Funciones y dominio.
Límites de funciones y cálculo de indeterminaciones.

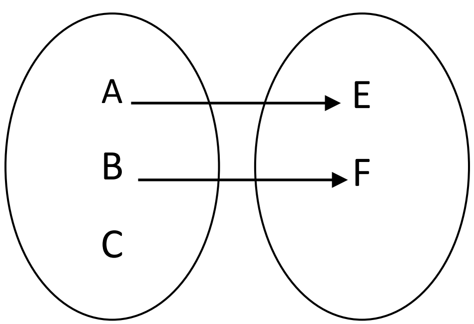
Universidad Europea
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

¿Qué es una función?

Una función es una **relación** entre dos conjuntos de manera que a cada elemento le corresponde un único elemento del otro conjunto

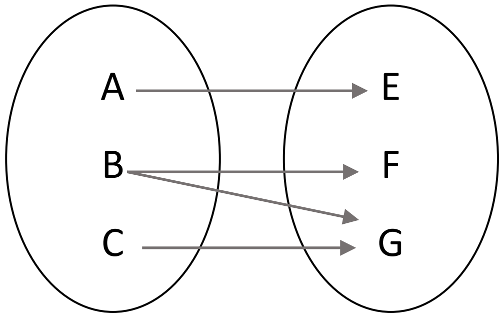
Una función es una magnitud que depende de una o varias variables. Esta dependencia se escribe de forma general como **f(x)** donde x de la variable de la que depende.

Para que una relación sea una función, todos los elementos tienen que tener **un único valor asignado**

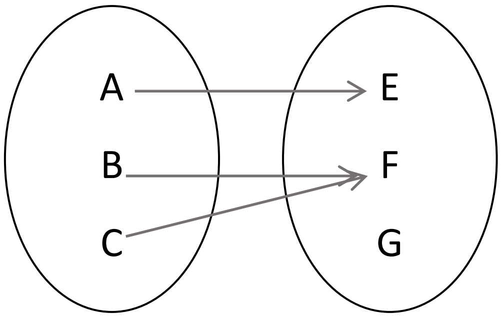


NO es una función, porque c no tiene asignado ningún valor

Ejemplos



No es una función, B tiene asignados dos valores



SÍ es una función

Dominio de una función

Llamaremos **Dominio** de una función y lo denotaremos por **Dom (f)** al conjunto de los valores de x para los que la función está definida.

El dominio está formado por los valores que podemos sustituir en la x para los que la función tiene sentido.

1. **FUNCIONES LINEALES**

Estas funciones tienen como dominio **todos los números reales,** ya que es posible sustituir cualquier valor de x en el polinomio y éste tiene sentido.

$$f(x)=ax+b$$

Es una recta

Elementos de una recta:
- Ordenada en el origen
- Pendiente

Ecuaciones de una recta:
- A partir de dos puntos
- Con un punto y la pendiente.

2. FUNCIONES POLINÓMICAS

Estas funciones tienen como dominio **todos los números reales,** ya que es posible sustituir cualquier valor de x en el polinomio y éste tiene sentido.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Raíces de un polinomio:

- Resolución de ec. de segundo grado
- Método de Ruffini

Factorización de un polinomio

Raíces de un polinomio

Una **raíz** es aquel valor que anula el polinomio

Polinomios de segundo grado

Si tenemos un polonomio de segundo grado $P(x) = ax^2 + bx + c$ podemos encontrar sus raices si resolvemos la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, para ello utilizaremos la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Recordemos que para que tenga raices reales, es necesario que $b^2 - 4ac$ sea un número positivo o cero.

EJEMPLOS

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3$$

$$x^2 + x + 5 = 0$$

$$-2x^2 - 4x = 0$$

Método de Ruffini

Polinomios de grado tres o mayor

Es posible obtener raices enteras de polinomios mediante el método de Ruffini. Esta regla nos permite calcular las raices enteras de un polinomio mediante una sencilla división.

