

Sistemas Automáticos

Modelado de sistemas

D. Tardioli, A. R. Mosteo
Centro Universitario de la Defensa
Academia General Militar



Índice

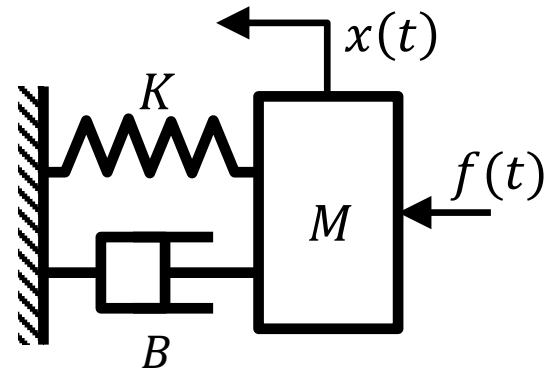
- Obtención de modelos
- **Modelado** de sistemas
 - Sistemas mecánicos **traslacionales**
 - Sistemas mecánicos **rotacionales**
 - Sistemas **eléctricos**
 - **Motor** de corriente continua
- Función de transferencia
- Representación mediante **diagramas de bloques**

Objetivos del tema

- Obtención de las **ecuaciones diferenciales** que modelan el sistema
- Definición de **función de transferencia** y de sus propiedades fundamentales
- Obtención la función de transferencia
- Interpretación de **diagramas de bloques**
- Simplificación de diagramas de bloques para obtener la **función de transferencia** entre **una** entrada y **una** salida

Proceso de control de un sistema

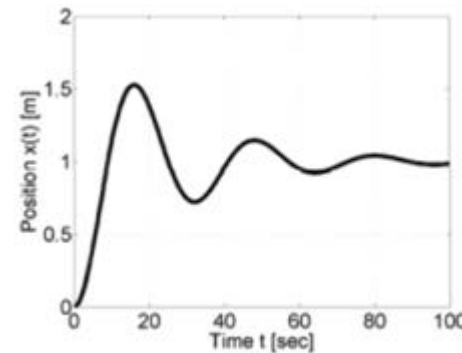
- **Modelado**



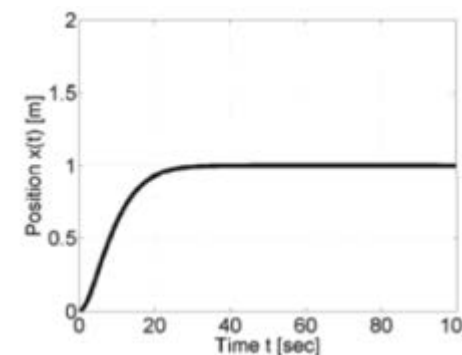
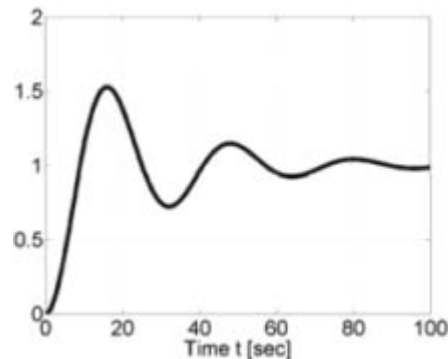
$$f(t) = M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t)$$

- **Análisis**

$$f(t) = M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t) \rightarrow$$

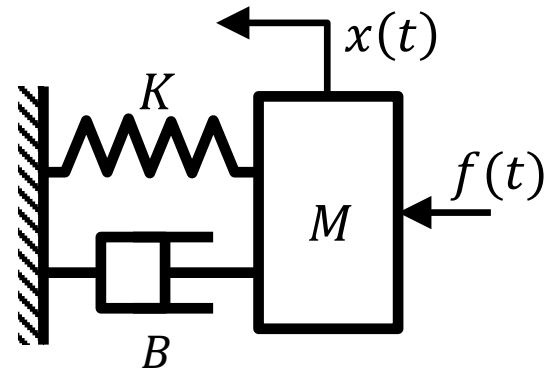


- **Control**



Proceso de control de un sistema

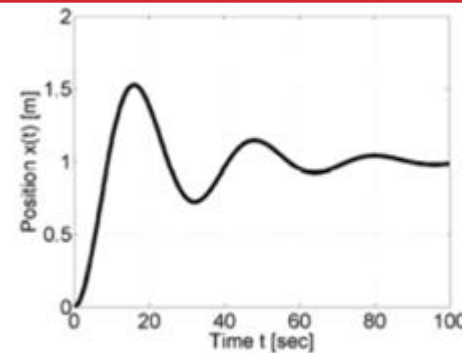
- **Modelado**



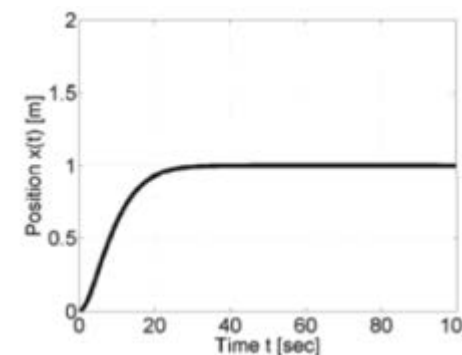
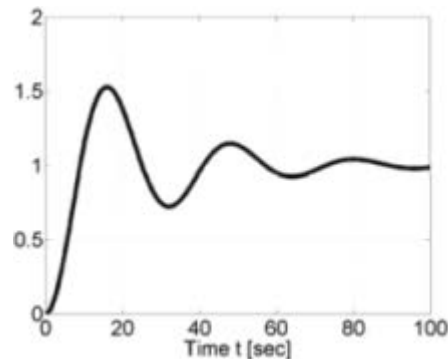
$$f(t) = M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t)$$

- **Análisis**

$$f(t) = M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t) \rightarrow$$

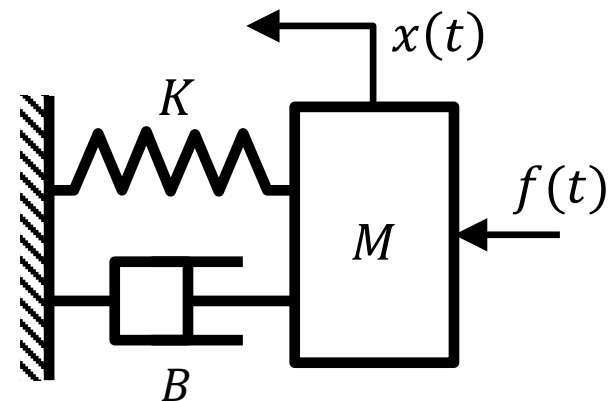


- **Control**



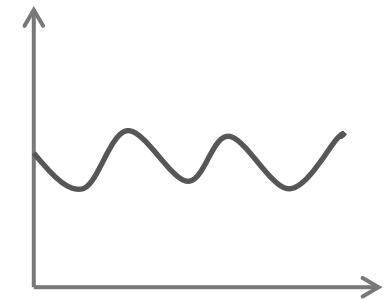
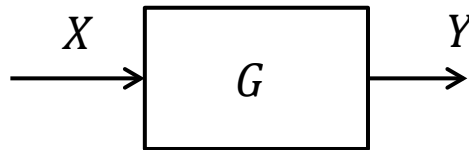
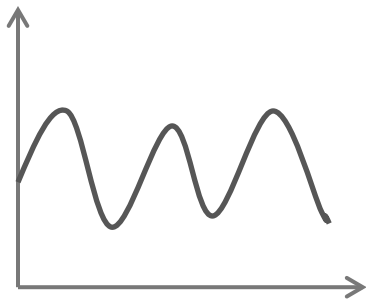
Terminología

- **Fenómeno físico**
 - Manifestación de la **interacción entre partes** de un sistema
- **Modelo**
 - Representación **matemática** de un sistema físico
- **Modelado**
 - Obtención de un **modelo** de un sistema físico



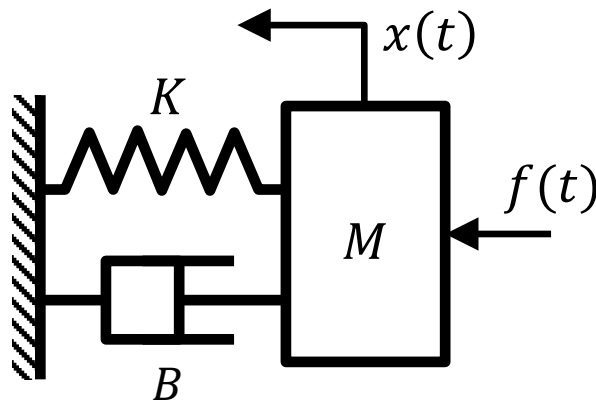
Obtención de modelos

- **Empíricamente** (identificación)
 - Estudios **experimentales**
 - **Observación** de relaciones entrada/salida...
- Características
 - Puede permitir atacar **sistemas complejos** o inaccesibles 😊
 - Podemos **pasar por alto** alguna característica del sistema 😞



Obtención de modelos

- **Axiomáticamente** (modelado)
 - Obtención de las **ecuaciones** diferenciales que describen el sistema
- Características
 - **Precisión** (si el modelo es correcto) 😊
 - Incertidumbre en tolerancias, linealidades... ☹️



$$f(t) = M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t)$$

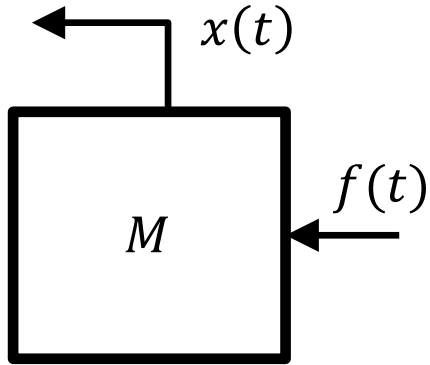
Tipos de sistemas que vamos a modelar

- Sistemas **mecánicos traslacionales**
 - Masa, muelle, amortiguador
- Sistemas **mecánicos rotacionales**
 - Equivalentes rotacionales, engranajes, cremalleras
- Sistemas **eléctricos**
 - Resistencia, bobina, condensador
- **Motor** de corriente continua

