NOTACIÓN DE VOIGT,

ESTRUCTURA DE PROPIEDADES,

PROPIEDADES EN UNA DIRECCIÓN

Notación de Voigt

La notación de Voigt es en general aplicable a cualquiera pareja de índices respecto a la cual la propiedad correspondiente es simétrica.

Notación de Voigt: para los dos índices de τ_{ij} y ε_{ij} , para los dos últimos índices de d_{ijk} y para las dos parejas de índices de c_{ijkl}, s_{ijkl} es:

Índice del tensor	11	22	33	23 y 32	13 y 31	12 y 21
Índice en notación matricial	1	2	3	4	5	6

Como regla mnemotécnica sencilla, recordar el diagrama:

$$\begin{pmatrix} \underset{1}{11} & \underset{6}{12} & \underset{5}{13} \\ & \underset{2}{22} & \underset{4}{23} \\ & & \underset{3}{33} \end{pmatrix}$$

Notación de Voigt

La notación de Voigt facilita la visualización, simplifica las operaciones pero las variables con índices de Voigt

no se transforman como tensores

Para cambiar de coordenadas es preciso volver a la notación completa y aplicar la regla de transformación de coordenadas de tensores

Muy importante

- **Tensores de segundo orden T_{ij} simétricos se representan como vectores 6×1**
- **Tensores de tercer orden T_{ijk} simétricos respecto a un par de índices se representan como matrices 3×6 (simétrico en j y k) o 6×3 (simétrico en i y j)**
- **Tensores de cuarto orden T_{ijkl} simétricos respecto a los dos pares de índices (simétrico en i y j y en k y l) se representan como matrices 6×6**

- **La notación de Voigt es cómoda pero hay que usarla con cuidado**
- **Los datos experimentales casi siempre se encuentran en notación de Voigt**

Notación de Voigt

Para que se mantenga la forma de las ecuaciones constitutivas, se introduce un factor de 2 en algunos:

Deformación

$\varepsilon_m = \varepsilon_{ij}$ si m es 1, 2 o 3

$\varepsilon_m = 2\varepsilon_{ij}$ si m es 4, 5 o 6

$ij \rightarrow m$ según la tabla

Esfuerzo

$\tau_m = \tau_{ij}$

$ij \rightarrow m$ según la tabla

Módulos piezoeléctricos

$d_{im} = d_{ijk}$ si m es 1, 2 o 3

$d_{im} = 2d_{ijk}$ si m es 4, 5 o 6

$jk \rightarrow m$ según la tabla

Notación de Voigt

Complianza

$s_{mn} = s_{ijkl}$ si m y n son 1, 2 o 3

$s_{mn} = 2\,s_{ijkl}$ si m o n, pero no los dos, son 4, 5 o 6

$s_{mn} = 4\,s_{ijkl}$ si m y n son 4, 5 o 6

$ij \rightarrow m \quad kl \rightarrow n$ según la tabla

Rigidez (módulos)

$c_{mn} = c_{ijkl}$

$ij \rightarrow m \quad kl \rightarrow n$ según la tabla

Con estas definiciones (y gracias a los factores de 2 y 4) se puede escribir:

$$\underline{P} = \underset{\sim}{d}\vec{\tau} \qquad \vec{\varepsilon}^{\,T} = \underline{E}^T \underset{\sim}{d} \qquad \vec{\tau} = \underset{\sim}{c}\vec{\varepsilon} \qquad \vec{\varepsilon} = \underset{\sim}{s}\vec{\tau}$$

$$P_i = d_{ij}\tau_j \qquad \varepsilon_i = E_j d_{ji} \qquad \tau_i = c_{ij}\varepsilon_j \qquad \varepsilon_i = s_{ij}\tau_j$$

Notación de Voigt o matricial

En vez de:

$$\underline{P} = \underline{\underline{\underline{d}}} : \underline{\underline{\tau}} \qquad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{E} \cdot \underline{\underline{\underline{d}}} \qquad \underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\underline{\underline{c}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \qquad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\underline{\underline{s}}}} : \underline{\underline{\tau}}$$

$$P_i = d_{ijk}\tau_{kj} \qquad \varepsilon_{ij} = E_k d_{kij} \qquad \tau_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{lk} \qquad \varepsilon_{ij} = s_{ijkl}\tau_{lk}$$

Notación tensorial

Notación de Voigt

donde:

$\underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}$

• variable subrayada: tensorial, orden = nº de subrayados. Se transforma según la regla de transformación de tensores cartesianos.

$\underset{\sim}{S}$

• variable subrayada con tilde: matriz (p.ej. ortogonal, de rotación) o variable tensorial de 3er orden representada como matriz por medio de la notación de Voigt. **No** se transforma como tensor. Para transformarla a otros ejes, volver primero a la notación tensorial normal, transformar como tensor y retornar a la notación de Voigt.

