Electricidad

Teoría de Circuitos I

#SOMOS2030

UNED

Índice

Tema 1

Fundamentos de la teoría de circuitos y elementos ideales de los circuitos eléctricos.

Magnitudes básicas

Se define *corriente eléctrica* i como la variación de carga eléctrica con respecto al tiempo. Por convenio se entiende que el desplazamiento de cargas ideales positivas entre dos puntos produce una circulación de corriente en el sentido de este desplazamiento. La unidad de corriente eléctrica en el Sistema Internacional de unidades es el amperio (A).

Se entiende por *tensión eléctrica* o simplemente *tensión* entre dos puntos, u_{AB}, la diferencia que existe entre los potenciales eléctricos de dos puntos A y B de un circuito, $u_{AB} = u_A - u_B$. La unidad de tensión en el Sistema Internacional de unidades es el voltio (V).

El sentido de la flecha de la Figura 1.1.b) es arbitrario e indica que, si la magnitud es positiva, el potencial eléctrico en el punto de origen de la flecha es superior al potencial eléctrico en el final de la flecha.

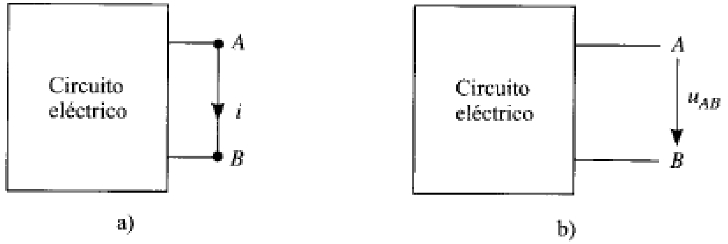


Figura 1.1.

La potencia eléctrica instantánea es el producto de la tensión instantánea por la corriente instantánea, $p(t) = u(t) \cdot i(t)$. Se mide en vatios (W). La energía w que entra en el circuito entre los instantes t_1 y t_2 es:

$$w = \int_{t_1}^{t_2} u(\tau) \cdot i(\tau)\, d\tau$$

Se mide en julios (J). En la Figura 1.2 se muestra un dipolo en el que las referencias son de potencia entrante, esto es, que una magnitud de potencia positiva implica que el dipolo está recibiendo potencia eléctrica.

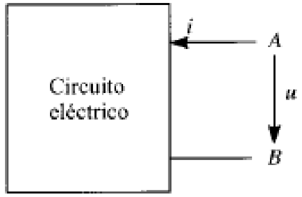
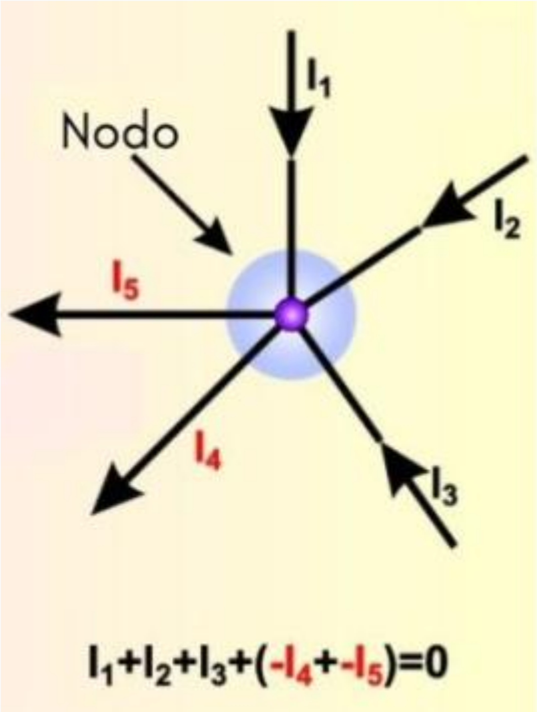


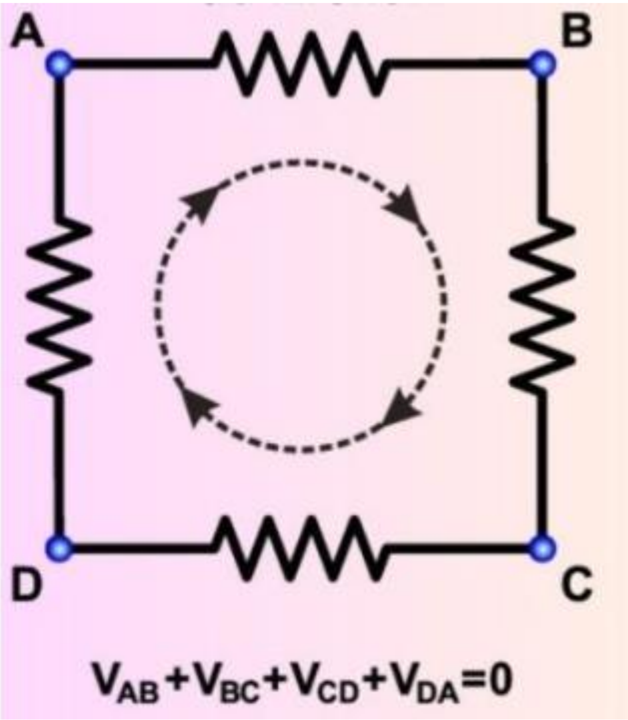
Figura 1.2. Dipolo con referencias de potencia entrante.

Leyes de Kirchoff

Primera ley de Kirchhoff: la suma algebraica de las intensidades entrantes en un nudo es nula en todo instante. Esta ley puede aplicarse no solo a nudos sino también a cualquier región cerrada.



Segunda ley de Kirchhoff: la suma algebraica de las tensiones a lo largo de cualquier línea cerrada en un circuito es nula en todo instante.



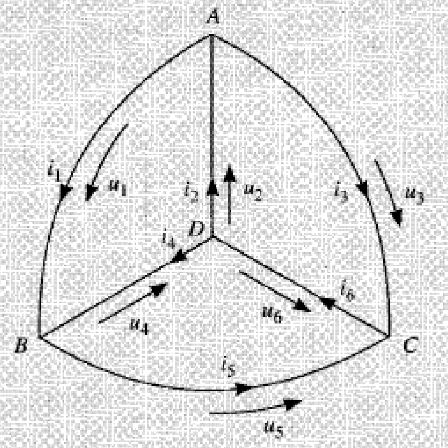
Ejercicio 1.1

a) Escribir las ecuaciones correspondientes a la aplicación de la primera ley de Kirchhoff, a los nudos del gráfico representado en la figura.

b) Comprobar que las ecuaciones son linealmente dependientes.

c) Obtener i_4 a partir de i_2 e i_6. Lo mismo para i_3 en función de i_1 e i_2.

d) Escribir las ecuaciones correspondientes a la aplicación de la segunda ley de Kirchhoff a los circuitos cerrados: *ABDA*, *ADCA*, *ABCDA*, *ABCA*.



Solución

Aplicación de la primera ley de Kirchhoff a los distintos nudos:

Nudo *A*: $-i_1 + i_2 - i_3 = 0$

Nudo *B*: $i_1 + i_4 - i_5 = 0$

Nudo *C*: $i_3 + i_5 - i_6 = 0$

Nudo *D*: $-i_2 - i_4 + i_6 = 0$

Suma total $0 = 0 \Rightarrow$ Las ecuaciones son linealmente dependientes.

De la ecuación correspondiente al nudo *D*:

$$i_4 = i_6 - i_2$$

De la ecuación del nudo *A*:

$$i_3 = i_2 - i_1$$

Aplicación de la segunda ley de Kirchhoff:

ABDA: $u_1 + u_4 + u_2 = 0$

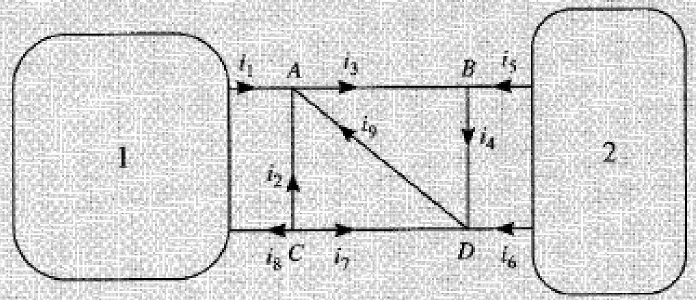
ADCA: $-u_2 + u_6 - u_3 = 0$

ABCDA $u_1 + u_5 - u_6 + u_2 = 0$

ABCA $u_1 + u_5 - u_3 = 0$

Ejercicio 1.2

Sabiendo que $i_1 = 3$ A, $i_4 = -5$ A, $i_7 = 2$ A e $i_9 = 2$ A, calcular las restantes intensidades en el gráfico de la figura.



Solución

Aplicando la primera ley de Kirchhoff a todos los nudos, 1 y 2 incluidos:

Nudo D: $i_4 + i_7 + i_6 - i_9 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_6 = i_9 - i_4 - i_7 = 2 + 5 - 2 = 5$ A

Nudo 1: $i_1 - i_8 = 0 \qquad i_8 = i_1 = 3$ A

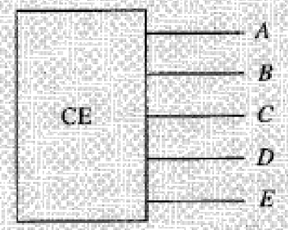
Nudo 2: $-i_5 - i_6 = 0 \qquad i_5 = -i_6 = -5$ A

Nudo C: $-i_2 - i_8 - i_7 = 0 \qquad i_2 = -i_8 - i_7 = -3 - 2 = -5$ A

Nudo A: $-i_3 + i_1 + i_2 + i_9 = 0 \qquad i_3 = i_1 + i_2 + i_9 = 3 - 5 + 2 = 0$

Ejercicio 1.3

La figura representa un multipolo, es decir, un circuito eléctrico con varios terminales. Sabiendo que las tensiones $u_{AB} = a$, $u_{DA} = b$, $u_{CE} = c$ y $u_{BE} = d$, expresar u_{EB}, u_{BC}, u_{CD} y u_{AC} como combinación lineal de a, b, c y d por aplicación de la segunda ley de Kirchhoff.



SOLUCIÓN

$$u_{EB} = -u_{BE} = -d$$

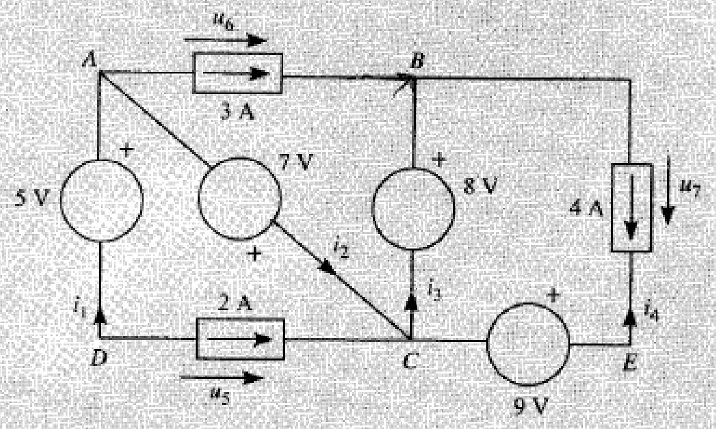
$$u_{BC} = u_{BE} + u_{EC} = u_{BE} - u_{CE} = d - c$$

$$u_{CD} = u_{CE} + u_{EB} + u_{BA} + u_{AD} = u_{CE} - u_{BE} - u_{AB} - u_{DA} = c - d - a - b$$

$$u_{AC} = u_{AB} + u_{BE} + u_{EC} = u_{AB} + u_{BE} - u_{CE} = a + d - c$$

Ejercicio 1.4

Hallar las intensidades que circulan por cada fuente de tensión y las tensiones entre los bornes de cada fuente de intensidad.



SOLUCIÓN

Las intensidades se pueden hallar aplicando la primera ley de Kirchhoff a los nudos A, B y C:

A: $i_1 = i_2 + 3$

B: $3 + i_3 + i_4 = 0$

C: $i_2 + 2 = i_3 + i_4$

Pero $i_1 = -2$ A e $i_4 = -4$ A, pues ambas están fijadas por las fuentes de intensidad. Luego:

$i_2 = i_1 + 3 = -2 - 3 = -5$ A

$i_3 = -i_4 - 3 = 4 - 3 = 1$ A

Para el cálculo de las tensiones se aplica la segunda ley de Kirchhoff a cada malla:

Malla $ADCA$: $5 + u_5 + 7 = 0 \Rightarrow u_5 = -12$ V

Malla $BECB$: $u_7 + 9 - 8 = 0 \Rightarrow u_7 = -1$ V

Malla $ABCA$: $u_6 + 8 + 7 = 0 \Rightarrow u_6 = -15$ V

Elementos ideales de los circuitos

- **Resistencia**

Una resistencia R es un dipolo en el que en un instante t su tensión $u(t)$ y su corriente $i(t)$ satisfacen una relación definida por una curva en el plano u-i. Esta curva se conoce como *característica* de la resistencia en el instante t. La magnitud R se conoce como *resistencia* y se mide en *ohmios* (Ω). La magnitud $G = \frac{1}{R}$ se denomina *conductancia* y se mide en siemens (S), o bien ohmios^{-1} (Ω^{-1}).

Ley de Ohm para resistencias lineales:

$$u = R \cdot i$$

Con las referencias de la Figura 1.3, el valor de la potencia entrante en una resistencia es:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2 = \frac{u^2}{R}$$

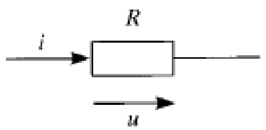


Figura 1.3. Resistencia con referencias de potencia entrante.

Una resistencia siempre absorbe potencia. La energía absorbida por una resistencia vale:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} R \cdot i^2(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} \frac{u^2(\tau)}{R}\, d\tau$$

- **Capacidad**

Un condensador C es un dipolo en el que en un instante t, la carga almacenada en él y la tensión en bornas satisfacen una relación definida por una curva en el plano (u-q).

En un condensador lineal la relación entre la corriente y la tensión es:

$$i = \frac{dq}{dt} = C\, \frac{du}{dt}$$

C es la *capacidad* del condensador y se mide en Faradios (F). Con las referencias de la Figura 1.4, la potencia entrante en un condensador es:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = u \cdot C \cdot \frac{du}{dt}$$

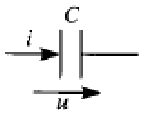


Figura 1.4. Condensador con referencia de potencia entrante.

La energía almacenada en el condensador es:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} C \cdot u(\tau) \cdot \frac{du(\tau)}{d\tau}\, d\tau = \frac{1}{2}\, C \cdot u^2(t)$$

Elementos ideales de los circuitos

- **Inductancia**

Una bobina, o inductancia, lineal e invariante con el tiempo es un dipolo en el cual la relación entre la tensión y la corriente está definida por la ecuación siguiente con las referencias de la Figura 1.5. El parámetro L se denomina *inductancia* de la bobina y se mide en Henrios (H).

$$u = L\frac{di}{dt}$$

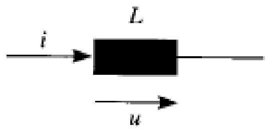


Figura 1.5. Bobina con referencia de potencia entrante.

La expresión de la potencia entrante en la bobina es:

$$p(t) = u(t)\cdot i(t) = L\cdot\frac{di}{dt}\cdot i(t)$$

El valor de la energía almacenada en la bobina en un instante t es:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} L\,\frac{di(\tau)}{d\tau}\,i(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\,L\cdot i^2(t)$$

Elementos ideales de los circuitos

- **Bobinas acopladas**

Las ecuaciones de tres bobinas acopladas como las de la Figura 1.6 vienen dadas en las ecuaciones expuestas a continuación.

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} + M_{13} \frac{di_3}{dt}$$

$$u_2 = -M_{12} \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{23} \frac{di_3}{dt}$$

$$u_3 = M_{31} \frac{di_1}{dt} - M_{23} \frac{di_2}{dt} + L_3 \frac{di_3}{dt}$$

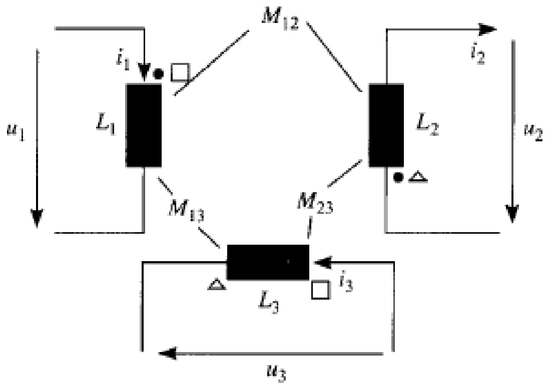


Figura 1.6.

M_{ij} son los coeficientes de *inducción mutua* de la bobina. Los coeficientes L_i se denominan *inductancias propias* o *coeficientes de autoinducción*. Ambas se miden en Henrios. Los terminales señalados con el mismo signo se denominan *correspondientes*. Los terminales sólo son correspondientes entre parejas de bobinas.

La potencia entrante en un cuadripolo como el de la Figura 1.7 viene dado por la ecuación:

$$p(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} L_1 \cdot i_1^2 + M \cdot i_1 \cdot i_2 + \frac{1}{2} L_2 \cdot i_2^2\right]$$

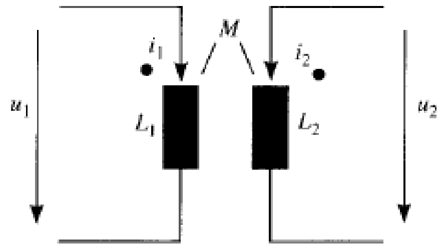


Figura 1.7.