Sistemas mecánicos

- Leyes de Newton
 - Equilibrio de fuerzas
 - Conservación de momentos
- Hipótesis en el modelado
 - Muelles de **masa nula** y sin límite de estiramiento
 - Amortiguador con **rozamiento lineal viscoso** y masa nula

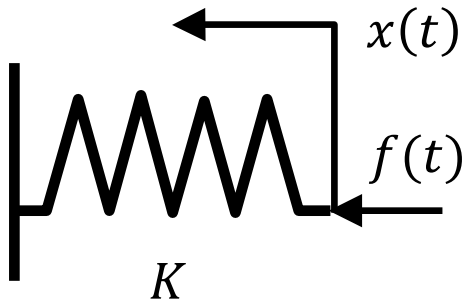
Sistemas mecánicos traslacionales



Masa (*Mass*)

$$f(t) = M\ddot{x}(t)$$

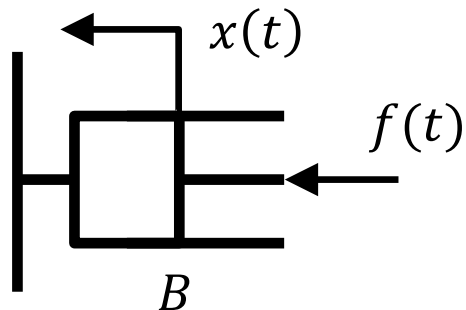
$$F(s) = Ms^2X(s)$$



Muelle (*Spring*)

$$f(t) = Kx(t)$$

$$F(s) = KX(s)$$

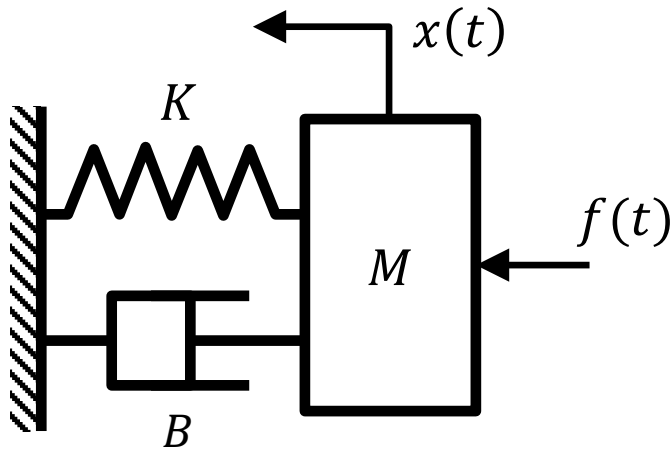


Amortiguador (*Damper*)

$$f(t) = B\dot{x}(t)$$

$$F(s) = BsX(s)$$

Ejemplo



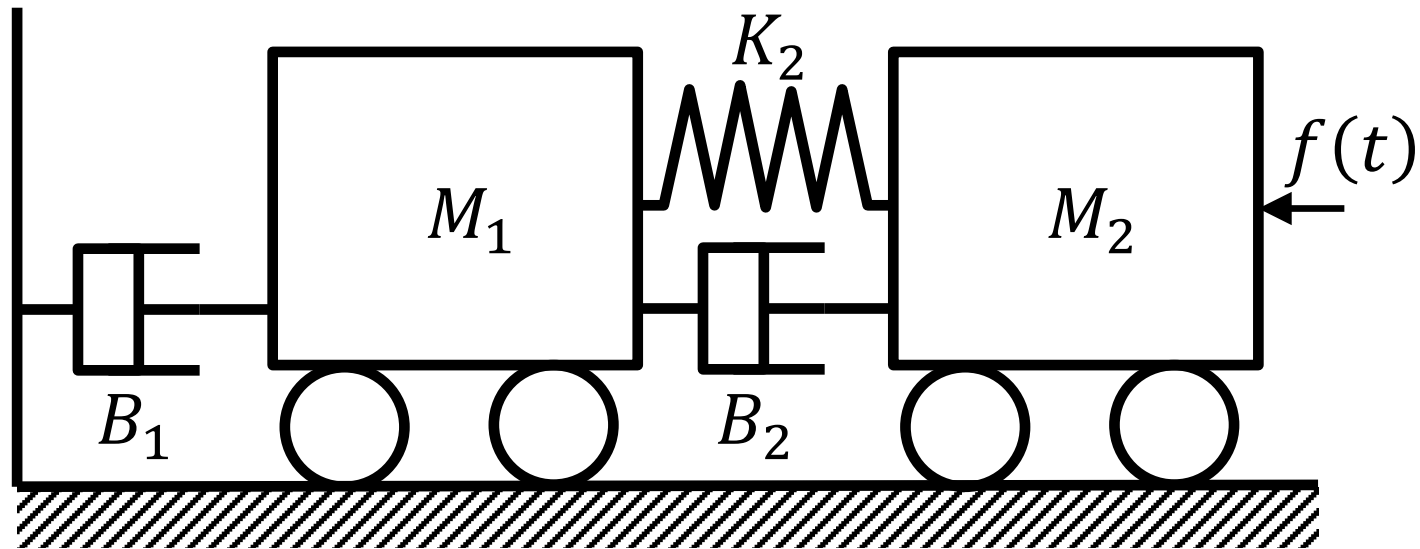
Balance de fuerzas

$$f(t) = M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t)$$

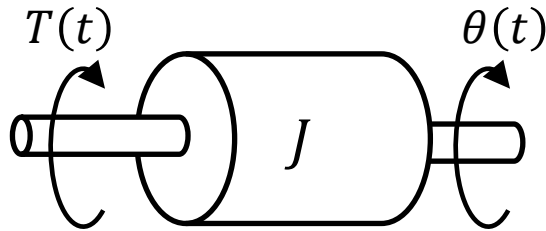
$$F(s) = (Ms^2 + Bs + K)X(s)$$

Ecuación diferencial de **segundo orden, lineal** y con **coeficientes constantes (tiempo invariantes)**

Modelado de un sistema de traslación completo



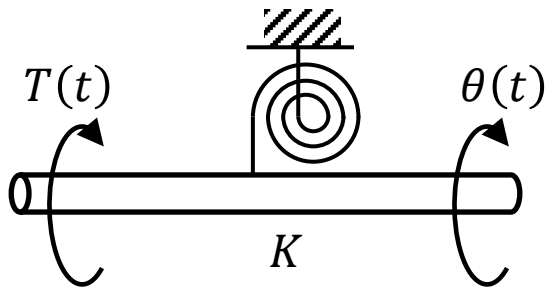
Sistemas mecánicos rotacionales



Masa inercial (*Inertia*)

$$T(t) = J\ddot{\theta}(t)$$

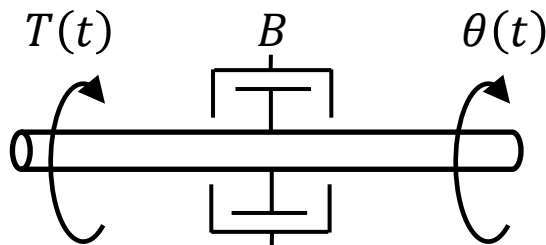
$$T(s) = Js^2\Theta(s)$$



Muelle (*Spring*)

$$T(t) = K\theta(t)$$

$$T(s) = K\Theta(s)$$

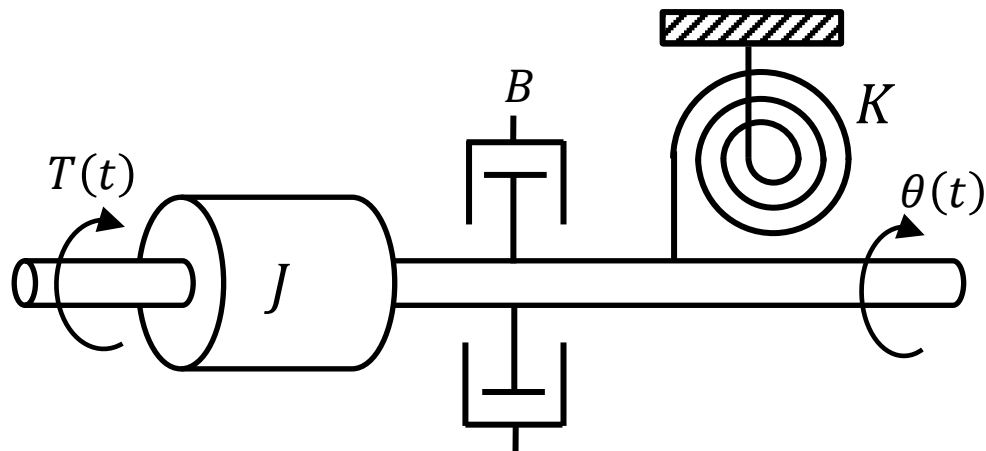


Rozamiento viscoso (*Friction*)

$$T(t) = B\dot{\theta}(t)$$

$$T(s) = Bs\Theta(s)$$

Ejemplo



- Rotacional

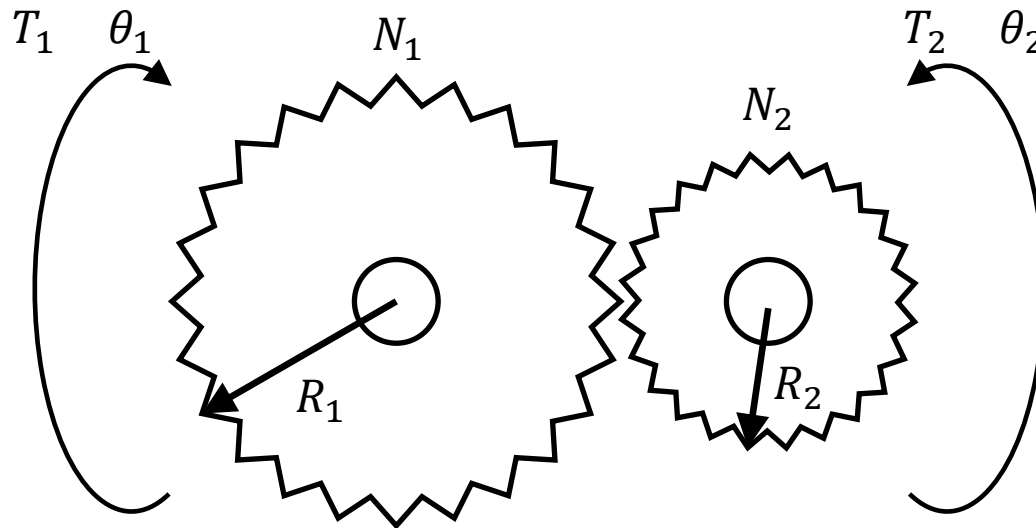
$$T(t) = J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) + K\theta(t)$$