EJEMPLOS

1. $p(x) = x^4 + x^3 - x - 1$
2. $p(x) = x^4 - 1$
3. $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3x$

Soluciones: Factorizar los siguientes polinomios

1. $p(x) = x^4 + x^3 - x - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)$
2. $p(x) = x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$
3. $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3x = x(2x^2 - 5x - 3) = x(x+1/2)(x-3)$

Factorización de polinomios

Si α es una raíz del polinomio entonces el polinomio $P(x)$ es dividible entre $x-\alpha$. Por lo tanto, podemos escribir $P(x) = (x-\alpha)q(x)$. De hecho, si un polinomio de grado n tiene m raices $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, entonces

$$P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_m)c(x)$$

donde $c(x)$ es un polinomio de grado $n-m$.

Productos notables

Conocer algunos de los productos notables puede ayudarte a factorizar polinomios.

- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

3. **FUNCIONES RACIONALES**

Son cociente de dos polinomios $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

Su **dominio** son todos los números reales excepto aquellos que anulan el denominador.

¿Por qué?: Porque la división no está definida en cero. Es decir, no podemos dividir un número por cero, porque no tiene sentido dentro del conjunto de los números reales.

EJEMPLOS

1. $f(x) = \frac{3x+5}{x-1}$
2. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x-3}$
3. $f(x) = \frac{2x+9}{x^2+2x+5}$

4. FUNCIONES IRRACIONALES

Son raíces de funciones $f(x) = \sqrt[n]{\text{una función}}$

El dominio de estas funciones depende del grado de la raíz de modo que:

- Si el grado de la raíz es par: el dominio de la función serán los valores de x que hacen que el radicando sea mayor o igual a cero.
- Si el grado de la raíz es impar: el dominio son todos los números reales.

EJEMPLOS

1. $f(x) = \sqrt{x-7}.$
2. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}.$
3. $f(x) = \sqrt{x^2-2x-3}.$

Un poco de historia: el número e

La siguiente aparición de e es algo dudosa. En 1647, Saint-Vincent calculó el área bajo la hipérbola rectangular. Si reconoció la conexión con los logaritmos es una cuestión abierta a debate, e incluso si lo hizo, no hubo razón para que tratara con e explícitamente. Quien sí comprendió la relación entre la hipérbola rectangular y el logaritmo fue Huygens allá por 1661, al estudiar el problema del área bajo la curva $yx = 1$. El número e es aquel valor de abscisa a tomar para que el área bajo esta curva a partir de 1 sea igual a 1. Esta es la propiedad que hace que e sea la base de los logaritmos naturales, y si bien no era comprendida del todo por los matemáticos de aquel entonces, de a poco iban acercándose a su comprensión.

Sin embargo, y tal vez inesperadamente, no es a través de los logaritmos que e es descubierto, sino del estudio del *interés compuesto*, problema abordado por Jacob Bernoulli en 1683. Si se invierte una *Unidad Monetaria* (que abreviaremos en lo sucesivo como *UM*) con un interés del 100% anual y se pagan los intereses una vez al año, se obtendrán 2 UM. Si se pagan los intereses 2 veces al año, dividiendo el interés entre 2, la cantidad obtenida es 1 UM multiplicado por 1,5 dos veces, es decir 1 UM x $1{,}50^2$ = 2,25 UM. Si dividimos el año en 4 períodos (trimestres), al igual que la tasa de interés, se obtienen 1 UM x $1{,}25^4$ = 2,4414... En caso de pagos mensuales el monto asciende a 1 UM x $(1+\frac{1}{12})^{12}$ = 2,61303...UM. Por tanto, cada vez que se aumenta la cantidad de períodos de pago en un factor de *n* (que tiende a crecer sin límite) y se reduce la tasa de interés en el período, en un factor de $\frac{1}{n}$, el total de unidades monetarias obtenidas estará dado por la siguiente expresión:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Fuente:
https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_e

4. FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARITMO

$$f(x) = e^x \qquad f(x) = \ln x$$

El **dominio** de la función exponencial es todo $\mathbb{R}$.
El **dominio** de la función logaritmo son todos los valores positivos de x.