Si las corrientes circulantes por las bobinas en $t = -\infty$ son nulas, la energía almacenada en las bobinas acopladas es:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2} L_1 \cdot i_1^2 + M \cdot i_1 \cdot i_2 + \frac{1}{2} L_2 \cdot i_2^2$$

Elementos ideales de los circuitos

- **Transformador ideal**

Un transformador ideal es un cuadripolo cuyo esquema y relaciones entre sus parámetros vienen dados por la Figura 1.8 y las ecuaciones siguientes. El parámetro a se conoce como relación de transformación.

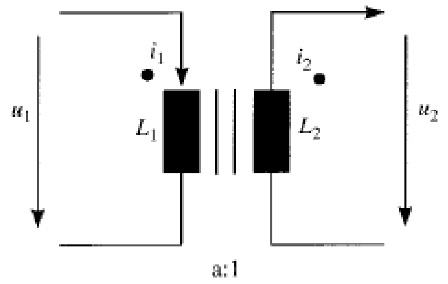


Figura 1.8. Transformador ideal.

$$\frac{u_1}{u_2} = a \qquad \frac{i_1}{i_2} = \frac{1}{a}$$

En un transformador ideal, la potencia consumida en todo instante es nula.

- **Fuentes de tensión**

Una fuente de tensión *ideal* es un dispositivo que mantiene una tensión entre sus terminales independientemente de la corriente que circule por ellos. Se representa en la Figura 1.9. El signo «+» indica que la tensión en A es superior a la tensión en B en e_g V.

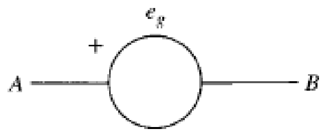


Figura 1.9. Fuente ideal de tensión.

Una fuente de tensión real, en corriente continua, consiste en una fuente de tensión ideal en serie con una resistencia. La relación entre tensión y corriente entre sus terminales (*ecuación terminal*) es:

$$u = e_g - R_g \cdot i$$

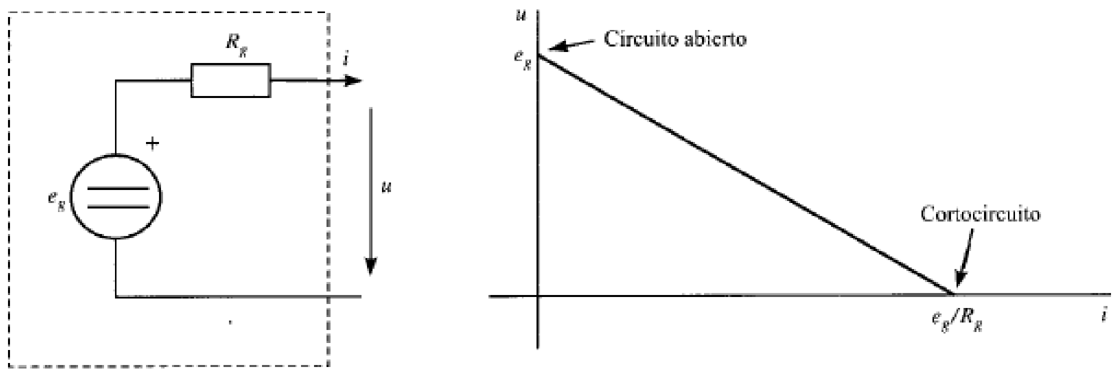


Figura 1.10. Fuente real de tensión.

Elementos ideales de los circuitos

• **Fuentes de corriente**

Una fuente de corriente *ideal* es un dispositivo por el que circula una corriente dada para cualquier tensión entre sus terminales. Se representa como en la Figura 1.11. La flecha indica el sentido de circulación de la corriente i_g:

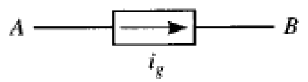


Figura 1.11. Fuente ideal de corriente

Una fuente real de corriente continua consiste en una fuente de corriente ideal en paralelo con una resistencia. Su característica corriente-tensión es:

$$i = i_g - G_g \cdot u$$

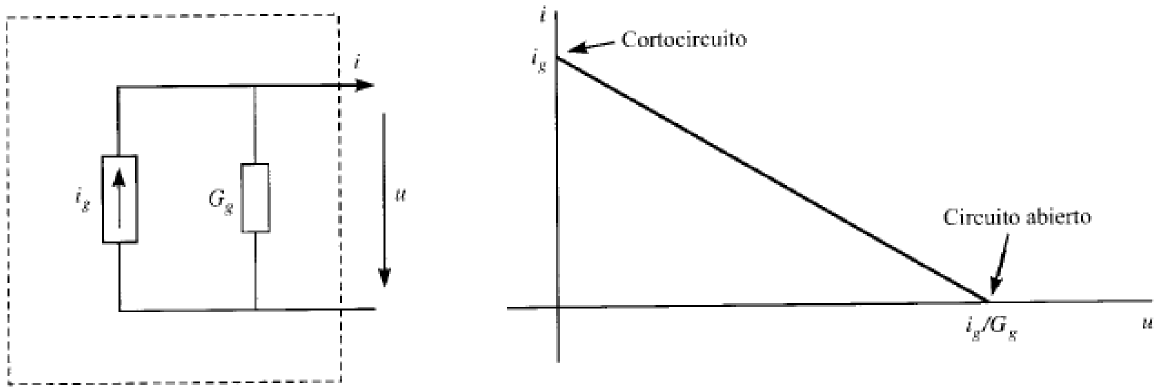


Figura 1.12. Fuente real de corriente.

• **Equivalencia de fuentes reales**

Dos fuentes reales son equivalentes si para cualquier tensión aplicada a las dos, suministran la misma corriente. Para ello deben cumplir las siguientes condiciones:

$$i_g = \frac{e_g}{R_g} \qquad G_g = \frac{1}{R_g}$$

Elementos ideales de los circuitos

- **Fuentes dependientes**

Las fuentes dependientes son fuentes ideales de tensión o corriente cuya magnitud viene determinada por la tensión entre dos puntos, o la corriente que circula por una rama. En la Figura 1.13 se representan los cuatro tipos posibles.

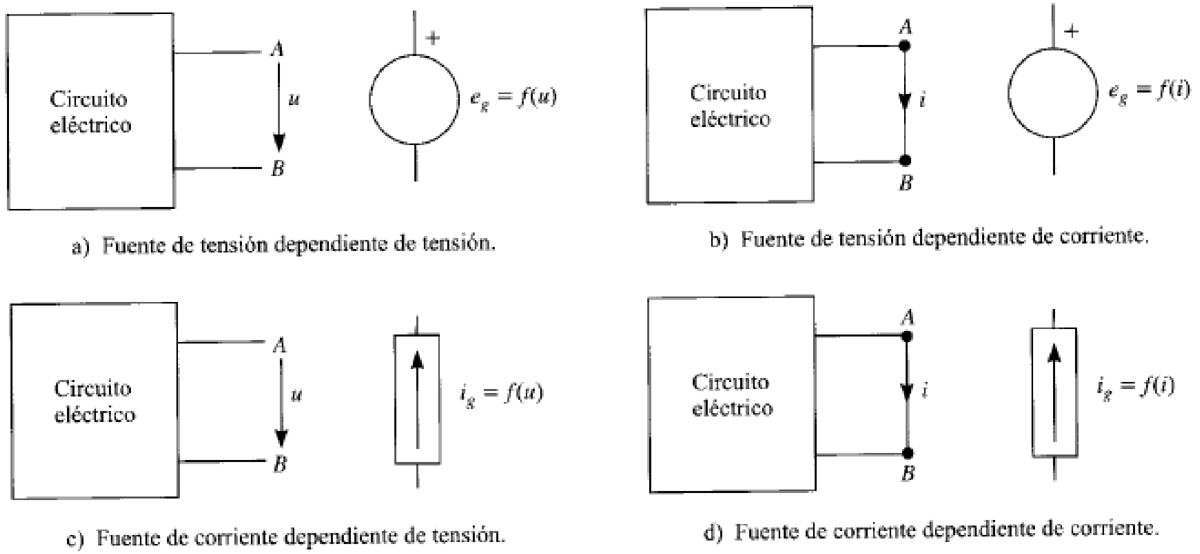
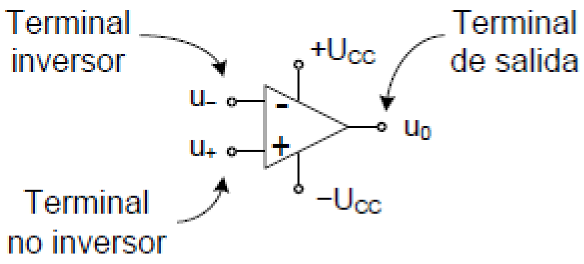


Figura 1.13.

Elementos ideales de los circuitos

- **Amplificador operacional**

El amplificador operacional, o simplemente el AO, es un circuito integrado que se puede encontrar en muchos circuitos y aplicaciones electrónicas ya que permite realizar con él las operaciones matemáticas básicas (suma, resta, multiplicación y división) entre otras, de ahí su nombre. Este elemento internamente es un circuito electrónico construido a partir de transistores, diodos, condensadores y resistencias conectadas y fabricados en un mismo circuito integrado.



El circuito equivalente del amplificador operacional es el circuito de la figura 4.4.a: en él hay una resistencia de entrada Re, una resistencia de salida R0 y una fuente de tensión dependiente que es proporcional a la diferencia de tensión que hay entre los terminales de entrada, u+ y u-, con un factor de amplificación denominado ganancia de tensión del AO. A esa diferencia de tensión ud que hay entre los terminales de entrada se la denomina tensión diferencial. Las tensiones de entrada, u+ y u-, y la tensión de salida, u0, son las tensiones de esos tres terminales respecto a un mismo punto de referencia que suele ser la masa del circuito electrónico del AO. Para un AO real la resistencia de entrada es muy alta (del orden de M), la resistencia de salida es baja (del orden de unas pocas decenas de ohmios) y la ganancia es muy elevada (del orden de 10^5 y superior).

$$u_0 \begin{cases} = +E_{sat} & , \text{ si } \quad \mu\, u_d \geq U_{CC} \\ = -E_{sat} & , \text{ si } \quad \mu\, u_d \leq -U_{CC} \end{cases}$$

$$i_+ = i_- = 0$$

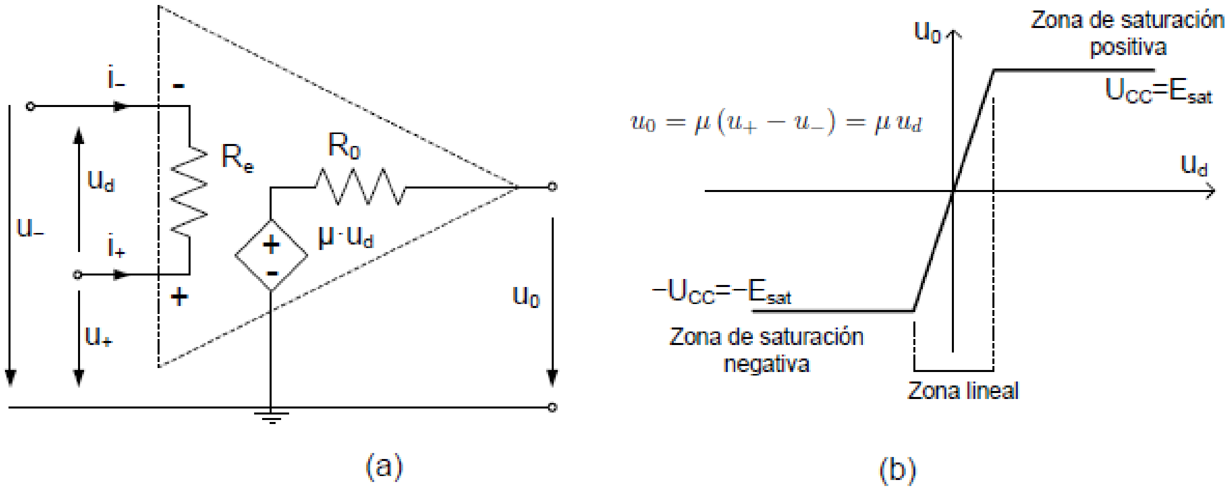
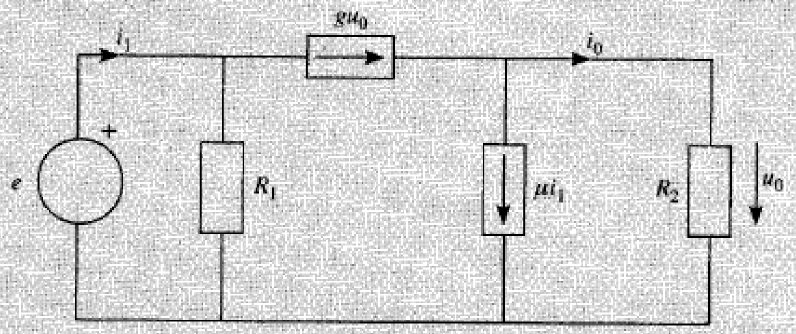


Figura 4.4

Ejercicio 1.5

Hallar i_o y u_o en el circuito de la figura en función de e, R_1, R_2, μ y g.



Solución

Por aplicación de la ley de Ohm:

$$u_o = R_2 \cdot i_o \tag{1}$$

Se aplica la primera ley de Kirchhoff a la corriente i_o:

$$i_o = g \cdot u_o - \mu \cdot i_1 \tag{2}$$

Se hace lo mismo con i_1:

$$i_1 = g \cdot u_o + e/R_1 \tag{3}$$

Se sustituye (3) en (2):

$$i_0 = g \cdot u_0 - \mu(g \cdot u_0 + e/R_1) = (1 - \mu)g \cdot u_o - \mu \cdot e/R_1 \tag{4}$$

Se sustituye (4) en (1):

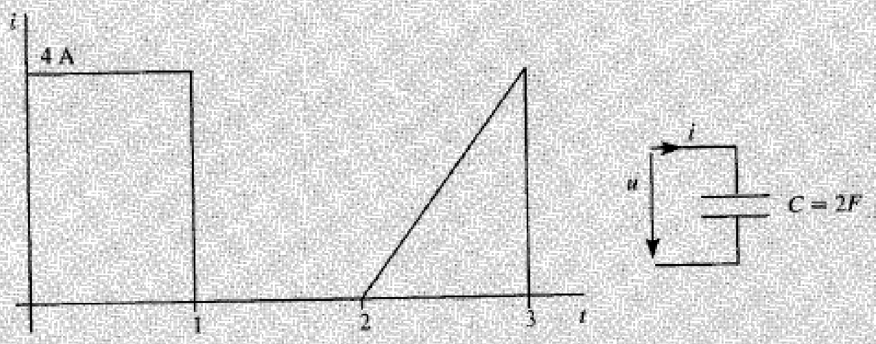
$$u_o = R_2(1 - \mu)g \cdot u_0 - \mu \cdot e \cdot R_2/R_1$$

$$u_o(1 - R_2(1 - \mu)g) = -\mu \cdot e \cdot R_2/R_1$$

$$u_o = \frac{-\mu R_2}{R_1(1 - R_2(1 - \mu)g)} e \qquad i_o = \frac{-\mu}{R_1(1 - R_2(1 - \mu)g)} e$$

Ejercicio 1.6

A un condensador de 2 F descargado inicialmente y con las referencias de la figura se le aplica una intensidad cuya forma de onda es la dada en el gráfico $i = i(t)$. Determinar la forma de onda de la tensión u.



SOLUCIÓN

La ecuación del condensador es:

$$i(t) = C\,\frac{du(t)}{dt}$$

de donde

$$u(t) = u(t_o) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt$$

La expresión analítica de la corriente, a partir de la gráfica es:

$$i(t) = \begin{cases} 4 & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & 1 < t \leqslant 2 \\ 4t - 8 & 2 < t \leqslant 3 \\ 0 & 3 < t \end{cases}$$

Se integra en cada tramo para hallar $u(t)$:

$0 < t \leqslant 1$: $\quad u(t) = u(0) + \frac{1}{2}\int_0^t 4dt = 0 + 2t = 2t$

$1 < t \leqslant 2$: $\quad u(t) = u(1) + \frac{1}{2}\int_1^t 0dt = u(1) = 2$

$2 < t \leqslant 3$: $\quad u(t) = u(2) + = 6 + \frac{1}{2}\int_0^t (4t - 8)\,dt = u(2) + \frac{4}{2}\left[\frac{t^2}{2} - 2t\right]_2^t = 6 + t^2 - 4t$

$3 < t$: $\quad u(t) = u(3) + \frac{1}{2}\int_3^t 0dt = u(3) = 3$

Ejercicio 1.6

La expresión analítica de la corriente, a partir de la gráfica es:

$$i(t) = \begin{cases} 4 & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & 1 < t \leqslant 2 \\ 4t - 8 & 2 < t \leqslant 3 \\ 0 & 3 < t \end{cases}$$

Se integra en cada tramo para hallar $u(t)$:

$0 < t \leqslant 1$: $$u(t) = u(0) + \frac{1}{2}\int_0^t 4dt = 0 + 2t = 2t$$

$1 < t \leqslant 2$: $$u(t) = u(1) + \frac{1}{2}\int_1^t 0dt = u(1) = 2$$

$2 < t \leqslant 3$: $$u(t) = u(2) + \; = 6 + \frac{1}{2}\int_0^t (4t - 8)\,dt = u(2) + \frac{4}{2}\left[\frac{t^2}{2} - 2t\right]_2^t = 6 + t^2 - 4t$$

$3 < t$: $$u(t) = u(3) + \frac{1}{2}\int_3^t 0dt = u(3) = 3$$

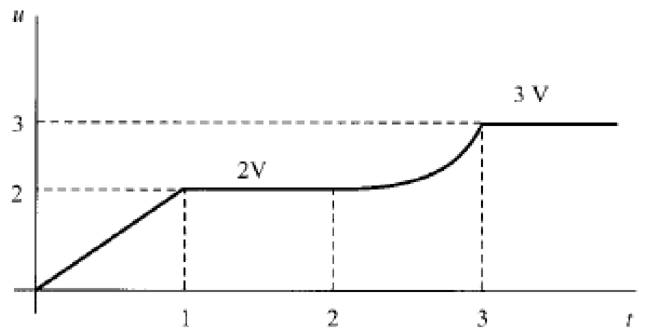
Por tanto, la expresión analítica de la tensión en el condensador es:

$$u(t) = \begin{cases} 2t & 0 < t \leqslant 1 \\ 2 & 1 < t \leqslant 2 \\ 6 + t^2 - 4t & 2 < t \leqslant 3 \\ 3 & 3 < t \end{cases}$$

Para dibujar la gráfica falta determinar la curvatura del tercer tramo, lo cual puede hacerse a partir de la segunda derivada:

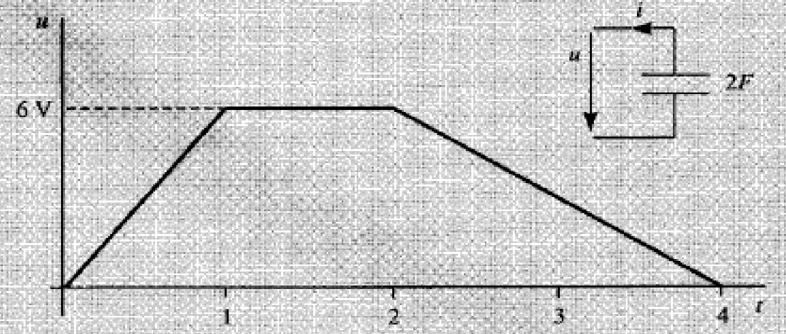
$$\frac{du^2(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(2t - 4) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{convexa}$$

Representación gráfica de la tensión en el condensador:



Ejercicio 1.7

La forma de onda representada en la figura corresponde a la tensión de los extremos de un condensador ideal de 2 F. Decir si en el instante $t = 3$ s, dicho condensador cede o absorbe energía y el valor de la energía almacenada en ese instante.



