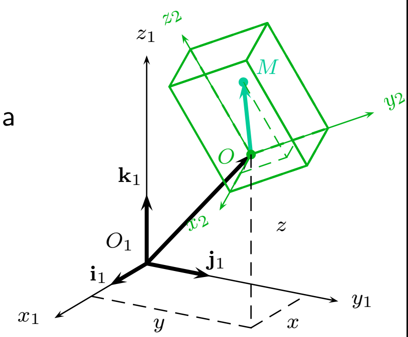
Mecánica Clásica
Tema 2
Campo de velocidades del sólido rígido

EIAE

25 de septiembre de 2011

Velocidad de un punto del sólido - matricial



Vector velocidad del punto M del sólido S_2 respecto al sistema S_1: la misma definición que para un punto, pero ahora el vector posición es:

$$\mathbf{O_1O} + \mathbf{OM} = \mathcal{R}_1 \cdot \left(X_1^O + \mathbf{Q}_{12} \cdot X_2^M\right)$$

y su derivada (con $\mathcal{R}_1$ constante) es:

$$\mathbf{v}_{21}^M = \mathcal{R}_1 \cdot \left(\dot{X}_1^O + \dot{\mathbf{Q}}_{12} \cdot X_2^M\right) = \mathbf{v}_{21}^M\big|_{tras} + \mathbf{v}_{21}^M\big|_{rot}$$

La de traslación es igual para todos los puntos; la segunda varía con M.

Para entender la relación entre $\mathbf{OM}$ y su derivada debido a la rotación, hay que proyectarlos en los mismos ejes, fijos o sólido:

$$\dot{\mathbf{OM}} = \mathcal{R}_1 \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{12} \cdot X_2^M = \mathcal{R}_1 \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{12} \cdot \underbrace{\mathbf{Q}_{12}^\top \cdot X_1^{OM}}_{X_2^M} = \underbrace{\mathcal{R}_2 \cdot \mathbf{Q}_{12}^\top}_{\mathcal{R}_1} \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{12} \cdot X_2^M$$

Tensor velocidad angular

- En ejes sólido, la velocidad de M debida a la rotación es

$$\mathbf{v}_{21}^M\big|_{rot} = \mathcal{R}_2 \cdot \mathbf{Q}_{12}^\top \dot{\mathbf{Q}}_{12} \cdot X_2^M = \mathcal{R}_2 \cdot \mathbf{\Omega}_{21}\big|_2 \cdot X_2^M$$

  donde $\mathbf{\Omega}_{21}$ es el tensor velocidad angular de S_2 respecto a S_1, expresado por su matriz de componentes en S_2.
- En ejes fijos, el tensor se expresa

$$\mathbf{v}_{21}^M\big|_{rot} = \mathcal{R}_1 \cdot \dot{X}_1^{OM} = \mathcal{R}_1 \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{12} \mathbf{Q}_{12}^\top \cdot X_1^{OM} = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{\Omega}_{21}\big|_1 \cdot X_1^{OM}$$

- Los dos están relacionados por las ecuaciones de cambio de ejes,

$$\mathbf{\Omega}_{21}\big|_1 = \mathsf{U} \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{12}^\top = \mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{12}^\top \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{12}^\top = \mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{\Omega}_{21}\big|_2 \cdot \mathbf{Q}_{12}^\top$$

  que es el 1[er] criterio de tensorialidad $\Rightarrow$ $\mathbf{\Omega}_{21}$ es un tensor.

- Aplicación lineal: $\mathbf{v}_{21}^M\big|_{rot} = \mathbf{\Omega}_{21} \cdot \mathbf{OM}$ ó $\mathbf{OM} \xrightarrow{\mathbf{\Omega}_{21}} \mathbf{v}_{21}^M\big|_{rot}$

Propiedades del tensor velocidad angular

- El tensor velocidad angular es antisimétrico:

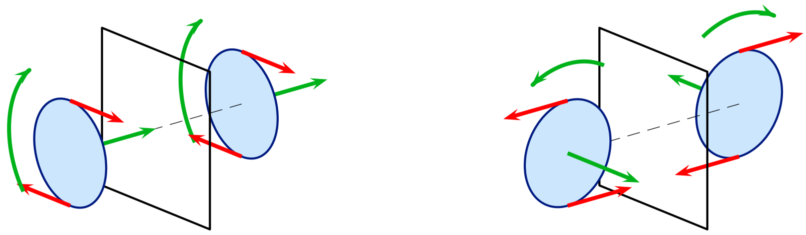
$$\mathbf{Q}_{12}^{\top}\mathbf{Q}_{12} = \mathbf{U} \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{Q}}_{12}^{\top}\mathbf{Q}_{12} + \mathbf{Q}_{12}^{\top}\dot{\mathbf{Q}}_{12} = \boldsymbol{\Omega}_{21}^{\top} + \boldsymbol{\Omega}_{21} = \mathbf{0}$$

- Un tensor antisimétrico tiene un Vector axial asociado $\boldsymbol{\omega}_{21}$ (pseudovector):

$$\boldsymbol{\Omega}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\omega}_{21} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_i \cdot \boldsymbol{\Omega}_{21}\big|_i \cdot X_i^M \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{OM}$$

- Vector Polar / Axial: el comportamiento ante simetrías cambia con la orientación de los ejes (a derechas/a izquierdas)