OJO Si estamos calculando el logaritmo de una función, el dominio serán los valores de x que hacen positiva dicha función

EJEMPLOS

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

$$f(x) = \ln(1 - x^2)$$

5. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Las funciones definidas a trozos utilizan diferentes expresiones según los distintos valores de x.
Un ejemplo de función definida a trozos es

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & x < 3 \\ x - 4 & x \geq 3 \end{cases}$$

6. FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número nos permite conocer su valor sin importarle el signo que tiene.
Por ejemplo $|5|=|-5|=5$.
Resulta especialmente práctico cuando se habla, por ejemplo, de distancias.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

EJEMPLOS

Expresar como una función definida a trozos la función $f(x)=|x+5|$.

$$f(x) = \begin{cases} x+5 & x \geq -5 \\ -x-5 & x < -5 \end{cases}$$

Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 0 \\ \frac{1}{x^2+2x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Concepto intuitivo de límite

En muchas ocasiones nos va a interesar conocer cómo se comporta una función "cerca" de un punto, o más precisamente, "tan cerca como queramos" de un punto.

Queremos resolver cuestiones del tipo:

- Dada la función $f(x)=2x+1$. En el valor $x=2$, se cumple que $f(2)=5$. Si nos acercamos mucho a 2 (tomando valores cercanos), los valores de la función que obtengo ¿se acercan también a 5?.
- Una función que no está definida en un punto, ¿es posible conocer que valores toma dicha función cerca de ese punto?.

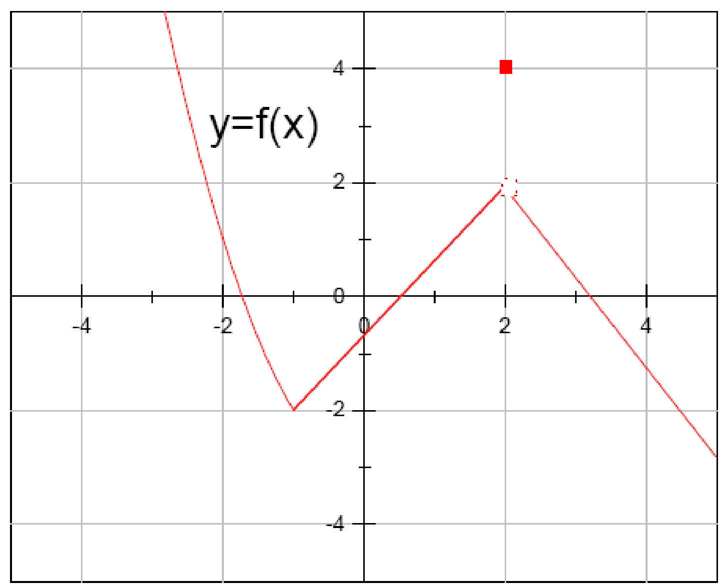
Concepto intuitivo de límite

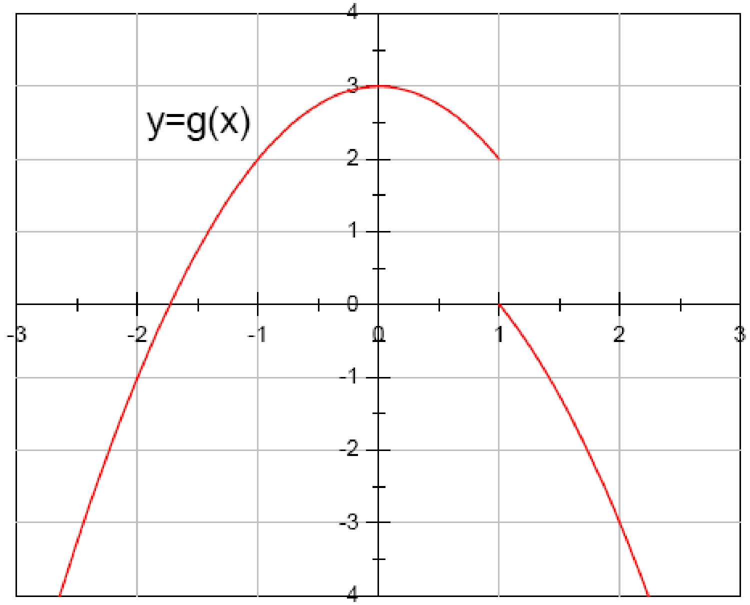
Consideremos la función *f(x)=2x+1*, vamos a tomar valores muy cercanos a *x=2* (algo más grandes y algo más pequeños) para ver qué ocurre con la función:

Valores más pequeños que 2	*F(x)=2x+1*	*F(x)=2x+1*	Valores más grandes que 2
1	2(1)+1=3	2(2.1)+1=5.2	2.1
1.9	2(1.9)+1=4.8	2(2.01)+1=5.02	2.01
1.99	2(1.99)+1=4.98	2(2.001)+1=5.002	2.001
1.999	2(1.999)+1=4.998	2(2.0001)+1=5.0002	2.0001
1.9999	2(1.9999)+1=4.9998	2(2.00001)+1=5.00002	2.00001
↓	↓	↓	↓
2	5	5	2

$$\lim_{x\to 2} 2x+1 = 5$$

Concepto de límite a través de la gráfica de una función.





¿Qué valor toma la gráfica en el punto $x=2$?. ¿Qué valor toma la función cuando nos acercamos al punto $x=2$ por la derecha?, ¿Y por la izquierda?.

¿A qué valor se acerca la función cuando nos aproximamos a 1 por la derecha?, ¿y por la izquierda?.

Límites laterales

Si al tomar valores de x a la derecha de x_0, cuyas distancias al punto x_0 tienden a cero, los correspondientes valores de una función $f(x)$ tienden a un número real L^+, diremos que la función tiene un **límite lateral por la derecha** de x_0 y escribiremos

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L^+$$

Si al tomar valores de x a la izquierda de x_0, cuyas distancias al punto x_0 tienden a cero, los correspondientes valores de una función $f(x)$ tienden a un número real L^-, diremos que la función tiene un **límite lateral por la izquierda** de x_0 y escribiremos

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L^-$$

Observaciones

- Los límites laterales no existen siempre.
- Los límites laterales, si existen, pueden ser iguales o distintos.
- Si los límites existen y son iguales diremos que la función tiene límite L cuando x tiende a x_0 y escribiremos

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Ejemplo

Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x<3 \\ x & x \geq 3 \end{cases}$$

Calcular: $\lim_{x \to 3} f(x)$ y el $\lim_{x \to 2} f(x)$.

Propiedades de los límites

- $\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim_{x\to x_0} kf(x) = k\lim_{x\to x_0} f(x)$ donde k es un número real.
- $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$ si $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

Ejemplos

Calcular los siguientes límites de funciones en los puntos indicados:

1. $\lim_{x\to 2} f(x)$ donde

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x<2 \\ 1 & x=2 \\ x^2+6x-1 & x>2 \end{cases}$$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x+5}{x-1}$.

3. $\lim_{x\to -2}(5x+3)^{x+4}$

4. $\lim_{x\to 1} \sqrt{3x^2+13x}$

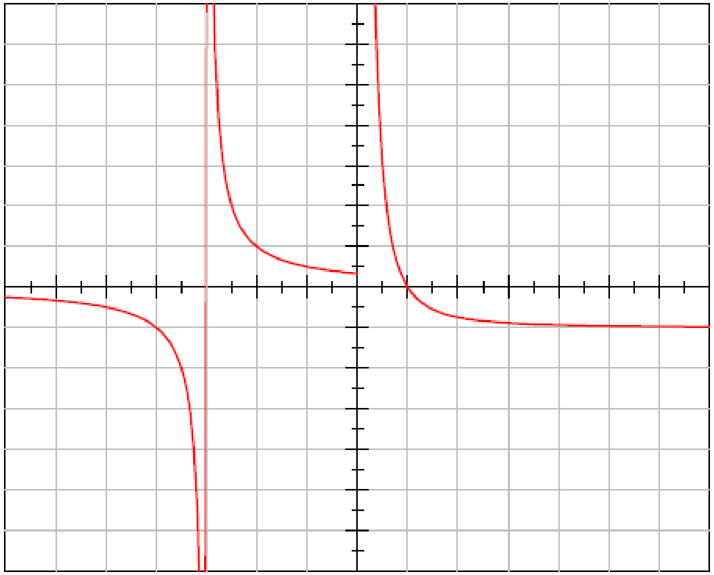
5. $\lim_{x\to 5} f(x)$ donde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{3} & x<5 \\ 6-x & x\geq 5 \end{cases}$$

Límites infinitos

- Es posible que al acercarnos (por la derecha o por la izquierda) a un punto dado a la función tome valores cada vez más grandes, en ese caso hablamos de **límites infinitos.**

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$



¿Qué ocurre cuando nos aproximamos a x=-3? Y a ¿x=0?