$\vec{\varepsilon}$

• variable con flecha superior de vector: no es tensor de 1er orden sino variable tensorial de 2º orden representada como vector por medio de la notación de Voigt. **No** se transforma como tensor. Transformación como en el punto anterior.

Propiedades de 1er orden

Propiedades como la piroelectricidad y la polarización eléctrica bajo presión (esfuerzo hidrostático) son propiedades tensoriales de 1er orden. Sólo aquéllos materiales que pertenecen a las clases polares pueden tener propiedades de este orden.

Representándolas como vectores, tienen las estructuras que se muestran en las siguientes páginas. Se han usado los símbolos:

·	elemento nulo
●	elemento no nulo

Propiedades de 1er orden

Sistema, en orientación convencional	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura, en forma de vector	Número de componentes independientes
TRICLÍNICO	1	**TRICLÍNICO**	$\begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{bmatrix}$	3
MONOCLÍNICO	2	**MONOCLÍNICO**	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \bullet \\ \cdot \end{bmatrix}$	1
	m	**MONOCLÍNICO**	$\begin{bmatrix} \bullet \\ \cdot \\ \bullet \end{bmatrix}$	2
ORTORRÓMBICO	$mm2$	**ORTOTRÓPICO, LÁMINA BIORIENTADA NO EQUIBIAXIAL**	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \bullet \end{bmatrix}$	1

Propiedades de 1er orden

Sistema, en orientación convencional	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura, en forma de vector	Número de componentes independientes
TETRAGONAL, HEXAGONAL, TRIGONAL $\infty, \infty m$	$4, 4mm$ $3, 3m$ $6, 6mm$	**Cerámica PZT polarizada Polímero semicristalino polarizado**	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \bullet \end{bmatrix}$	1

Propiedades de 2º orden, tensor simétrico

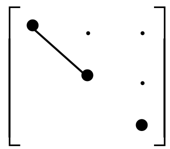
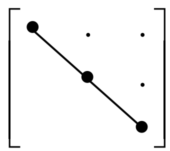
Propiedades como la difusividad másica, la conductividad térmica, la conductividad y resistividad eléctrica, la permitividad eléctrica, las susceptibilidades eléctrica y magnética son propiedades tensoriales de 2º orden simétricas que relacionan dos tensores de 1er orden. Otras, como los coeficientes de expansión térmica relacionan un escalar con un tensor de campo de 2º orden. Todas estas propiedades son simétricas (sólo se representa la parte triangular superior). *Representándolos como matrices*, tienen las estructuras que se muestran en las siguientes páginas. Se han usado los símbolos:

·	elemento nulo
•	elemento no nulo
• – •	elementos iguales

Propiedades 2º orden, simétricas

Sistema, en orientación convencional	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura, en forma de matriz	Número de componentes independientes
TRICLÍNICO	**todas**	**TRICLÍNICO**	$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet \\ & & \bullet \end{bmatrix}$	6
MONOCLÍNICO	**todas**	**MONOCLÍNICO**	$\begin{bmatrix} \bullet & \cdot & \bullet \\ & \bullet & \cdot \\ & & \bullet \end{bmatrix}$	4
ORTORRÓMBICO	**todas**	**ORTOTRÓPICO, LÁMINA BIORIENTADA NO EQUIBIAXIAL, COMPUESTO LAMINAR UNIDIRECCIONAL (láminas perpendiculares al eje ③), MADERA**	$\begin{bmatrix} \bullet & \cdot & \cdot \\ & \bullet & \cdot \\ & & \bullet \end{bmatrix}$	3

Propiedades 2º orden, simétricas

Sistema, en orientación convencional	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura, en forma de matriz	Número de componentes independientes
TETRAGONAL, HEXAGONAL, TRIGONAL $\infty, \infty m, \infty/m, \infty 2, \infty/mm,$	**todas**	**FILAMENTO ORIENTADO UNIAXIALMENTE, FIBRA (dirección de orientación coincidente con el eje ③) COMPUESTO LAMINAR CUASI-ISOTRÓPICO (láminas perpendiculares al eje ③) COMPUESTO REFORZADO CON FIBRA (fibras alineadas en dirección ③)**		2
CÚBICO, MATERIAL ISÓTROPO ($\infty\infty m$)	**todas**	**COMPUESTO ISÓTROPO**		1

Piezoelectricidad (props. 3er orden)

En notación de Voigt, la matriz de módulos piezoeléctricos para las distintas clases cristalográficas y morfologías de compuestos tienen las estructuras que se muestran en las siguientes páginas. Se han usado los símbolos:

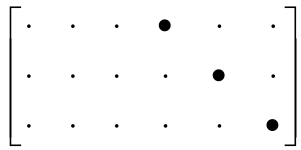
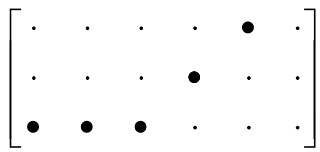
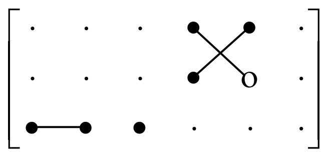
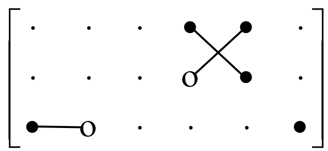
·	elemento nulo
•	elemento no nulo
• – •	elementos iguales
• – o	elementos iguales en módulo, signo contrario
⊙	-2 veces el valor del elemento • al que está conectado

Los materiales pertenecientes a clases centrosimétricas no pueden presentar efecto piezoeléctrico. En las tablas siguientes se omiten por tanto las clases centrosimétricas.

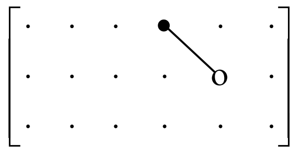
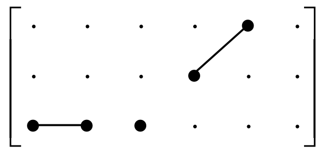
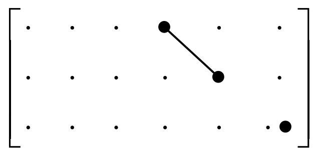
Piezoelectricidad

Sistema, en orientación convencional	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura de d_{ij}	Número de componentes independientes
TRICLÍNICO	1	**TRICLÍNICO**	$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$	18
MONOCLÍNICO	2	**MONOCLÍNICO**	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet \end{bmatrix}$	8
	m		$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \end{bmatrix}$	10

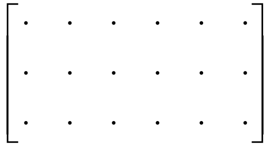
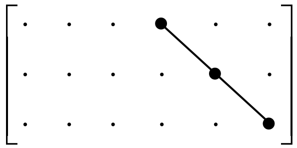
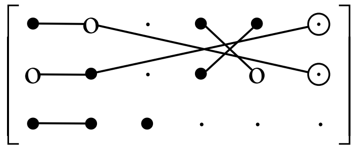
Piezoelectricidad

Sistema, en orientación convencional	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura de d_{ij}	Número de componentes independientes
ORTORRÓMBICO	222	**ORTOTRÓPICO, LÁMINA BIORIENTADA NO EQUIBIAXIAL**		3
	$mm2$			5
TETRAGONAL	4			4
	$\bar{4}$			4

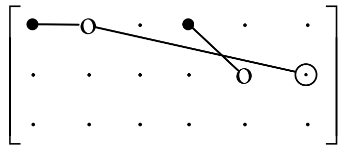
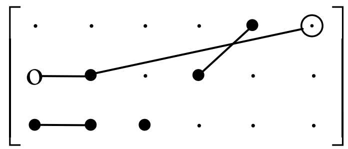
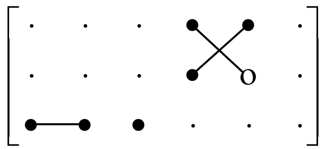
Piezoelectricidad

Sistema, en orientación convencional	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura de d_{ij}	Número de componentes independientes
TETRAGONAL (cont.)	422			1
	$4mm$			3
	$\bar{4}2m$	eje binario (**2**) paralelo a ①		2

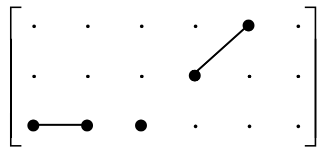
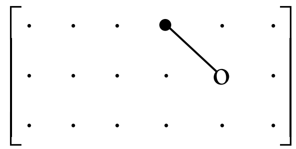
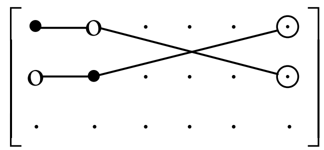
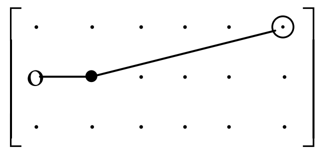
Piezoelectricidad

Sistema, en orientación convencional	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura de d_{ij}	Número de componentes independientes
CÚBICO	432			0
	$\bar{4}3m, 23$			1
TRIGONAL	3			6

Piezoelectricidad

Sistema, en orientación convencional	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura de d_{ij}	Número de componentes independientes
TRIGONAL (cont.)	32			2
	$3m$			4
HEXAGONAL	$6, \quad \infty$			4