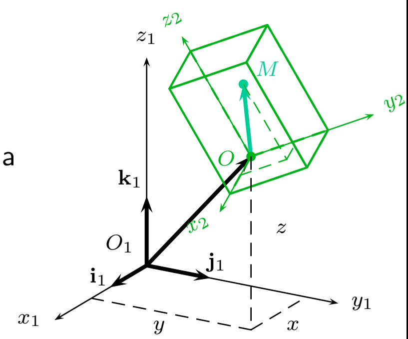


Velocidad de un punto del sólido - vectorial

Deducción vectorial

Vector velocidad del punto M del sólido S_2 respecto al sistema S_1: la misma definición que para un punto, pero ahora el vector posición es:

$$\mathbf{O_1O} + \mathbf{OM} = \mathcal{R}_1 \cdot X_1^O + \mathcal{R}_2 \cdot X_2^M$$



y su velocidad es:

$$\mathbf{v}_{21}^M = \boxed{\mathcal{R}_1} \cdot \dot{X}_1^O + \dot{\mathcal{R}}_2 \cdot \boxed{X_2^M} = \mathbf{v}_{21}^M\big|_{trans} + \mathbf{v}_{21}^M\big|_{rot}$$

Al derivar se mantienen constantes $\mathcal{R}_1$ (por definición de velocidad respecto a S_1) y X_2^M (por ser distancias entre puntos de un sólido.

- Todos los puntos del sólido tienen la misma velocidad de traslación debida al movimiento de O. Ya conocido de cinemática del punto.
- La velocidad debida a la rotación de $\mathbf{OM}$ es distinta para cada punto del sólido. Lo veremos con más detalle.

Velocidad de un punto del sólido - vectorial

- Derivamos el vector $\mathbf{OM}$, considerando $\mathcal{R}_1$ como fijo:

$$\mathbf{OM} = x_2^M\,\mathbf{i}_2 + y_2^M\,\mathbf{j}_2 + z_2^M\,\mathbf{k}_2$$
$$\dot{\mathbf{OM}} = x_2^M\,\dot{\mathbf{i}}_2 + y_2^M\,\dot{\mathbf{j}}_2 + z_2^M\,\dot{\mathbf{k}}_2$$

- El cálculo de las derivadas es trivial en ejes fijos,

$$\left|\begin{aligned} \mathbf{i}_2 &= q_1^1\,\mathbf{i}_1 + q_1^2\,\mathbf{j}_1 + q_1^3\,\mathbf{k}_1 \\ \mathbf{j}_2 &= q_2^1\,\mathbf{i}_1 + q_2^2\,\mathbf{j}_1 + q_2^3\,\mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 &= q_3^1\,\mathbf{i}_1 + q_3^2\,\mathbf{j}_1 + q_3^3\,\mathbf{k}_1 \end{aligned}\right. \quad \rightarrow \quad \left|\begin{aligned} \dot{\mathbf{i}}_2 &= \dot{q}_1^1\,\mathbf{i}_1 + \dot{q}_1^2\,\mathbf{j}_1 + \dot{q}_1^3\,\mathbf{k}_1 \\ \dot{\mathbf{j}}_2 &= \dot{q}_2^1\,\mathbf{i}_1 + \dot{q}_2^2\,\mathbf{j}_1 + \dot{q}_2^3\,\mathbf{k}_1 \\ \dot{\mathbf{k}}_2 &= \dot{q}_3^1\,\mathbf{i}_1 + \dot{q}_3^2\,\mathbf{j}_1 + \dot{q}_3^3\,\mathbf{k}_1 \end{aligned}\right.$$

- Los nueve q_j^i y sus derivadas no son independientes, pues son vectores unitarios y ortogonales, pero las condiciones se ven mejor en ejes sólido.

Velocidad de un punto del sólido - vectorial

- Expresamos las derivadas de los versores en ejes sólido:

$$\left|\begin{aligned} \dot{\mathbf{i}}_2 &= a_1^1\,\mathbf{i}_2 + a_1^2\,\mathbf{j}_2 + a_1^3\,\mathbf{k}_2 \\ \dot{\mathbf{j}}_2 &= a_2^1\,\mathbf{i}_2 + a_2^2\,\mathbf{j}_2 + a_2^3\,\mathbf{k}_2 \\ \dot{\mathbf{k}}_2 &= a_3^1\,\mathbf{i}_2 + a_3^2\,\mathbf{j}_2 + a_3^3\,\mathbf{k}_2 \end{aligned}\right.$$

- Por ser unitarios,

$$\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_2 = 1 \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{i}}_2 \cdot \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \cdot \dot{\mathbf{i}}_2 = 2\,\dot{\mathbf{i}}_2 \cdot \mathbf{i}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_i^i = 0$$

- Por ser ortogonales,

$$\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{i}}_2 \cdot \mathbf{j}_2 + \mathbf{i}_2 \cdot \dot{\mathbf{j}}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_j^i = -a_i^j$$

- La matriz de coeficientes es antisimétrica $\begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$ (3 parámetros)

Velocidad de un punto del sólido - vectorial

- Conocidas las derivadas de los versores, la velocidad debida al giro vale:

$$\dot{\mathbf{OM}} = x_2^M\,\dot{\mathbf{i}}_2 + y_2^M\,\dot{\mathbf{j}}_2 + z_2^M\,\dot{\mathbf{k}}_2 = \lfloor\dot{\mathbf{i}}_2,\dot{\mathbf{j}}_2,\dot{\mathbf{k}}_2\rfloor\cdot\begin{Bmatrix} x_2^M \\ y_2^M \\ z_2^M \end{Bmatrix} =$$