- Traslacional

$$f(t) = M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t)$$

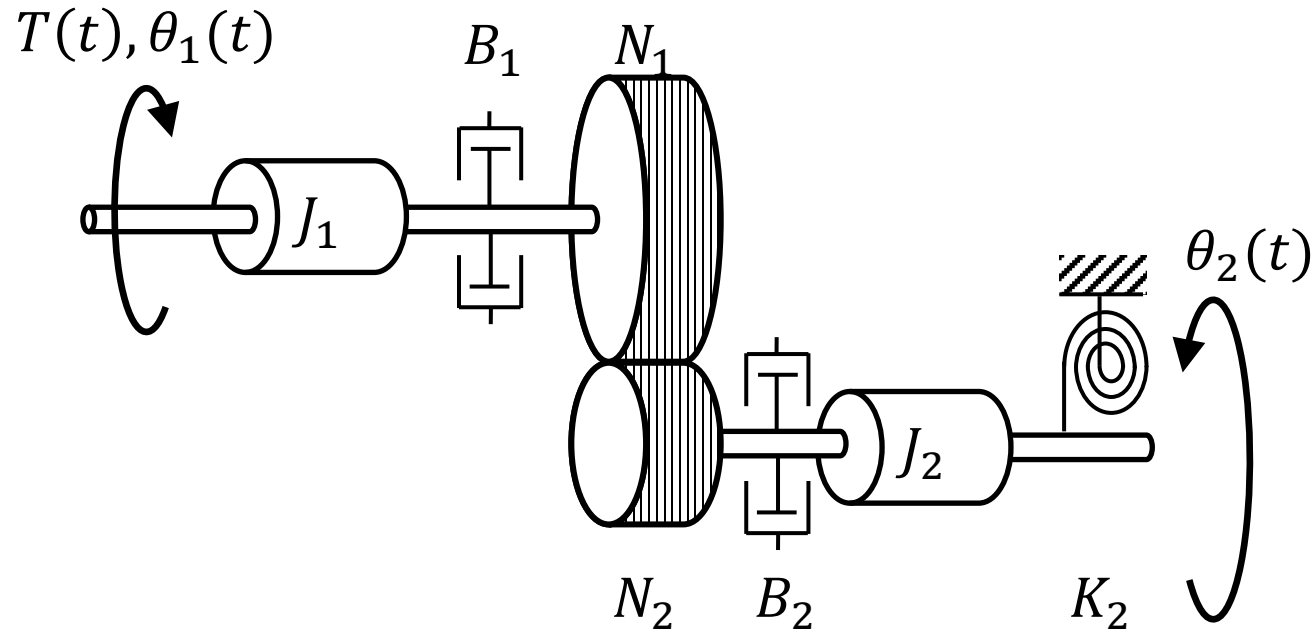
Engranajes

- Transmiten movimiento angular, conservando la potencia pero **transformando el par**

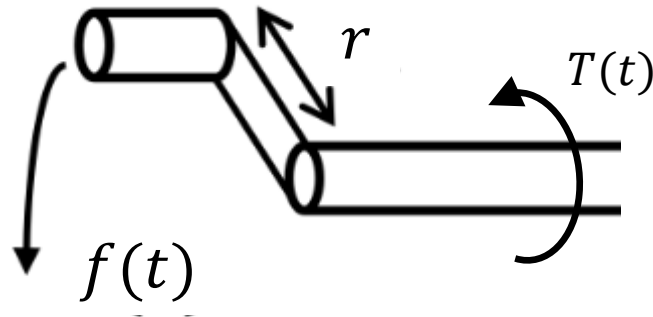


- $\theta_2(t) = \frac{N_1}{N_2} \theta_1(t)$
- $T_2(t) = \frac{N_2}{N_1} T_1(t)$

Modelado de un sistema rotacional completo



Relaciones traslacional-rotacional



- Relación **Par-Fuerza**

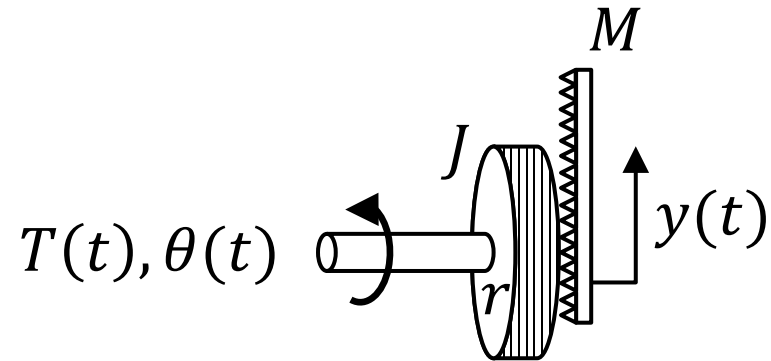
$$T(t) = f(t) \cdot r$$

- **Momento de inercia** de n masas **puntuales** rotando en torno a un **mismo eje**

$$J = \sum_{i=1}^n M_i r_i^2$$

Relaciones traslacional-rotacional

- Cremallera

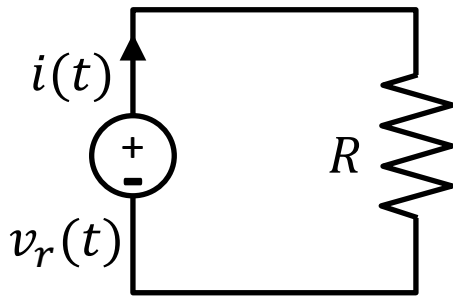


$$T(t) = J\ddot{\theta}(t) + r \cdot M\ddot{y}(t)$$

Sistemas eléctricos

- Leyes de **Kirchhoff**
 - Leyes de mallas y nudos para voltajes e intensidades
- Hipótesis en el modelado
 - No hay **disipación** en los conductores

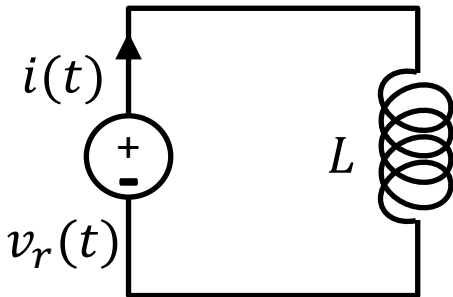
Sistemas eléctricos



Resistencia (*Resistance*)

$$v_r(t) = Ri(t) \Rightarrow V_r(s) = RI(s)$$

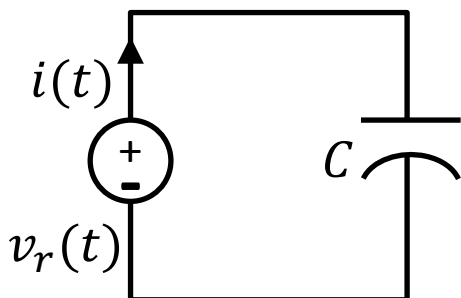
$$i(t) = \frac{v_r(t)}{R} \Rightarrow I(s) = \frac{V_r(s)}{R}$$



Bobina (*Coil, Inductor*)

$$v_r(t) = Li'(t) \Rightarrow V_r(s) = LsI(s)$$

$$i(t) = \frac{\int v_r(t) dt}{L} \Rightarrow I(s) = \frac{V_r(s)}{Ls}$$



Condensador (*Capacitor*)

$$v_r(t) = \frac{\int i(t) dt}{C} \Rightarrow V_r(s) = \frac{I(s)}{Cs}$$

$$i(t) = Cv_r'(t) \Rightarrow I(s) = CsV_r(s)$$

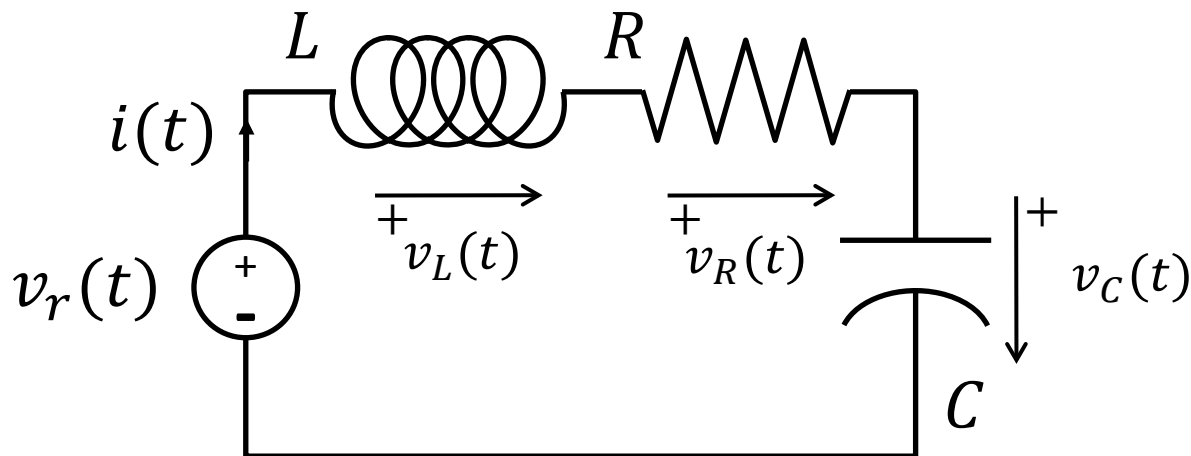
Ley de Kirchhoff para mallas

- En un lazo cerrado la suma de las caídas de tensión es igual a la tensión suministrada