Piezoelectricidad

Sistema, en orientación convencional	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura de d_{ij}	Número de componentes independientes
HEXAGONAL (cont.)	$6mm, \infty m$			3
	$622, \infty 2$			1
	$\bar{6}$			2
	$\bar{6}m2$			1

Elasticidad (prop. 4º orden)

En notación de Voigt, las matrices de complianza y rigidez para las distintas clases cristalográficas y morfologías de compuestos tienen las estructuras que se muestran en las siguientes páginas. Se han usado los símbolos:

	·	elemento nulo
	●	elemento no nulo
	● – ●	elementos iguales
	● – o	elementos iguales en módulo, signo contrario
Para s	⊙	2 veces el valor del elemento ● al que está conectado
Para c	⊙	el valor del elemento ● al que está conectado
Para s	×	$2(s_{11} - s_{12})$
Para c	×	$\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$

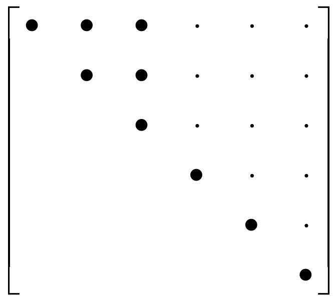
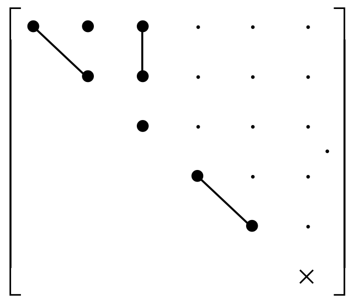
Las matrices de complianza y rigidez son simétricas; en los diagramas siguientes sólo se representa la parte triangular superior. También se verifica:

$$\underset{\sim}{s} = \underset{\sim}{c}^{-1}$$

Propiedades elásticas lineales

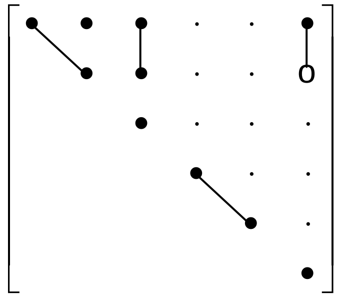
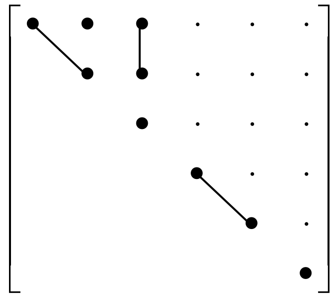
Sistema, en orientación convencional	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura de s_{ij}, c_{ij}	Número de componentes independientes
TRICLÍNICO	todas $1, \bar{1}$		$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & \bullet & \bullet \\ & & & & & \bullet \end{bmatrix}$	21
MONOCLÍNICO	todas $2, m, 2/m$		$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ & & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ & & & \bullet & \cdot & \bullet \\ & & & & \bullet & \cdot \\ & & & & & \bullet \end{bmatrix}$	13

Propiedades elásticas lineales

Sistema, en orientación convencional	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura de s_{ij}, c_{ij}	Número de componentes independientes
ORTORRÓMBICO	todas $222, mm2$ mmm	**ORTOTRÓPICO, LÁMINA BIORIENTADA NO EQUIBIAXIAL* MADERA (① es la dirección tangencial, ② la radial, ③ la axial) COMPUESTO LAMINAR UNIDIRECCIONAL (láminas perpendiculares al eje ③)**		9
HEXAGONAL	$6, \bar{6}, 6/m,$ $622, 6mm$ $\bar{6}m2, 6/mmm$ $\infty m, \infty, \infty/m$ $\infty/mm, \infty 2$	**FILAMENTO ORIENTADO UNIAXIALMENTE, FIBRA (dirección de orientación coincidente con el eje ③) COMPUESTO LAMINAR CUASI-ISOTRÓPICO (láminas perpendiculares al eje ③) COMPUESTO REFORZADO CON FIBRA (fibras alineadas en dirección ③)**		5

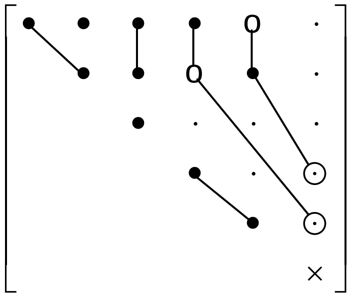
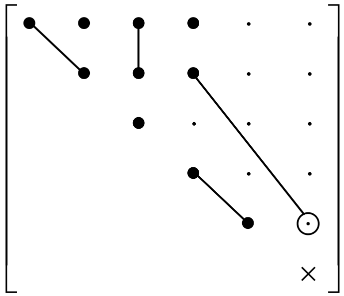
* Es decir, el material ha sido estirado en dos direcciones, pero no en la misma proporción. O el material compuesto tiene de por sí propiedades diferentes en esas dos direcciones, p.ej. radial y tangencial en el caso de la madera.

