Tema 0

Revisión de Señales y Sistemas en el dominio del tiempo

Contenido

Contenido

1.1. Señales

Señal:

1. Representación de información en el tiempo/espacio
2. Descriptor de la variación de una magnitud en el tiempo/espacio
   a) En tiempo continuo: $x(t)$; $t \in \Re$; $x(t) \in \mathcal{C}$
   b) Secuencias: $x[n]$; $n \in \mathcal{Z}$; $x[n] \in \mathcal{C}$

Ejemplos:

- Voltajes en un circuito eléctrico ($v(t)$)
- Presión en la menbrana de un micrófono ($p(t)$)
- Variaciones temporales de las anteriores $\left(\frac{dv(t)}{dt};\ \frac{dp(t)}{dt}\right)$
- Intensidad de los pixeles de una foto ($i[x, y]$)

1.2. Operaciones con Señales

- Suma: $x(t) + y(t) = z(t)$
  (Suma para cada valor de t (ó n))
- Producto por escalar: $\alpha x(t)$; En general, $\alpha \in \mathcal{C}$
- Producto de señales: $x(t) \cdot y(t) = z(t)$
  (Producto para cada valor de t (ó n))
- Producto escalar de señales

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt$$

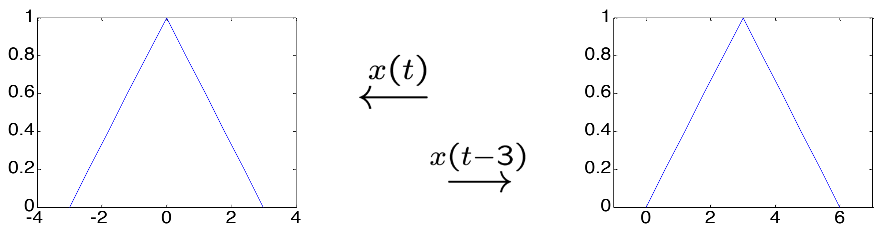
$$\langle x[n], y[n] \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y^*[n]$$

$\Rightarrow$ El espacio de señales, dotado de estas 4 operaciones, constituye un espacio de Hilbert

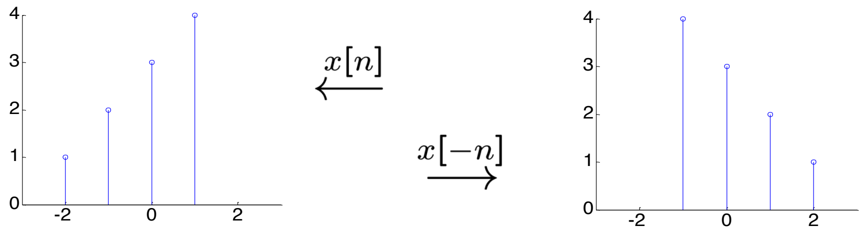
Transformaciones de la variable independiente

a) Desplazamiento temporal

• $x(t - t_0)$; $t_0 \in \Re$	• $t_0, n_0 > 0$; Despl. a derechas (retardo)
• $x[n - n_0]$; $n_0 \in \mathcal{Z}$	• $t_0, n_0 < 0$; Despl. a izquierdas (adelanto)