$$v_r(t) - v_R(t) - v_L(t) - v_C(t) = 0$$

$$v_r(t) - Ri(t) - Li'(t) - \frac{\int i(t)dt}{C} = 0$$

$$V_r(s) = \frac{LCs^2 + RCs + 1}{Cs} I(s)$$



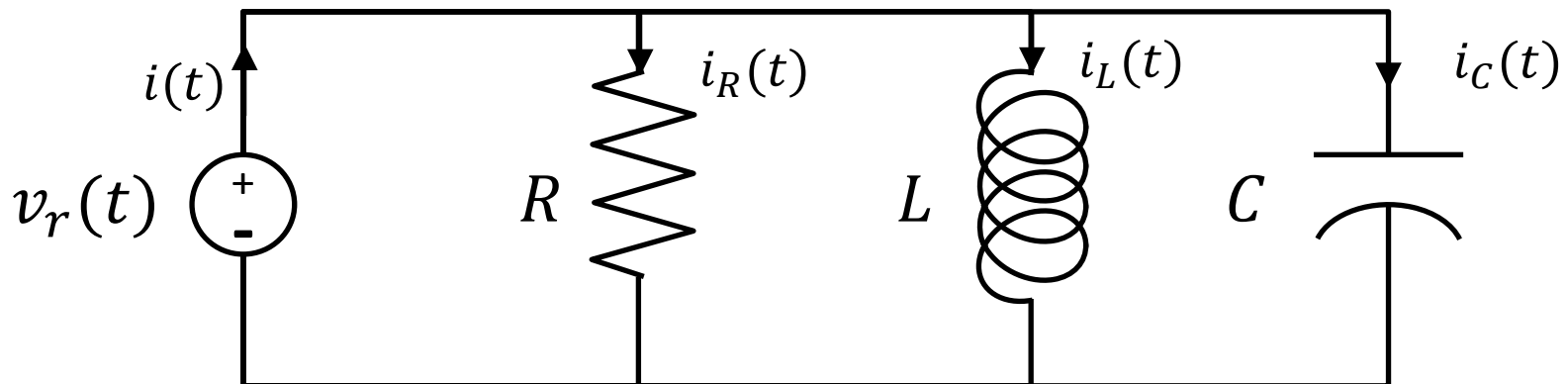
Ley de Kirchhoff para nudos

- La suma de las corrientes entrantes en un nudo es igual a la suma de corrientes salientes

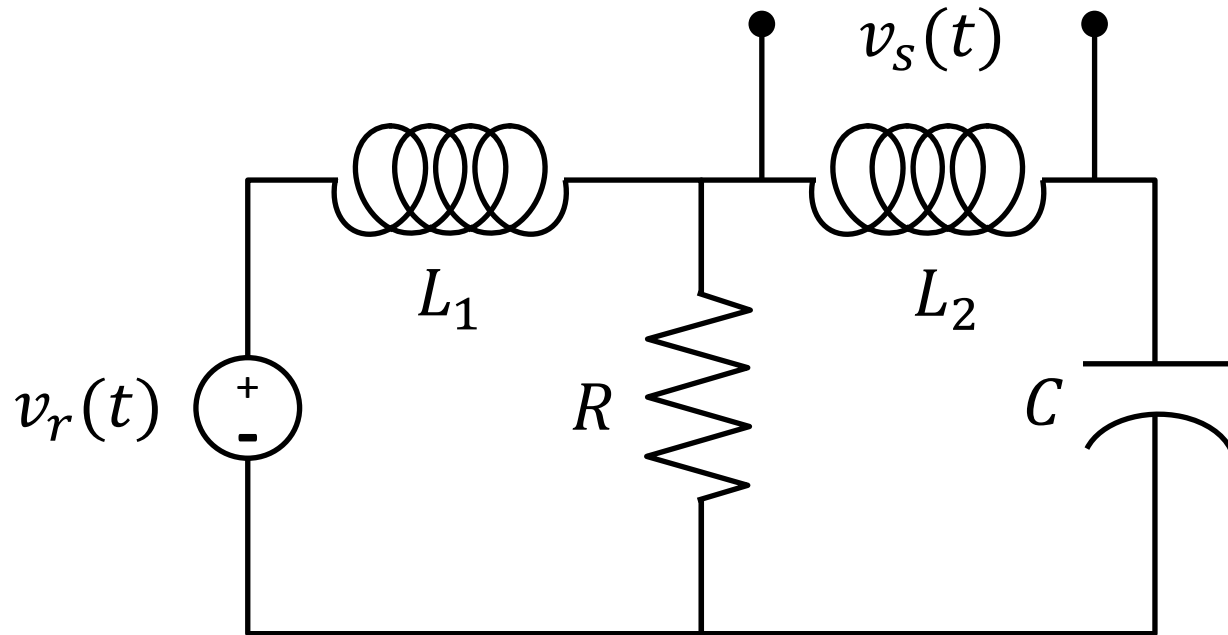
$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t)$$

$$i(t) = \frac{v_r(t)}{R} + \frac{\int v_r(t) dt}{L} + C v_r'(t)$$

$$I(s) = \frac{RLCs^2 + Ls + R}{RLs} V_r(s)$$

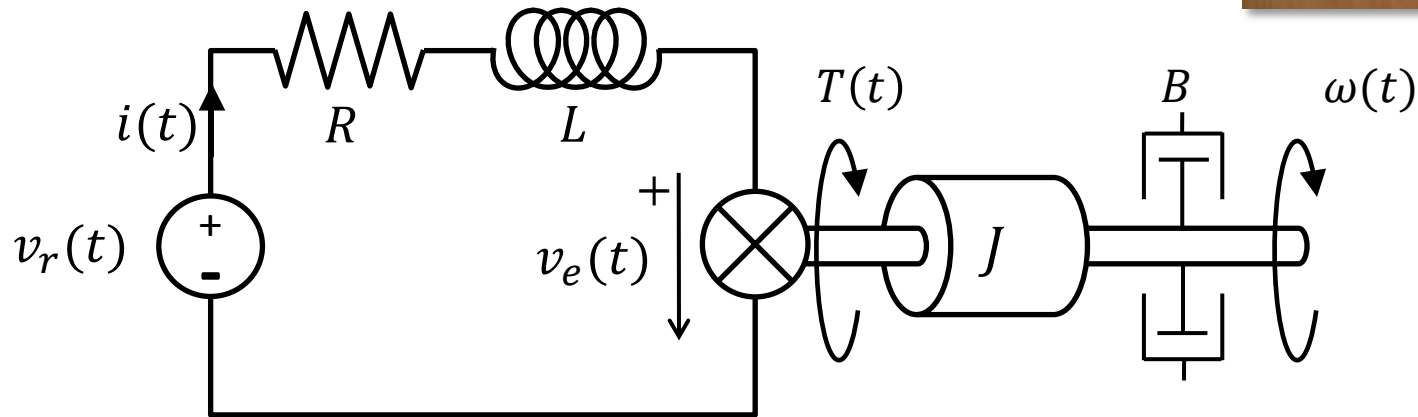


Modelado de un sistema eléctrico completo



El motor eléctrico

- Modelado de un motor eléctrico



- Relaciones entre parte **mecánica** y **eléctrica**
 - $T(t) = K_i i(t)$
 - $v_e(t) = K_e \omega(t)$

El motor eléctrico

- Modelado del circuito eléctrico

$$v_r(t) = Ri(t) + Li'(t) + v_e(t) \Rightarrow$$

$$V_r(s) = (Ls + R)I(s) + V_e(s)$$

- Modelado del sistema rotacional

$$T(t) = J\omega'(t) + B\omega(t) \Rightarrow T(s) = (Js + B)\Omega(s)$$

- Relación entre la intensidad y el par

$$T(t) = K_i i(t) \Rightarrow T(s) = K_i I(s)$$

- Relación entre la fuerza contra-electromotriz y la velocidad de giro

$$v_e(t) = K_e \omega(t) \Rightarrow V_e(s) = K_e \Omega(s)$$

Relación entre la entrada y la salida

- Relación fuente de voltaje y velocidad de giro
 - Sistema lineal de 4 ecuaciones
 - Despejando

$$\Omega(s) = \frac{K_i}{LJs^2 + (RJ + LB)s + RB + K_e K_i} V_r(s)$$

- Similitud con los sistemas vistos anteriormente
 - Función de s que relaciona dos variables
 - Compuesta por una fracción de dos polinomios

Función de Transferencia

La **función de transferencia** (*transfer function*, *FdT*) se define como el **cociente** entre la \mathcal{L} de la salida y la \mathcal{L} de la entrada del sistema

$$FdT = \frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[r(t)]} = \frac{Y(s)}{R(s)} = G(s)$$