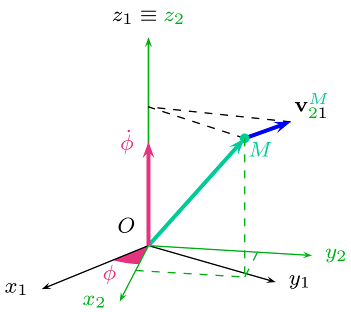
$$= \lfloor\mathbf{i}_2,\mathbf{j}_2,\mathbf{k}_2\rfloor\cdot\begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} x_2^M \\ y_2^M \\ z_2^M \end{Bmatrix} = \lfloor\mathbf{i}_2,\mathbf{j}_2,\mathbf{k}_2\rfloor\cdot\begin{Bmatrix} -c\,y_2^M + b\,z_2^M \\ +c\,x_2^M - a\,z_2^M \\ -b\,x_2^M + a\,y_2^M \end{Bmatrix}$$

- Si se consideran los elementos $[a,b,c]$ como coordenadas de un vector $\boldsymbol{\omega}_{21}$ en ejes sólido, se llega al mismo resultado mediante un producto vectorial:

$$\dot{\mathbf{OM}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ a & b & c \\ x_2^M & y_2^M & z_2^M \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega}_{21}\wedge\mathbf{OM}$$

- $\boldsymbol{\omega}_{21}$ es el vector velocidad angular del sólido S_2 respecto al sistema S_1.

Ejemplo conocido: rotación con eje fijo



Se sabe que si un sólido S_2 gira un ángulo ϕ alrededor de un eje fijo $Oz_1 \equiv Oz_2$, su velocidad angular es $\boldsymbol{\omega}_{21} = \dot\phi\,\mathbf{k}_1$, y la velocidad de un punto arbitrario M del sólido vale $\mathbf{v}_{21}^M = \cancel{\mathbf{v}_{21}^O} + \boldsymbol{\omega}_{21}\wedge\mathbf{OM}$.

Calculamos la matriz de giro y la posición del punto M:

$$\mathbf{Q}_{12} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{OM} = \mathcal{R}_1\,X_1^M = \overset{Cte.}{\mathcal{R}_1}\;\mathbf{Q}_{12}\,\overset{Cte.}{X_2^M}$$

Derivamos para obtener la velocidad:

$$\mathbf{v}_{21}^M = \mathcal{R}_1\,\dot{\mathbf{Q}}_{12}\,X_2^M = \mathcal{R}_1\,\dot\phi\begin{bmatrix} -\sin\phi & -\cos\phi & 0 \\ \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X_2^M$$

Una vez derivado, para entender el resultado hay que pasarlo a S_1 o a S_2.

Ejemplo conocido: rotación con eje fijo

En ejes fijos:

$$\mathbf{v}_{21}^{M} = \mathcal{R}_1\,\dot{\mathsf{Q}}_{12}\,X_2^M = \mathcal{R}_1\,\dot{\mathsf{Q}}_{12}\,\mathsf{Q}_{12}^{\top}X_1^M =$$

$$= \mathcal{R}_1\,\dot{\phi}\begin{bmatrix} -\sin\phi & -\cos\phi & 0 \\ \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X_1^M =$$

$$= \mathcal{R}_1\begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi} & 0 \\ \dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X_1^M = \mathcal{R}_1\,\mathbf{\Omega}_{21}\big|_1 X_1^M$$

Si definimos el vector $\boldsymbol{\omega}_{21} = \left[0, 0, \dot{\phi}\right]_1$, se obtiene el mismo resultado mediante el producto vectorial

$$\mathbf{v}_{21}^{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ 0 & 0 & \dot{\phi} \\ x_1^M & y_1^M & z_1^M \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{OM}$$

Ejemplo conocido: rotación con eje fijo

En ejes sólido:

$$\mathbf{v}_{21}^{M} = \mathcal{R}_1\,\dot{\mathsf{Q}}_{12}\,X_2^M = \mathcal{R}_2\,\mathsf{Q}_{12}^{\top}\,\dot{\mathsf{Q}}_{12}\,X_2^M =$$

$$= \mathcal{R}_2\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\dot{\phi}\begin{bmatrix} -\sin\phi & -\cos\phi & 0 \\ \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X_2^M = \mathcal{R}_2\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi} & 0 \\ \dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{\Omega}_{21}|_2} X_2^M$$

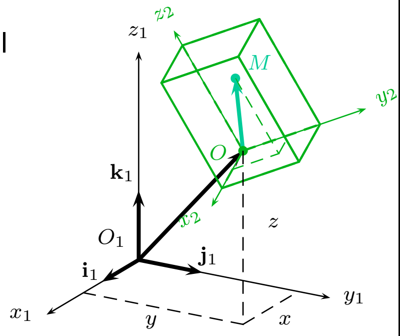
Si definimos el vector $\boldsymbol{\omega}_{21} = \left[0, 0, \dot{\phi}\right]_2$, se obtiene el mismo resultado mediante el producto vectorial

$$\mathbf{v}_{21}^{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ 0 & 0 & \dot{\phi} \\ x_2^M & y_2^M & z_2^M \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{OM}$$

En este caso, el vector velocidad angular tiene las mismas componentes en ejes fijos y sólido porque el eje de giro está fijo, y todos los vectores en esa dirección son invariantes.