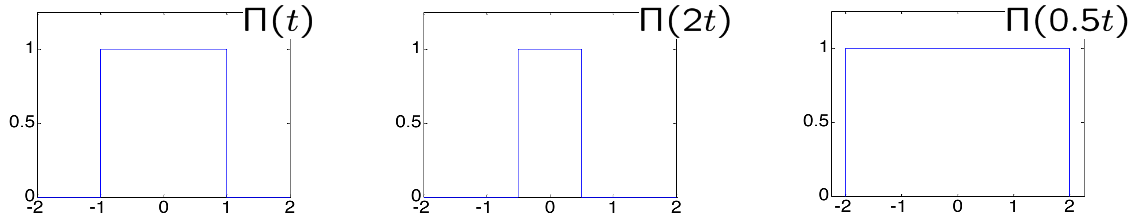


b) Abatimiento: $x(-t)$, $x[-n]$. Simetría con respecto al origen

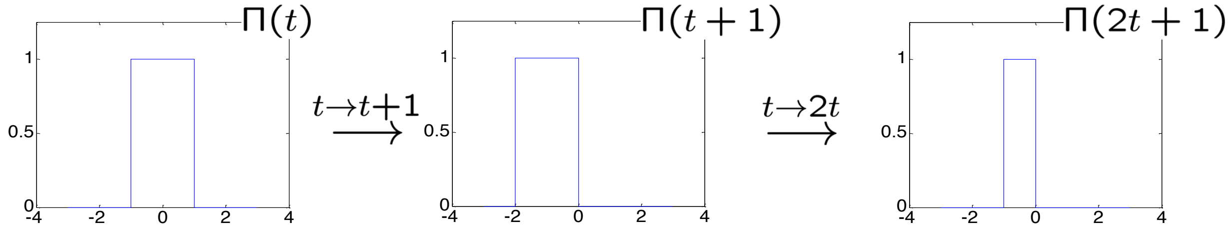


Transformaciones de la variable independiente

c) Escalado (variable continua): $x(\alpha t)$ $\begin{cases} \alpha = -1; & \text{abatimiento} \\ |\alpha| > 1; & \text{compresión} \\ |\alpha| < 1; & \text{dilatación} \end{cases}$



$\Longrightarrow$ Varias de las anteriores pueden concatenarse: $\Pi(2t+1)$



1.3. Propiedades de las Señales

a) Periodicidad: $x(t)$ ($x[n]$) es periódica si existe

$T \in \Re^+$ ($N \in \mathcal{N}$) tal que $x(t) = x(t+T) \quad \forall t$

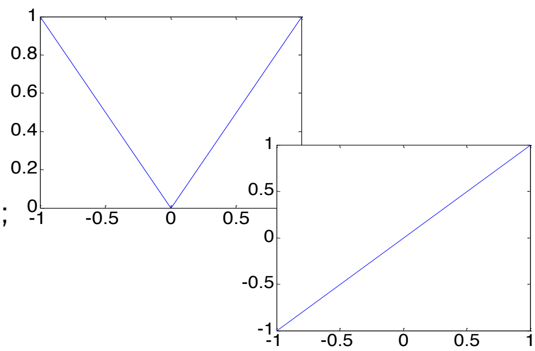
$$x[n] = x[n+N] \quad \forall n$$

(En caso contrario se dice aperiódica)

El Período fundamental es el mínimo T (N) que verifica lo anterior

b) Paridad: Propiedad de simetría respecto al eje de ordenadas

- Señal par: $x(t) = x(-t)$; $x[n] = x[-n]$
- Señal impar: $x(t) = -x(-t)$; $x[n] = -x[-n]$

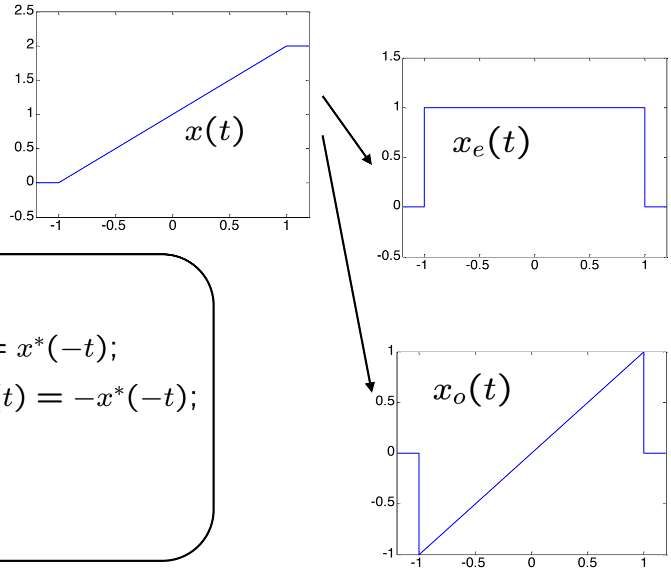


Propiedades de las Señales

Toda señal se puede descomponer en suma de una señal par y otra impar

$x_e(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]$

$x_o[n] = \frac{1}{2}\left\{x[n] - x[-n]\right\}$



c) Hermicidad:

- Señal hermítica: $x(t) = x^*(-t)$;
- Señal antihermítica: $x(t) = -x^*(-t)$;