Siendo $r(t)$ la señal de entrada e $y(t)$ la señal de salida

Función de Transferencia

- Ejemplo anterior

$$\Omega(s) = \frac{K_i}{LJs^2 + (RJ + LB)s + RB + K_e K_i} V_r(s)$$

- **Entrada:**

$$v_r(t) \Rightarrow \mathcal{L}[v_r(t)] = V_r(s)$$

- **Salida:**

$$\omega(t) \Rightarrow \mathcal{L}[\omega(t)] = \Omega(s)$$

- **Función de transferencia:**

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{V_r(s)} = \frac{K_i}{LJs^2 + (RJ + LB)s + RB + K_e K_i}$$

Definición de una FdT en MatLab

- Definición mediante coeficientes

```
G = tf([1 2],[1 4 4])  
Transfer function:  
      s + 2  
-----  
s^2 + 4 s + 4
```

$$G(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 4s + 4}$$

- Definición mediante variable auxiliar s

```
s = tf('s');  
G = (s+1)/(s^2+3*s+4)  
Transfer function:  
      s + 1  
-----  
s^2 + 3 s + 4
```

$$G(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 3s + 4}$$

Polos y ceros

- Las **raíces** del numerador de la FdT se llaman **ceros**
- Las **raíces** del denominador se llaman **polos**

Ejemplo:

$$G(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + 2s + 1} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- Raíces de $N(s) = s^2 + 3s + 2 \rightarrow$ **ceros**
 z_1 en $s = -2$, z_2 en $s = -1$
- Raíces de $D(s) = s^2 + 2s + 1 \rightarrow$ **polos**
 p_1 en $s = -1$, p_2 en $s = -1$

Polos y ceros

- Los polos y ceros pueden ser
 - **Sencillos**
 - **Múltiples** (multiplicidad > 1)
 - **Complejos** y conjugados
- *Ejemplo:*

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$$

- Polos en:

$$s = -1 \pm 2i$$

```
G(s) := 1/(s^2 + 2*s + 5);  
solve(s^2 + 2*s + 5 = 0);
```



```
s = tf('s');  
G = 1/(s^2 + 2*s + 5);  
pole(G)  
zero(G)  
roots([1 2 5])
```


FdT propias e impropias

- Se define **orden** de la FdT el **grado** de $D(s)$

Ejemplo:

$$G(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + 2s + 1} = \frac{N(s)}{D(s)}$$



- Si el **grado** de $D(s)$ es
 - **Mayor** que el de $N(s)$
la FdT es **estrictamente propia**
 - **Igual** que el de $N(s)$ la FdT es **propia**
 - **Menor** que el de $N(s)$ la FdT es **impropia**

Propiedades de la FdT

1. Es un **método operacional** para relacionar la entrada con la salida mediante un **modelo matemático**

$$G(s)$$

2. Es una **propiedad del sistema**, independiente de la magnitud y naturaleza de la entrada
3. Incluye las unidades necesarias para relacionar la entrada con la salida, pero **no proporciona información física** del sistema

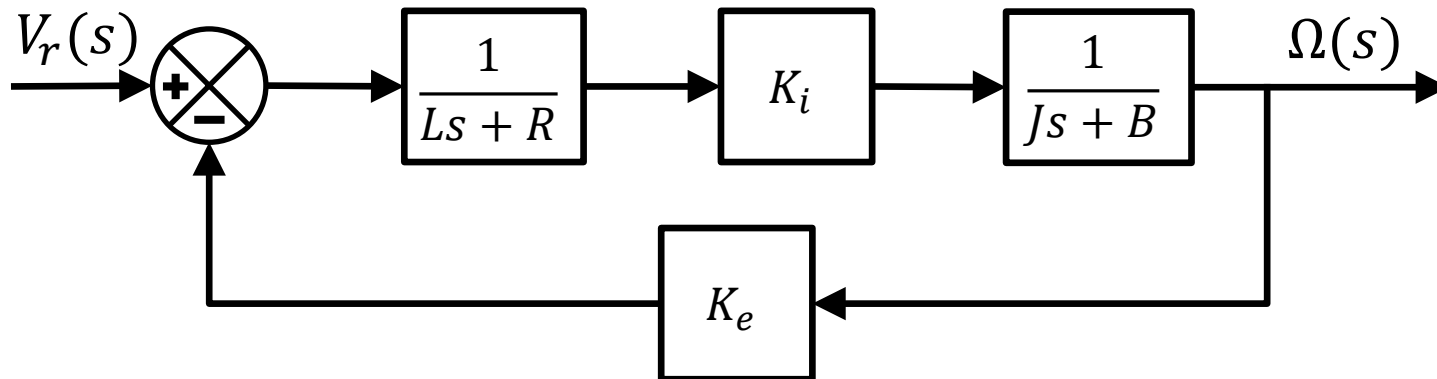
$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \stackrel{?}{=} \frac{1}{Js^2 + Bs + K}$$

Propiedades de la FdT

4. Si se conoce la FdT, se puede **estudiar la salida** del sistema ante **distintas señales de entrada**
5. Si se desconoce la FdT, puede **establecerse experimentalmente** introduciendo entradas conocidas y estudiando la salida del sistema
6. Se puede definir **solo** para sistemas **lineales tiempo invariantes**

Sistemas como diagrama de bloques

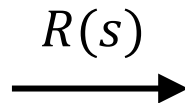
- Podemos representar el sistema mediante un **diagrama de bloques**
- Varias salidas con múltiples ecuaciones
- Descripción del sistema como **interconexión de bloques sencillos**



Elementos en el diseño de bloques

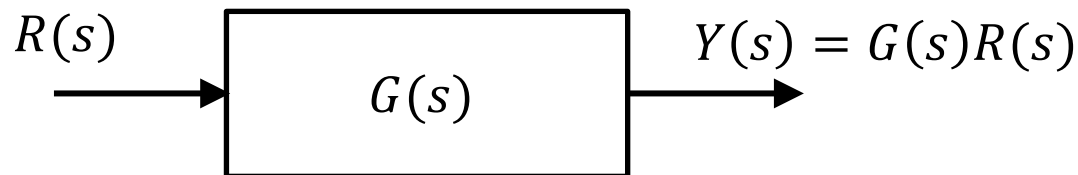
- **Señal**

- Magnitud que se propaga en las interconexiones
 - Sin unidades físicas
 - Con posible correspondencia física



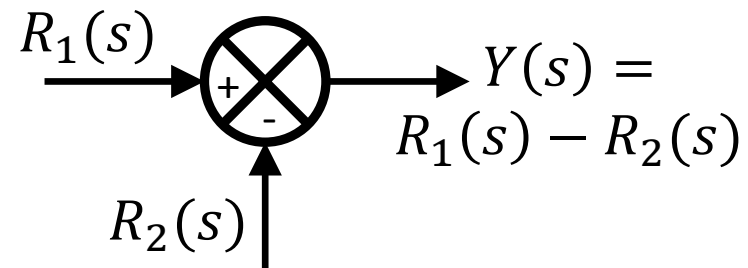
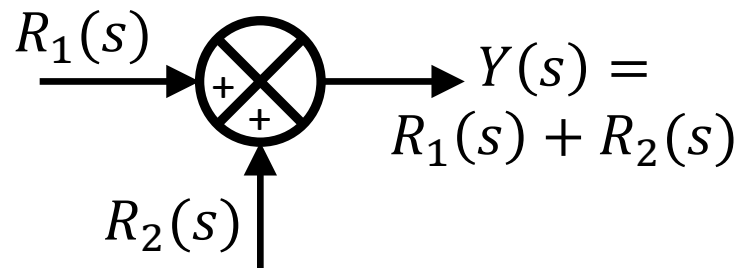
- **Bloque**