Campo de velocidades del sólido

- Vector velocidad del punto (arbitrario) M del sólido S_2 respecto al sistema S_1:



$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{21}^{M} &= \mathcal{R}_1 \cdot \left(\dot{X}_1^{O} + \boldsymbol{\Omega}_{21}\big|_1 \cdot X_1^{M}\right) = \\ &= \mathcal{R}_2 \cdot \left(\mathbf{Q}_{12}^{\top} \cdot \dot{X}_1^{O} + \boldsymbol{\Omega}_{21}\big|_2 \cdot X_2^{M}\right) = \\ &= \mathbf{v}_{21}^{O} + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{OM}\end{aligned}$$

- Vale para cualquier par de puntos: O y M son arbitrarios,

$$\mathbf{v}_{21}^{B} = \mathbf{v}_{21}^{O} + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{OB} = \mathbf{v}_{21}^{O} + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge (\mathbf{OA} + \mathbf{AB}) = \quad \rightarrow$$

Campo de velocidades: $\rightarrow$ $\boxed{\mathbf{v}_{21}^{B} = \mathbf{v}_{21}^{A} + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{AB}}$

- 6 GDL $\rightarrow$ 6 parámetros determinan el estado cinemático de todos los puntos del sólido: $\dot{X}_1^{O}$ (3) y $\boldsymbol{\Omega}_{21}$ / $\boldsymbol{\omega}_{21}$ (3)

Propiedades del campo de velocidades del sólido

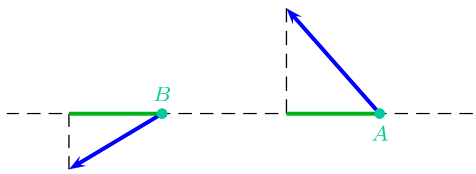
- Es lineal en las coordenadas: $\boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{OM}$ / $\boldsymbol{\Omega}_{21}\big|_2 \cdot X_2^{M}$
- Si $\boldsymbol{\omega}_{21} = \mathbf{0}$, todos los puntos del sólido tienen la misma velocidad (traslación pura o traslación paralela)
- Equiproyectividad: $\mathbf{v}_{21}^{B} \cdot \mathbf{AB} = \mathbf{v}_{21}^{A} \cdot \mathbf{AB}$
  - Por la definición de sólido, la distancia entre puntos es constante:

$$\left(\mathbf{r}^{B} - \mathbf{r}^{A}\right) \cdot \left(\mathbf{r}^{B} - \mathbf{r}^{A}\right) = \text{Cte.} \quad \rightarrow \quad \left(\dot{\mathbf{r}}^{B} - \dot{\mathbf{r}}^{A}\right) \cdot \left(\mathbf{r}^{B} - \mathbf{r}^{A}\right) = 0$$

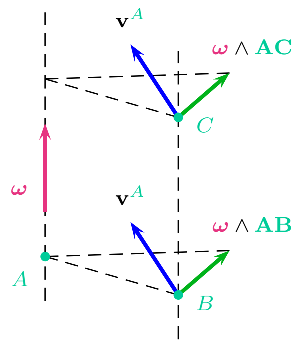
  - Implícito en la expresión del campo de velocidades,

$$\mathbf{v}_{21}^{B} \cdot \mathbf{AB} = \left(\mathbf{v}_{21}^{A} + \cancel{\boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{AB}}\right)^{\perp} \cdot \mathbf{AB} = \mathbf{v}_{21}^{A} \cdot \mathbf{AB}$$

porque se obtiene girando un sistema de referencia, que cumple la condición de sólido. Los puntos no pueden alejarse ni acercarse, solo girar (si no, se deformaría).



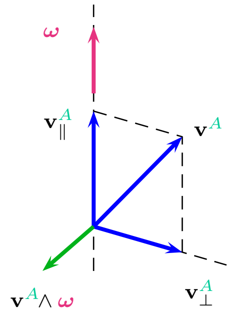
Propiedades del campo de velocidades



- Bidimensional: Igual velocidad en rectas $\parallel \omega$

$$\mathbf{AC} = \mathbf{AB} + \lambda\, \omega_{21}$$
$$\mathbf{v}_{21}^C = \mathbf{v}_{21}^A + \omega_{21} \wedge \mathbf{AC} =$$
$$= \mathbf{v}_{21}^A + \omega_{21} \wedge \left(\mathbf{AB} + \cancel{\lambda\, \omega_{21}}\right) = \mathbf{v}_{21}^B$$

- Descomposición en velocidades $\parallel$ y $\perp$ a ω



$$\mathbf{v}^A = \underbrace{\frac{\mathbf{v}^A \cdot \omega}{\omega^2}\, \omega}_{\parallel} + \underbrace{\frac{\omega \wedge \left(\mathbf{v}^A \wedge \omega\right)}{\omega^2}}_{\perp}$$

Se obtiene del desarrollo del producto triple:

$$\omega \wedge \left(\mathbf{v}^A \wedge \omega\right) = \omega^2\, \mathbf{v}^A - \left(\mathbf{v}^A \cdot \omega\right) \omega$$

Propiedades del campo de velocidades

- Velocidad de mínimo deslizamiento: la componente paralela a ω es la misma para todos los puntos (equiproyectividad según ω):

$$\mathbf{v}^D = \mathbf{v}_{\parallel}^A = \mathbf{v}_{\parallel}^B \quad \forall A, B \in S_2$$

  - Es la misma en cada instante para todo el sólido

$$\mathbf{v}_{21}^B \cdot \omega_{21} = \left(\mathbf{v}_{21}^A + \overset{\perp}{\cancel{\omega_{21} \wedge \mathbf{AB}}}\right) \cdot \omega_{21} = \mathbf{v}^D \cdot \omega_{21} \;\; \forall A, B \in S_2$$

  - Si es nula, el movimiento es una rotación pura
  - Basta dar el escalar v^D, porque su dirección es conocida
  - Es la velocidad mínima en módulo de todo el campo de velocidades

$$\left|\mathbf{v}^A\right|^2 = \underbrace{\left|\mathbf{v}_{\parallel}^A\right|^2}_{\text{Cte.}} + \underbrace{\left|\mathbf{v}_{\perp}^A\right|^2}_{\geq 0}$$