$x_h[n] = \frac{1}{2}\left\{x[n] + x^*[-n]\right\}$

$x_a[n] = \frac{1}{2}\left\{x[n] - x^*[-n]\right\}$

d) Carácter Real o Imaginario

1.4. Caracterización de las señales

a) Valor medio temporal

$$\langle x(t)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt; \quad \langle x[n]\rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x[n]$$

b) Valor de pico: $x_p = \max_t |x(t)|$

c) Valor cuadrático o energía

$$E(x) = \langle x(t), x(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt; \quad E(x) = \langle x[n], x[n]\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Es infinita para muchas señales de interés

d) Valor cuadrático medio o potencia

$$P(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt; \quad P(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

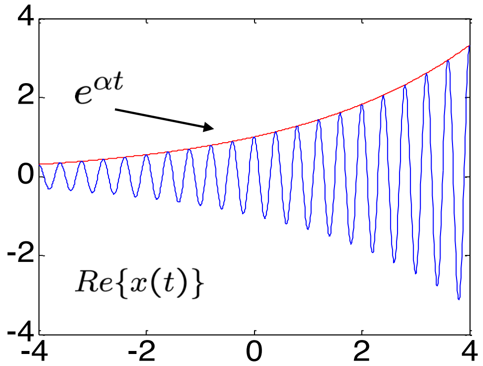
En señales periódicas es suficiente integrar un período

1.5. Señales Elementales

a) Exponenciales complejas continuas

$x(t) = Ce^{at}$; $C, a \in \mathcal{C}$; $a = \alpha + j\omega$

$$x(t) = \underbrace{Ce^{\alpha t}}_{\substack{\text{Exp. Real} \\ \text{(Aperiódica)}}} \underbrace{e^{j\omega t}}_{\substack{\text{Sinusoide Compleja} \\ \text{(Periódica)}}}$$



- α caracteriza la amplitud
- ω la velocidad de oscilación

- Si $\alpha = 0 \rightarrow$ Señal períodica

  Período fundamental: $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega|}$

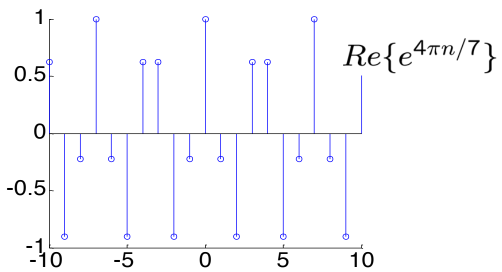
Señales Elementales

b) Exponenciales complejas discretas

$$x[n] = Ce^{an} = Ce^{\alpha n} \underbrace{e^{j\omega n}}_{\text{Sinusoide Compleja}}$$

Diferencias respecto a la sinusoide compleja en tiempo continuo:

- Periódica únicamente si $\omega N_0 = 2\pi k$, para $N_0, k \in \mathcal{Z}$
- El período puede corresponder a más de un cambio de signo



- La frecuencia de oscilación crece de $\omega = 0$ a π, y luego vuelve a decrecer, ya que para $e^{j\pi n} = -1^n$ tenemos la máxima velocidad de variación.

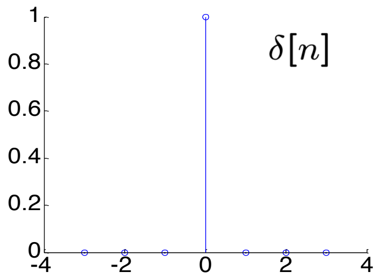
Señales Elementales

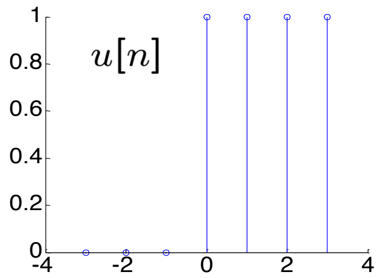
c) Secuencias delta y escalón

$$\delta[n] = \begin{cases} 1; & n = 0 \\ 0; & n \neq 0 \end{cases} \qquad u[n] = \begin{cases} 0; & n < 0 \\ 1; & n \geq 0 \end{cases}$$

Propiedades:

- $\boxed{x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0]} \longrightarrow x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$
- $u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$
- $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$





