Mecánica Clásica
Tema 1
Configuración y actitud del sólido rígido

EIAE

25 de septiembre de 2011

Referencias

- Material de la asignatura (Disponibles gradualmente en Moodle)
  - Transparencias de teoría, enunciados y soluciones de problemas
- Material de apoyo
  - M. Prieto Alberca, *Curso de Mecánica Racional: Cinemática y Estática,* ADI, Madrid, 1990.
  - W.T. Thomson, *Introduction to Space Dynamics*, Dover 1986.
  - Beer y Johnston, *Mecánica Vectorial para Ingenieros*. Tomo 2 Dinámica. McGraw-Hill.
  - H. Schaub y J. Junkins, *Analytical Mechanics of Space Systems,* AIAA, Reston, Virginia, 2003. (cap. 3 y 4)
  - L. Meirovich, Methods of Analytical Dynamics, McGraw-Hill 1970 (cap. 3 y 4).
  - Jesús Peláez, *Problemas de Mecánica,* Publ. ETSIA

Modelos

Partícula o Punto: Un cuerpo cuyas dimensiones u orientación no influyen en el movimiento. Se modela como un punto geométrico.

Sólido rígido: Conjunto de partículas finito o infinito cuyas distancias relativas se mantienen constantes (y conocidas):

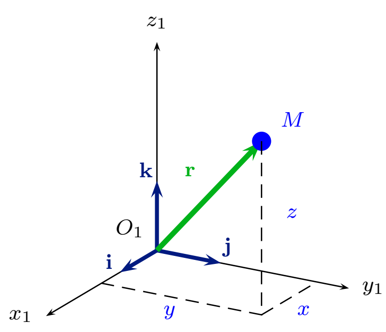
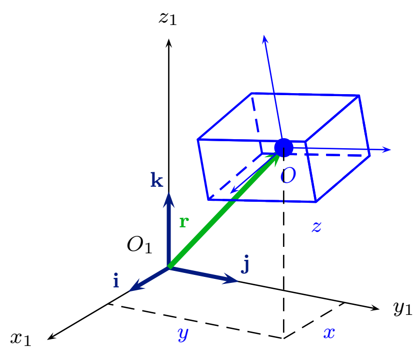
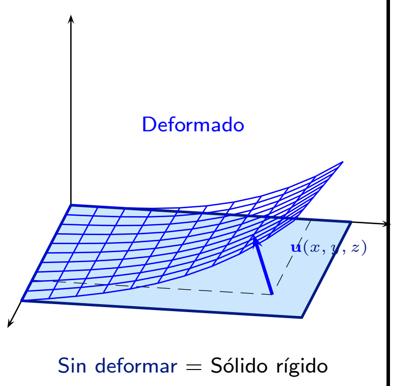
$$|\mathbf{r}_{ij}| = \text{Const.} \quad \forall\, i, j$$

- En cinemática, los puntos no tienen masa; en dinámica sí. En dinámica se usa también un modelo continuo, además del de puntos.
- Un sistema de referencia cumple las propiedades anteriores, y en cinemática se considera equivalente a un sólido.
- Para estudiar el movimiento de un sólido, se toma un sistema de referencia rígidamente unido a él: en este sistema, las coordenadas de los puntos del sólido son siempre constantes.
- Los sólidos reales sufren deformaciones, pero suelen ser muy pequeñas, y en Mecánica Clásica se desprecian.

Grados de libertad

Grados de libertad: Número de parámetros independientes necesarios para describir la configuración de un sistema.

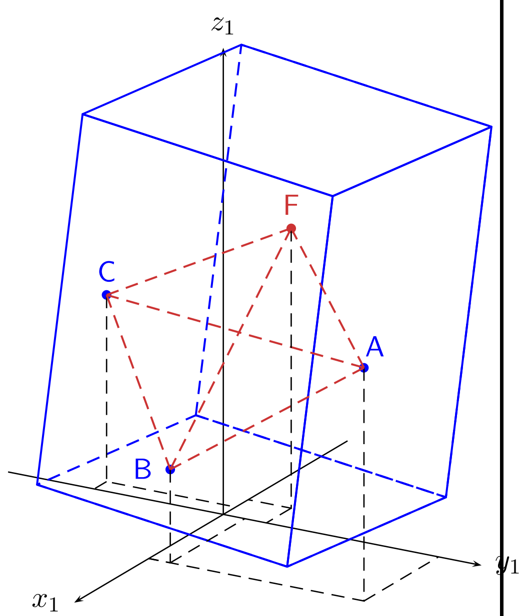
Para sistemas libres (sin ligaduras):