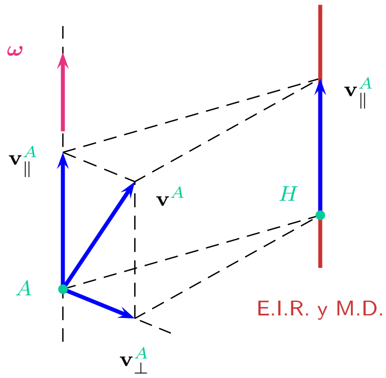
Propiedades del campo de velocidades

- Eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento: Hay una recta del sólido en que $\mathbf{v}_\perp$ se anula, $\mathbf{v}^H = \mathbf{v}^H_\parallel = \mathbf{v}^D \Rightarrow H \in$ E.I.R.
- A partir de A, buscamos un punto H del E.I.R. tal que $\mathbf{AH} \perp \omega$, $\mathbf{v}^A$

$$\mathbf{v}^H = \mathbf{v}^A + \omega \wedge \mathbf{AH} = \lambda \omega \quad \rightarrow \quad \omega \wedge \left(\mathbf{v}^A + \omega \wedge \mathbf{AH}\right) = \mathbf{0} =$$

$$= \omega \wedge \mathbf{v}^A + \underbrace{\cancel{(\omega \cdot \mathbf{AH})}}_{\perp} \omega - \omega^2\, \mathbf{AH} \quad \rightarrow \quad \mathbf{AH} = \frac{\omega \wedge \mathbf{v}^A}{\omega^2}$$

$$\boxed{\mathbf{r}^{E.I.R.} = \mathbf{r}^A + \frac{\omega \wedge \mathbf{v}^A}{\omega^2} + \lambda\, \omega}$$



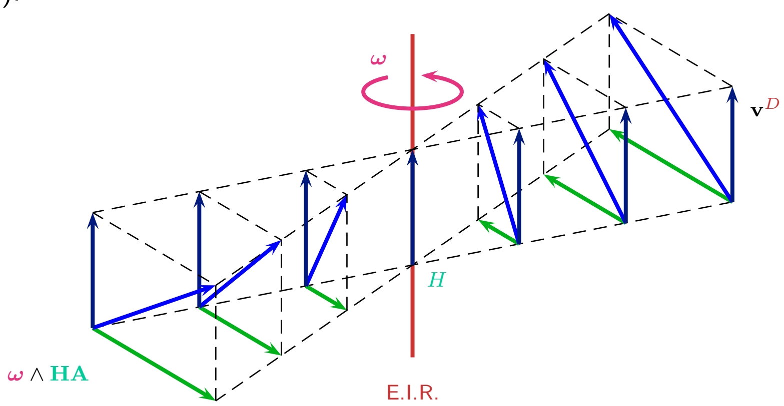
- Todos los puntos del E.I.R. y Mínimo Deslizamiento tienen la misma velocidad, $\mathbf{v}^D$, que es la velocidad mínima del campo de velocidades.
- En general, los puntos del E.I.R. no están fijos al sólido: en cada momento coinciden con puntos distintos de este.

Propiedades del campo de velocidades

- Movimiento helicoidal equivalente: se toma un punto H del E.I.R. para describir el campo de velocidades.

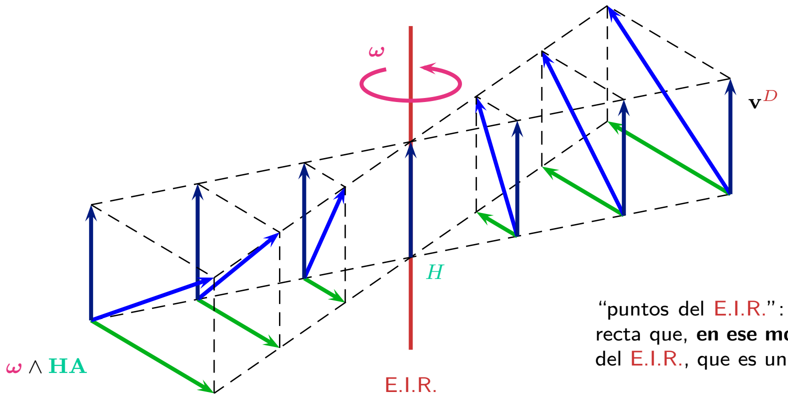
$$\mathbf{v}^A = \underbrace{\mathbf{v}^H}_{\parallel} + \underbrace{\omega \wedge \mathbf{HA}}_{\perp} = \text{Deslizamiento} + \text{Rotación pura}$$

- Teorema de Chasles: el movimiento más general de un sólido en cada instante es una rotación pura alrededor de une eje más un deslizamiento (traslación) paralelo a ese eje (que puede variar con el tiempo).



Propiedades del campo de velocidades

- Todos los puntos del E.I.R. tienen la misma velocidad, $\mathbf{v}^D$, que es la velocidad mínima del campo de velocidades
- Un punto de velocidad nula pertenece al E.I.R. ($\mathbf{v}^D = 0$)
- Si varios puntos tienen la misma velocidad en una dirección dada, esa es la dirección del E.I.R. (siempre que no estén en una recta paralela a $\boldsymbol{\omega}$, en la que todos los puntos tienen la misma velocidad)



"puntos del E.I.R.": puntos del sólido situados en la recta que, **en ese momento**, coincide con la posición del E.I.R., que es un sólido independiente.

Propiedades del campo de velocidades

- Campo vectorial análogo al campo de momentos de un sistema de fuerzas:

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A + \mathbf{BA} \wedge \mathbf{R} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AB}$$

- Los dos campos tienen la misma estructura y propiedades:

Estructura helicoidal	
Bidimensional	
Imagen instantánea: todas las magnitudes varían con t	
Momento en un punto	Velocidad de un punto
Resultante	Velocidad angular
Eje principal	E.I.R.

