)} \\ +g & \text{Fza./Mt}^{o} \text{ de ligadura} \end{array} \right. & \begin{array}{l} q_1 \dots q_{n-h} \\ Y_1 \dots Y_g \end{array} \\
n \ \text{Ecuaciones} \longleftrightarrow n+g \ \text{Incognitas} & \left\{ \begin{array}{c} q_1 \dots q_{n-h} \\ Y_1 \dots Y_g,\ X_1 \dots X_h \end{array} \right. &
\end{array}
$$

- Sistema hiperestático/estáticamente indeterminado: las ecuaciones de la estática no permiten determinar todas las fuerzas/momentos de ligadura.
- Dos o más fuerzas obligan a que se cumpla la misma ligadura. Con sólidos rígidos, no se puede saber cuánto hace cada una: hay que recurrir a la elasticidad y resistencia de materiales.

Ejemplo: Equilibrio del sólido con punto fijo



Se fija un punto del sólido mediante una rótula ideal:

- Quita tres desplazamientos: R_x, R_x, R_x
- Permite todos los giros: $\mathbf{M}_O^{lig} = \mathbf{0}$

- Ecuación de momentos: $\rightarrow$ condición de equilibrio.

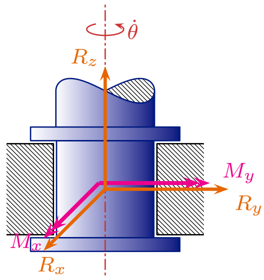
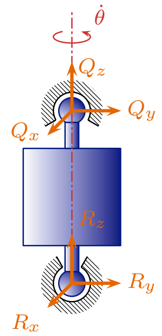
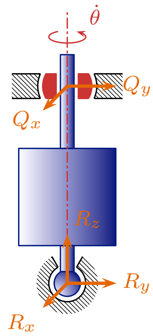
$$\mathbf{M}_O^{DA} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \psi^e, \theta^e, \phi^e$$

- Ecuación de fuerzas: $\rightarrow$ determinación de la fuerza de ligadura para cada posición de equilibrio.

$$\mathbf{R}^{DA} + \mathbf{R}^{L} = \mathbf{0}$$

Ejemplo: Equilibrio del sólido con eje fijo

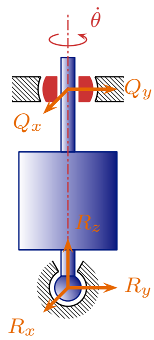
- 1 GDL: giro θ alrededor del eje fijo
- Se busca una fijación isostática:

Cojinete con restricción axial	Dos rótulas	Rótula + cojinete oscilante
		
6 Ecs. / 6 Incs. : R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, θ	6 Ecs. / 7 Incs. : R_x, R_y, R_z, Q_x, Q_y, Q_z, θ	6 Ecs. / 6 Incs. : R_x, R_y, R_z, Q_x, Q_y, θ
Isostático	Hiperestático	Isostático

Ejemplo: Equilibrio del sólido con eje fijo

Fijación isostática, p.e., rótula en O y cojinete oscilante en O_1 (otras posibles)

- 1 GDL: giro $\dot{\theta}\,\mathbf{k}$ $\quad (\mathbf{k} = \frac{\mathbf{OO_1}}{|\mathbf{OO_1}|})$
- Rótula en O: $\quad \mathbf{R} = (R_x, R_y, R_z)$
- Cojinete oscilante en O_1: $\quad \mathbf{R}_1 = (Q_x, Q_y, 0)$



$$\mathbf{F}(\theta, 0, t) + \mathbf{R} + \mathbf{R}_1 = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{M}_O(\theta, 0, t) + \mathbf{OO_1} \wedge \mathbf{R}_1 = \mathbf{0}$$

Procedimiento de cálculo:

$$1)\quad \mathbf{k}\cdot\left[\mathbf{M}_O(\theta,0,t) + \overset{\perp}{\cancel{\mathbf{OO_1}\wedge\mathbf{R}_1}}\right] = 0 \;\rightarrow\; \boxed{M_z(\theta,0,t) = 0} \;\rightarrow\; \theta^e$$

$$2)\quad \mathbf{k}\wedge\mathbf{M}_O + (\overset{\perp}{\cancel{\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_1}})\,\mathbf{OO_1} - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{OO_1})\,\mathbf{R}_1 = \mathbf{0} \;\rightarrow\; \boxed{\mathbf{R}_1 = \frac{\mathbf{k}\wedge\mathbf{M}_O}{|\mathbf{OO_1}|}}$$

$$3)\quad \mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{R}_1 = \mathbf{0} \;\rightarrow\; \boxed{\mathbf{R} = -\frac{\mathbf{k}\wedge\mathbf{M}_O}{|\mathbf{OO_1}|} - \mathbf{F}}$$