Particula	Sólido rígido	Sólido deformable
		
GDL: 3	GDL: 6 (Mov. Plano: 3)	GDL: ∞

Grados de Libertad de un Sólido

- Un sólido puede tener ∞ puntos, pero solo hacen falta 6 parámetros para determinar su configuración.

Pto	Coord	GDL	Ligaduras
A	x_A, y_A, z_A	3	-
B	x_B, y_B, z_B	2	$\lvert\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B\rvert = d_{AB}$
C	x_C, y_C, z_C	1	$\lvert\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C\rvert = d_{AC}$ $\lvert\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C\rvert = d_{BC}$
⋮	⋮	⋮	⋮
F	x_F, y_F, z_F	0	$\lvert\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_F\rvert = d_{AF}$ $\lvert\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_F\rvert = d_{BF}$ $\lvert\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_F\rvert = d_{CF}$



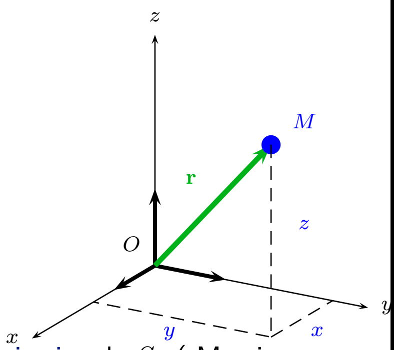
Sistemas de referencia y vectrices

Vector posición de la partícula M en el sistema de referencia $S_1 \triangleq Oxyz$

$$\mathbf{r}^M = \mathbf{OM} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

Coordenadas cartesianas de la partícula M en S_1

$$x = \mathbf{r}^M \cdot \mathbf{i}\,, \quad y = \mathbf{r}^M \cdot \mathbf{j}\,, \quad z = \mathbf{r}^M \cdot \mathbf{k}$$



Vectriz $\mathcal{R}_1$ del sistema de referencia S_1: matriz fila de los vectores unitarios de S_1 (¡Matriz cuyas componentes son vectores!)

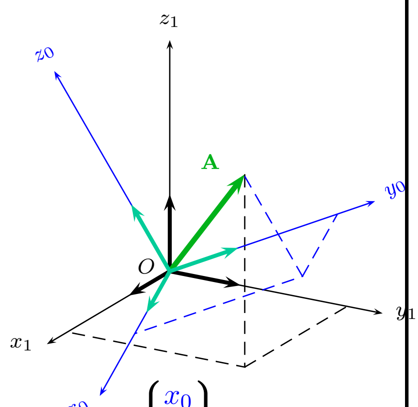
$$\mathcal{R}_1 = \lfloor \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rfloor$$

Matriz de componentes X_1^M del vector $\mathbf{r}^M$ en S_1: Matriz columna de las coordenadas cartesianas de M en S_1

$$X_1^M = \lfloor x, y, z \rfloor^\top$$

Vectrices y matrices de componentes

- El vector $\mathbf{A}$ es una entidad geométrica del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$
- Se maneja mediante su matriz de componentes en un sistema de referencia determinado
- Para evitar ambiguedades, se especifica el sistema mediante su vectriz