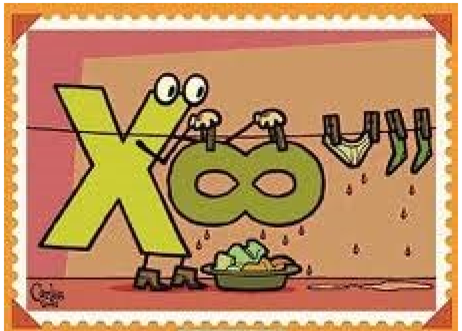
Límites en el infinito

Es posible, también, que tengamos que estudiar el comportamiento de las funciones para valores grandes de *x*. Esto nos lleva a considerar la idea de **límites en el infinito**.

Hablamos de límites de una función en el infinito si al tomar *x* suficientemente grandes la función *f(x)* tiende al número real *L*.

Por ejemplo:

$$lim_{x\to\infty}\frac{6x+4}{2x+10}=3$$



X tiende a infinito.

Operaciones con ∞

El uso del ∞ hace que tengamos que especificar el resultado de algunas operaciones en las que aparece el infinito y el cero.

$$k + \infty = \infty \qquad k - \infty = -\infty \qquad \infty + \infty = \infty$$

$$\infty \cdot \infty = \infty \qquad -\infty \cdot \infty = -\infty \qquad \frac{\infty}{k} = \infty \text{ si } k > 0$$

$$\frac{k}{\infty} = 0 \qquad k^{\infty} = \infty \text{ si } k > 1 \qquad k^{\infty} = 0 \text{ si } 0 \leq k < 1$$

$$\frac{k}{0} = \infty \qquad \frac{0}{k} = 0$$

Indeterminaciones

Cuando al sustituir en el límite de una función obtenemos alguna de las siguientes expresiones

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \infty - \infty \quad 0 \cdot \infty \quad 1^{\infty}$$

decimos que tenemos una **indeterminación**. Este nombre viene del hecho de que su resultado no está determinado, es decir, cambia según la función que estemos considerando.

Caso 1: Indeterminación *{0/0}*

Si al calcular un límite de un cociente de polinomios, obtenemos una indeterminación del tipo *{0/0}*, debemos factorizar ambos polinomios y simplificar las expresiones obtenidas.

- **Ejemplo:**

Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \left\{\frac{0}{0}\right\}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Caso 2: Indeterminación {∞/∞}

- Si tenemos un cociente de polinomios cuyo límite es ∞, podemos resolver la indeterminación dividiendo cada término del numerador y denominador por la x de mayor grado y simplificando.

Ejemplo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^4}-\frac{3x}{x^4}+\frac{2}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}-\frac{4x}{x^4}+\frac{3}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}}{1-\frac{4}{x^3}+\frac{3}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0$$

➢Si el polinomio del numerador tiene mayor grado que el denominador: el cociente tiende a infinito.
➢Si el polinomio del numerador tiene menor grado que el denominador: el cociente tiende a cero.
➢Si ambos polinomios tienen el mismo grado: el valor del límite depende de los coeficientes de los términos de mayor grado

Caso 3: Indeterminación *{∞- ∞}*

Cuando obtenemos una indeterminación como diferencia de infinitos.

Podemos realizar las siguientes operaciones:

- Si se presenta como diferencia de raíces, multiplicamos y dividimos por el conjugado.
- En caso contrario, operamos para intentar transformarla en una indeterminación del tipo *{∞/∞}* o *{0/0}*, y aplicamos las técnicas de dichas indeterminaciones.