Propiedades elásticas lineales

Sistema, en orientación convencional	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura de s_{ij}, c_{ij}	Número de componentes independientes
TETRAGONAL	$4,\bar{4},4m$			7
	$4mm,\bar{4}2m$ $422, 4/mmm$	**TETRAGONAL, LÁMINA BIORIENTADA EQUIBIAXIAL (① y ② son las direcciones de orientación equivalentes)* COMPUESTO LAMINAR BIDIRECCIONAL (láminas perpendiculares al eje ③)**		6

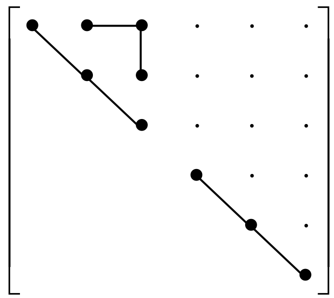
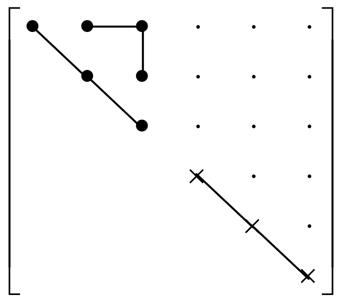
* La asignación de un determinado material compuesto a una clase cristalográfica por diferentes autores no siempre es coincidente. Pero en general no es causa de problemas porque, aunque las estructuras (elementos no nulos) de las matrices de propiedades son diferentes, la combinación de los valores numéricos de los elementos de dichas matrices conducen a valores casi idénticos (y con discrepancias menores que las incertidumbres experimentales en dichos coeficientes). P.ej. el compuesto cuasi-isotrópico del problema 09_02_01 es a veces asignado a la clase tetragonal de máxima simetría *4/mmm* y a veces a la *4/m.*, o incluso (más correctamente) a la monoclínica *2/m*. En no pocas ocasiones en la práctica industrial, no se miden o no se pueden estimar todos los elementos de las matrices de complianza y rigidez de un material y es frecuente realizar diseños o cálculos sólo aproximados asignando el material a una clase que estrictamente no es la correcta. La validez de este procedimiento depende de la aplicación de que se trate.

Propiedades elásticas lineales

Sistema, en orientación convencional	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura de s_{ij}, c_{ij}	Número de componentes independientes
TRIGONAL[1]	$3, \bar{3}$			7
	$32, \bar{3}m, 3m$			6

[1]En otros textos al sistema trigonal se le llama "romboédrico" y se utiliza una celda unitaria, en la que los tres lados y los ángulos son iguales (ejes de Miller-Bravais). La celda en el sistema trigonal no es unitaria pero es equivalente y más general (Seitz, F., "*A matrix-algebraic development of the crystallographic groups*", Z.f. Krist. 88, 433-459, (1934), 90, 289-313 (1935), 91, 336-366 (1935), 100-130 (1936)).

Propiedades elásticas lineales

Sistema, en orientación convencional	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura de s_{ij}, c_{ij}	Número de componentes independientes
CÚBICO*	todas $23, m3$ $432, \bar{4}3m, m3m$			3
	$\infty\infty m$	**ISÓTROPO COMPUESTO ISÓTROPO (p.ej. hormigón, HM o "metal duro") COMPUESTO REFORZADO CON FIBRA CORTA ORIENTADA AL AZAR**		2

* El material cúbico no es isótropo en lo que se refiere a sus propiedades elásticas (4º orden). Sí lo es en propiedades de 2º orden (difusividad másica, conductividad térmica, conductividad y resistividad eléctricas).

Material isótropo

El comportamiento elástico lineal de un **material isótropo** (p.ej., un material policristalino no orientado, un material amorfo, un material compuesto como el hormigón o una espuma, etc.), se describe con sólo dos parámetros (diferentes para cada material).

bien: **Complianzas ⇔ módulo de Young y relación de Poisson**

o bien: **Rigideces ⇔ constantes de Lamé**

y en consecuencia también pueden relacionarse: **módulo de Young y relación de Poisson ⇔ constantes de Lamé**

<u>Pero en cualquier caso sólo hay 2 parámetros independientes para el material isótropo.</u>

Las relaciones son las siguientes:

Material isótropo

Complianzas ⇔ módulo de Young y relación de Poisson

$$\vec{\varepsilon} = \underset{\sim}{S}\vec{\tau}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= s_{11}\tau_1 + s_{12}\tau_2 + s_{12}\tau_3 \\
\varepsilon_2 &= s_{12}\tau_1 + s_{11}\tau_2 + s_{12}\tau_3 \\
\varepsilon_3 &= s_{12}\tau_1 + s_{12}\tau_2 + s_{11}\tau_3 \\
\varepsilon_4 &= 2(s_{11} - s_{12})\tau_4 \\
\varepsilon_5 &= 2(s_{11} - s_{12})\tau_5 \\
\varepsilon_6 &= 2(s_{11} - s_{12})\tau_6
\end{aligned}$$

Al escribir tener en cuenta la estructura de $\underset{\sim}{S}$ (pág. anterior), es decir:

$$\begin{aligned}
&s_{11} = s_{22} = s_{33} \\
&s_{12} = s_{21} = s_{13} = s_{31} = s_{23} = s_{32} \\
&s_{44} = s_{55} = s_{66} = 2(s_{11} - s_{12})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\tau_1 - \frac{\nu}{E}\tau_2 - \frac{\nu}{E}\tau_3 \\
\varepsilon_2 &= \frac{-\nu}{E}\tau_1 + \frac{1}{E}\tau_2 - \frac{\nu}{E}\tau_3 \\
\varepsilon_3 &= \frac{-\nu}{E}\tau_1 - \frac{\nu}{E}\tau_2 + \frac{1}{E}\tau_3 \\
\varepsilon_4 &= \frac{1}{G}\tau_4 \\
\varepsilon_5 &= \frac{1}{G}\tau_5 \\
\varepsilon_6 &= \frac{1}{G}\tau_6
\end{aligned}$$

deformación longitudinal 1-1 debida a esfuerzo long. 1-1

deformación longitudinal 1-1 debida a esfuerzo long. 2-2

Módulo elástico o de Young

deformación angular en el plano 2-3 debida a esfuerzo cortante 2-3

Módulo de cortadura (o "cortante", o "a cortadura", o "de cizalla")

Identificando coeficientes: $\boxed{s_{11} = 1/E \qquad s_{12} = -\nu/E}$ que son los dos únicos parámetros necesarios para describir el material isótropo. Además se obtiene el módulo de cortadura en función de los otros dos parámetros: $1/G = 2(s_{11} - s_{12})$ $\boxed{G = E/[2(1+\nu)]}$

Material isótropo

Rigideces ⇔ constantes de Lamé

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= c_{11}\varepsilon_1 + c_{12}\varepsilon_2 + c_{12}\varepsilon_3\\
\tau_2 &= c_{12}\varepsilon_1 + c_{11}\varepsilon_2 + c_{12}\varepsilon_3\\
\tau_3 &= c_{12}\varepsilon_1 + c_{12}\varepsilon_2 + c_{11}\varepsilon_3\\
\tau_3 &= \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\varepsilon_4\\
\tau_4 &= \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\varepsilon_5\\
\tau_5 &= \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\varepsilon_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= (2\mu + \lambda)\varepsilon_1 + \lambda\varepsilon_2 + \lambda\varepsilon_3\\
\tau_2 &= \lambda\varepsilon_1 + (2\mu + \lambda)\varepsilon_2 + \lambda\varepsilon_3\\
\tau_3 &= \lambda\varepsilon_1 + \lambda\varepsilon_2 + (2\mu + \lambda)\varepsilon_3\\
\tau_3 &= \mu\varepsilon_4\\
\tau_4 &= \mu\varepsilon_5\\
\tau_5 &= \mu\varepsilon_6
\end{aligned}$$

Identificando coeficientes: $\lambda = c_{12} \qquad \lambda + 2\mu = c_{11}$

Finalmente:

módulo de Young y relación de Poisson ⇔ constantes de Lamé

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Resumen

• En Materiales II usamos los símbolos de las clases cristalográficas para identificar a qué sistema pertenece un material y por tanto saber qué estructura (en notación de Voigt) tienen propiedades tales como los módulos piezoeléctricos, la complianza, la rigidez, etc.

• No es preciso saber deducir los símbolos para un material dado, ni siquiera deducir todos los elementos de simetría que implica un símbolo.

• Las tablas anteriores sirven, en Materiales II,

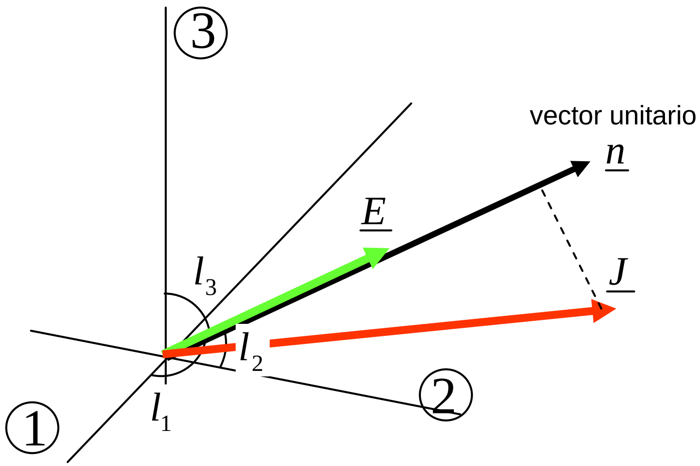
  • para poder **entender y consultar las fuentes de datos experimentales** de propiedades de materiales anisotrópicos (monocristales, materiales orientados y materiales compuestos)

  • para **unificar el tratamiento de materiales** cerámicos, poliméricos y compuestos **anisótropos**.