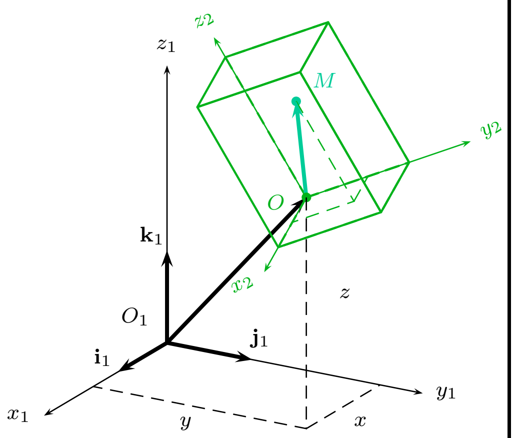


$$\mathbf{A} = x_1\,\mathbf{i}_1 + y_1\,\mathbf{j}_1 + z_1\,\mathbf{k}_1 = \lfloor \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1 \rfloor \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \mathcal{R}_1 \cdot X_1^A =$$

$$= x_0\,\mathbf{i}_0 + y_0\,\mathbf{j}_0 + z_0\,\mathbf{k}_0 = \lfloor \mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0 \rfloor \cdot \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} = \mathcal{R}_0 \cdot X_0^A$$

Configuración del sólido rígido

- Para especificar la configuración de un sólido:
  - Se escoge un punto O del sólido (no necesariamente el CDM)
  - Se le fija un sistema de referencia $S_2 \triangleq Ox_2y_2z_2$
- Así, el vector posición de un punto cualquiera M del sólido es:



$$\begin{aligned}\mathbf{O_1M} &= \mathbf{O_1O} + \mathbf{OM} = \\ &= x\,\mathbf{i}_1 + y\,\mathbf{j}_1 + z\,\mathbf{k}_1 + \xi\,\mathbf{i}_2 + \eta\,\mathbf{j}_2 + \zeta\,\mathbf{k}_2 = \\ &= \mathcal{R}_1 \cdot X_1^O + \mathcal{R}_2 \cdot X_2^M\end{aligned}$$

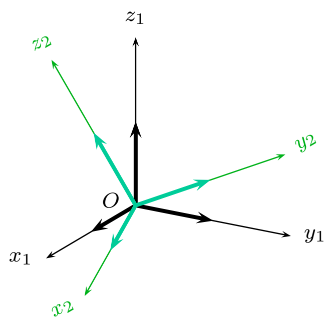
Nótese que

$$X_2^M = \lfloor \xi, \eta, \zeta \rfloor^\top$$

es constante porque M es parte del sólido rígido. X_1^O y $\mathcal{R}_2$ cambian al moverse el sólido.

Matriz de rotación del sólido rígido

Para calcular $\mathcal{R}_1 \cdot X_1^O + \mathcal{R}_2 \cdot X_2^M$, hay que conocer $\mathcal{R}_2(\mathcal{R}_1)$ ó $\mathcal{R}_1(\mathcal{R}_2)$,



para tenerlos proyectados en los mismos ejes.

Los cosenos directores de los versores de $\mathcal{R}_2$ son

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_2 &= (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1)\,\mathbf{i}_1 + (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_1)\,\mathbf{j}_1 + (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_1)\,\mathbf{k}_1 \\ \mathbf{j}_2 &= (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_1)\,\mathbf{i}_1 + (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_1)\,\mathbf{j}_1 + (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_1)\,\mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 &= (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1)\,\mathbf{i}_1 + (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1)\,\mathbf{j}_1 + (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1)\,\mathbf{k}_1\end{aligned}$$

En forma matricial,

$$\lfloor \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2 \rfloor = \lfloor \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1 \rfloor \cdot \left[\begin{array}{c|c|c} (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1) \\ (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1) \\ (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \end{array}\right]$$

Matriz de rotación del sólido S_2 respecto a S_1:

$$\boxed{\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 \cdot \mathsf{Q}_{12}} \qquad S_1 \xrightarrow{\mathsf{Q}_{12}} S_2$$

Grados de libertad del sólido rígido libre

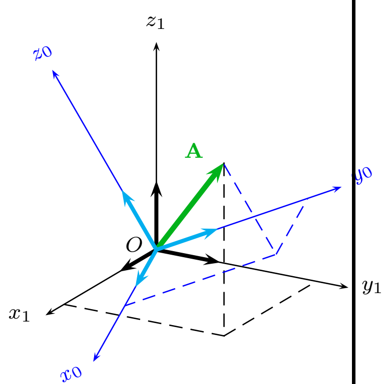
- Vector posición de un punto M de S_2 en ejes fijos:

$$\mathbf{O_1M} = \mathcal{R}_1 \cdot X_1^O + \mathcal{R}_2 \cdot X_2^M = \mathcal{R}_1 \cdot X_1^O + \mathcal{R}_1 \cdot \mathsf{Q}_{12} \cdot X_2^M =$$

$$= \mathcal{R}_1 \cdot \left(X_1^O + \mathsf{Q}_{12} \cdot X_2^M \right)$$

- X_2^M es constante: identifica de qué punto del sólido se trata.
- La configuración requiere 12 parámetros: 3 (X_1^O) + 9 (Q_{12})
- Solo 3 componentes de Q_{12} son independientes. Sus columnas son las matrices de componentes de los versores de S_2, que cumplen 6 condiciones:
  - Ortogonales: $\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_2 = 0 \quad \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_2 = 0 \quad \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_2 = 0$
  - Unitarios: $\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_2 = 1 \quad \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_2 = 1 \quad \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_2 = 1$
- Un sólido rígido tiene 6 Grados de Libertad:
  - 3 coordenadas de un punto X_1^O — Traslación
  - 3 de la matriz de rotación Q_{12} — Rotación

Matriz de giro y cambio de base



Q_{10} determina la orientación de un sistema de referencia S_0 ($\equiv$ Sólido) respecto a otro S_1: Puede usarse para cambiar de ejes un vector

$$\mathbf{A} = \lfloor \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1 \rfloor \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \lfloor \mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0 \rfloor \cdot \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} =$$

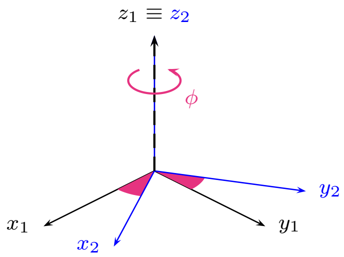
$$= \mathcal{R}_1 \cdot X_1^A = \mathcal{R}_0 \cdot X_0^A$$

Como $\quad \mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_1 \cdot \mathsf{Q}_{10} \qquad \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_0 \cdot \mathsf{Q}_{10}^\top$,

$$\mathcal{R}_1 \cdot \overbrace{X_1^A} = \mathcal{R}_0 \cdot X_0^A = \mathcal{R}_1 \cdot \overbrace{\mathsf{Q}_{10} \cdot X_0^A} \quad \Rightarrow \quad \boxed{X_1^A = \mathsf{Q}_{10} \cdot X_0^A}$$

$$\mathcal{R}_1 \cdot X_1^A = \mathcal{R}_0 \cdot \underbrace{\mathsf{Q}_{10}^\top \cdot X_1^A} = \mathcal{R}_0 \cdot \underbrace{X_0^A} \quad \Rightarrow \quad \boxed{X_0^A = \mathsf{Q}_{10}^\top \cdot X_1^A}$$

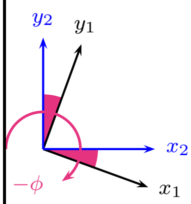
Giro respecto a un eje fijo



Giro ϕ alrededor del eje Oz: $S_1 \to S_2$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
\mathbf{i}_2 & = & \cos\phi\,\mathbf{i}_1 & + & \sin\phi\,\mathbf{j}_1 & + & 0\cdot\mathbf{k}_1 \\
\mathbf{j}_2 & = & -\sin\phi\,\mathbf{i}_1 & + & \cos\phi\,\mathbf{j}_1 & + & 0\cdot\mathbf{k}_1 \\
\mathbf{k}_2 & = & 0\cdot\mathbf{i}_1 & + & 0\cdot\mathbf{j}_1 & + & 1\cdot\mathbf{k}_1
\end{array}$$

$$\mathcal{R}_2 = \lfloor \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2 \rfloor = \lfloor \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1 \rfloor \cdot \left[\begin{array}{c|c|c} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{Q}_{12}$$



Giro inverso:

$$\lfloor \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1 \rfloor = \lfloor \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2 \rfloor \cdot \left[\begin{array}{c|c|c} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \mathcal{R}_2 \cdot \mathbf{Q}_{21} = \mathcal{R}_2 \cdot \mathbf{Q}_{12}^{\top}$$