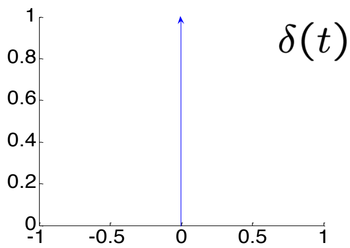
Señales Elementales

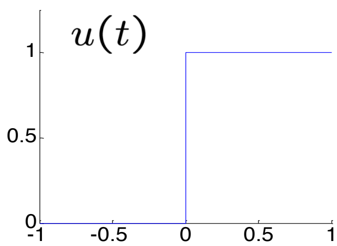
d) Funciones delta y escalón en tiempo continuo

$$\delta(t) = \begin{cases} 0; & t \neq 0 \\ \text{par} & \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1 & \end{cases}$$

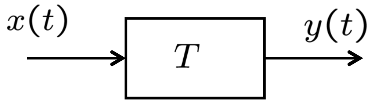
Propiedades:

- $\boxed{x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)} \longrightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$
- $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt$
- $\delta(t) = \frac{\partial u(t)}{\partial t}$



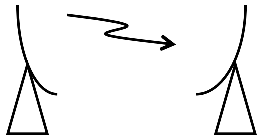


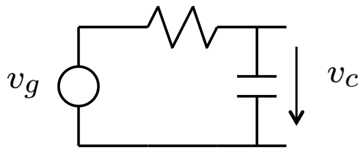
2. Sistemas



$$y(t) = T\{x(t)\}$$

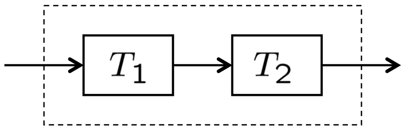
Def: Es una representación de un ente físico que responde a excitaciones a su entrada



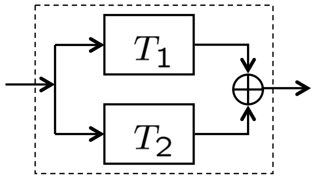


$r(t) = T\{s(t)\}$ $\qquad$ $v_c(t) = T\{v_g(t)\}$

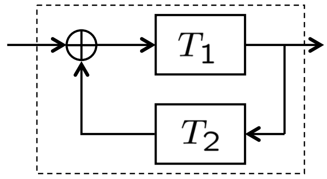
Interconexión:



Serie o Cascada



Paralelo



Con realimentación

2.3. Propiedades Fundamentales

a) Memoria: La salida en cada instante (t, n) depende únicamente del valor de la entrada en ese instante

$y[n] = x^2[n] + 1$; $y(t) = 2x(t) + 1 \longrightarrow$ Sin memoria

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$; $y(t) = x(t - t_0) \longrightarrow$ Con memoria

b) Invertibilidad: Es posible diseñar un sistema (T^{-1}) que recupere la señal original
Def. 2: Si $x_1(\cdot) \neq x_2(\cdot) \Rightarrow y_1(\cdot) \neq y_2(\cdot)$

$y(t) = 2x(t) \longrightarrow$ Invertible

$y[n] = x^2[n] \longrightarrow$ No invertible

Propiedades Fundamentales

c) Causalidad: La salida depende únicamente del valor actual y pasados

Por ejemplo: $y[n] = x[n] - x[n-1]$

d) Anticausalidad: La salida depende únicamente del valor actual y futuros

$\boxed{\text{Sin Memoria} \Longleftrightarrow \text{Causal y Anticausal}}$

¿Existen sistemas no causales en la naturaleza?

e) Estabilidad BIBO: La salida está acotada si la entrada está acotada (i.e., si $|x(t)| < B_1 \ \ \forall t \Rightarrow |y(t)| < B_2 \ \ \forall t$)

$y(t) = tx(t) \longrightarrow$ Inestable

$y[n] = e^{x[n]} \longrightarrow$ Estable

Propiedades Fundamentales

f) Invarianza temporal: Un desplazamiento temporal de la entrada provoca el mismo desplazamiento temporal a la salida ($T\{x[n-n_0]\} = y[n-n_0]$)

$y(t) = x^2(t+1) + x(t) \longrightarrow$ Invariante

$y[n] = nx[n] \longrightarrow$ Variante

g) Linealidad: $T\{ax_1(\cdot) + bx_2(\cdot)\} = ay_1(\cdot) + by_2(\cdot)$ (Ppo. de Superposición)