- Cada bloque representa una **función de transferencia**

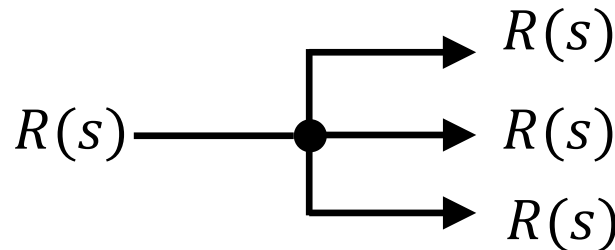


Elementos en el diseño de bloques

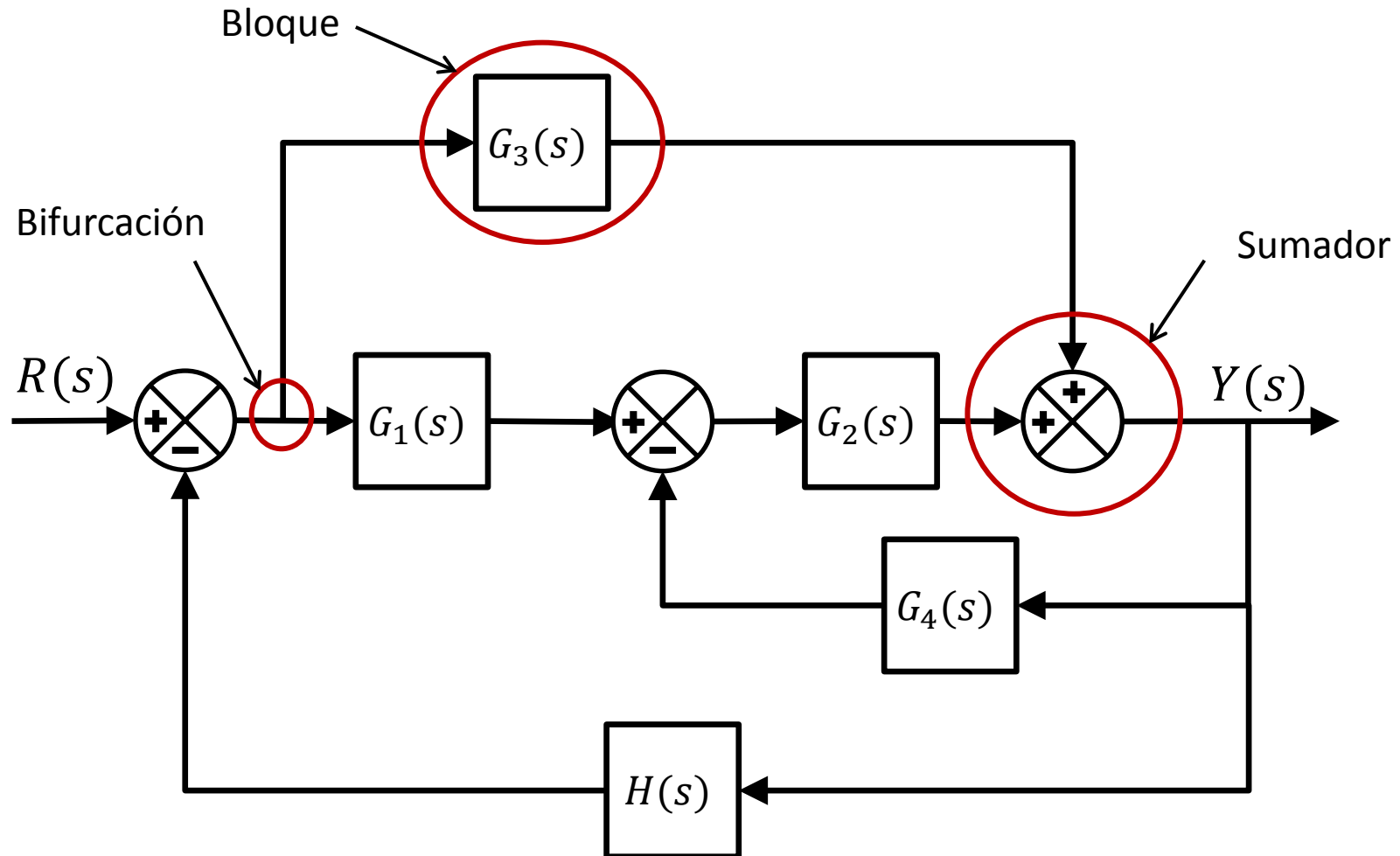
- Sumador/restador de señales



- Bifurcación de señal



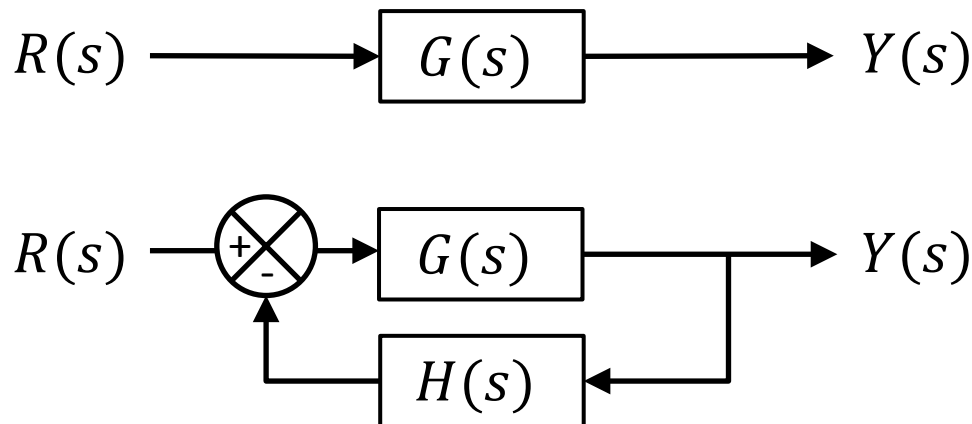
Ejemplo de diagrama de bloques



$$¿ G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} ?$$

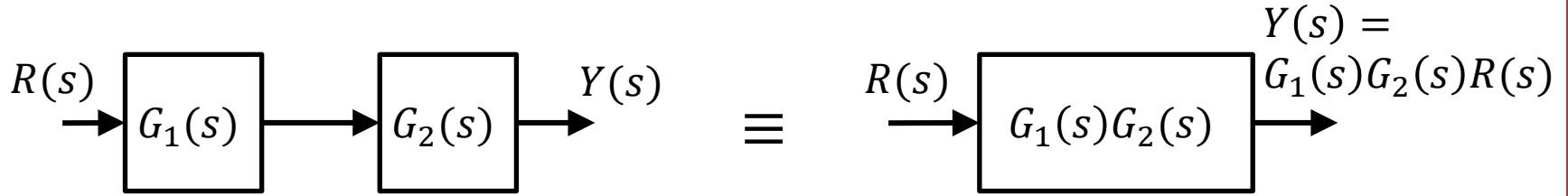
Simplificación de diagramas de bloques

- Un mismo sistema se puede representar con **diferentes diagramas de bloques**
- Permite
 - Obtener la FdT de una salida del sistema
 - Realizar una **simplificación** usando **equivalencias**
 - Llegar a una configuración de la forma