Propiedades de las matrices de giro

- El elemento nulo del grupo de los giros es la matriz unidad:

$$\mathbf{Q}_{11} = \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Obvio:} \quad \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{U}$$

- La composición de giros se hace con el producto de matrices:

$$\left.\begin{array}{ll} S_1 \to S_2: & \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{Q}_{12} \\ S_2 \to S_3: & \mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_2 \cdot \mathbf{Q}_{23} \end{array}\right\}$$

$$S_1 \to S_3: \quad \mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_1 \cdot \boxed{\mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{23}} = \mathcal{R}_1 \cdot \boxed{\mathbf{Q}_{13}}$$

- No es conmutativa, pero sí asociativa, como el producto de matrices.

$$\mathbf{Q}_{14} = \mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{23} \cdot \mathbf{Q}_{34} = \underbrace{(\mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{23})}_{\mathbf{Q}_{13}} \cdot \mathbf{Q}_{34} = \mathbf{Q}_{12} \cdot \underbrace{(\mathbf{Q}_{23} \cdot \mathbf{Q}_{34})}_{\mathbf{Q}_{24}}$$

Las matrices de rotación son ortogonales

- Giro directo $S_1 \xrightarrow{\mathbf{Q}_{12}} S_2$:

$$\lfloor \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2 \rfloor = \lfloor \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1 \rfloor \cdot \left[\begin{array}{c|c|c} (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1) \\ (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1) \\ (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \end{array} \right]$$

  - Las columnas son las componentes de los versores girados en ejes fijos
  - Las filas, las de los versores fijos en ejes girados

- Giro inverso $S_2 \xrightarrow{\mathbf{Q}_{21}} S_1$: Las filas/columnas están intercambiadas.

$$\lfloor \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1 \rfloor = \lfloor \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2 \rfloor \cdot \left[\begin{array}{c|c|c} (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \\ (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \\ (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1) & (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \end{array} \right]$$

La matriz del giro inverso es la traspuesta de la del directo:

$$\boxed{\mathbf{Q}_{12} = \mathbf{Q}_{21}^{\top}} \qquad \boxed{\mathbf{Q}_{21} = \mathbf{Q}_{12}^{\top}}$$

Las matrices de rotación son ortogonales

- Se considera el giro identidad $S_1 \xrightarrow{\mathbf{Q}_{11}} S_1$ como composición de un giro $S_1 \xrightarrow{\mathbf{Q}_{12}} S_2$ y su inverso $S_2 \xrightarrow{\mathbf{Q}_{21}} S_1$

$$\mathbf{Q}_{11} = \mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{21} = \mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{12}^{\top} = \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{Q}_{12}^{-1} = \mathbf{Q}_{12}^{\top}}$$

  La matriz inversa de una matriz de giro es su traspuesta .

- Por esta propiedad $\mathbf{Q}_{12}$ es ortogonal. Pertenece a $SO(3)$ (Special Orthogonal Group) en $\mathbb{R}^3$, no conmutativo, con elemento neutro $\mathbf{U}$ y elemento inverso [En la notación de álgebra, $\mathcal{O}^{+}(3, \mathbb{R})$].

- Las matrices con $|\mathbf{Q}| = -1 \in \mathcal{O}^{-}(3, \mathbb{R})$. No son matrices de rotación, sino de rotación + simetría .
  Ej: además de girar un coche, lo transforman en coche inglés.

Propiedades de la matriz de rotación

- Las matrices de rotación cumplen $\boxed{|\mathsf{Q}| = 1}$
  - Por ser ortogonales, $|\mathsf{Q}\cdot\mathsf{Q}^{\top}| = |\mathsf{U}| = 1 \;\rightarrow\; |\mathsf{Q}| = \pm 1\,.$
  - Las de rotación,

$$|\mathsf{Q}_{12}| = |\,[\mathbf{i}_2 \mid \mathbf{j}_2 \mid \mathbf{k}_2]\,| = \left|\begin{bmatrix}\mathbf{i}_1\\ \hline \mathbf{j}_1\\ \hline \mathbf{k}_1\end{bmatrix}\right| =$$

$$= \mathbf{i}_2\cdot(\mathbf{j}_2\wedge\mathbf{k}_2) = \mathbf{i}_1\cdot(\mathbf{j}_1\wedge\mathbf{k}_1) = \boxed{+}1$$

  por ser el volumen de un cubo de lado 1.