SOLUCIÓN

La ecuación del condensador con las referencias de la figura es:

$$i(t) = -C\,\frac{du(t)}{dt}$$

Expresión analítica de $u(t)$		Intensidad
$u(t) = 6t$	$0 < t \leqslant 1$	$i(t) = -2 \cdot 6 = -12$ A
$u(t) = 6$	$1 < t \leqslant 2$	$i(t) = 0$
$u(t) = -3(t-4)$	$2 < t \leqslant 4$	$i(t) = -2 \cdot (-3) = 6$ A
$u(t) = 0$	$t > 4$	$i(t) = 0$

La potencia instantánea es $p(t) = u(t) \cdot i(t)$, potencia saliente con las referencias de la figura. La energía almacenada se calcula integrando la potencia absorbida a lo largo del tiempo:

$$w_{\mathrm{alm}}(t) = \int p_{\mathrm{abs}}(t)\,dt = -\int p_{\mathrm{ced}}(t)\,dt = -\int u(t)i(t)\,dt = -\int u(t)(-C\,du) = \frac{1}{2}\,Cu^2(t)$$

En el instante $t = 3$ s:

Potencia cedida: $p(t = 3) = u(3) \cdot i(3) = 3 \cdot 6 = 18$ W (cedida a la red)

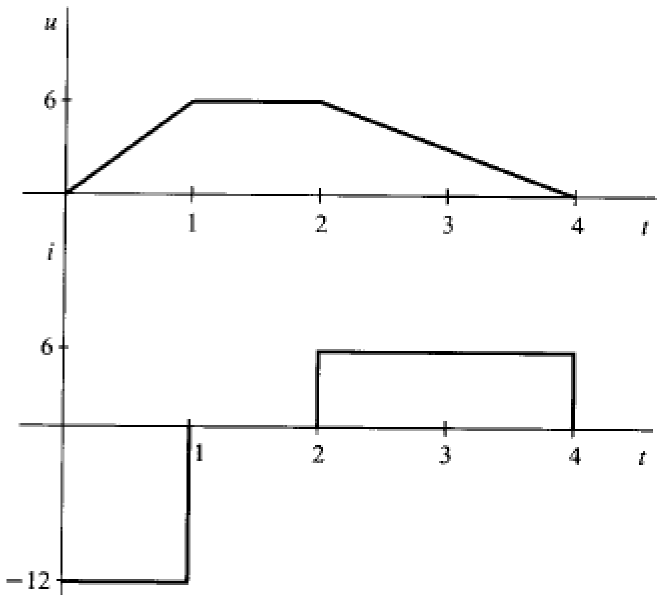
Energía almacenada: $w(t = 3) = \frac{1}{2}\,Cu^2(3) = \frac{1}{2}\,2u^2(3) = 9$ J

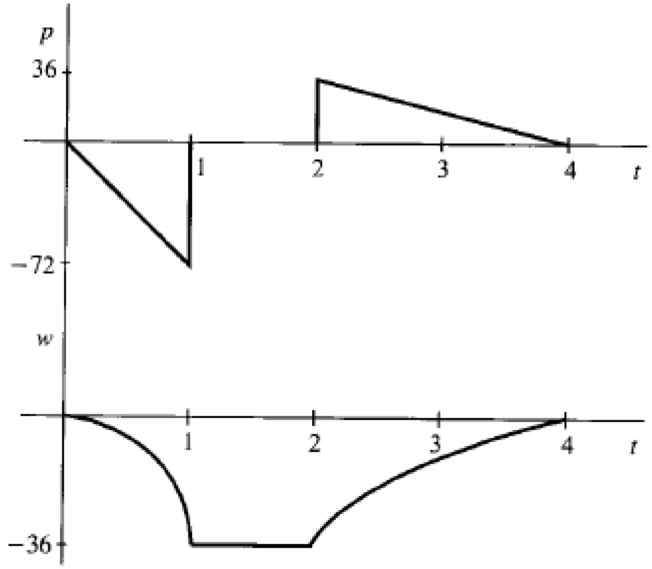
Las expresiones de la potencia y la energía cedida a la red en cada instante de tiempo son:

$p(t) = -72t$	$0 < t \leqslant 1$	$w(t) = -36t^2$
$p(t) = 0$	$1 < t \leqslant 2$	$w(t) = -36$
$p(t) = 18(4-t)$	$2 < t \leqslant 4$	$w(t) = -9(4-t)^2$
$p(t) = 0$	$t > 4$	$w(t) = 0$

Ejercicio 1.7

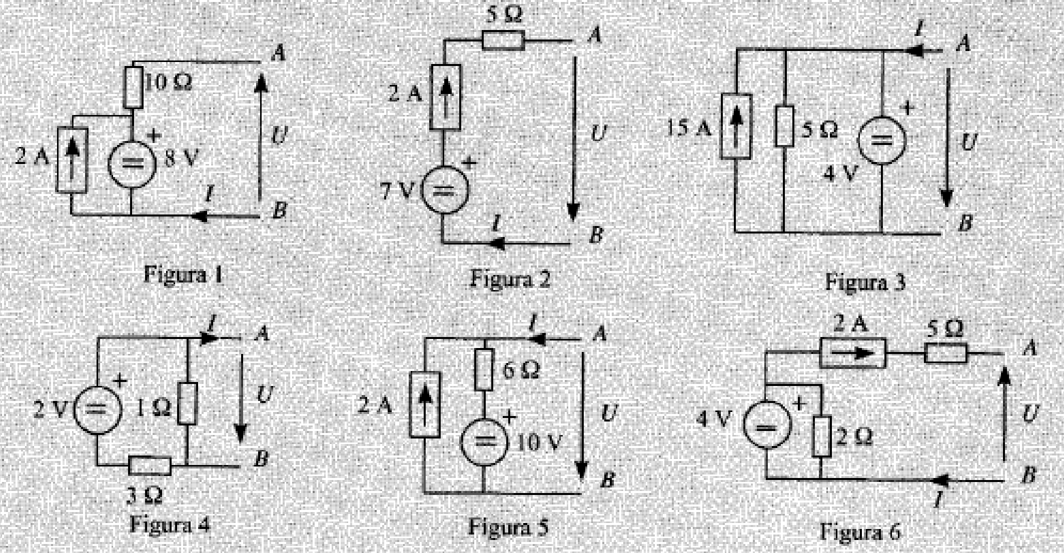
Representación gráfica de todas las formas de onda:





Ejercicio 1.8

Determinar la tensión U e intensidad I, o la relación entre estas magnitudes, en los terminales de cada uno de los circuitos mostrados en las figuras siguientes:



SOLUCIÓN

Figura 1

Puesto que la fuente de corriente está en paralelo con una fuente de tensión, la tensión entre sus terminales está definida por el valor de ésta, y por tanto,

$$U = 10 \cdot I - 8$$

Figura 2

La fuente de corriente impone, por definición, la corriente circulante por la rama. La tensión dependerá del elemento conectado entre A y B.

$$I = 2 \text{ A}$$

Figura 3

Análogamente al caso anterior, la tensión U viene dada por el valor de la fuente de tensión. La corriente dependerá del elemento conectado entre los terminales A y B.

$$U = 4 \text{ V}$$

Ejercicio 1.8

Determinar la tensión U e intensidad I, o la relación entre estas magnitudes, en los terminales de cada uno de los circuitos mostrados en las figuras siguientes:

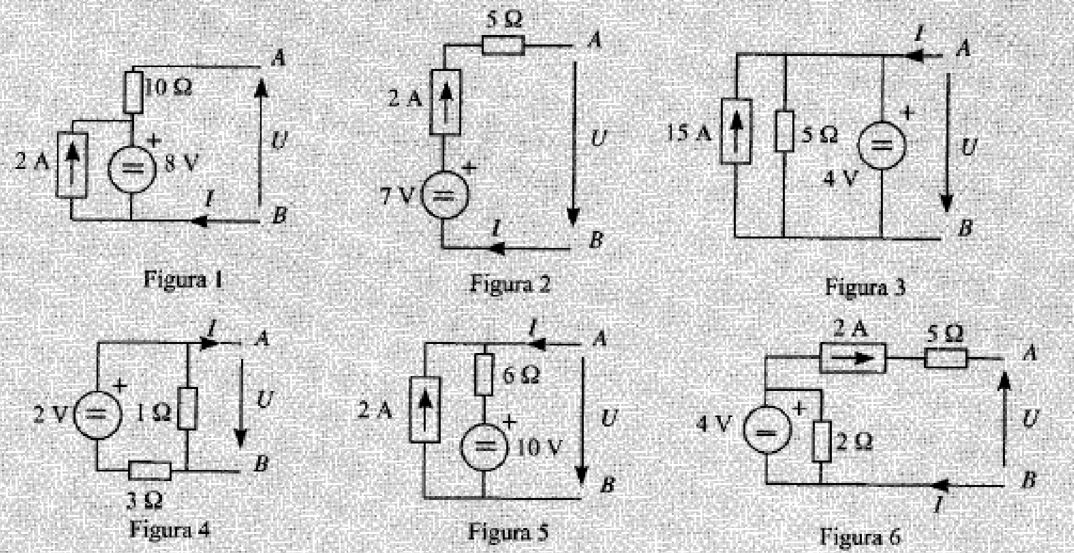
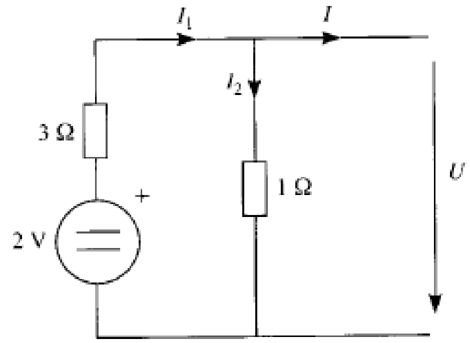


Figura 4



Aplicando las leyes de Kirchhoff y la ley de Ohm, así como la definición de fuente de tensión, se obtienen las ecuaciones:

$$U = I_2 \cdot 1$$

$$I = I_1 - I_2$$

$$3I_1 + I_2 = 2$$

Se sustituye y se llega a:

$$3I + 4U = 2$$

Ejercicio 1.8

Determinar la tensión U e intensidad I, o la relación entre estas magnitudes, en los terminales de cada uno de los circuitos mostrados en las figuras siguientes:

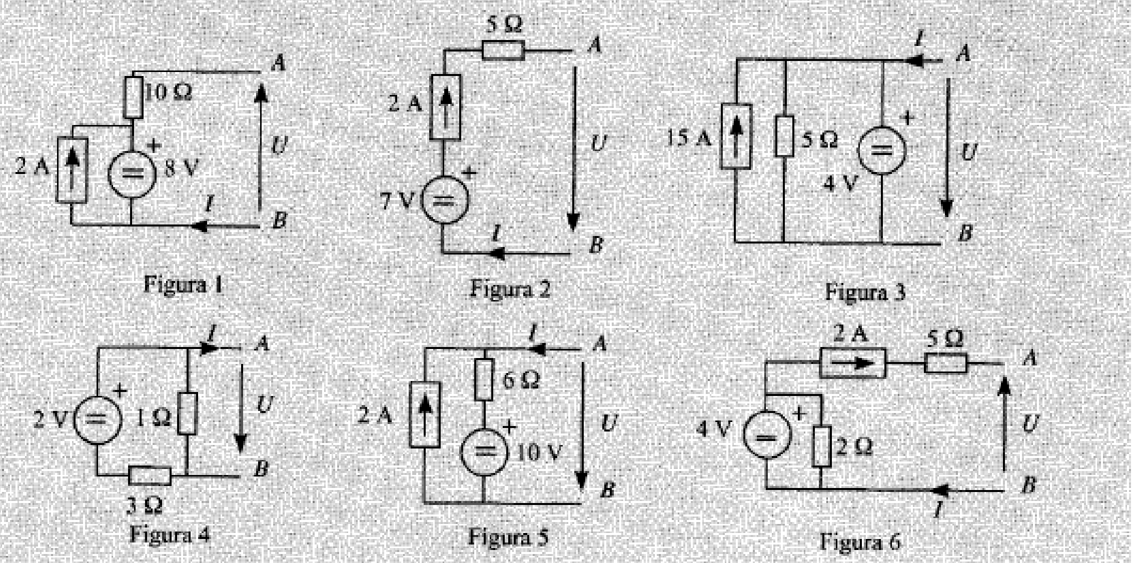
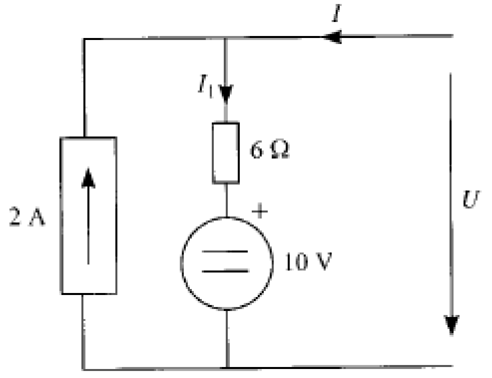


Figura 5



$$U = 6I_1 + 10$$
$$I_1 = I + 2$$
$$U = 6 \cdot (I + 2) + 10$$
$$U = 22 + 6I$$

Figura 6

Por definición de fuente de corriente, la que circula por la rama será:

$$I = 2 \text{ A}$$

Ejercicio 1.9

Analizar el circuito de la figura 4.5 para los dos valores siguientes de la ganancia del AO: (a) $\mu = 5$; (b) $\mu = 100$. En ambos casos considerar que E_{sat} es igual a $\pm$ 12 V.

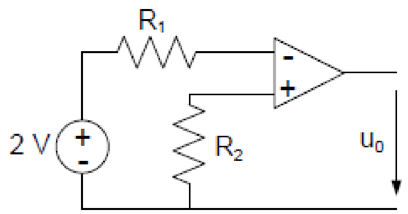


Figura 4.5

Se utiliza el modelo del AO de la figura 4.4.a, en el que, como no dan más datos concretos, se considera que la resistencia de entrada es infinita y la resistencia de salida es nula. La tensión diferencial sólo depende de la fuente de entrada y su valor es $-$ 2 V, ya que la caída de tensión en la resistencia conectada en el terminal no inversor es nula al ser i_+ igual a 0. De esta forma se llega al circuito equivalente de la figura 4.6.

(a) En el primer caso, con μ igual a 5, en la salida la fuente dependiente impone la tensión:

$$u_0 = \mu\, u_d = 5 \cdot (-2) = -10 \text{ V}$$

Como la tensión de salida está dentro del intervalo definido por las tensiones de saturación (ecuación (4.8)), ese valor de la tensión de salida calculado es correcto.

(b) En el segundo caso, con μ igual a 100, el valor de la tensión de salida sería:

$$\mu\, u_d = 100 \cdot (-2) = -200 \text{ V}$$

Pero ahora como ese valor de la tensión de salida es menor que el valor negativo de la tensión de saturación, la tensión de salida es (ecuacioneds (4.8)):

$$u_0 = -E_{sat} = -12 \text{ V}$$

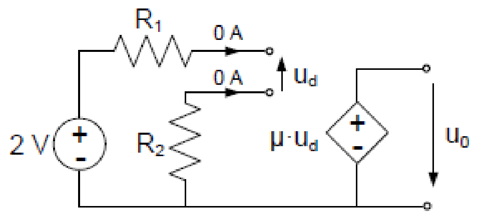


Figura 4.6

En los dos casos del ejemplo hemos aumentado la ganancia del AO y, sin embargo, el valor de la tensión diferencial no varía. Si se repite el ejemplo con ganancias mayores se seguirá obteniendo el mismo resultado del aparado (b), esto es, -12 V. Otro aspecto que conviene resaltar de este ejemplo es el signo de la tensión de salida, que viene dado por el signo de la tensión diferencial de entrada, de forma independiente de la ganancia de tensión.

Ejercicio 1.10

Analizar el circuito de la figura 4.7 para las siguientes ganancia de tensión del AO: (a) $\mu = 5$; (b) $\mu = 20$; (c) $\mu = 100$; (d) $\mu = 2000$; (e) $\mu = 50000$. En todos los casos considerar que E_{sat} es igual a $\pm$ 12 V.