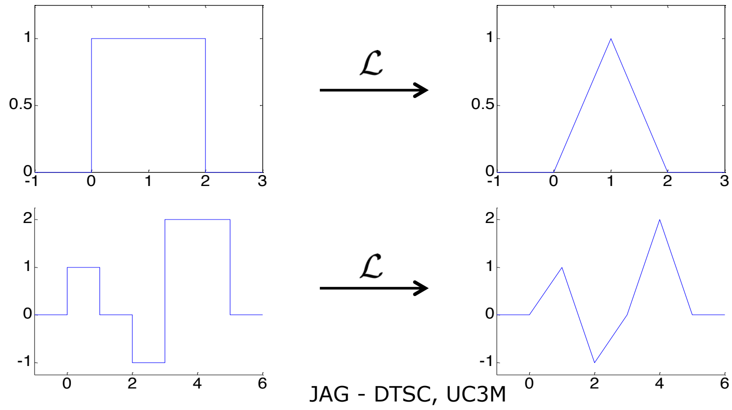
$\Longrightarrow$ En la asignatura estudiaremos sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTIS)

3. Sistemas LTI

Según acabamos de ver:

$$\begin{cases} T\{x_i(t)\} = y_i(t) & \Rightarrow \quad T\{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i(t)\} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i(t) \\ T\{x(t)\} = y(t) & \Rightarrow \quad T\{x(t-t_0)\} = y(t-t_0) \end{cases}$$

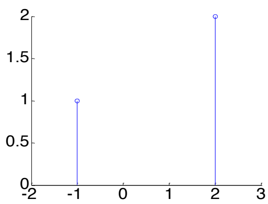
$\Longrightarrow$ Si conozco la salida del sistema para una señal $x(t)$, puedo conocer la salida para cualquier señal formada por una combinación lineal de versiones desplazadas de $x(t)$



3.1. Caracterización de LTIS discretos

Objetivo: Encontrar una o varias señales que permitan obtener la salida del sistema para cualquier entrada

Según vimos al introducir la función $\delta[n]$: $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$



$$\Rightarrow x[-1]\delta[n+1] + x[2]\delta[n-2]$$

Consecuentemente, llamando $\mathcal{L}\{\delta[n]\} = h[n]$,

- Por invarianza, $\mathcal{L}\{\delta[n-k]\} = h[n-k]$
- Por linealidad, $\boxed{y[n] = \mathcal{L}\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}$

La respuesta al impulso, $h[n]$, caracteriza completamente al sistema

3.2. Caracterización STLI continuos

De forma similar a como hicimos para el sistema discreto:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Llamando $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = h(t)$,

- Por invarianza, $\mathcal{L}\{\delta(t-\tau)\} = h(t-\tau)$
- Por linealidad,

$$\boxed{y(t) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}$$

$h(t)$ se denomina respuesta al impulso, caracteriza el comportamiento de un STLI continuo

3.3. Convolución de Señales. Propiedades

Definimos la convolución de dos señales como:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

La salida de un LTIS se obtiene como la convolución de la señal de entrada, $x(\cdot)$, con la respuesta al impulso del sistema, $h(\cdot)$

Propiedades de la convolución:

1) Elemento neutro: $\delta(t)$, $\delta[n]$, ya que $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$
2) Conmutativa: $x * h = h * x$
3) Asociativa: $x * (y * z) = (x * y) * z$
4) Distributiva respecto de la suma: $x * (y + z) = x * y + x * z$
5) Elemento inverso: No existe siempre, pero si lo hay, verifica $x * x^{-1} = \delta$

3.4. Propiedades de STLI a partir de h(·)

a) Sistema sin memoria $\Longleftrightarrow h(\cdot) = K\delta(\cdot)$

b) Sistema causal $\Longleftrightarrow h(\cdot) = 0, \ \forall n, t < 0$

c) Sistema anticausal $\Longleftrightarrow h(\cdot) = 0, \ \forall n, t > 0$

d) Sistema invertible $\Longleftrightarrow \exists h^{-1}(\cdot)$

e) Estable BIBO $\Longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < H$

$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < H$

3.5. LTIS caracterizados por ec. en diferencias

La entrada y salida del sistema (o filtro) verifican:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]}$$

¿Cuáles son las propiedades del sistema?