Propiedades de 2° orden en una dirección dada

El valor de una propiedad de 2º orden (p.ej. la conductividad eléctrica) en una dirección definida por los cosenos directores se calcula como:

$$\underline{J} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{E}$$



1. se aplica un campo $\underline{E}$ en dirección $\underline{n}$: $\underline{E} = E\underline{n}$
2. se calcula $\underline{J}$
3. se determina la componente de $\underline{J}$ en dirección de $\underline{n}$ (proyección sobre $\underline{E}$): $\underline{J} \cdot \underline{n}$
4. el valor de la propiedad (en este caso conductividad) es el cociente: $\boxed{\sigma = \dfrac{|\underline{J} \cdot \underline{n}|}{|\underline{E}|}}$

$$\left.\begin{array}{l} J_i = \sigma_{ij} E_j = E\sigma_{ij} l_j \\ E_j = E l_j \\ n_i = l_i \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma = \frac{|(\underline{\delta}_i E\sigma_{ij} l_j) \cdot (\underline{\delta}_k l_k)|}{E} = l_j l_k \sigma_{ij} \delta_{ik} = l_j l_i \sigma_{ij} = l_i l_j \sigma_{ij}$$

es decir: $\boxed{\sigma = l_i l_j \sigma_{ij}}$

Propiedades de 2º orden en una dirección dada

A veces es conveniente elegir un nuevo sistema de coordenadas en el que uno de los nuevos ejes, p.ej. el ①', va en la dirección de $\underline{n}$. En este caso, la prop. en la dirección de interés es:

$$\sigma = l_{1i} l_{1j} \sigma_{ij} = \sigma'_{11}$$

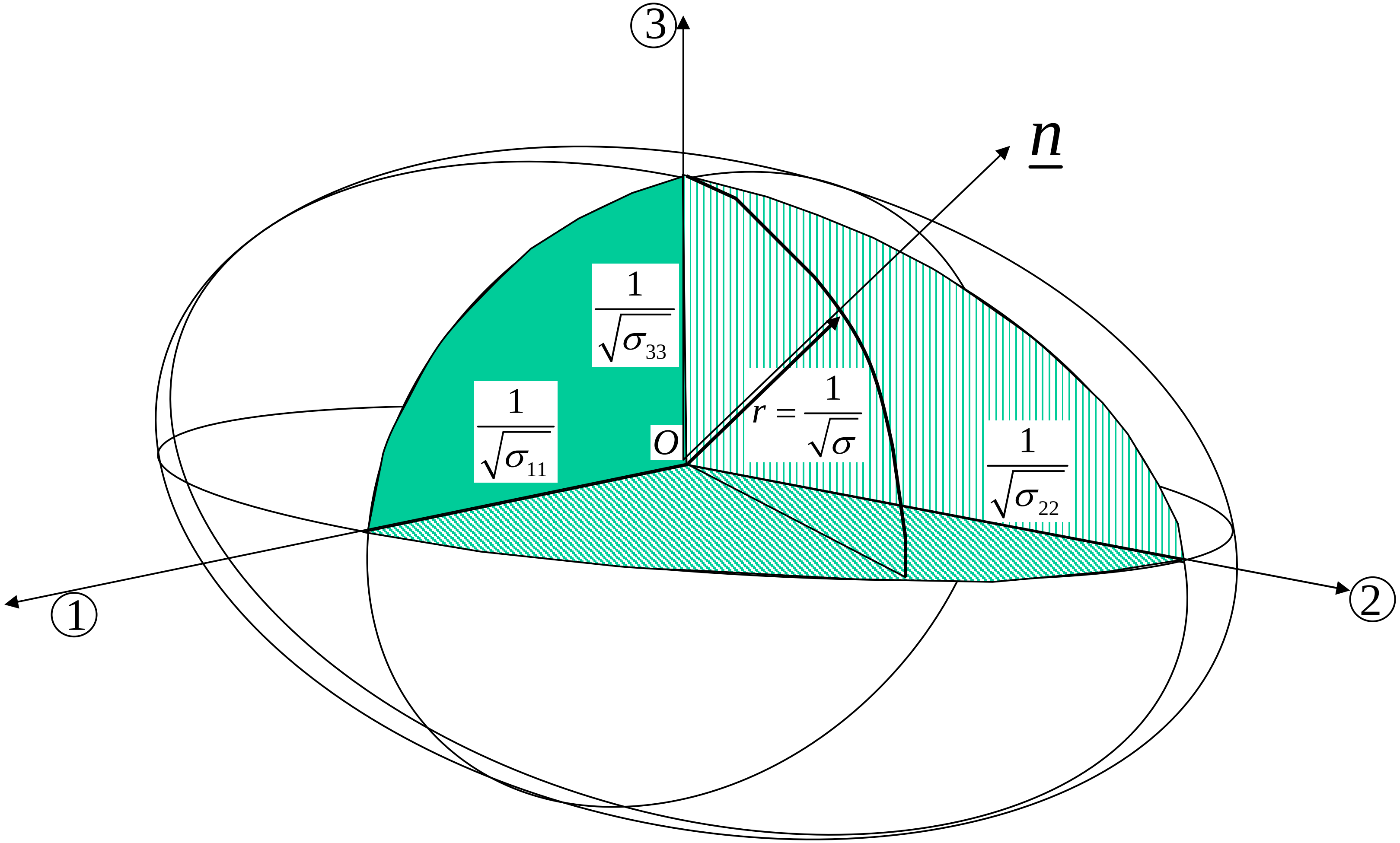
es decir, el valor de la propiedad en la dirección ①' es σ'_{11} (lo que resulta evidente de la definición de σ'_{11}). Es posible interpretar σ gráficamente de modo muy intuitivo: representamos la superficie $\sigma_{ij} x_i x_j = 1$ (* esta superficie se llama cuádrica de representación para la propiedad de 2º orden)