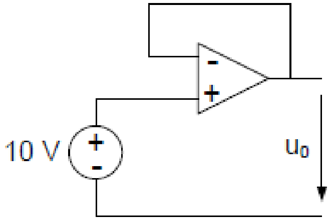


Figura 4.7

Utilizando el circuito equivalente del AO, el circuito que hay que analizar es el de la figura 4.8. Se tiene que:

$$10 = u_d + \mu\, u_d \qquad \rightarrow \qquad u_d = \frac{10}{1+\mu} \qquad \text{y} \qquad u_0 = \mu\, u_d$$

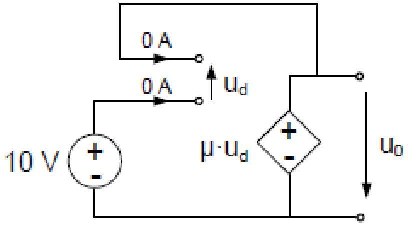


Figura 4.8

Para los distintos valores de la ganancia del AO, los resultados que se obtienen son los siguientes:

$$(a): \mu = 5 \quad \rightarrow \quad u_d = 1,667 \text{ V} \quad \text{y} \quad u_0 = 8,3333 \text{ V}$$
$$(b): \mu = 20 \quad \rightarrow \quad u_d = 0,4762 \text{ V} \quad \text{y} \quad u_0 = 9,5238 \text{ V}$$
$$(c): \mu = 100 \quad \rightarrow \quad u_d = 0,0990 \text{ V} \quad \text{y} \quad u_0 = 9,9010 \text{ V}$$
$$(d): \mu = 2000 \quad \rightarrow \quad u_d = 5 \cdot 10^{-3} \text{ V} \quad \text{y} \quad u_0 = 9,9950 \text{ V}$$
$$(e): \mu = 50000 \quad \rightarrow \quad u_d = 2 \cdot 10^{-4} \text{ V} \quad \text{y} \quad u_0 = 9,998 \text{ V}$$

En los cinco casos se comprueba que la tensión de salida está dentro del intervalo definido por las tensiones de saturación (ecuación (4.8)), por lo que el valor de la tensión de salida calculado en cada caso es correcto y el AO trabaja en la zona lineal.

Se aprecia en este sencillo circuito que para ganancias del AO mayores el valor la tensión diferencial u_d se hace prácticamente nulo y el de la tensión de salida, u_0, es aproximadamente igual al que "establece" la realimentación negativa, en este caso:

$$u_0 = \lim_{\mu \to \infty} \frac{10\mu}{(1+\mu)} = 10 \text{ V}$$

Ejercicio 1.10

Como se ha indicado al inicio de este apartado los AO reales suelen tener valores de ganancia de tensión muy elevados, superiores a 10^5, siendo 200000 un valor típico. Conforme aumenta la ganancia y el AO realimentado trabaja en la zona lineal, el valor de la tensión diferencial u_d se hace cada vez más pequeño y la pendiente del tramo recto inclinado de su característica (figura 4.4.a) se hace más vertical. El caso límite se obtiene cuando la ganancia se considera infinita y corresponde al **amplificador operacional ideal** cuyas características son:

- La ganancia de tensión del AO ideal es infinita, su resistencia de entrada es infinita y la de salida es nula.
- Cuando el AO ideal trabaja en la zona lineal (ecuación (4.8)), la tensión diferencial es nula, $u_d = 0$.
- Si con la suposición anterior (de que $u_d = 0$) al resolver el circuito se obtiene que no se cumple esa condición, entonces el AO ideal trabaja en una de las dos zonas de saturación, la tensión de salida u_0 vendrá dada por las ecuaciones (4.9) y la tensión diferencial será no nula, $u_d \neq 0$, y su valor se obtiene analizando el circuito.

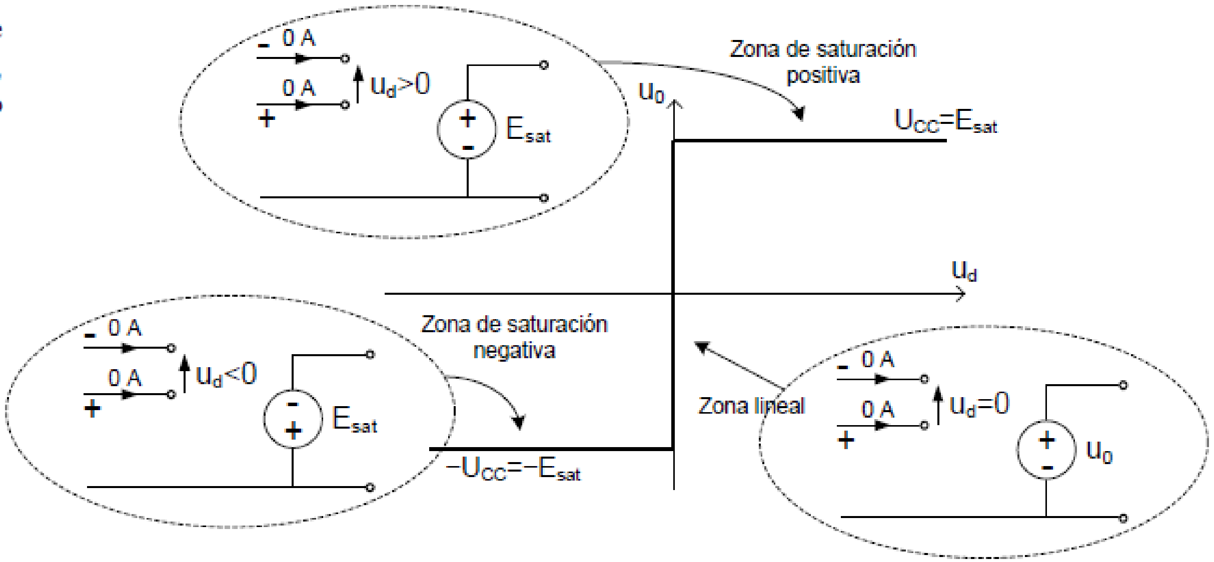


Figura 4.9

Ejercicio 1.11

P2.11 El circuito de la figura P2.11 se conoce como *sumador*. Demostrar que se cumple la siguiente relación para la tensión de salida u_s.

$$u_s = -\left(\frac{R}{R_1}u_1 + \frac{R}{R_2}u_2\right)$$

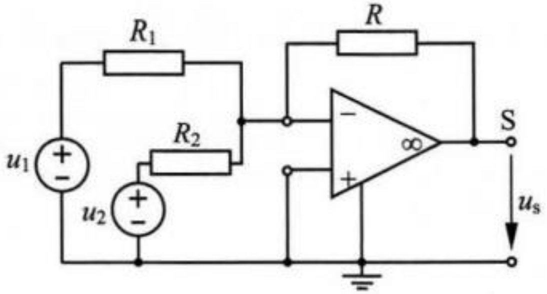


Figura P2.11

SP 2.11

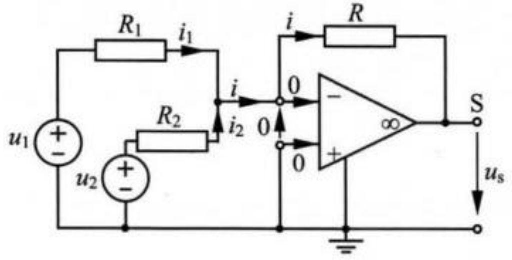


Figura SP 2.11

En la figura SP 2.11 se muestra el circuito en estudio, en el que, al ser nulas las intensidades en las entradas del amplificador operacional ideal, así como la tensión diferencial, se obtiene

$$u_1 = R_1 i_1$$
$$u_2 = R_2 i_2$$
$$u_s = -Ri$$

y, además,

$$i = i_1 + i_2$$

Si se sustituyen las intensidades en función de tensiones en esta última ecuación, resulta

$$-\frac{u_s}{R} = \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2}$$

Si se despeja de esta ecuación la tensión u_s, se obtiene el resultado buscado.

Ejercicio 1.12

P2.12 Si en el circuito de la figura 2.33 se sustituye la resistencia de realimentación por un condensador, se obtiene el circuito de la figura P2.12 cuya función es integrar la tensión de entrada. Demostrar que, en efecto, se verifica la ecuación siguiente

$$u_s = -\frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} u_e \mathrm{d}\tau$$

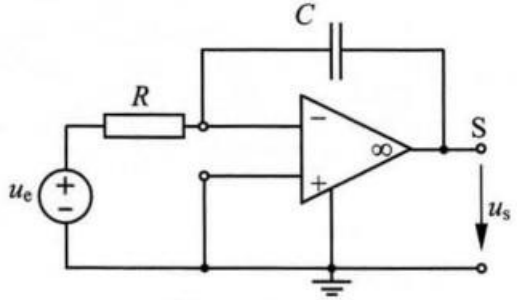


Figura P2.12

SP 2.12 En la figura SP 2.12 se muestra el circuito en estudio, en el que, al ser nulas las intensidades en las entradas del amplificador operacional ideal, así como la tensión diferencial, se obtiene

$$u_e = Ri$$
$$i = -C.\mathrm{d}u_s/\mathrm{d}t$$

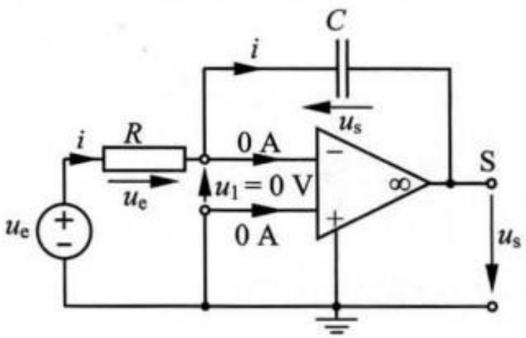


Figura SP 2.12

Si se sustituye el valor de la intensidad i, dado por la segunda ecuación, en la primera, resulta

$$u_e = -RC.\mathrm{d}u_s/\mathrm{d}t$$

Si en esta ecuación se despeja u_s, se obtiene el resultado buscado.

Ejercicio 1.13

P2.13 El circuito de la figura P2.13 recibe el nombre de amplificador no inversor. Se pide:

a) Comprobar que se verifica la ecuación siguiente:

$$u_s = \left(1 + \frac{R}{R_1}\right) u_e$$

b) Determinar los límites de la tensión u_e entre los que queda garantizado el funcionamiento lineal y, por tanto, la validez de la ecuación obtenida en el apartado a.

c) Comparar la carga que supone para la fuente de tensión u_e el circuito conectado a ella en este caso y en el caso del amplificador inversor representado en la figura 2.33.

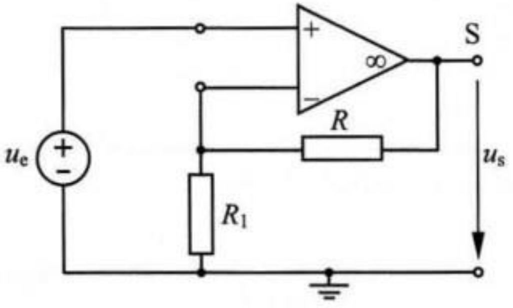


Figura P2.13

SP 2.13

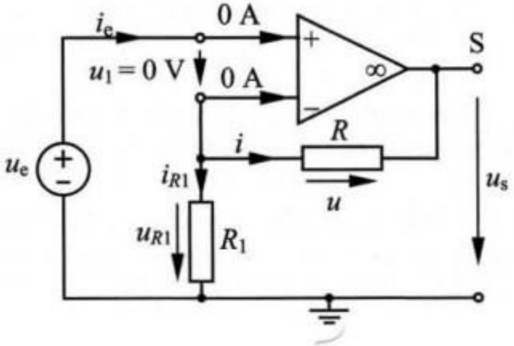


Figura SP 2.13

a) En la figura SP 2.13 se muestra el circuito en estudio, en el que, al ser nulas las intensidades en las entradas del amplificador operacional ideal, así como la tensión diferencial, se obtienen las ecuaciones siguientes

$$u_{R1} = u_e$$
$$u = u_{R1} - u_s$$
$$i = -i_{R1}$$

Si se sustituyen las intensidades en función de tensiones en esta última ecuación resulta

$$\frac{u}{R} = -\frac{u_{R1}}{R_1}$$

Ejercicio 1.13

SP 2.13

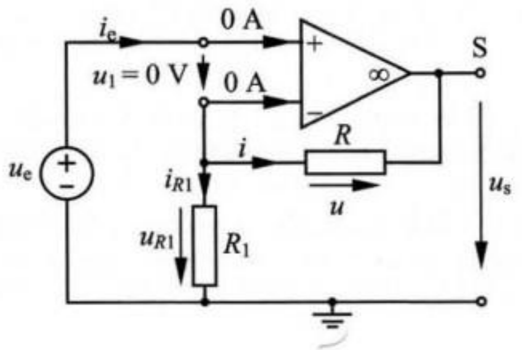


Figura SP 2.13

a) En la figura SP 2.13 se muestra el circuito en estudio, en el que, al ser nulas las intensidades en las entradas del amplificador operacional ideal, así como la tensión diferencial, se obtienen las ecuaciones siguientes

$$u_{R1} = u_e$$
$$u = u_{R1} - u_s$$
$$i = -i_{R1}$$

Si se sustituyen las intensidades en función de tensiones en esta última ecuación resulta

$$\frac{u}{R} = -\frac{u_{R1}}{R_1}$$

y, haciendo uso de las dos primeras ecuaciones, se tiene

$$\frac{u_e - u_s}{R} = -\frac{u_e}{R_1}$$

Si se despeja de esta última ecuación la tensión u_s, se obtiene el resultado buscado.

b) Para que el AO trabaje en la zona lineal se debe verificar la condición

$$-E_{sat} < u_s < E_{sat}$$

que, en este caso, se convierte en

$$-E_{sat} < \frac{R + R_1}{R_1} u_e < E_{sat}$$

es decir,

$$-\frac{R_1}{R + R_1} E_{sat} < u_e < \frac{R_1}{R + R_1} E_{sat}$$

c) En este circuito $i_e = 0$, luego la fuente ideal de tensión de valor u_e está conectada a un dipolo que se comporta como un circuito abierto.

En el circuito inversor de la figura 2.33 se puede verificar que $u_e = R_1 i_e$, es decir, a la entrada del amplificador la relación entre tensión e intensidad corresponde a la de una resistencia de valor R_1.

Ejercicio 1.14

P2.14 En la figura P2.14 se muestra un circuito conocido como *amplificador diferencial*. Demostrar que se cumple en él la relación siguiente

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1}(u_b - u_a)$$

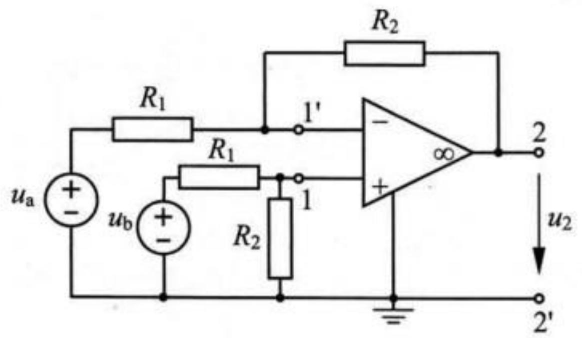


Figura P2.14

SP 2.14

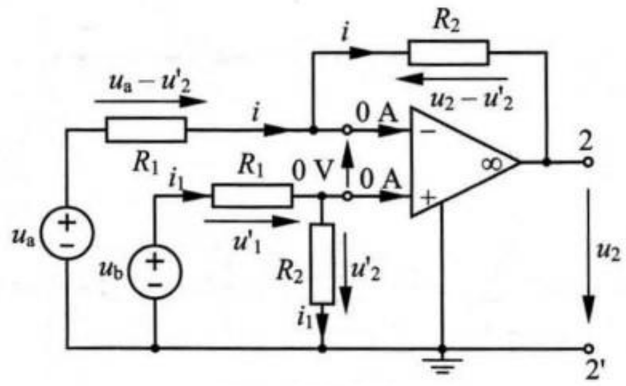


Figura SP 2.14

En la figura SP 2.14 se muestra el circuito en estudio en el que se han indicado las referencias de polaridad de tensiones e intensidades. En el subcircuito formado por la fuente de tensión u_b, y las resistencias R_1 y R_2 se tiene

$$u_b = u'_1 + u'_2$$
$$u'_1 = R_1.i_1$$
$$u'_2 = R_2.i_1$$

Ejercicio 1.14

SP 2.14

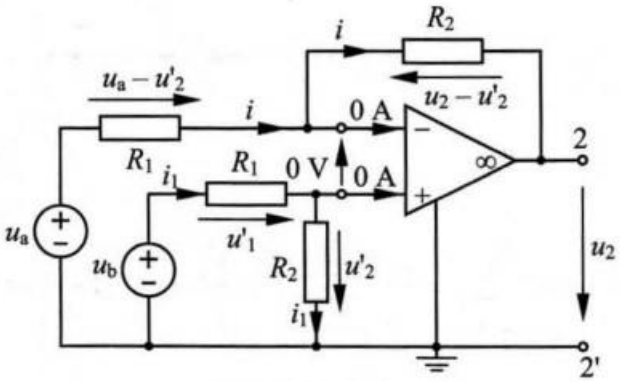


Figura SP 2.14

En la figura SP 2.14 se muestra el circuito en estudio en el que se han indicado las referencias de polaridad de tensiones e intensidades. En el subcircuito formado por la fuente de tensión u_b, y las resistencias R_1 y R_2 se tiene

$$u_b = u'_1 + u'_2$$
$$u'_1 = R_1.i_1$$
$$u'_2 = R_2.i_1$$

con lo que resulta

$$u'_2 = R_2.u_b/(R_1 + R_2). \qquad [2.87]$$

Además, con las tensiones en las resistencias indicadas en la figura SP 2.14, se tiene

$$i = \frac{u_a - u'_2}{R_1} = -\frac{u_2 - u'_2}{R_2}$$

De esta última ecuación resulta

$$R_2.u_a - R_2.u'_2 = R_1.u'_2 - R_1.u_2$$

Si de esta ecuación se despeja la tensión u_2 y se sustituye u'_2 por el valor dado en [2.87], se obtiene el resultado pedido.