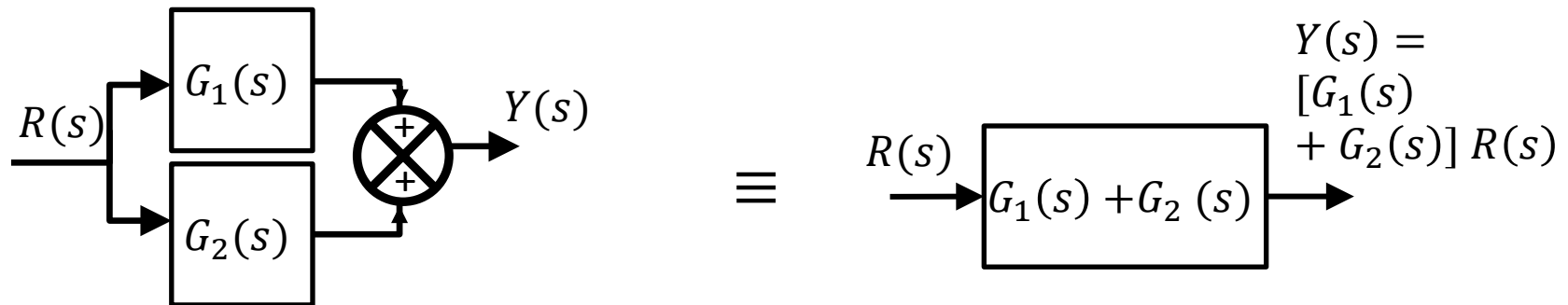


Simplificación de diagramas de bloques

- Equivalencia bloques en **serie**

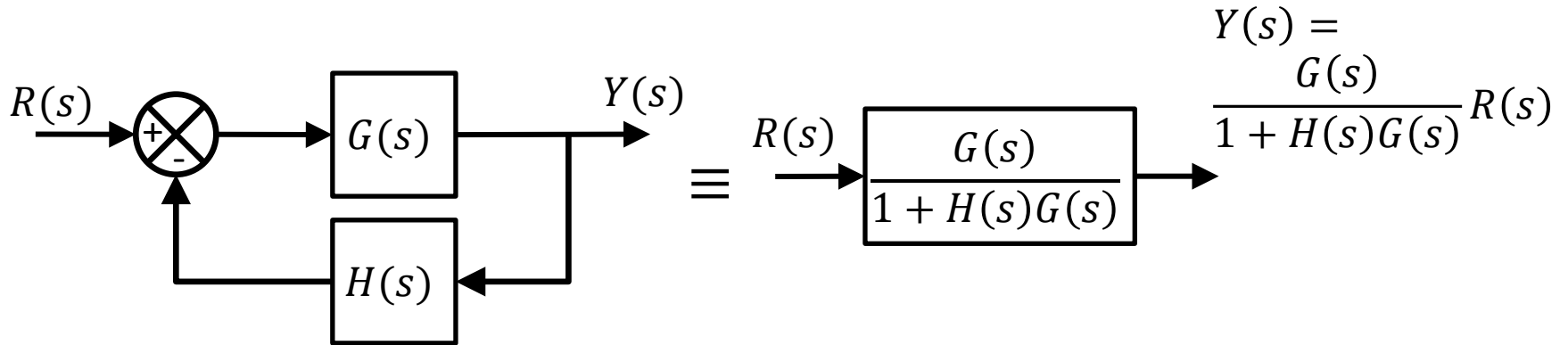


- Equivalencia bloques en **paralelo**

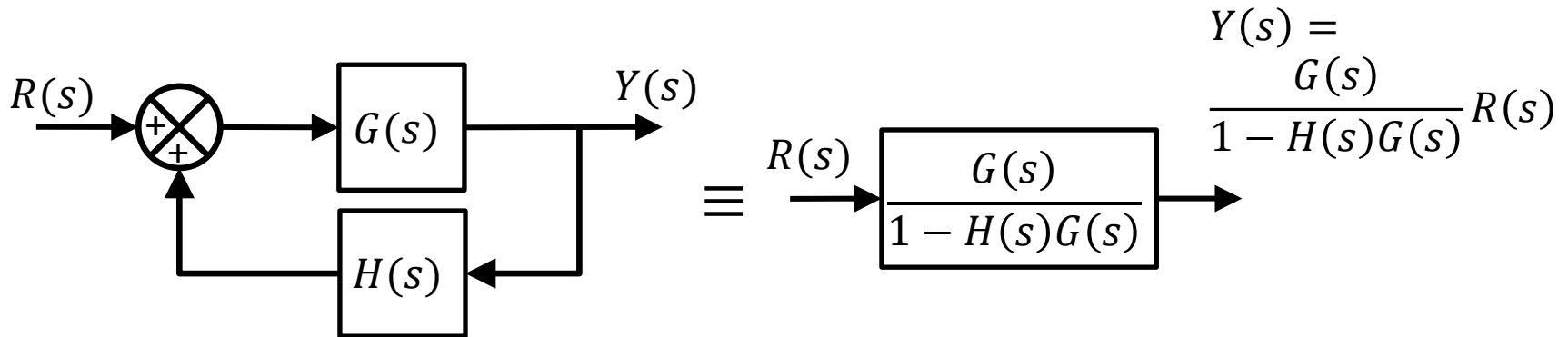


Simplificación de diagramas de bloques

- Bloques en **realimentación negativa**

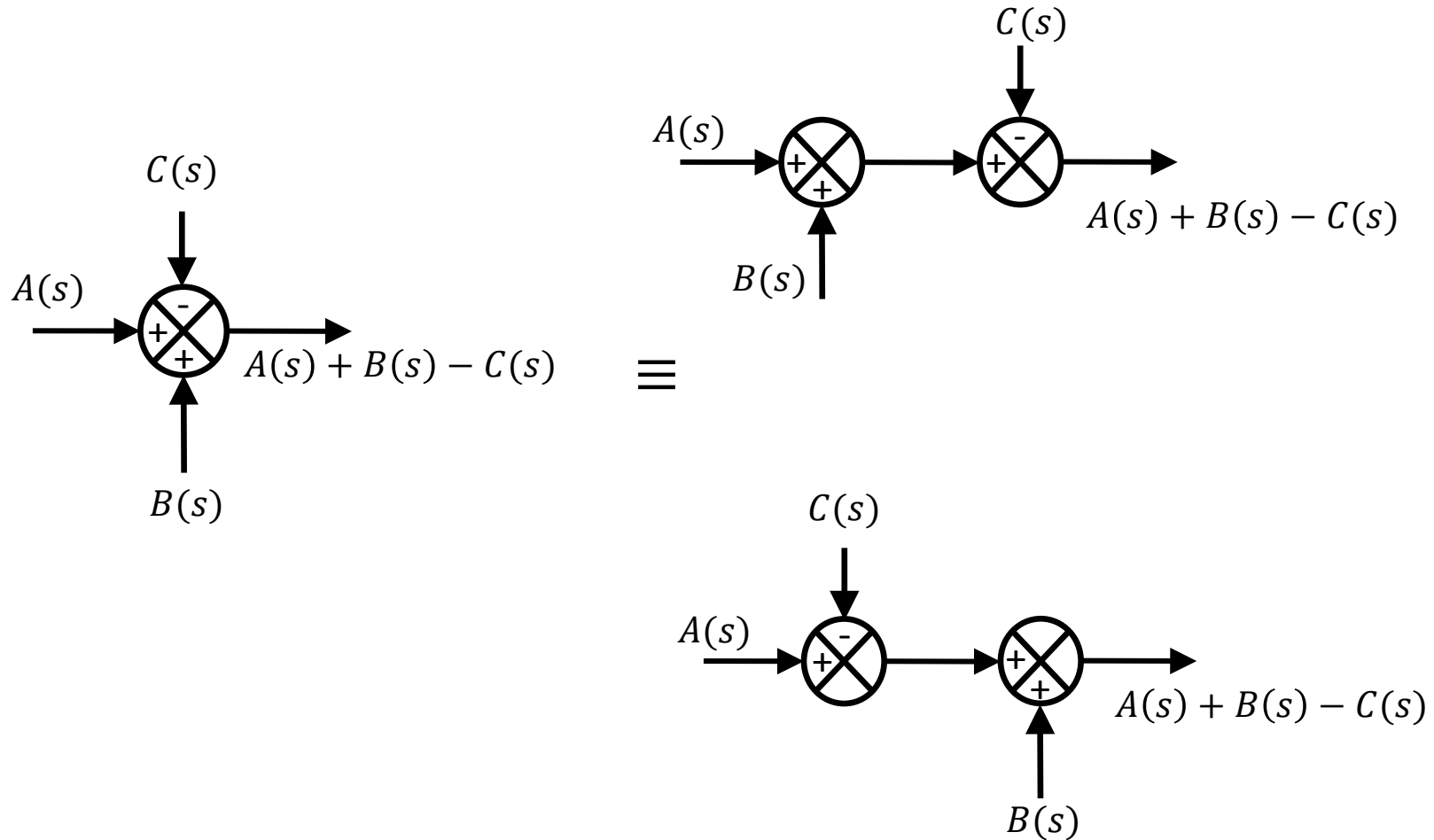


- Bloques en **realimentación positiva**



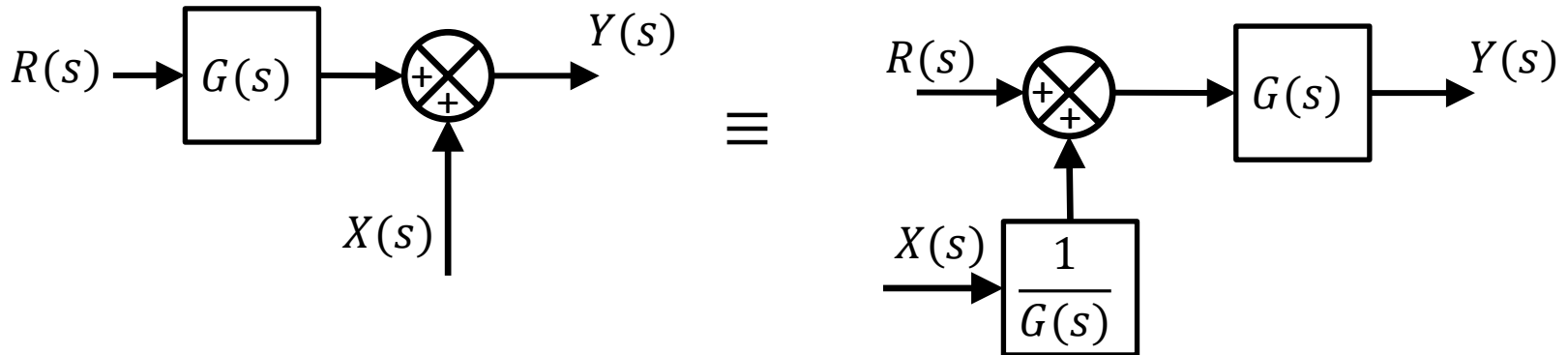
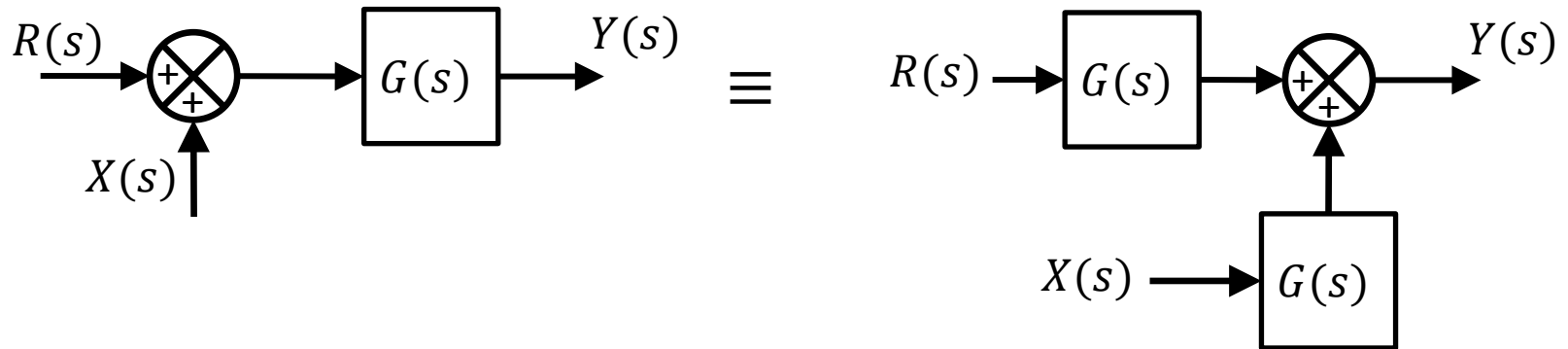
Simplificación de diagramas de bloques

- **Intercambio** de sumadores



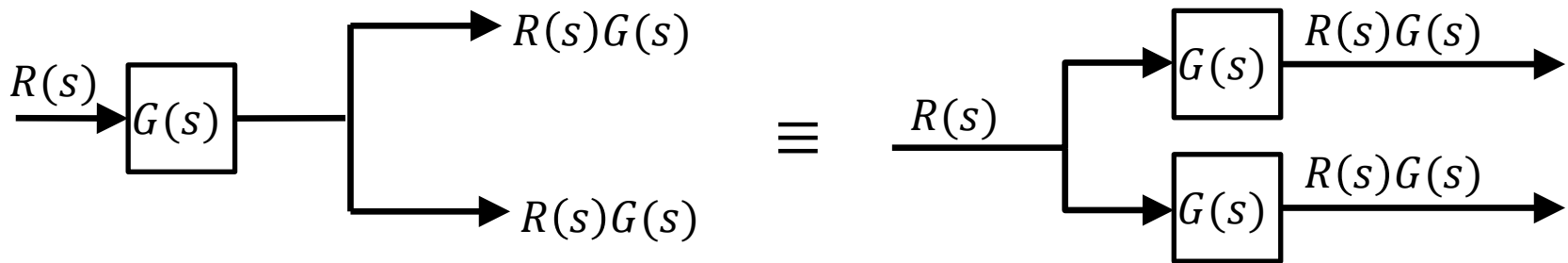
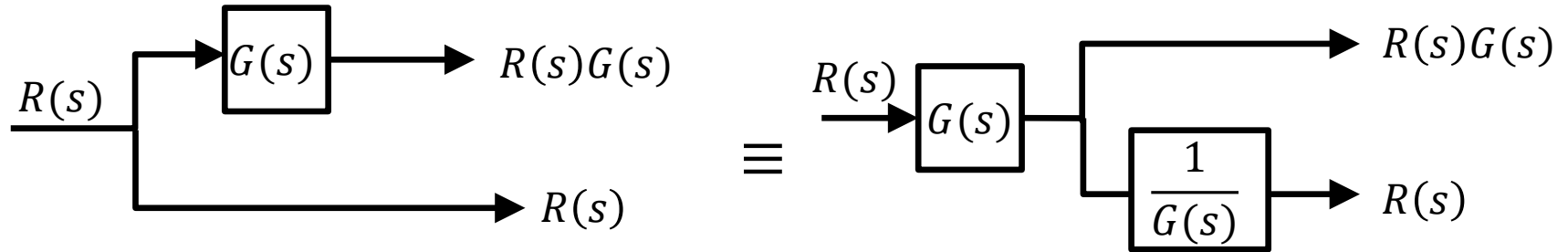
Simplificación de diagramas de bloques