Propiedades del campo de velocidades: Axoides

La posición del E.I.R. varía con el tiempo, en ejes fijos y respecto al sólido:

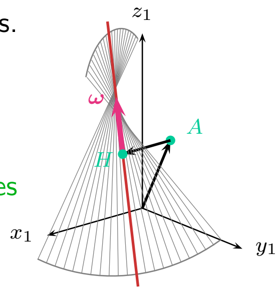
- Axoide Fija: Lugar geométrico de las posiciones sucesivas del E.I.R. en ejes fijos.

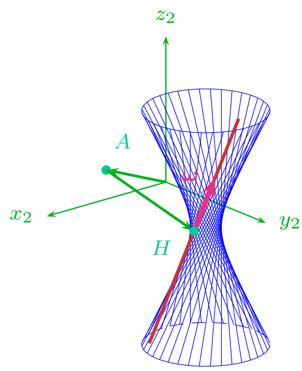
$$\mathbf{r}_{AF}(t,\lambda) = \mathbf{O_1A}\big|_1 + \left.\frac{\boldsymbol{\omega}(t)\wedge \mathbf{v}^A(t)}{\omega(t)^2}\right|_1 + \lambda\,\boldsymbol{\omega}(t)\big|_1$$

- Axoide Móvil: Lugar geométrico de las posiciones sucesivas del E.I.R. en ejes sólido.

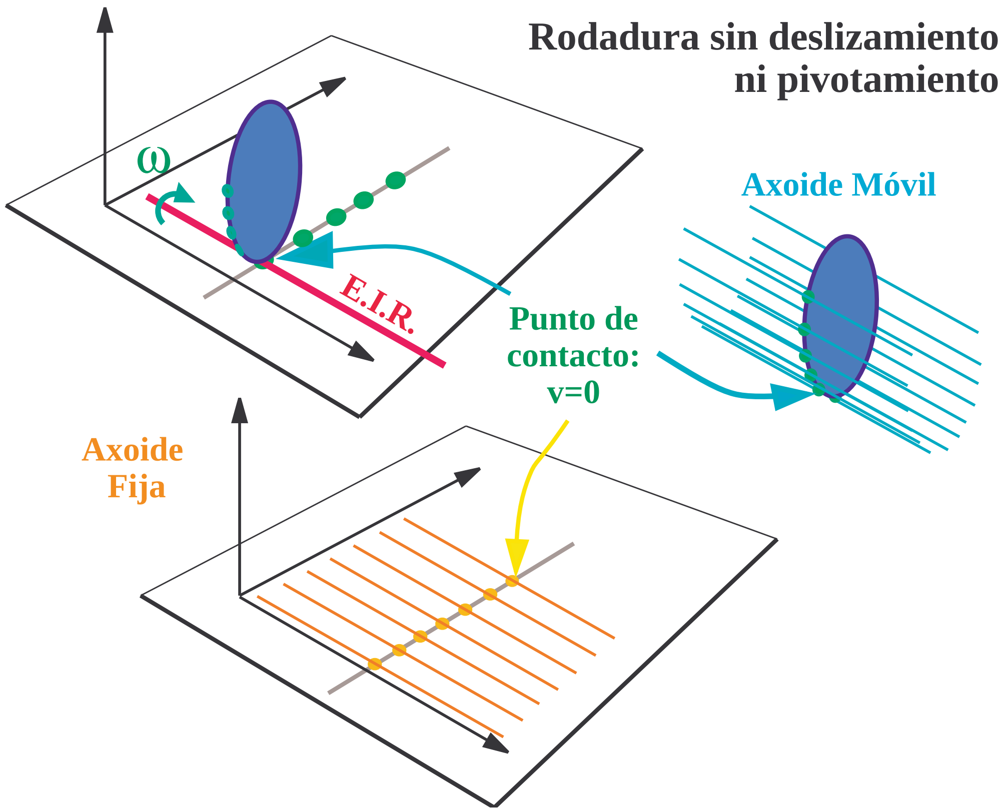
$$\mathbf{r}_{AM}(t,\lambda) = \mathbf{OA}\big|_2 + \left.\frac{\boldsymbol{\omega}(t)\wedge \mathbf{v}^A(t)}{\omega(t)^2}\right|_2 + \lambda\,\boldsymbol{\omega}(t)\big|_2$$

- Son superficies regladas con dos parámetros: λ (generatriz) y t (directriz)