Ejercicio 1.15

P2.15 Verificar que en el circuito de la figura P2.15 se cumple la relación siguiente

$$u_{s1} = \left(\frac{R_1 R_3}{R_2 R_4} R_5\right) . i_1$$

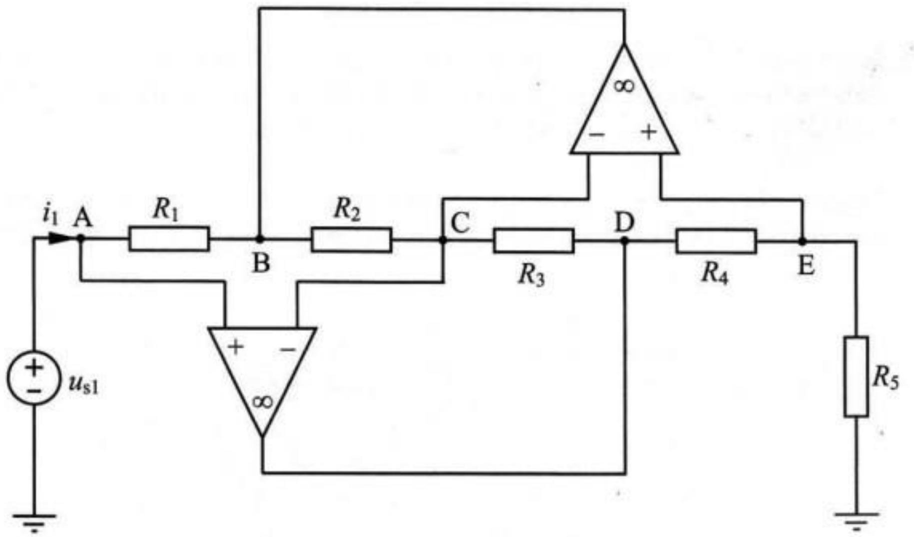


Figura P2.15

SP 2.15 En la figura SP 2.15 se muestra el circuito en estudio en el que se han indicado las referencias de tensión e intensidad, así como las intensidades y la tensión diferencial a la entrada de los AO.

Al ser nula la tensión diferencial a la entrada de los AO se verifica: $u_{AE} = 0$ y, por tanto,

$$u_{s1} = R_5 . i_5 \qquad [2.88]$$

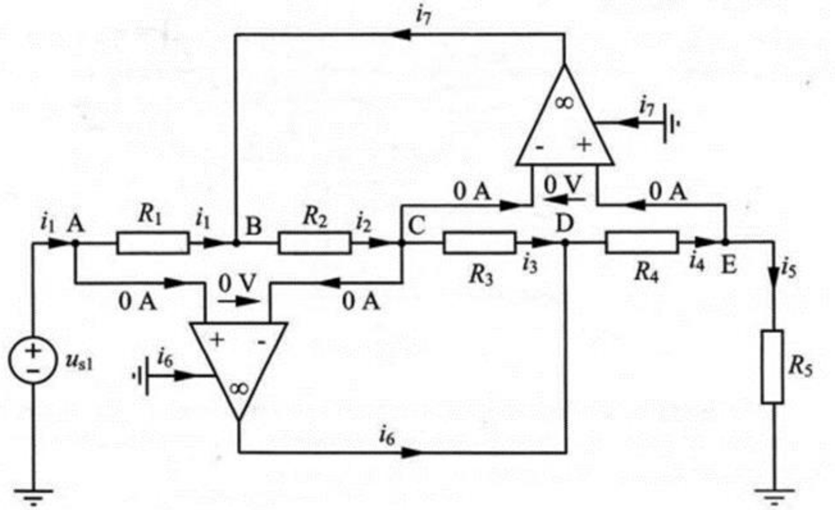


Figura SP 2.15

Ejercicio 1.15

SP 2.15 En la figura SP 2.15 se muestra el circuito en estudio en el que se han indicado las referencias de tensión e intensidad, así como las intensidades y la tensión diferencial a la entrada de los AO.

Al ser nula la tensión diferencial a la entrada de los AO se verifica: $u_{AE} = 0$ y, por tanto,

$$u_{s1} = R_5.i_5 \qquad [2.88]$$

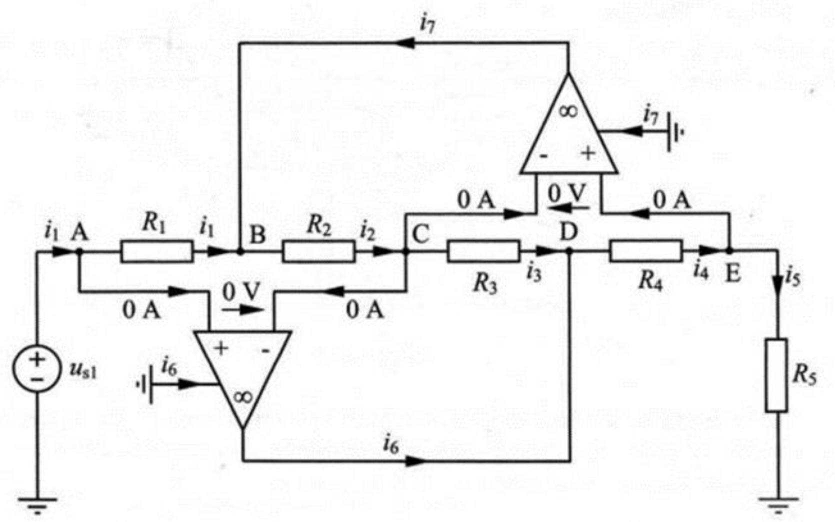


Figura SP 2.15

Además se tiene

$$i_4 = i_5$$
$$R_4.i_4 + R_3.i_3 = 0$$

luego,

$$i_3 = -R_4.i_5 / R_3.$$

Análogamente,

$$i_2 = i_3$$
$$R_1 i_1 + R_2.i_2 = 0$$

luego,

$$i_1 = -R_2.i_3 / R_1 = R_2.R_4.i_5 / (R_1 R_3).$$

Si se despeja de esta ecuación i_5 y se sustituye en la ecuación [2.88], se obtiene el resultado buscado.

Tema 2

Potencia y energía

Ejercicio 2.1

P3.1 Hallar la energía almacenada en el condensador y en la bobina del circuito de la figura P3.1 en un instante t. Se supone que en el circuito todas las tensiones e intensidades tienen un valor que no cambia a lo largo del tiempo.

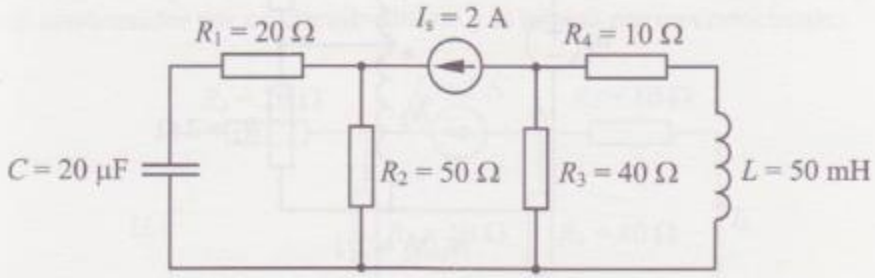


Figura P3.1

SP 3.1 *Al ser la tensión en el condensador, U_C, constante, la intensidad por el mismo es nula y se puede sustituir por un circuito abierto. De igual forma, al ser la intensidad en la bobina, I_L, constante, la tensión en la misma es nula y se puede sustituir por un cortocircuito.* En la figura SP 3.1 se muestra el circuito en estudio en el que se ha sustituido el condensador por un circuito abierto y la bobina por un cortocircuito.

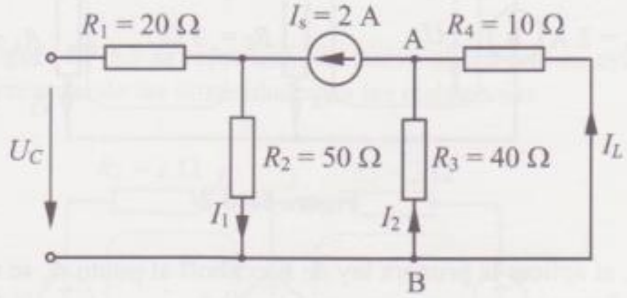


Figura SP 3.1

Por la resistencia R_1 no circula intensidad por lo que

$$I_1 = 2 \text{ A}$$
$$U_C = 50 I_1 = 100 \text{ V}$$

La intensidad I_L se obtiene mediante la aplicación de la 1ª ley de Kirchhoff al punto A:

$$I_L + I_2 = 2 \text{ A}$$

junto con la condición, deducida de la segunda ley de Kirchhoff,

$$10.I_L = 40.I_2$$

De estas dos ecuaciones se obtiene

$$I_L = 1{,}6 \text{ A}$$

Las energías almacenadas (absorbidas) en el condensador y en la bobina hasta un instante t cualquiera, una vez se ha llegado a la situación en que las magnitudes del circuito permanecen constantes, son:

$$W_C = CU_C^2/2 = 20.10^{-6}.100^2/2 = \ 0{,}1 \text{ J}$$
$$W_L = LI_L^2/2 = 50.10^{-3}.1{,}6^2/2 = \ 0{,}064 \text{ J}$$

Ejercicio 2.2

P3.2 Hallar la potencia absorbida o cedida por los elementos del circuito de la figura P3.2.

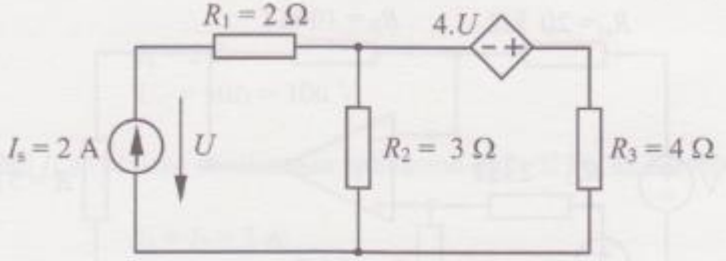


Figura P3.2

SP 3.2 En la figura SP 3.2 se muestra el circuito, en el que se han indicado las referencias de las intensidades que circulan por las resistencias. Inmediatamente se deduce

$$I_1 = I_s = 2\ \text{A}$$

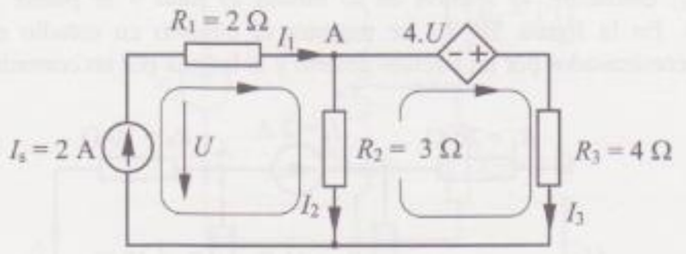


Figura SP 3.2

Por otra parte, al aplicar la primera ley de Kirchhoff al punto A, se tiene

$$I_s = I_2 + I_3$$

y mediante la segunda ley de Kirchhoff, aplicada a las trayectorias cerradas que se muestran en la figura SP 3.2, recorridas según el sentido indicado en ellas, se puede escribir

$$U = 2I_s + 3I_2$$
$$3I_2 = -4U + 4I_3$$

Una vez resuelto este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas se obtiene

$$I_2 = -8/19\ \text{A}$$
$$I_3 = 46/19\ \text{A}$$
$$U = 52/19\ \text{A}$$

La potencia absorbida por cada una de las resistencias del circuito es

$$P_{ab\ R1} = R_1 I_1^2 = 2.2^2 = 8\ \text{W}$$
$$P_{ab\ R2} = R_2 I_2^2 = 3.(-8/19)^2 = 192/361\ \text{W}$$
$$P_{ab\ R3} = R_3 I_3^2 = 4.(46/19)^2 = 8464/361\ \text{W}$$

y la absorbida por todas las resistencias

$$P_{total\ R} = P_{ab\ R1} + P_{ab\ R2} + P_{ab\ R3} = 11544/361\ \text{W} = 31{,}978\ \text{W}$$

La potencia cedida por cada una de las fuentes es

$$P_{ced\ fdep} = 4U.I_3 = 4.(52 \cdot 46/361) = 9568/361\ \text{W}$$
$$P_{ced\ findep} = U.I_s = 2.(52/19) = 1976/361\ \text{W}$$

y la cedida por todas las fuentes

$$P_{total\ f} = P_{ced\ fdep} + P_{ced\ findep} = 11544/361\ \text{W} = 31{,}978\ \text{W}$$

Se comprueba que la suma de las potencias absorbidas por unos elementos del circuito es igual a la suma de las potencias cedidas por los restantes.

Ejercicio 2.3

P3.3 Hallar la potencia absorbida o cedida por los elementos del circuito de la figura P3.3.

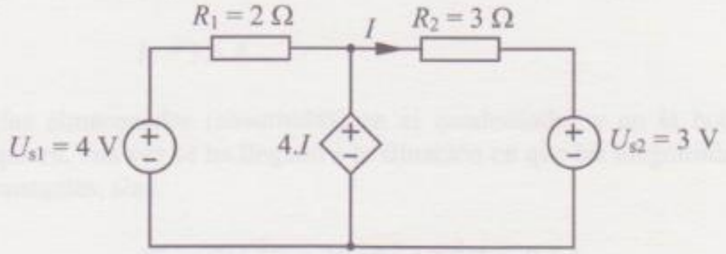


Figura P3.3

SP 3.3 En la figura SP 3.3 se representa de nuevo el circuito en estudio, en el que se han indicado las referencias de las intensidades en las resistencias

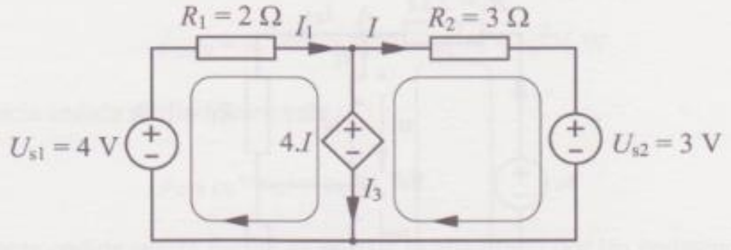


Figura SP 3.3

Si se aplica la segunda ley de Kirchhoff a la trayectoria cerrada de la derecha se tiene

$$-4I + 3I + 3 = 0$$

y, por tanto, $I = 3$ A

Si, a continuación, se aplica la segunda ley de Kirchhoff a la trayectoria cerrada de la izquierda resulta

$$-4 + 2I_1 + 4I = 0$$

y, si se tiene en cuenta el valor ya calculado de I, se obtiene: $I_1 = -4$ A

Finalmente, mediante la primera ley de Kirchhoff, se puede escribir

$$I_3 = I_1 - I = -7 \text{ A}$$

Las potencias absorbidas por las resistencias son

$$P_{ab\ R1} = R_1 I_1^2 = 2(-4)^2 = 32 \text{ W}$$
$$P_{ab\ R2} = R_2 I^2 = 3.3^2 = 27 \text{ W}$$

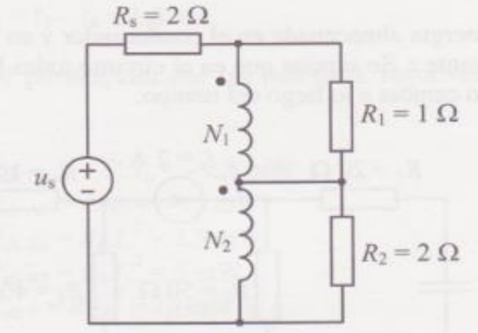
y las potencias cedidas por las fuentes

$$P_{ced\ Us1} = U_{s1}.I_1 = 4(-4) = -16 \text{ W}$$
$$P_{ced\ Us2} = -U_{s2}.I = -3.3 = -9 \text{ W}$$
$$P_{ced\ fdep} = -4I.I_3 = -4.3(-7) = 84 \text{ W}$$

Como puede verse, la potencia absorbida por las resistencias es igual a la cedida (con su signo) por las fuentes.

Ejercicio 2.4

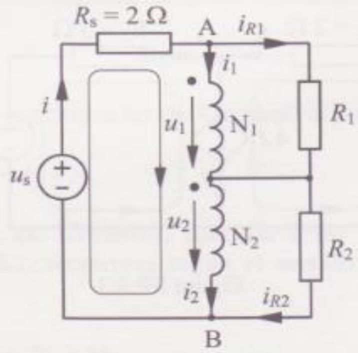
P3.4 Hallar la potencia absorbida por las resistencias R_1 y R_2, en función de u_s, en el circuito de la figura P3.4. Las dos bobinas constituyen un transformador ideal.



$N_1/N_2 = 2/1$

Figura P3.4

SP 3.4



$N_1/N_2 = 2/1$

Figura SP 3.4

En la figura SP 3.4 se muestra el circuito en estudio, en el que se han indicado las referencias de tensión e intensidad necesarias para su resolución.

