INVESTIGACIÓN OPERATIVA.

Hoja2 (Convexidad)

1. ¿Puede suceder que un problema de programación lineal tenga exactamente dos soluciones óptimas?

2. Probar la convexidad de las bolas abiertas y cerradas para cualquier norma en $\mathbb{R}^n$. Si B es una bola cerrada, caracterizar los puntos $x \in C$ tal que $C \setminus \{x\}$ es convexo.

3. Probar que si $S \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, su cierre $\overline{S}$ también lo es.

4. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ convexo con $\operatorname{int}(S) \neq \emptyset$. Si $x \in \overline{S}$ e $y \in \operatorname{int}(S)$, probar que $\lambda x + (1-\lambda)y \in \operatorname{int}(S)$ para todo $\lambda \in (0,1)$. *Sugerencia: empezar suponiendo que $x \in S$.*

5. Probar que si $S \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, su interior $\operatorname{int}(S)$ también lo es.

6. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo con interior no vacío. Demostrar que (i) $\overline{(\operatorname{int} S)} = \overline{S}$ y (ii) $\operatorname{int}(\overline{S}) = \operatorname{int}(S)$. *Sugerencia: usar uno de los problemas anteriores.*

7. Dados $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$ probar que se verifica $\operatorname{conv}(S_1 \cap S_2) \subset \operatorname{conv}(S_1) \cap \operatorname{conv}(S_2)$. Probar con un ejemplo que la inclusión contraria no es cierta en general.

8. Probar con un ejemplo que la envoltura convexa de un conjunto cerrado no es necesariamente cerrada. Dar una condición suficiente sobre el conjunto S que permita asegurar que $\operatorname{conv}(S)$ es cerrado cuando S lo es.

9. Demostrar que si tenemos cinco puntos en el plano sin que tres de ellos sean colineales, entonces hay cuatro de ellos que forman un cuadrilátero. *Sugerencia: reducir el problema al caso en que la envoltura convexa de los cinco puntos es un triángulo.*

10. Probar con un ejemplo que la implicación

$$S_1 \text{ y } S_2 \text{ son convexos cerrados } \Rightarrow S_1 + S_2 \text{ es cerrado,}$$

NO es cierta en general. Probar que esta implicación es cierta cuando al menos uno de los dos conjuntos S_1 o S_2 se supone compacto.

11. Demostrar que si $K = \operatorname{cone}\{a_1, ..., a_m\}$ no es verdad que $K = \operatorname{cone}\{a_{i_1}, ..., a_{i_k}\}$ siendo $\{a_{i_1}, ..., a_{i_k}\}$ un subconjunto maximal de vectores linealmente independientes de $\{a_1, ..., a_m\}$.

12. Demostrar que, si K es un cono convexo cerrado e $y \notin K$, existe un vector $a \neq 0$ tal que $a \cdot y > 0$ y $a \cdot x \leq 0$ para todo $x \in K$.

13. Demostrar que un conjunto cerrado es convexo si y sólo si coincide con la intersección de todos los semiespacios cerrados que lo contienen. ¿Es cierto que todo convexo (no necesariamente cerrado) es intersección de hiperplanos (no necesariamente cerrados)?

14. Probar que si C es un conjunto convexo y $\overline{x}$ un punto de su frontera, existe un hiperplano soporte de C en x. *Sugerencia: usar el problema 6.*

15. Sean S_1 y S_2 dos conjuntos convexos no vacíos de $\mathbb{R}^n$ tales que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Demostrar que existe $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, tal que

$$\inf\{a \cdot x : x \in S_1\} \geq \sup\{a \cdot x : x \in S_2\}.$$

Sugerencia: Considerar $S = \{x_1 - x_2 : x_1 \in S_1,\ x_2 \in S_2\}$ y aplicar algún teorema de separación. Si, además, los conjuntos son cerrados y uno de ellos es acotado, demostrar que existe $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, y $\epsilon > 0$ tales que

$$\inf\{a \cdot x : x \in S_1\} \geq \epsilon + \sup\{a \cdot x : x \in S_2\}.$$

Interpretar geométricamente los resultados.*Sugerencia: usar el problema 10.*

16. Sea A matriz $m \times n$ de rango m. Dado el problema

$$\begin{array}{lll} (I) & Min & c \cdot x \\ & s.a & Ax \leq b \\ & & x \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m), \end{array}$$

consideremos el problema equivalente expresado en forma estándar,

$$\begin{array}{lll} (II) & Min & c \cdot x \\ & s.a & Ax + Ix^h = b \\ & & x, x^h \geq 0 \quad (x, x^h \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m), \end{array}$$

Estudiar la relación entre los puntos extremos de los conjuntos factibles de (I) y (II).

17. Hallar los puntos extremos de los siguientes conjuntos:

(a) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 10,\ -x_1 + 2x_2 = 4,\ x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$.

(b) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 + 2x_2 \geq 2,\ -x_1 + x_2 = 4,\ x_1, x_2 \geq 0\}$

18. Consideremos el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{ll} Min & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ s.a & x_1 - x_2 + 5x_3 \leq 10 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 40 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(a) Calcular una dirección extrema y dos puntos extremos del conjunto factible.

(b) Determinar unos coeficientes c_1, c_2, c_3 de la función objetivo tales que el problema no tenga solución óptima finita.

(c) Determinar unos coeficientes c_1, c_2, c_3 de la función objetivo tales que el problema tenga infinitas soluciones óptimas.

19. Dado un problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} Min & c \cdot x \\ s.a & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

¿es posible conseguir un problema en el que no exista solución óptima finita cambiando únicamente el vector b? Responder a la misma pregunta para el vector c.

20. Consideremos el problema de optimización $\quad Min \quad c \cdot x \quad$ sujeto a

$$x \in S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\} \tag{1}$$

donde $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ y A es una matriz $m \times n$ de rango m.

(a) Supongamos que $S \neq \emptyset$ y que para un cierto vector no nulo $d \geq 0$, $d \in \mathbb{R}^n$, se verifica $Ad = 0$. ¿Puede asegurarse entonces que existe un vector $c \neq 0$ tal que el problema tiene solución óptima no acotada?

(b) ¿Puede ocurrir que una solución óptima tenga más de m componentes estrictamente positivas?

(c) Si $\bar{x} \in S$ tiene exactamente m componentes estrictamente positivas, ¿puede asegurarse que $\bar{x}$ es un punto extremo de S?

21. Supongamos que queremos cubrir una curva plana de longitud 1 con un círculo de radio mínimo. ¿Cual ha de ser el radio? Si cambiamos "círculo" por "conjunto convexo", ¿podemos hacerlo con uno de menor área?