Ejemplo:

$$\text{lím}_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x-2}-\sqrt{x^2-3x}) =$$

$$\text{lím}_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x-2}-\sqrt{x^2-3x}) =$$

$$= \text{lím}_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+5x-2}-\sqrt{x^2-3x})(\sqrt{x^2+5x-2}+\sqrt{x^2-3x})}{\sqrt{x^2+5x-2}+\sqrt{x^2-3x}} = \text{lím}_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+5x-2})^2-(\sqrt{x^2-3x})^2}{\sqrt{x^2+5x-2}+\sqrt{x^2-3x}} =$$

$$= \text{lím}_{x\to\infty} \frac{(x^2+5x-2)-(x^2-3x)}{\sqrt{x^2+5x-2}+\sqrt{x^2-3x}} = \text{lím}_{x\to\infty} \frac{8x-2}{\sqrt{x^2+5x-2}+\sqrt{x^2-3x}} = \{\infty-\infty\} =$$

$$= \text{lím}_{x\to\infty} \frac{8\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+5x-2}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2-3x}{x^2}}} = \frac{8}{2} = 4$$

Caso 3: Indeterminación *{∞- ∞}*

- Ejemplo

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{3}{x+1}-\frac{12}{x^2+6x+5}\right)$$

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{3}{x+1}-\frac{12}{x^2+6x+5}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{3(x+5)-12}{(x+1)(x+5)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{3x+3}{(x+1)(x+5)}=\lim_{x\to -1}\frac{3(x+1}{(x+1)(x+5)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{3}{x+5}=\frac{3}{4}$$

Caso 4: Indeterminación *{0 · ∞}*

Cuando tengamos indeterminaciones de este tipo operaremos para transformar en una indeterminación del tipo $\{\infty/\infty\}$ o $\{0/0\}$. En muchas ocasiones esto se conseguirá simplemente realizando las operaciones que nos indica el límite.

Una operación que nos puede ayudar a conseguir esta transformación es:

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to\infty}(x+3)\sqrt{\frac{1}{9x^2+2}}$$

$$\lim_{x\to\infty}(x+3)\sqrt{\frac{1}{9x^2+2}} = \{\infty\cdot 0\} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x+3)^2}{9x^2+2}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

Caso 5: Indeterminación *{1∞}*

La indeterminación del tipo *{1∞}* se resuelve mediante el número *e*, que se define mediante el siguiente límite:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Si tenemos que calcular $\lim_{x\to\infty}(f(x))^{g(x)}$

donde $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ $\quad \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$

podemos utilizar esta definición para resolver, de forma sencilla, este caso de indeterminación:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x))^{g(x)} = \{1^\infty\} \qquad \lim_{x\to\infty}(f(x))^{g(x)} = e^L$$

donde $L = \lim_{x\to\infty}[(f(x)-1)g(x)]$

Ejemplo

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+6}\right)^{x^5+1}$$

Por un lado

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+6}\right)=1\\ \lim_{x\to\infty}x^5+1=\infty\end{aligned}\right\}\qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+6}\right)^{x^5+1}=1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+6}\right)^{x^5+1}=e^{L}$$

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+6}-1\right)(x^5+1)=\lim_{x\to\infty}\frac{-9}{x+6}(x^5+1)=\lim_{x\to\infty}\frac{-9(x^5+1)}{x+6}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=-\infty$$

Ejemplos

1. $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$
2. $\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$
3. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+x-2}{4x^3-1}$
4. $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x-2}{9x+7}$
5. $\lim_{x\to \infty}(\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{x^2+4})$
6. $\lim_{x\to 2} \left(\frac{2}{x^2-2x}-\frac{1}{x-2}\right)$

Soluciones

1. $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2+3x+9}{(x+3)} = \frac{9}{2}$

2. $\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})} =$
   $\lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-(x^2+5)} = \lim_{x\to 2} 3 + \sqrt{x^2+5} = 6$

3. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+x-2}{4x^3-1} = 0$

4. $\lim_{x\to \infty} \frac{3x-2}{9x+7} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

5. $\lim_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+2x-3} - \sqrt{x^2+4}) = \lim_{x\to \infty} \frac{2x-7}{\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+4}} = 1$

6. $\lim_{x\to 2} \left(\frac{2}{x^2-2x} - \frac{1}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{x(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{2}$

Ejemplos

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x^3+x^2-2x+1}{x^2-1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^4+3x^3-2x^2-11}{x^4-x}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-2}{x+9}\right)^x$$

$$\lim_{x \to \infty} x\sqrt{x+1}-x$$