En la trayectoria cerrada, que también se muestra en la figura SP 3.4, se puede escribir

$$u_s = 2i + u_1 + u_2$$

y en los puntos A y B se tiene

$$i = i_1 + i_{R1} = i_1 + u_1/1$$
$$i = i_2 + i_{R2} = i_2 + u_2/2$$

Además, se dispone de las ecuaciones del transformador ideal

$$u_1/u_2 = 2$$
$$2i_1 + i_2 = 0$$

Se tiene un sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas, del que resulta

$$u_1 = u_s/3$$
$$u_2 = u_s/6$$
$$i = u_s/4$$

La potencia absorbida por cada una de las resistencias es

$$p_{ab\ R1} = u_1^2/1 = u_s^2/9\ \text{W}$$
$$p_{ab\ R2} = u_2^2/2 = u_s^2/72\ \text{W}$$
$$p_{ab\ Rs} = 2 \cdot i^2 = u_s^2/8\ \text{W}$$

y la potencia total absorbida por las resistencias del circuito es

$$p_{ab\ R} = u_s^2/9 + u_s^2/72 + u_s^2/8 = u_s^2/4\ \text{W}$$

La potencia cedida por la fuente vale

$$p_{ced\ Us} = u_s i = u_s^2/4\ \text{W}$$

Ejercicio 2.4

La potencia cedida por la fuente es igual a la absorbida por las resistencias, con lo que se cumple la propiedad ya mencionada, ya que la potencia absorbida en los dos devanados del transformador ideal es cero.

Precisamente, esta propiedad del transformador ideal permite resolver este ejercicio de una forma alternativa. Si se considera el dipolo que queda a la derecha de los terminales A-B, la potencia absorbida por éste es

$$p_{\text{ab AB}} = u_{\text{AB}}.i$$

que ha de ser igual a la absorbida por las resistencias R_1 y R_2, es decir

$$u_{\text{AB}}.i = \frac{u_1^{\,2}}{R_1} + \frac{u_2^{\,2}}{R_2} \qquad [3.62]$$

Si en la ecuación [3.62] se sustituyen R_1 y R_2 por sus valores respectivos y se tiene en cuenta que $u_{\text{AB}} = u_1 + u_2$ y que $u_1 = 2u_2$, resulta

$$3u_2.i = (2u_2)^2 + u_2^{\,2}/2$$

es decir,

$$i = 3u_2/2$$

A continuación se aplica la segunda ley de Kirchhoff a la trayectoria cerrada formada por u_s, R_s, y los dos devanados del transformador ideal, con lo que se obtiene

$$u_s = 2.i + 3u_2$$

y si se tiene en cuenta el valor deducido para i (en función de u_2) resulta

$$u_2 = u_s/6$$
$$i = u_s/4$$

que son los resultados obtenidos anteriormente.

Ejercicio 2.5

P3.5 Hallar la potencia absorbida por los distintos elementos del circuito de la figura P3.5.

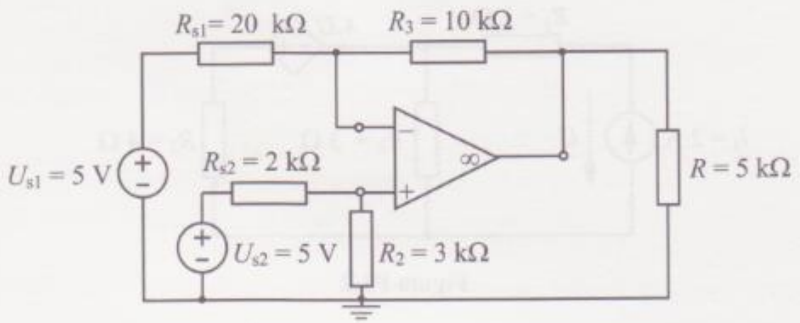


Figura P3.5

SP 3.5 En el circuito de la figura SP 3.5 se tiene a la entrada del amplificador operacional ideal

$$U_1 = 0$$
$$I_1 = I_{1'} = 0$$

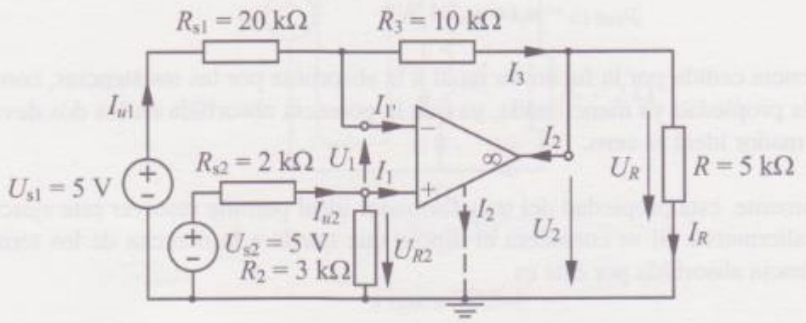


Figura SP 3.5

Teniendo en cuenta que $I_1 = 0$, en el trayecto cerrado formado por la fuente U_{s2} y las resistencias R_{s2} y R_2 se cumple

$$5 = 5000 I_{u2}$$

de donde, $I_{u2} = 1$ mA y la tensión en R_2 vale

$$U_{R2} = 3000.0{,}001 = 3 \text{ V}$$

Además mediante la segunda ley de Kirchhoff se puede escribir

$$U_{s1} = R_{s1} I_{u1} - U_1 + U_{R2}$$
$$-U_1 + U_{R2} = R_3 I_3 + R I_R$$

De la primera ecuación, al sustituir valores, se obtiene

$$5 = 20000 I_{u1} + 3$$

y, por tanto, $I_{u1} = 10^{-4}$ A = 0,1 mA.

De la segunda ecuación, si se tiene en cuenta que $I_3 = I_{u1}$, al ser $I_{1'} = 0$, se deduce

$$3 = 10000.10^{-4} + 5000 I_R$$

y, por tanto, $I_R = 0{,}4$ mA.

Ejercicio 2.5

Finalmente, en los terminales de salida del amplificador operacional ideal se tiene

$$I_2 = I_3 - I_R = -0{,}3 \text{ mA}$$
$$U_2 = U_R = 5000 I_R = 2 \text{ V}$$

Con los resultados obtenidos se pueden calcular las potencias absorbidas por las resistencias

$$P_{\text{ab } Rs1} = 20000.\ I_{u1}^2 = 2.10^4(\ 1.10^{-4}\ )^2 = 0{,}2 \text{ mW}$$
$$P_{\text{ab } R3} = 10000.\ I_3^2 = 1.10^4(\ 1.10^{-4}\ )^2 = 0{,}1 \text{ mW}$$
$$P_{\text{ab } Rs2} = 2000.\ I_{u2}^2 = 2.10^3(\ 1.10^{-3}\ )^2 = 2 \text{ mW}$$
$$P_{\text{ab } R2} = 3000.\ I_{u2}^2 = 3.10^3(\ 1.10^{-3}\ )^2 = 3 \text{ mW}$$
$$P_{\text{ab } R} = 5000.\ I_R^2 = 5.10^3(4.10^{-4})^2 = 0{,}8 \text{ mW}$$

y las potencias cedidas por las fuentes y por el amplificador operacional ideal:

$$P_{\text{ced } Us1} = 5 I_{u1} = 5.1.10^{-4} = 0{,}5 \text{ mW}$$
$$P_{\text{ced } Us2} = 5 I_{u2} = 5.1.10^{-3} = 5 \text{ mW}$$
$$P_{\text{ced AO}} = -\ U_2.I_2 = -\ 2.(-\ 3.10^{-4}\ ) = 0{,}6 \text{ mW}$$

También se comprueba la propiedad de que la suma de las potencias absorbidas (las cedidas cambiadas de signo) por todos los elementos del circuito es nula. Además, en este caso, la propiedad se verifica dentro del subcircuito formado por U_{s2}, R_{s2} y R_2, que queda independizado del resto del circuito, al ser nula la intensidad I_1 a la entrada del amplificador operacional ideal.

Tema 3

Conceptos básicos y métodos de análisis de circuitos

Conceptos básicos

- Rama: es un elemento o grupo de elementos que presenta dos terminales. Queda definida por una relación entre la tensión que hay entre sus extremos, u, y la corriente que circula por ella i. La rama resistiva más general se muestra en la Figura 1.19.

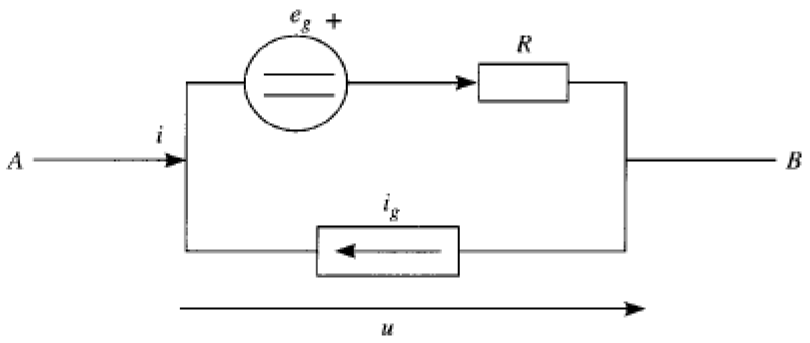


Figura 1.19.

La relación entre la tensión y la intensidad de esta rama se obtiene aplicando las leyes de Kirchhoff, y se puede escribir como:

$$u = -e_g + R \cdot (i + i_g)$$

- Nudo: es el punto de unión de dos o más ramas.
- Malla: sólo está definida en circuitos planos. Es un conjunto de ramas que forma una línea cerrada y que no contiene otra en su interior.

Método de mallas

Para resolver un circuito por el método de mallas hay que resolver el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} R_{m1,1} & R_{m1,2} & \cdots & R_{m1,m} \\ R_{m2,1} & R_{m2,2} & \cdots & R_{m2,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{mn,1} & R_{mn,2} & \cdots & R_{mn,m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \cdots \\ i_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \cdots \\ E_m \end{bmatrix}$$

$$[R] \cdot [i] = [E]$$

$[R]$ es la *matriz de resistencias de malla*, cuyos términos tienen el valor siguiente:

$$R_{mi,i} = \sum_j R_{ij}$$

$$R_{mi,j} = -R_{ij} \qquad (i \neq j)$$

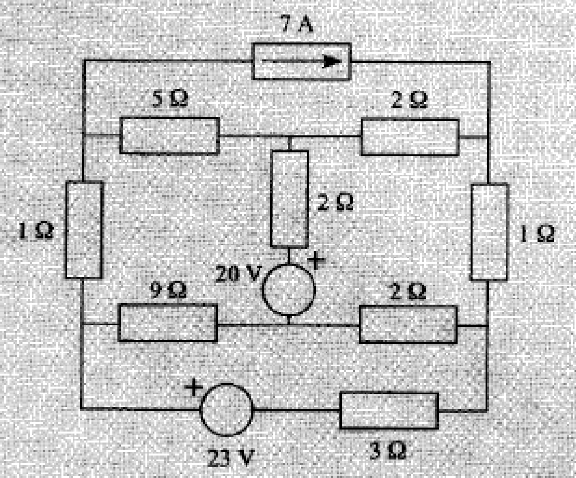
$[i]$ es el vector de corrientes de malla.

$[E]$ es el vector de fuentes de tensión de malla, que está formado por las fuentes de tensión con sentidos opuestos al de referencia dentro de una malla. Si el sentido es el contrario, el signo con el que aparecen en la expresión final es negativo. Las componentes de este vector se obtienen de la siguiente manera:

$$E_k = \sum_j e_{ij}$$

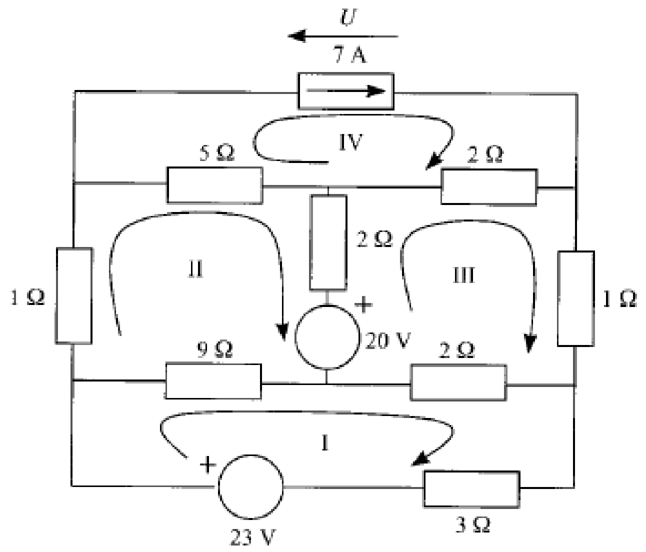
Ejercicio 3.1

Efectuar el análisis por mallas del circuito de la figura.



SOLUCIÓN

Para efectuar el análisis por mallas se numeran las mallas según se muestra en la figura y se toma como incógnita la tensión U de la fuente de corriente.



Las ecuaciones de mallas son:

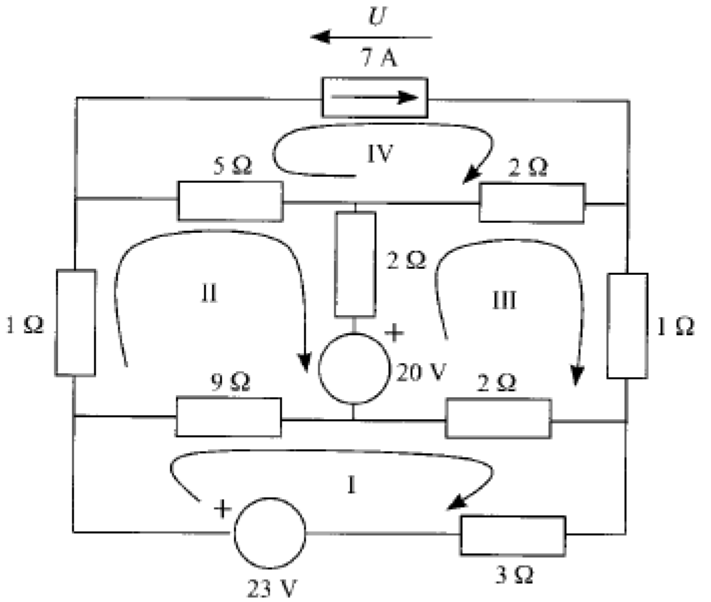
$$\text{I:} \quad (9+2+3)i_I - 9i_{II} - 2i_{III} = 23$$

$$\text{II:} \quad -9i_I + (1+5+2+9)i_{II} - 2i_{III} - 5i_{IV} = -20$$

$$\text{III:} \quad -2i_I - 2i_{II} + (2+2+1+2)i_{III} - 2i_{IV} = 20$$

$$\text{IV:} \quad -5i_{II} - 2i_{III} + (5+2)i_{IV} = U$$

Ejercicio 3.1



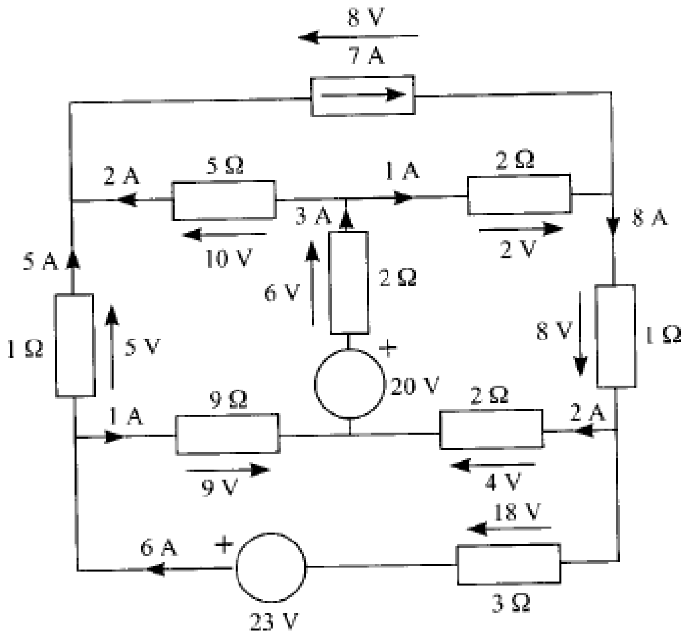
Pero la fuente de corriente impone la intensidad $i_{IV} = 7$ A. Por tanto, el sistema de ecuaciones queda como se indica a continuación:

$$\text{I:}\quad 14i_I - 9i_{II} - 2i_{III} = 23$$
$$\text{II:}\quad -9i_I + 17i_{II} - 2i_{III} = 15$$
$$\text{III:}\quad -2i_I - 2i_{II} + 7i_{III} = 34$$
$$\text{IV:}\quad -5i_{II} - 2i_{III} - U = -49$$

cuya solución es

$$i_I = 6 \text{ A}, \qquad i_{II} = 5 \text{ A}, \qquad i_{III} = 8 \text{ A}, \qquad U = 8 \text{ V}$$

Las corrientes y tensiones en cada elemento se muestran en la figura:



Balance de potencias:

Potencias generadas por las fuentes

$$\Sigma P_g = 138 + 60 + 56 = 254 \text{ W}$$

Potencias consumidas en las resistencias

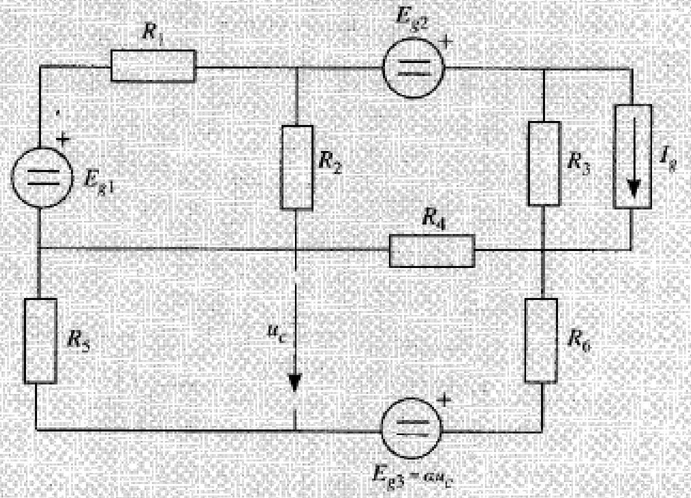
$$\Sigma P_c = 25 + 20 + 9 + 18 + 2 + 64 + 8 + 108 = 254 \text{ W}$$