- $|\mathsf{Q}-\mathsf{U}| = |\mathsf{Q}-\mathsf{Q}\cdot\mathsf{Q}^{\top}| = |\mathsf{Q}|\cdot|\mathsf{U}-\mathsf{Q}^{\top}| = |\mathsf{U}-\mathsf{Q}^{\top}| =$

$$= |\mathsf{U}-\mathsf{Q}| = -|\mathsf{Q}-\mathsf{U}| \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{|\mathsf{Q}-\mathsf{U}| = 0}$$

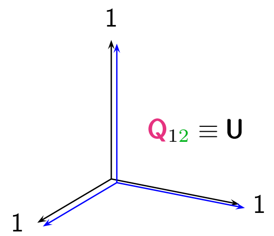
Propiedades de la matriz de rotación

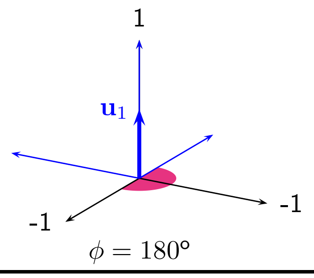
- Los autovalores cumplen
  - $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |\mathsf{Q}_{12}| = 1$
  - $\mathsf{Q}_{12}\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i\,;\quad \overline{\mathbf{u}}_i^{\top}\underbrace{\overline{\mathsf{Q}}_{12}^{\top}\mathsf{Q}_{12}}_{\mathsf{U}}\mathbf{u}_i = \lambda_i\overline{\lambda}_i\,\overline{\mathbf{u}}_i^{\top}\cdot\mathbf{u}_i \quad\Rightarrow\quad \lambda_i\overline{\lambda}_i = 1$

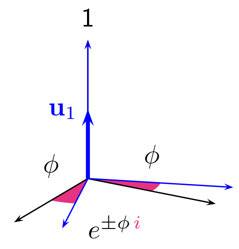
($\overline{a}$: complejo conjugado de a).

- Autovalores posibles:

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$	$\lambda_1 = 1,\;\; \lambda_2 = \lambda_3 = -1$	$\lambda_1 = 1,\;\; \lambda_{1,2} = e^{\pm i\phi}$
trivial: $\mathsf{Q}_{12} = \mathsf{U}$	giro de 180° alrededor de $\mathbf{u}_1$	giro ϕ alrededor de $\mathbf{u}_1$







Teorema de Euler

- El movimiento más general de un sólido rígido con un punto fijo es un giro de ángulo ϕ alrededor de un eje que pasa por el punto fijo.
  - Eje: dirección del autovector $\mathbf{u}_1$ asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ de $\mathbf{Q}_{12}$
  - Ángulo de giro: exponente ϕ del par de autovalores complejos conjugados $\lambda_{2,3} = e^{\pm\phi\, i}$ de $\mathbf{Q}_{12}$
- Parametrización del giro $\mathbf{Q}_{12}$: (9)
  - Parámetros eje-ángulo de Euler: $\phi,\ \mathbf{a} = \frac{\mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|}$ (4)
  - Vector principal de rotación: $\boldsymbol{\phi} = \phi\,\mathbf{a}$ (3)
  - Vector de Gibbs (Par. Rodrigues): $\mathbf{g} = \tan\frac{\phi}{2}\,\mathbf{a}$ (3)
  - Cuaternios: (Par. Euler) $\mathbf{q} = \left(\cos\frac{\phi}{2}, \sin\frac{\phi}{2}\,\mathbf{a}\right)$ (4)
  - Ángulos de Euler: ψ, θ, φ (3)
- Todas las parametrizaciones mínimas (3) tienen alguna singularidad