que para la conductividad eléctrica es un elipsoide (puesto que los tres valores principales son siempre positivos). En una dirección definida por los cosenos directores l_i el radio vector $\underline{r}$ (es decir, el vector del origen a la superficie del elipsoide en esa dirección) tiene por componentes $x_i = r l_i$ y sustituyendo en (*),

$$r^2 \sigma_{ij} l_i l_j = 1 \quad \text{es decir:} \quad r^2 \sigma = 1 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$$

Es decir, la longitud del radio vector es igual al inverso de la raíz cuadrada del módulo de la propiedad en esa dirección.

Propiedades de 2º orden en una dirección dada



Cuádrica (en el caso de la conductividad, elipsoide) de representación de la cond. eléctrica (válida para cualquier otra propiedad de 2º orden simétrica; si los valores de la propiedad pueden ser negativos o nulos, p.ej. la actividad óptica, la cuádrica puede ser cualquiera, es decir, un hiperboloide de una o dos hojas, un paraboloide o un elipsoide imaginario)

El material cúbico es isótropo para props. de 2º orden

Un material cúbico se caracteriza por tener iguales los tres valores principales de cualquier propiedad de 2º orden simétrica en tres direcciones ortogonales.

Por lo que se deduce inmediatamente que la cuádrica de representación es una esfera.

Y por tanto la propiedad de 2º orden es la misma en todas las direcciones, es decir, la propiedad es independiente de la dirección, o lo que es lo mismo, hay invariancia rotacional, que es la condición de isotropía.

El material cúbico es, para propiedades simétricas de 2º orden, isótropo.

Propiedades de 4º orden en una dirección dada

Igualmente, para determinar una propiedad de cuarto orden (p.ej. la complianza $s'_{11} (= s'_{1111})$ de un material compuesto) en la dirección definida por el vector unitario $\underline{n}$, giramos los ejes de manera que la dirección del nuevo eje ①' coincida con la dirección de $\underline{n}$ y determinamos la relación entre la deformación longitudinal en esa dirección y el esfuerzo de tracción o compresión en esa dirección, es decir, calculamos directamente el valor de s'_{11} según la ley de transformación habitual:

$$s'_{1111} = l_{1i} l_{1j} l_{1k} l_{1l} s_{ijkl}$$

En este caso, la superficie de representación no es una cuádrica (la regla de transformación contiene productos de cuatro cosenos directores, es decir, será en general una cuártica. En el caso de props. de 2º orden, la regla de transformación contiene productos de dos cosenos directores y la superficie de representación es una cuádrica).

Propiedades de 4º orden en una dirección dada

Gráficamente, la complianza de una barra cortada del material tal y como se indica en el dibujo, se calcula como $s'_{1111} = l_{1i} l_{1j} l_{1k} l_{1l} s_{ijkl}$, el módulo elástico o de Young para esa barra como $1/s'_{1111}$ y la rigidez elástica como $c'_{1111} = l_{1i} l_{1j} l_{1k} l_{1l} c_{ijkl}$.