Ejercicio 3.2

Realizar el análisis por mallas y el balance de potencias del circuito de la figura, en el que los parámetros toman los siguientes valores:

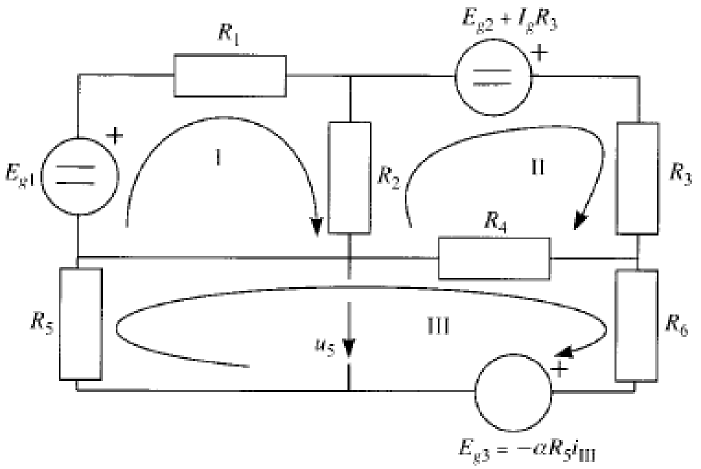
$R_1 = 4\ \Omega \quad R_2 = 2\ \Omega \quad R_3 = 2\ \Omega \quad R_4 = 2\ \Omega \quad R_5 = 1\Omega \quad R_6 = 1\ \Omega$

$E_{g1} = 6\ V \quad E_{g2} = 12\ V \quad I_g = 2\ A \quad \alpha = 10$

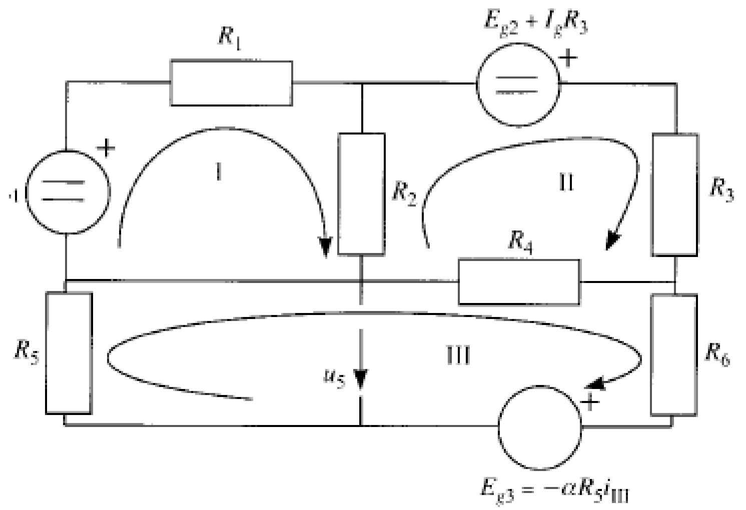


Solución

Se transforma la fuente de corriente real en fuente de tensión real, con lo que el circuito equivalente queda:



Ejercicio 3.2



Las ecuaciones de mallas resultantes son:

$$\begin{aligned}(R_1+R_2)i_I - R_2 i_{II} \qquad\qquad &= E_{g1}\\ -R_2 i_I + (R_2+R_3+R_4)i_{II} \qquad - R_4 i_{III} &= E_{g2} + I_g R_3\\ -R_4 i_{II} + (R_4+R_5+R_6)i_{III} &= \alpha R_5 i_{III}\end{aligned}$$

Se modifica la última ecuación:

$$\begin{aligned}(R_1+R_2)i_I - R_2 i_{II} \qquad\qquad &= E_{g1}\\ -R_2 i_I + (R_2+R_3+R_4)i_{II} \qquad - R_4 i_{III} &= E_{g2} + I_g R_3\\ -R_4 i_{II} + (R_4+R_5(1-\alpha)+R_6)i_{III} &= 0\end{aligned}$$

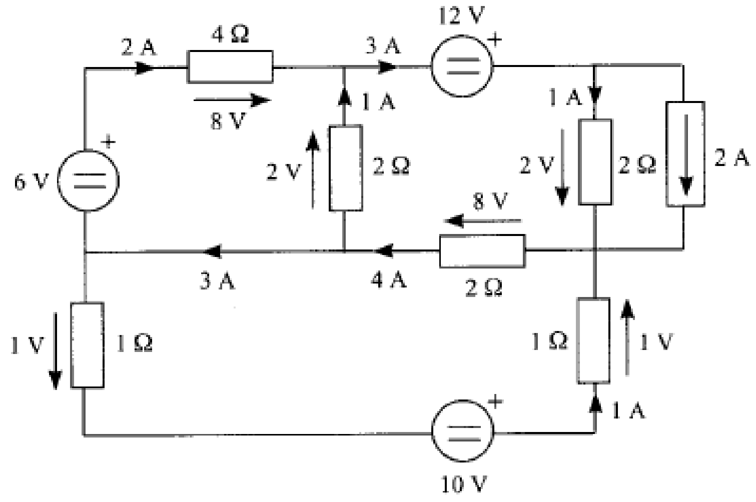
Sustituyendo los valores de todos los parámetros:

$$\begin{aligned}6i_I - 2i_{II} \qquad &= 6\\ -2i_I + 6i_{II} - 2i_{III} &= 16\\ -2i_{II} - 6i_{III} &= 0\end{aligned}$$

La solución de estas ecuaciones es:

$$i_I = 2\ \text{A}, \qquad i_{II} = 3\ \text{A}, \qquad i_{III} = -1\ \text{A}$$

De aquí se obtienen las tensiones y corrientes por aplicación de las leyes de Kirchhoff:



El balance de potencias será:

$$\Sigma P_c = 54\ \text{W} \qquad \Sigma P_g = 54\ \text{W}$$

Método de nudos

Para resolver un circuito por el método de nudos se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} g_{n1,1} & g_{n1,2} & \cdots & g_{n1,n} \\ g_{n2,1} & g_{n2,2} & \cdots & g_{n2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{nn,1} & g_{nn,2} & \cdots & g_{nn,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

$$[G] \cdot [u] = [I]$$

$[G]$ es la *matriz de conductancias nodales*. Sus términos tienen el siguiente valor:

$$g_{ni,i} = \sum_j g_{ij}$$

$$g_{ni,j} = -g_{ij} \qquad (i \neq j)$$

donde g_{ij} es la conductancia de la rama que une los nudos i y j.

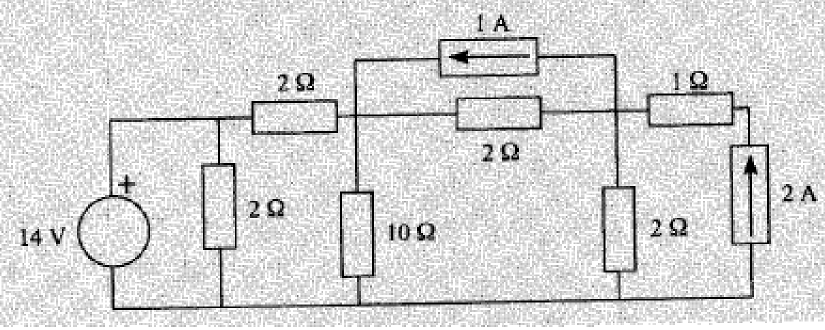
$[u]$ es el vector de tensiones de nudo, esto es, las diferencias entre la tensión de un nudo y la de un nudo cualquiera del circuito, que se escoge como *nudo de referencia*.

$[I]$ es el vector de corrientes de nudo, que está formado por las corrientes entrantes en un nudo provenientes de fuentes de corriente. Cada uno de los elementos se forma de la siguiente manera:

$$I_k = \sum_j i_{ij}$$

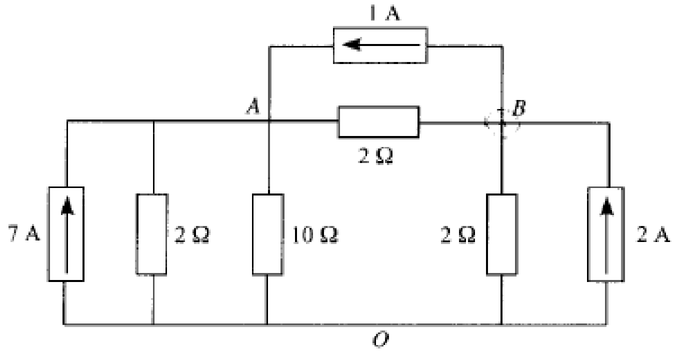
Ejercicio 3.3

Efectuar el análisis por nudos del circuito de la figura, determinando tensión e intensidad en cada elemento, la potencia absorbida por cada resistencia y la cedida por las fuentes.



SOLUCIÓN

Se eliminan del circuito, puesto que no proporcionan ninguna ecuación más, la resistencia en serie con la fuente de corriente y la que está en paralelo con la fuente de tensión. Esta última queda, tras esta operación, en serie con una resistencia, por lo que se puede convertir en una fuente real de corriente equivalente, operación necesaria para la aplicación del método de nudos. Tras estas transformaciones, el circuito equivalente que resulta es:



Se aplican las ecuaciones del método de nudos, tomando como incógnitas las tensiones en los nudos A y B con respecto a la referencia, que será el nudo O. Las ecuaciones serán:

$$A:\quad \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\right)u_A - \frac{1}{2}u_B = 7+1$$

$$B:\quad -\frac{1}{2}u_A + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)u_B = 2-1$$

Es decir:

$$A:\quad 11u_A - 5u_B = 80$$

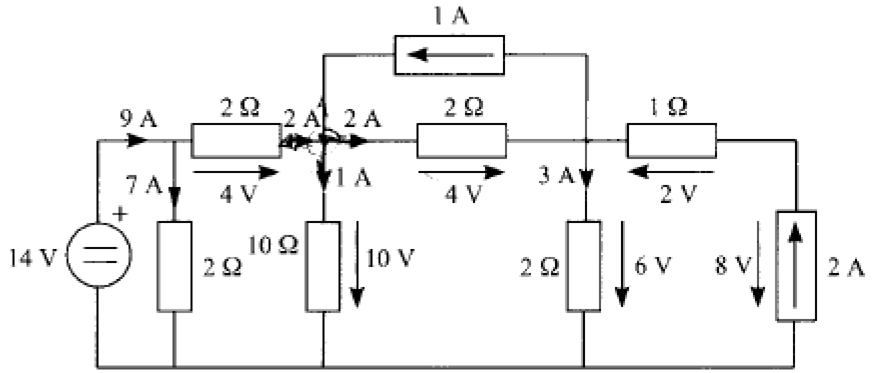
$$B:\ -\frac{1}{2}u_A + u_B = 1$$

La solución del sistema es

$$u_A = 10\ \text{V} \qquad u_B = 6\ \text{V}$$

Ejercicio 3.3

A partir de la tensión en estos nudos, y mediante la aplicación de las leyes de Kirchhoff, se obtienen las restantes tensiones y corrientes.



Se realiza el balance de potencias consumidas y generadas.

Potencias consumidas en las resistencias

$$\Sigma P_c = 7^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 2 + 1^2 \cdot 10 + 2^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 1 = 146 \text{ W}$$

Potencias generadas por las fuentes

$$\Sigma P_g = 14 \cdot 9 + 4 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 146 \text{ W}$$

Tema 4

Asociaciones de dipolos

Asociaciones de elementos

- **Asociación de fuentes ideales**

Fuentes de tensión en serie:

$$e_{eq} = e_1 - e_2 + \cdots + e_n$$

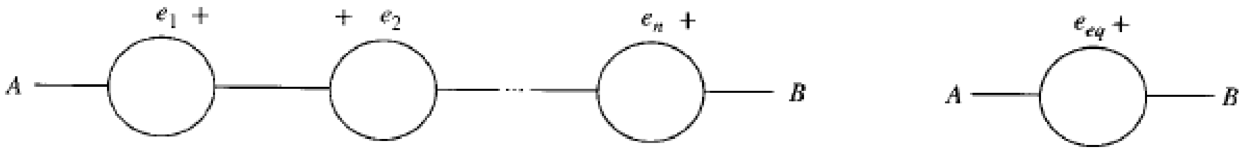


Figura 1.14.

Fuentes de corriente en paralelo:

$$i_{eq} = i_1 - i_2 + \cdots + i_n$$

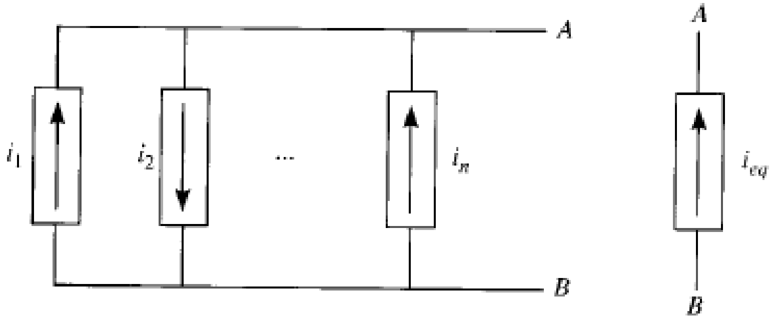


Figura 1.15.

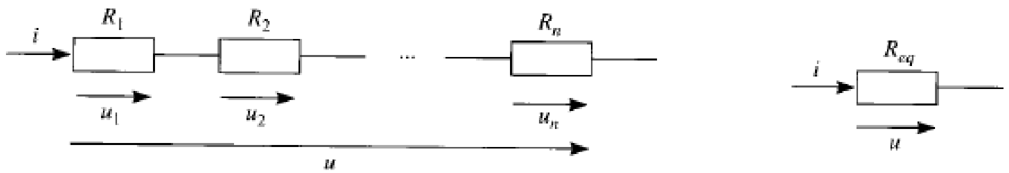
Asociaciones de elementos

- **Asociaciones de resistencias**

Asociación en serie:

Un conjunto de resistencias están asociadas en serie cuando por ellas circula la misma corriente, tal como se muestra en la Figura 1.16.

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$



a) b)

Figura 1.16.

Conductancia equivalente de un conjunto de resistencias en serie:

$$\frac{1}{G_{eq}} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \cdots + \frac{1}{G_n}$$

Si se quiere conocer la tensión en la resistencia k, esta será:

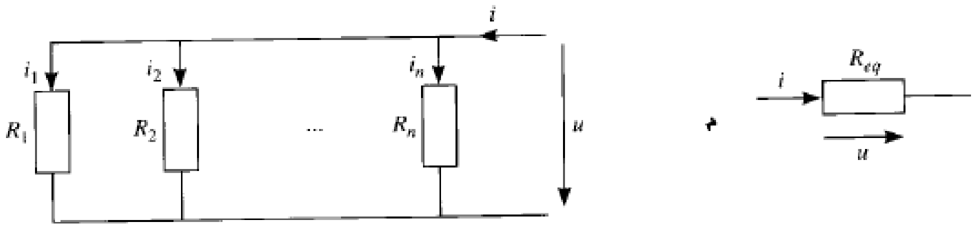
$$u_k = R_k \cdot i = R_k \cdot \frac{u}{R_1 + R_2 + \cdots + R_n} = \frac{R_k}{R_1 + R_2 + \cdots + R_n} \cdot u$$

Un conjunto de resistencias en serie se denomina *divisor de tensión.*

Asociación en paralelo. Divisor de corriente:

Un conjunto de resistencias están asociadas en paralelo cuando todas ellas están sometidas a la misma tensión, tal como se muestra en la Figura 1.17.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$



a) b)

Figura 1.17.

La corriente que circula por la resistencia k es:

$$i_k = \frac{u}{R_k} = \frac{\frac{1}{R_k}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}} \cdot i$$

En función de las conductancias, se obtiene las siguientes expresiones:

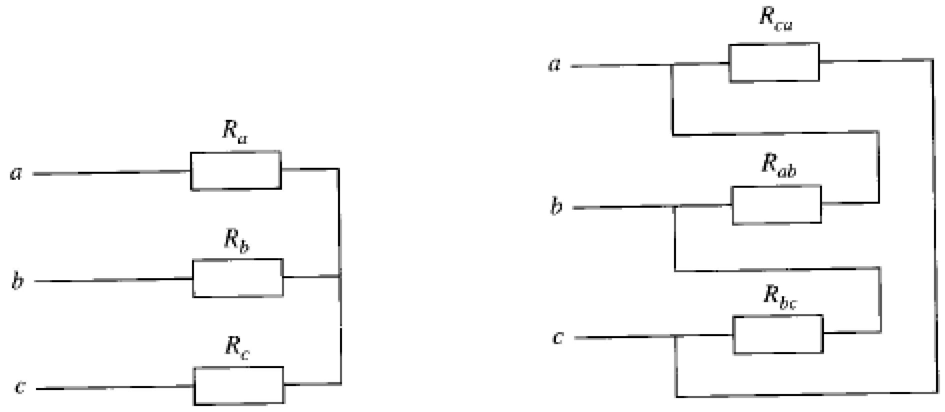
$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$$

$$i_k = G_k \cdot u = G_k \cdot \frac{i}{G_1 + G_2 + \cdots + G_n} = \frac{G_k}{G_1 + G_2 + \cdots + G_n} \cdot i$$

Un conjunto de resistencias en paralelo se denomina *divisor de corriente.*

Asociaciones de elementos

- **Transformaciones triángulo-estrella y estrella-triángulo**



a) Configuración en estrella.   b) Configuración en triángulo.

Figura 1.18.