¿Un filtro así descrito es siempre lineal e invariante?

¿Cómo calcular la salida para una $x[n]$ determinada?

La salida del filtro se puede calcular como $y[n] = y_p[n] + y_h[n]$

- $y_p[n]$: Solución particular a la ecuación en diferencias.
- $y_h[n]$: Solución del problema homogéneo $\sum_{k=0}^{n} a_k y[n-k] = 0$

LTIS caracterizados por ec. en diferencias

Sistema con Respuesta al Impulso Finita (FIR): Si $N = 0$:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x[n-k]$$

– $y[n]$ puede obtenerse directamente a partir de $x[n]$

– Para $x[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = h[n]$
Luego:

$$h[n] = \begin{cases} b_n/a_0; & 0 \leq n \leq M \\ 0; & \text{otro } n \end{cases}$$

Sistema con Respuesta al Impulso Infinita (IIR): Si $N \geq 1$:

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \right\}$$

– Para obtener $y[n]$ necesitamos $y[n-1], \ldots, y[n-N]$.
Y seguimos de manera recursiva.

– Reposo inicial: $x[n] = 0\ \forall n < n_0 \Rightarrow y[n] = 0\ \forall n < n_0$
Condiciones iniciales: $y[n_0 - 1] = \cdots = y[n_0 - N] = 0$

– Con reposo inicial, el filtro es lineal e invariante

– En general, $h[n]$ tiene duración infinita

LTIS caracterizados por ec. diferenciales

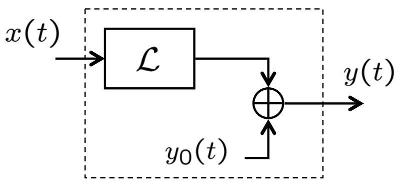
$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}}$$

Solución general:
$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$

– Si $N = 0$: $y(t) = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} \frac{d^k x(t)}{dt^k}$

– Si $N \geq 1$, necesitamos N condiciones iniciales.

– En general, el sitema caracterizado por la ec. diferencial es incrementalmente lineal:



* Condiciones iniciales nulas: Linealidad ($y_0(t) = 0$)

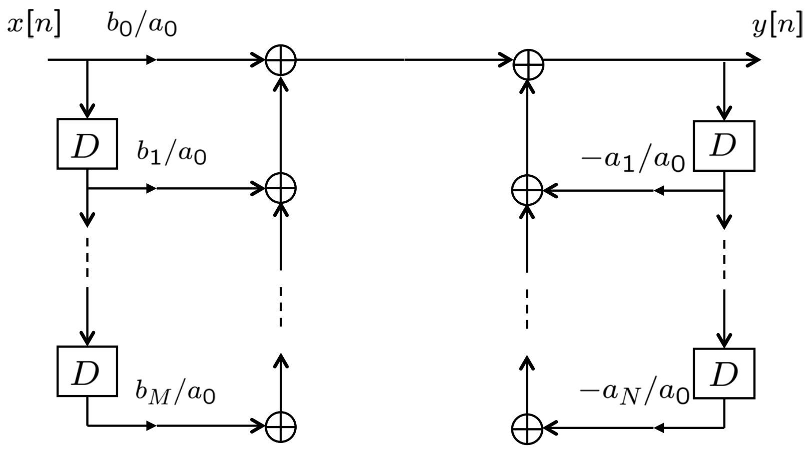
* Reposo inicial: Invarianza
(Si $x(t) = 0\ \forall t < t_0 \Rightarrow y(t) = 0\ \forall t < t_0$)

$$y(t_0) = \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = \ldots = \left.\frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}}\right|_{t=t_0} = 0$$

Asumiremos, de forma casi exclusiva, reposo inicial ($\Rightarrow$ LTIS)

Representación gráfica de sistemas regidos por ec. diferenciales o en diferencias

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}; \quad y(t) = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} - \sum_{k=1}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\}$$



Cuestiones y Problemas de repaso

A. V. Oppenheim and A. S. Willsky, "Signals & Systems," 2nd Ed.:

- Capítulo 1: 1.9, 1.21, 1.22, 1.26, 1.27, 1.28, 1.30, 1.31
- Capítulo 2: 2.21, 2.22, 2.28, 2.29, 2.48