Matriz de giro con ángulos de Euler

- La rotación del sólido rígido tiene 3 grados de libertad
- La matriz de giro tiene 3 parámetros independientes
- $\mathbf{Q}$ se puede formar con 3 giros independientes sucesivos:

$$1 \xrightarrow{\psi} 2 \xrightarrow{\theta} 3 \xrightarrow{\phi} 4 \qquad \mathbf{Q}_{14} = \mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{23} \cdot \mathbf{Q}_{34}$$

- 2º y 3er giros alrededor de las nuevas posiciones de los ejes
- Se pueden repetir ejes, pero no seguidos (sería el mismo)
- 12 combinaciones posibles[a]. Más comunes:

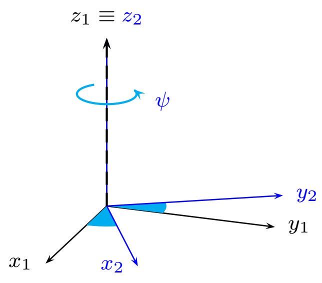
zxz	Ángulos de Euler clásicos	Maquinaria, Astronomía
zyz		Mecánica cuántica
zyx	Tait-Bryan	Mecánica del vuelo
xyz		VisualNastran (+), Maple (-)

[a] cfr. Peter C. Hughes, *Spacecraft Attitude Dynamics*, p. 20.

Matriz de giro con ángulos de Euler

$$\mathcal{R}_1 \xrightarrow{\psi} \mathcal{R}_2 \xrightarrow{\theta} \mathcal{R}_3 \xrightarrow{\phi} \mathcal{R}_4$$

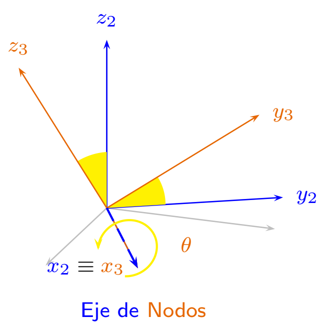
- Precesión: Giro ψ alrededor de $\mathbf{k}_1 \equiv \mathbf{k}_2$
- Nutación: Giro θ alrededor de $\mathbf{i}_2 \equiv \mathbf{i}_3$ (Eje de nodos)
- Rotación propia: Giro ϕ alrededor del eje $\mathbf{k}_3 \equiv \mathbf{k}_4$



Precesión

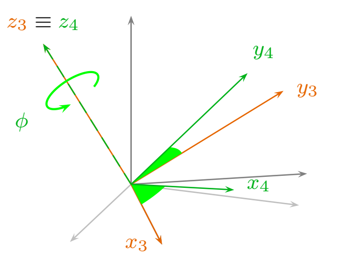
$$\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 \cdot \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{Q}_{12}$$

Matriz de giro con ángulos de Euler



Nutación

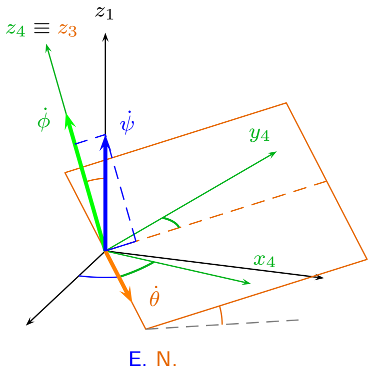
$$\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \mathcal{R}_2 \cdot \mathbf{Q}_{23}$$



Rotación propia

$$\mathcal{R}_4 = \mathcal{R}_3 \cdot \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{R}_3 \cdot \mathbf{Q}_{34}$$

Matriz de giro con ángulos de Euler



Para hallar la matriz del giro global, aplicamos la composición de giros sucesivos,