- **Desplazamientos** de bloques con **sumadores**

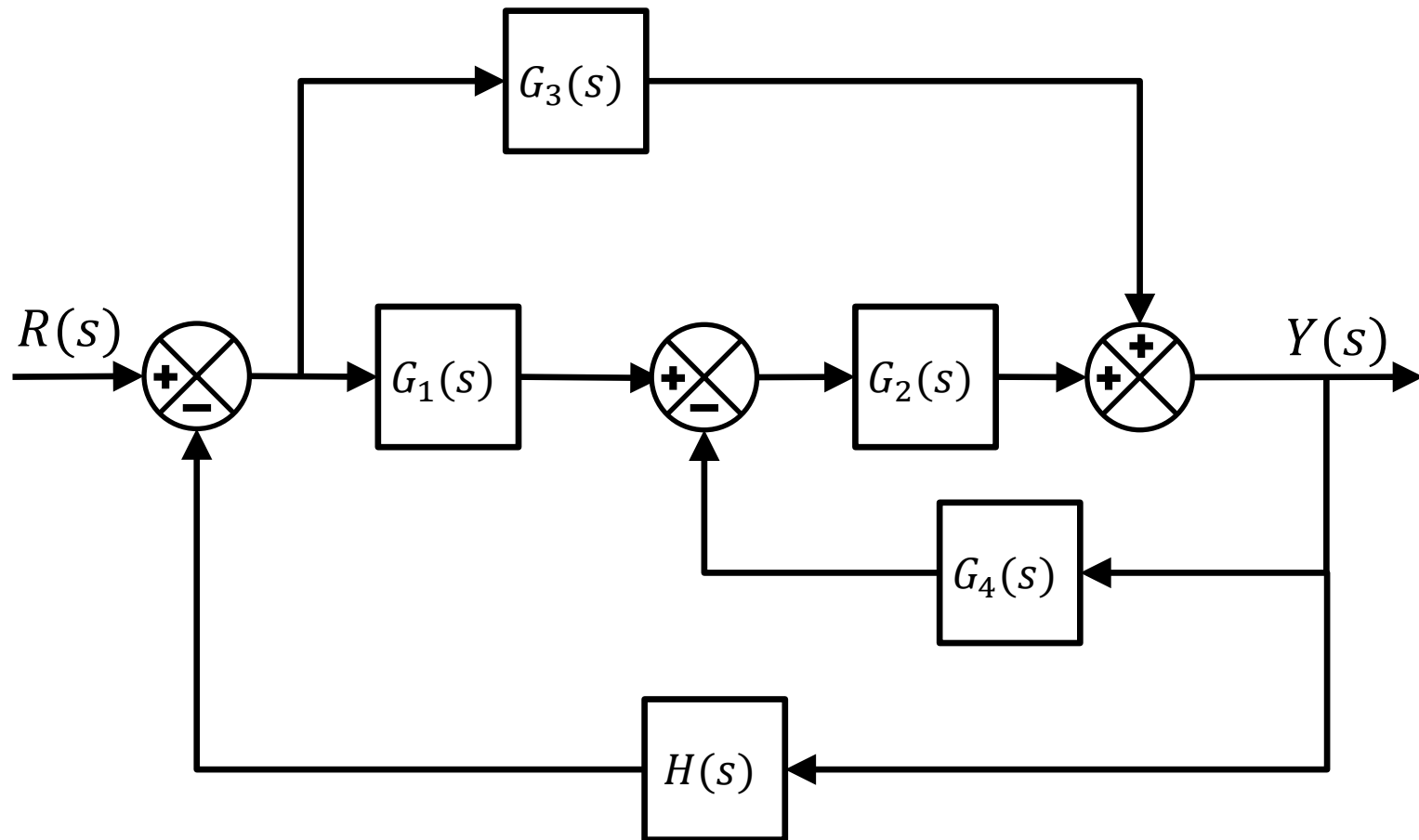


Simplificación de diagramas de bloques

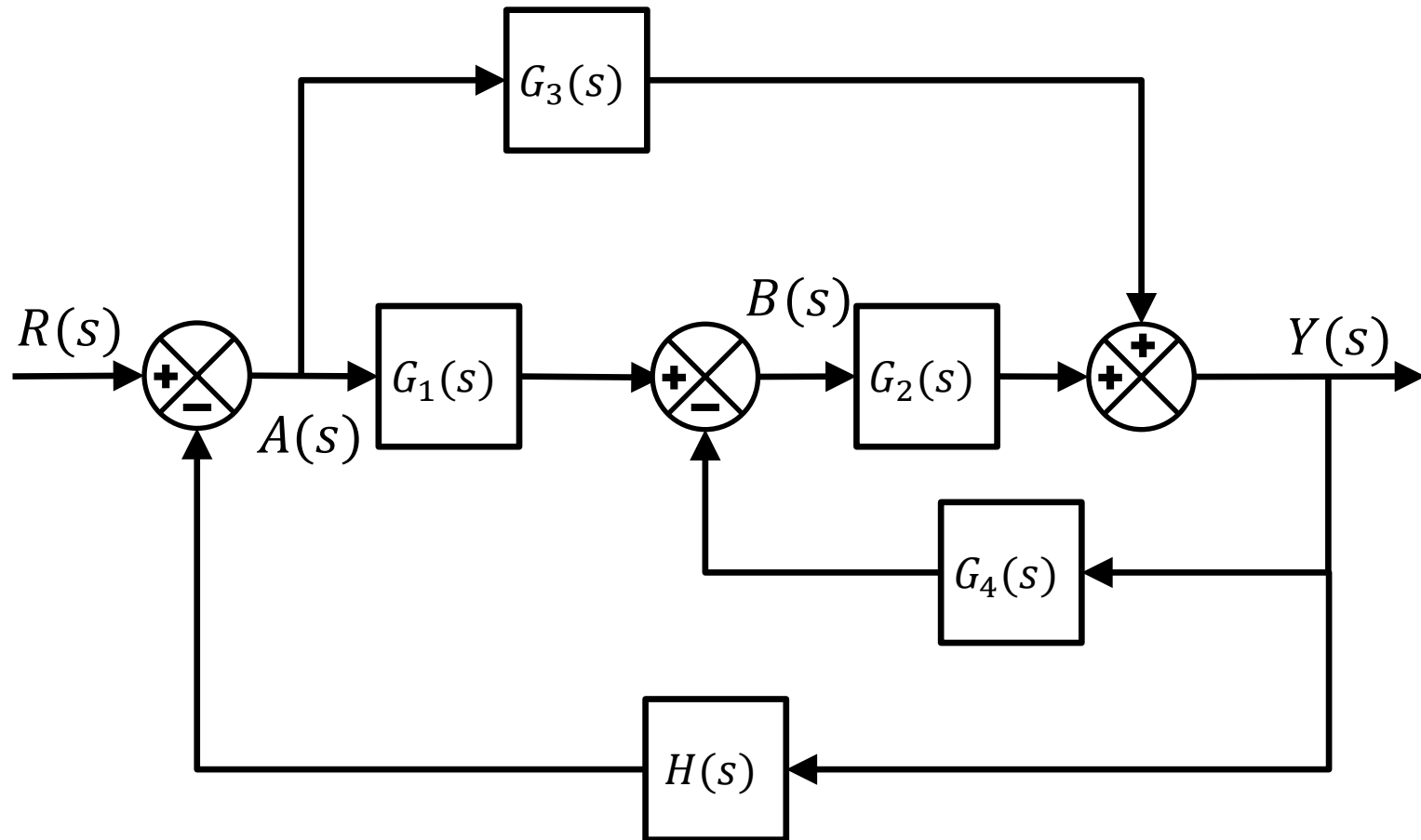
- **Desplazamientos** de bloques con **bifurcaciones**



Simplificación de un sistema complejo



Simplificación mediante ecuaciones



Resumen

- **Modelado de sistemas mecánicos**
 - Descripción matemática de sistemas compuestos por masas, muelles y amortiguadores
 - Aplicación de las leyes de Newton
 - Equivalentes rotacionales y uso de engranajes
- **Modelado de sistemas eléctricos**
 - Descripción matemática de circuitos eléctricos
 - Aplicación de las leyes de Kirchhoff
- **Modelado de un sistema completo**
 - Descripción del motor de CC
 - Relaciones intensidad-par y voltaje-velocidad

Resumen

- **Función de Transferencia**
 - Relación entre la entrada y la salida de un sistema
 - Información importante en el estudio de sistemas
 - Conocer las principales propiedades de una FdT
- **Representación mediante diagramas de bloques**
 - Técnica gráfica mediante interconexión de FdT's
 - Principales elementos en el diseño
 - Bloques, sumas/restas y bifurcaciones
 - Bloques en serie, paralelo y realimentación
 - Simplificación de diagramas
 - Principales equivalencias