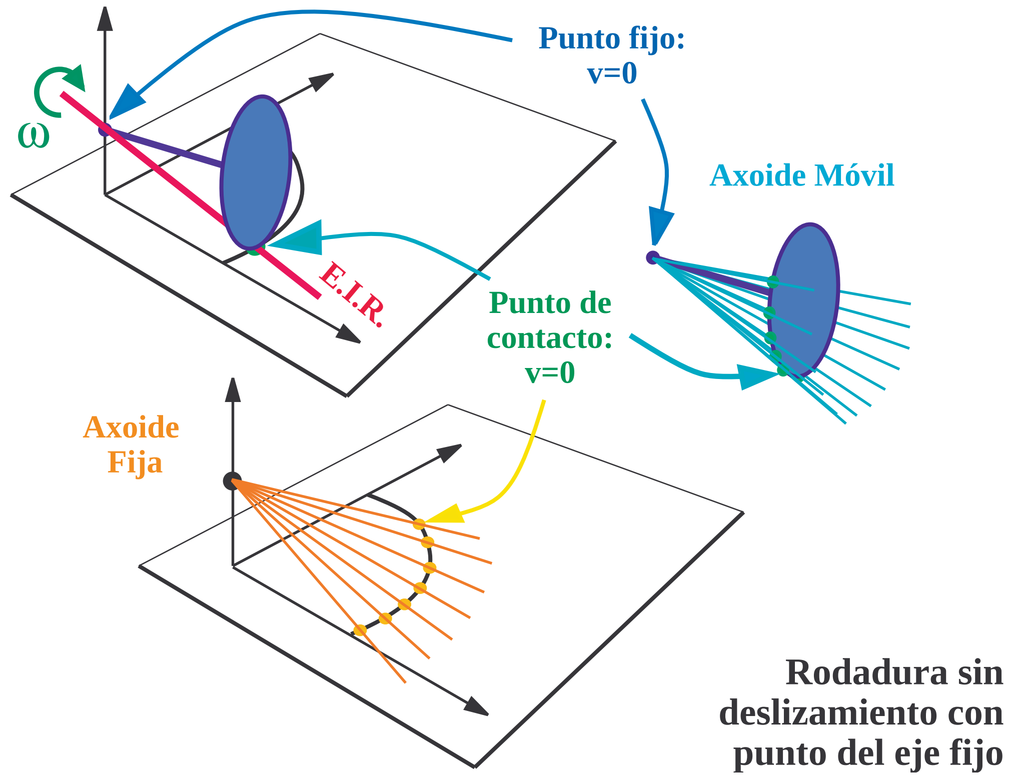




Axoides: ejemplos



Axoides: ejemplos



Determinación de la velocidad angular

- Derivando la matriz de giro, $\mathsf{Q}(t) \;\rightarrow\; \mathsf{Q}^{\top}\cdot\dot{\mathsf{Q}} = \boldsymbol{\Omega}$
- Derivando los versores $\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2 \;\rightarrow\; \dot{\mathbf{i}}_2, \dot{\mathbf{j}}_2, \dot{\mathbf{k}}_2$

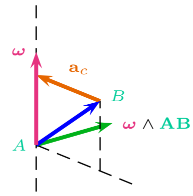
Campo de velocidades: $\dot{\mathbf{i}}_2 = \boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{i}_2 \quad \dot{\mathbf{j}}_2 = \boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{j}_2 \quad \dot{\mathbf{k}}_2 = \boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{k}_2$

$$
\begin{array}{rclcl}
\mathbf{i}_2\wedge\dot{\mathbf{i}}_2 & = & \mathbf{i}_2\wedge(\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{i}_2) & = & 1\cdot\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{i}_2)\,\mathbf{i}_2 \\
\mathbf{j}_2\wedge\dot{\mathbf{j}}_2 & = & \mathbf{j}_2\wedge(\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{j}_2) & = & 1\cdot\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{j}_2)\,\mathbf{j}_2 \\
\mathbf{k}_2\wedge\dot{\mathbf{k}}_2 & = & \mathbf{k}_2\wedge(\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{k}_2) & = & 1\cdot\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{k}_2)\,\mathbf{k}_2 \\
\hline
\mathbf{i}_2\wedge\dot{\mathbf{i}}_2 + \mathbf{j}_2\wedge\dot{\mathbf{j}}_2 + \mathbf{k}_2\wedge\dot{\mathbf{k}}_2 & & & = & 3\cdot\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} = 2\cdot\boldsymbol{\omega}
\end{array}
$$

$$
\boxed{\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{i}_2\wedge\dot{\mathbf{i}}_2 + \mathbf{j}_2\wedge\dot{\mathbf{j}}_2 + \mathbf{k}_2\wedge\dot{\mathbf{k}}_2\right)}
$$

Los dos caminos son similares: $\mathsf{Q}^{\top}\cdot\dot{\mathsf{Q}} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{i}_2 \\ \hline \mathbf{j}_2 \\ \hline \mathbf{k}_2 \end{array}\right] \cdot \left[\; \dot{\mathbf{i}}_2 \;\middle|\; \dot{\mathbf{j}}_2 \;\middle|\; \dot{\mathbf{k}}_2 \;\right] = \boldsymbol{\Omega}$

Aceleración de un punto de un sólido



Se deriva el campo de velocidades considerando $\mathcal{R}_1$ como fijo,

$$\mathbf{v}_{21}^{B} = \mathbf{v}_{21}^{A} + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{AB}$$
$$\dot{\mathbf{v}}_{21}^{B} = \dot{\mathbf{v}}_{21}^{A} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} \wedge \mathbf{AB} + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \dot{\mathbf{AB}}$$

Se llega al campo de aceleraciones del sólido:

$$\boxed{\mathbf{a}_{21}^{B} = \mathbf{a}_{21}^{A} + \boldsymbol{\alpha}_{21} \wedge \mathbf{AB} + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{AB})}$$

- $\boldsymbol{\alpha}_{21} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21}$ es el vector aceleración angular del sólido S_2 respecto a S_1.
- El término $\boldsymbol{\omega}_{21} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{AB})$ está dirigido hacia el eje paralelo a $\boldsymbol{\omega}_{21}$ que pasa por A; es una aceleración centrípeta.
- Los dos primeros términos dan una estructura similar a la del campo de velocidades (eje $\parallel$ $\boldsymbol{\alpha}$); el tercero (eje $\parallel$ $\boldsymbol{\omega}$) rompe la estructura porque no es rotacional sino centrípeta, y los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ tienen en general direcciones distintas (y variables con el tiempo).