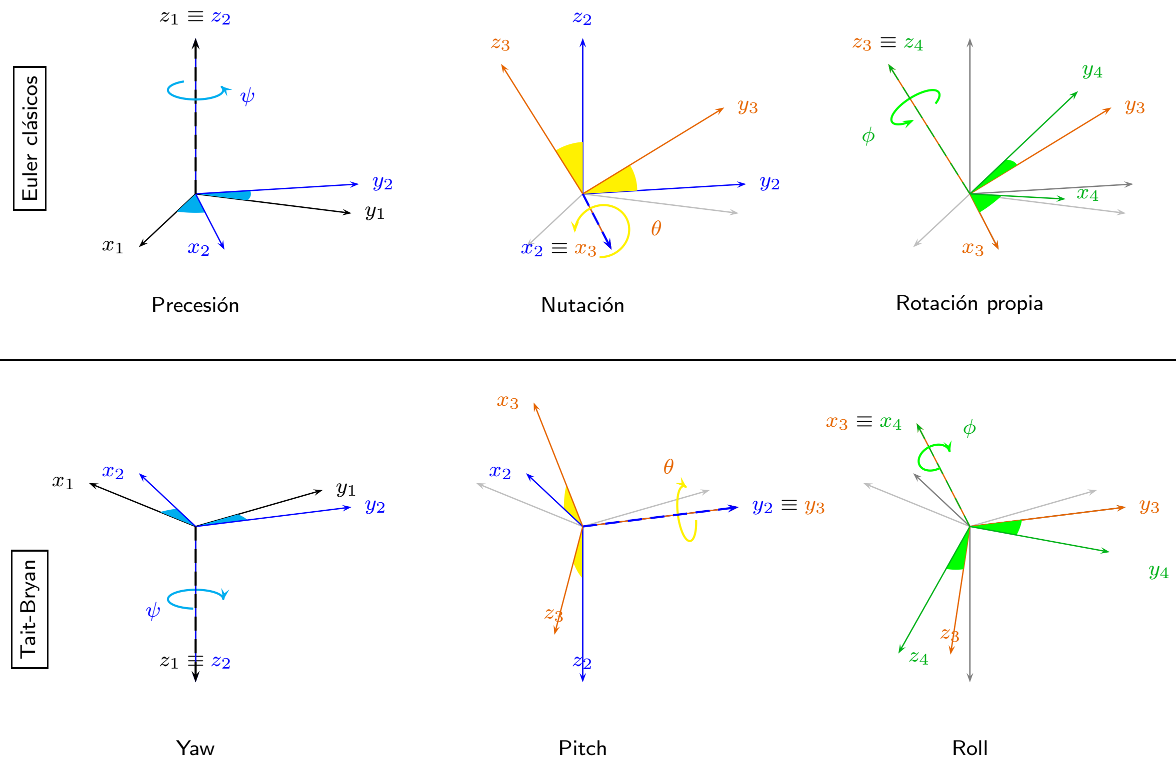
$$\mathcal{R}_4 = \overbrace{\mathcal{R}_3} \cdot \mathbf{Q}_{34} = \overbrace{\underbrace{\mathcal{R}_2} \cdot \mathbf{Q}_{23}} \cdot \mathbf{Q}_{34} =$$

$$= \underbrace{\mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{Q}_{12}} \cdot \mathbf{Q}_{23} \cdot \mathbf{Q}_{34} = \mathcal{R}_1 \cdot \mathbf{Q}_{14}$$

Calculando el producto de las tres, se obtiene $\mathbf{Q}_{14}$:

$$\begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\sin\phi\cos\theta & -\cos\psi\sin\phi - \sin\psi\cos\phi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\phi + \cos\psi\sin\phi\cos\theta & -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\phi\cos\theta & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Ángulos de Euler clásicos / Tait-Bryan



Nota: los anglosajones suelen intercambiar la ψ y la ϕ.

Sistemas de representación de la actitud

Sistema	Pros	Contras	Aplicaciones
ϕ, θ, ψ	Mínimo Intuitivo Máquinas	Singular en $\theta = 0$ Muchos sin/cos Composición difícil	Docencia, M. Orbital Pre/Postprocesado Máquinas, Robots
$\mathbf{g}$	Mínimo No sin/cos Composición fácil	∞ para π No intuitivo	Analítico
$\mathbf{q}$	Regular No sin/cos Composición fácil Normalizable ($\uparrow$)	1 redundante No intuitivo	Sistemas de control de actitud (ACS) a bordo
$\phi, \mathbf{a}$	Intuitivo	1 redundante Singular en 0 Algunos sin/cos Composición difícil	Rotaciones sobre eje fijo
$\mathbf{Q}$	Regular No sin/cos Normalizable ($\downarrow$)	6 redundantes	Analítico Cambio de ejes Multibody