Aceleración de un punto de un sólido

- También se puede obtener matricialmente,

$$\mathbf{v}_{21}^{M} = \mathcal{R}_1 \left(\dot{X}_1^O + \boldsymbol{\Omega}_{21}\big|_1 X_1^M\right) = \overset{cte.}{\mathcal{R}_1} \left(\dot{X}_1^O + \boldsymbol{\Omega}_{21}\big|_1 \mathbf{Q}_{12} \overset{cte.}{X_2^M}\right)$$
$$\mathbf{a}_{21}^{M} = \mathcal{R}_1 \left(\ddot{X}_1^O + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{21}\big|_1 \mathbf{Q}_{12} X_2^M + \boldsymbol{\Omega}_{21}\big|_1 \dot{\mathbf{Q}}_{12} X_2^M\right) =$$
$$= \mathcal{R}_1 \left(\ddot{X}_1^O + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{21}\big|_1 X_1^M + \boldsymbol{\Omega}_{21}\big|_1 \boldsymbol{\Omega}_{21}\big|_1 X_1^M\right)$$

- En ejes sólido, sabiendo que $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{21}\big|_1 = \mathbf{Q}_{12} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{21}\big|_2 \mathbf{Q}_{12}^{\top}$,

$$\mathbf{a}_{21}^{M} = \mathcal{R}_2 \left(\mathbf{Q}_{12}^{\top} \ddot{X}_1^O + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{21}\big|_2 X_2^M + \boldsymbol{\Omega}_{21}\big|_2 \boldsymbol{\Omega}_{21}\big|_2 X_2^M\right)$$

- $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{21}$ es el tensor aceleración angular del sólido S_2 respecto a S_1.
- Análogo a la forma vectorial,

$$\mathbf{a}_{21}^{M} = \mathbf{a}_{21}^{O} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} \wedge \mathbf{OM} + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{OM})$$

Aceleración angular de un sólido

- La Aceleración angular es la derivada de la velocidad angular:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}\big|_1 = \left(\dot{\mathbf{Q}}_{12}\mathbf{Q}_{12}^{\top}\right)^{\cdot} = \ddot{\mathbf{Q}}_{12}\mathbf{Q}_{12}^{\top} + \dot{\mathbf{Q}}_{12}\dot{\mathbf{Q}}_{12}^{\top}$$

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}\big|_2 = \left(\mathbf{Q}_{12}^{\top}\dot{\mathbf{Q}}_{12}\right)^{\cdot} = \dot{\mathbf{Q}}_{12}^{\top}\dot{\mathbf{Q}}_{12} + \mathbf{Q}_{12}^{\top}\ddot{\mathbf{Q}}_{12}$$

- Es antisimétrica:

$$\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^{\top} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}^{\top} = \mathbf{0}\,,$$

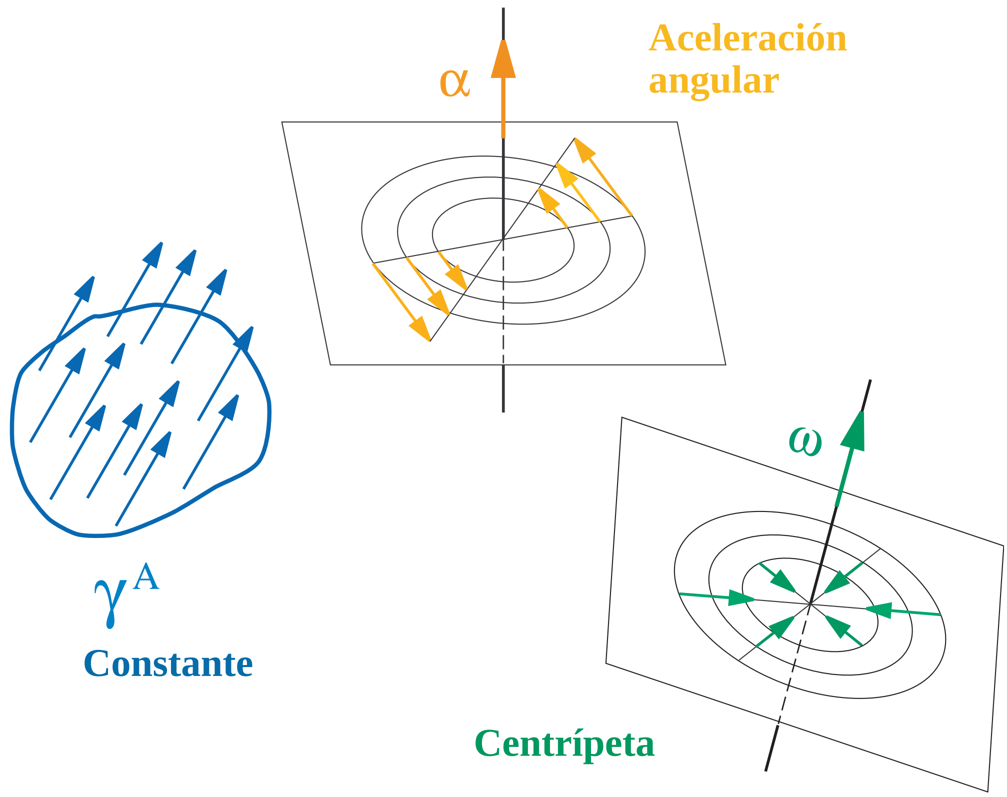
- tiene un vector axial asociado:

$$\mathcal{R}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{21}\big|_i \cdot X_i^M \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} \wedge \mathbf{OM}\,,$$

- y es también un tensor:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}\big|_1 = \mathbf{Q}_{12}\dot{\boldsymbol{\Omega}}\big|_2\mathbf{Q}_{12}^{\top}$$

Estructura instantánea del campo de aceleraciones



Resumen de propiedades cinemáticas

Punto		Sólido	
Vector posición	(3 GDL)	Vector posición de O	(3 GDL)
n.a.		Matriz de giro	(3 GDL)
Vector velocidad	(3 GDL)	Campo de velocidades	(6 GDL)
n.a.		Velocidad angular	(3 GDL)
Vector aceleración	(3 GDL)	Campo de aceleraciones	(6 GDL)
n.a.		Aceleración angular	(3 GDL)