Transformación triángulo-estrella

$$R_a = \frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_b = \frac{R_{bc} \cdot R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_c = \frac{R_{ca} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

Transformación estrella-triángulo

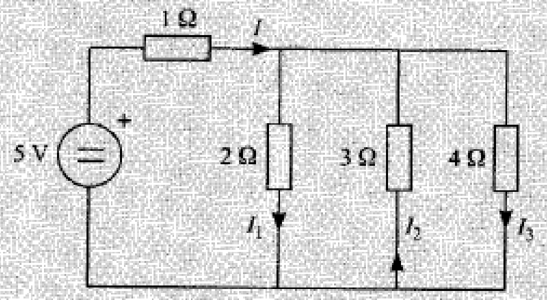
$$R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a R_b}{R_c}$$

$$R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_b R_c}{R_a}$$

$$R_{ca} = R_a + R_c + \frac{R_a R_c}{R_b}$$

Ejercicio 4.1

Hallar la corriente en cada resistencia del circuito de la figura.



SOLUCIÓN

La resistencia equivalente a la asociación de las tres que están en paralelo es:

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = \frac{12}{13}\ \Omega$$

La corriente resultante será:

$$I = \frac{5}{1+\frac{12}{13}} = \frac{13}{5}\ \text{A}$$

Al aplicar la fórmula del divisor de corriente se obtienen las corrientes por cada una de las ramas:

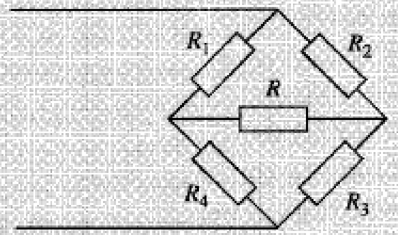
$$I_1 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} \cdot \frac{13}{5} = \frac{6}{5}\ \text{A}$$

$$I_2 = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} \cdot \frac{13}{5} = -\frac{4}{5}\ \text{A}$$

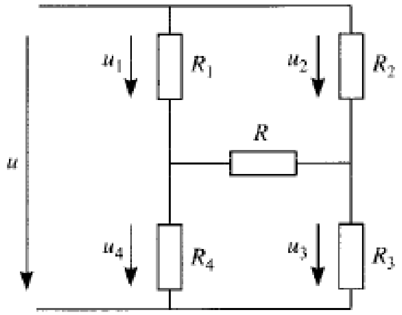
$$I_3 = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} \cdot \frac{13}{5} = \frac{3}{5}\ \text{A}$$

Ejercicio 4.2

La configuración dibujada en la figura recibe el nombre de «puente». Se dice que un puente está equilibrado cuando la intensidad que circula por R vale 0. Hallar la relación que deben de cumplir R_1, R_2, R_3 y R_4 para que el puente esté equilibrado.



SOLUCIÓN



Cuando la corriente por la resistenca R es nula, la tensión entre sus terminales también lo es, por lo que:

$$u_1 = u_2$$
$$u_3 = u_4$$

Además, puesto que la corriente que circula por R es nula, la corriente que circula por R_1 es la misma que la que circula por R_4. Lo mismo sucede con las corrientes que circulan por R_2 y R_3. Por tanto, R_1 y R_4 forman un divisor de tensión, y R_2 y R_3 forman otro. Esto permite expresar las tensiones u_1 y u_2 como

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_4} u$$

$$u_2 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} u$$

Se igualan ambas expresiones, obteniéndose que:

$$\frac{R_1}{R_1 + R_4} = \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

Lo que implica que

$$R_1 R_3 = R_2 R_4$$

Del mismo modo:

$$u_3 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} u$$

$$u_4 = \frac{R_4}{R_1 + R_4} u$$

Y se llega a la misma conclusión:

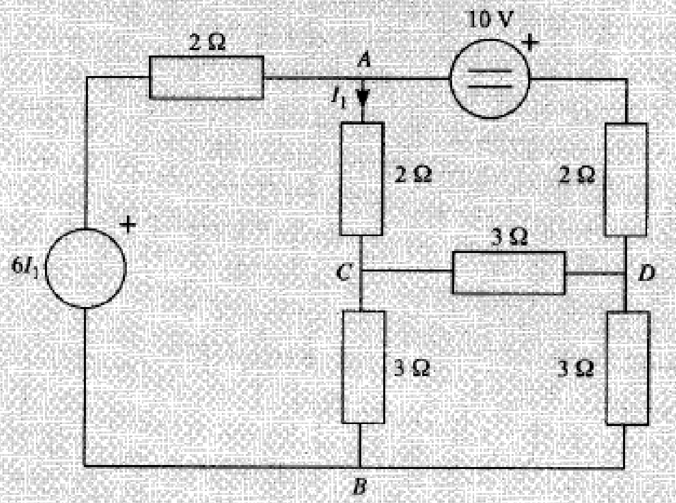
$$R_1 R_3 = R_2 R_4$$

Ésta es la relación que tienen que guardar entre sí las resistencias para que la corriente circulante por R sea nula.

Ejercicio 4.3

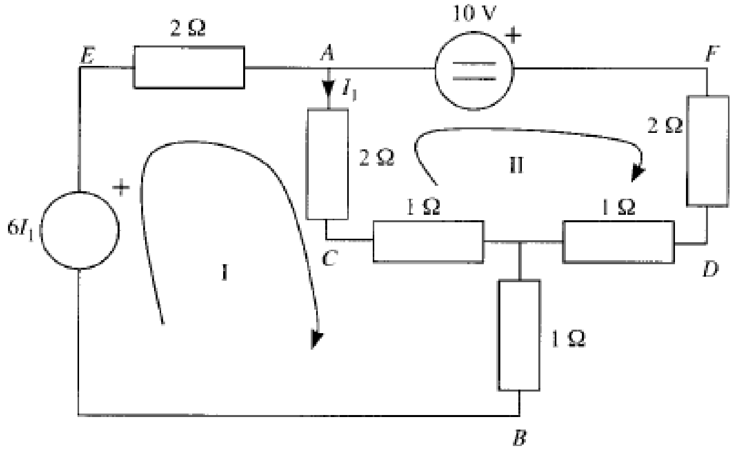
Dado el circuito de la figura se pide:

1. Simplificar el circuito con una transformación triángulo-estrella en el triángulo *BCD* y realizar el análisis por el método de mallas.
2. Calcular las tensiones e intensidades de las ramas del circuito original. Realizar el balance de potencias.



SOLUCIÓN

1. La transformación triángulo-estrella en el triángulo *BCD* da una resistencia equivalente en cada rama de la estrella de valor 1 Ω $\left(R_Y = \frac{R_\Delta}{3}\right)$, como indica la figura:



Las ecuaciones de cada malla son:

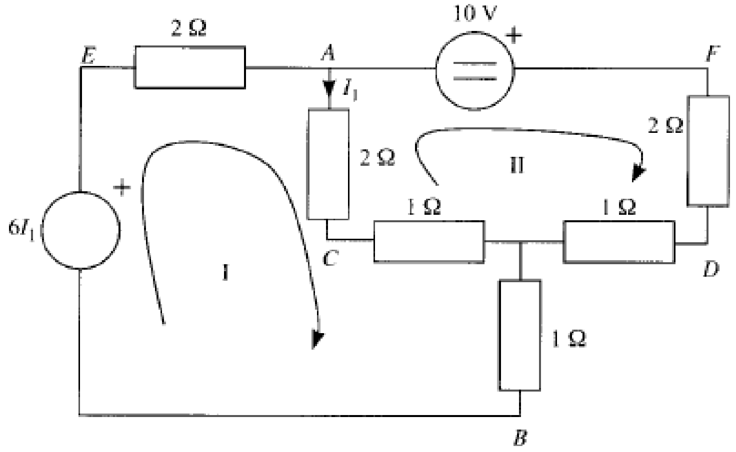
I: $(2 + 2 + 1 + 1)i_I - (2 + 1)i_{II} = 6I_1$

II: $-(2 + 1)i_I + (2 + 1 + 1 + 2)i_{II} = 10$

Ejercicio 4.3

Solución

1. La transformación triángulo-estrella en el triángulo BCD da una resistencia equivalente en cada rama de la estrella de valor 1 Ω $\left(R_Y = \frac{R_\Delta}{3}\right)$, como indica la figura:



Las ecuaciones de cada malla son:

I: $(2 + 2 + 1 + 1)i_I - (2 + 1)i_{II} = 6I_1$

II: $-(2 + 1)i_I + (2 + 1 + 1 + 2)i_{II} = 10$

Pero la intensidad I_1 se puede poner en función de las intensidades de malla como $I_1 = i_I - i_{II}$. Por tanto al sustituir este valor se tiene:

$$6i_I - 3i_{II} = 6(i_I - i_{II})$$
$$-3i_I + 6i_{II} = 10$$

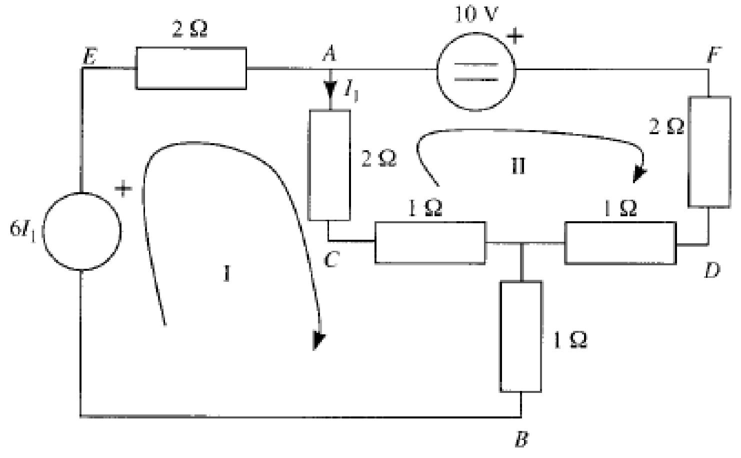
La solución de este sistema es:

$$i_{II} = 0 \text{ A} \qquad i_I = \text{-}10/3 \text{ A} \qquad I_1 = -10/3 \text{ A}$$

2. Cálculo de las tensiones (partiendo de la estrella):

$$u_{CB} = 1 \cdot (i_I - i_{II}) + 1 \cdot i_I = 2 \cdot (-10/3) = -20/3 \text{ V}$$
$$u_{DB} = 1 \cdot i_{II} + 1 \cdot i_I = 1 \cdot (-10/3) = -10/3 \text{ V}$$
$$u_{CD} = 1 \cdot (i_I - i_{II}) - 1 \cdot i_{II} = 1 \cdot (-10/3) = -10/3 \text{ V}$$
$$u_{AC} = 2 \cdot I_1 = 2 \cdot (-10/3) = -20/3 \text{ V}$$
$$u_{FD} = 2 \cdot i_{II} = 0 \text{ V}$$
$$u_{EA} = 2 \cdot i_I = 2 \cdot (-10/3) = -20/3 \text{ V}$$

Ejercicio 4.3



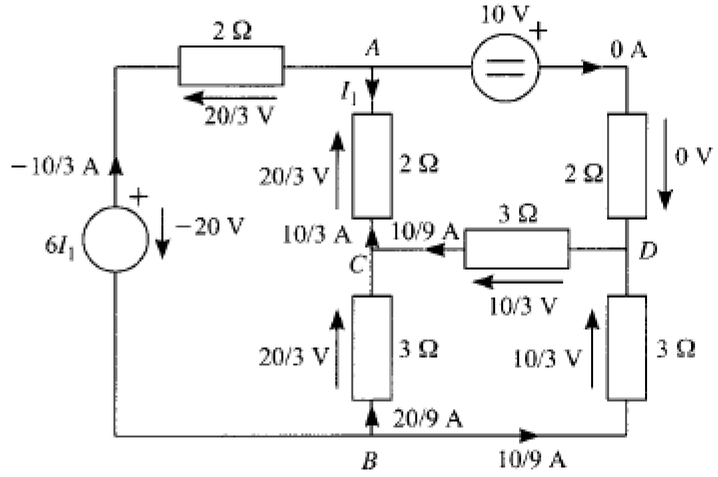
2. Cálculo de las tensiones (partiendo de la estrella):

$$u_{CB} = 1 \cdot (i_I - i_{II}) + 1 \cdot i_I = 2 \cdot (-10/3) = -20/3 \text{ V}$$
$$u_{DB} = 1 \cdot i_{II} + 1 \cdot i_I = 1 \cdot (-10/3) = -10/3 \text{ V}$$
$$u_{CD} = 1 \cdot (i_I - i_{II}) - 1 \cdot i_{II} = 1 \cdot (-10/3) = -10/3 \text{ V}$$
$$u_{AC} = 2 \cdot I_1 = 2 \cdot (-10/3) = -20/3 \text{ V}$$
$$u_{FD} = 2 \cdot i_{II} = 0 \text{ V}$$
$$u_{EA} = 2 \cdot i_I = 2 \cdot (-10/3) = -20/3 \text{ V}$$

Cálculo de las intensidades:

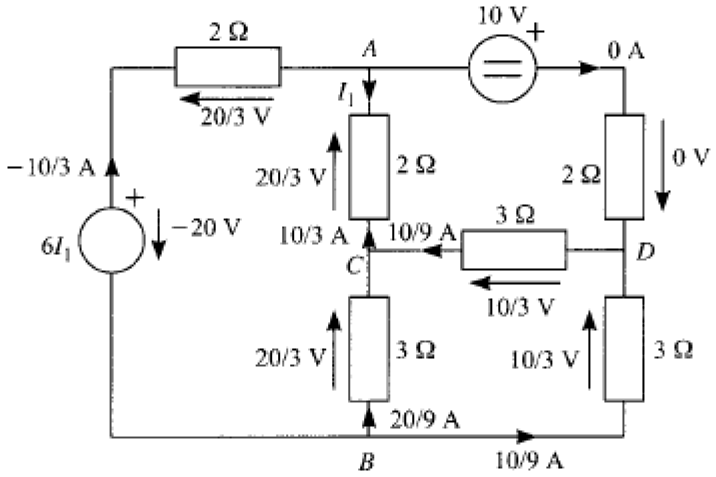
$$i_{AC} = I_1 = -10/3 \text{ A}$$
$$i_{AF} = i_{II} = 0 \text{ A}$$
$$i_{BE} = i_I = -10/3 \text{ A}$$
$$i_{CB} = u_{CB}/3 = (-20/3)/3 = -20/9 \text{ A}$$
$$i_{CD} = u_{CD}/3 = (-10/3)/3 = -10/9 \text{ A}$$
$$i_{BD} = u_{BD}/3 = -u_{DB}/3 = -(-10/3)/3 = 10/9 \text{ A}$$

Las tensiones y corrientes del diagrama original se muestran en la figura:



Ejercicio 4.3

Las tensiones y corrientes del diagrama original se muestran en la figura:



Balance de potencias:

Potencias generadas por las fuentes

$$\Sigma P_g = -20 \cdot (-10/3) + 10 \cdot 0 = 200/3 \text{ W}$$

Potencias consumidas por las resistencias

$$\Sigma P_c = 20/3 \cdot 10/3 + 20/3 \cdot 10/3 + 10/3 \cdot 10/9 + 20/3 \cdot 20/9 + 10/3 \cdot 10/9 =$$
$$= 200/9 + 200/9 + 100/27 + 400/27 + 100/27 = 1800/27 = 200/3 \text{ W}$$

Y se cumple que:

$$\Sigma P_g = \Sigma P_c$$

#SOMOS2030

Tema 5

Teoremas del análisis de circuitos

Teorema de Superposición. Linealidad
Teorema de sustitución

- **Teorema de superposición. Linealidad**

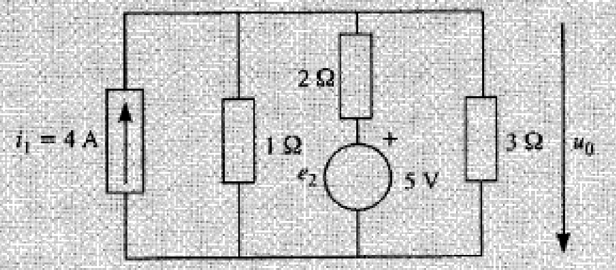
1. La respuesta de un circuito lineal a varias fuentes de excitación actuando simultáneamente es igual a la suma de las respuestas que se tendrían cuando actuase cada una de ellas por separado *(principio de superposición).*
2. Si todas las excitaciones de un circuito lineal se multiplican por una constante, todas las respuestas de dicho circuito vienen multiplicadas por esa misma constante.

- **Teorema de sustitución**

Si en un circuito se sustituye un elemento cualquiera por una fuente de corriente del valor de la corriente circulante en la rama, las magnitudes del circuito no varían. Lo mismo sucede si se sustituye el elemento por una fuente de tensión del valor de la tensión en bornes de este elemento.

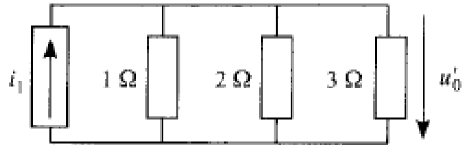
Ejercicio 5.1

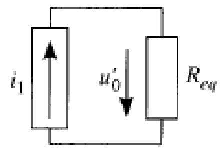
Hallar la tensión u_0 en el circuito de la figura. Si i_1 y e_2 pasan a valer 8 A y 3 V respectivamente, ¿cuánto vale u_0?



SOLUCIÓN

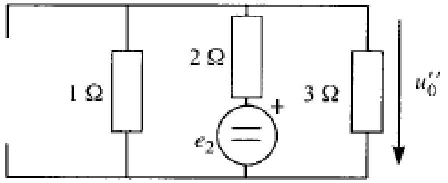
Se aplica superposición. En primer lugar, se obtiene el valor de la tensión u_0 cuando sólo actúa la fuente de corriente, u_0'.





$$u_0' = R_{eq} \cdot i_1 = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} i_1 = \frac{6}{6+3+2} i_1 = \frac{6}{11} i_1$$

A continuación, se obtiene la tensión cuando sólo actúa la fuente de tensión, u_0''.



Para obtener u_0'' se emplea la fórmula del divisor de tensión:

$$u_0'' = \frac{\frac{3 \cdot 1}{3+1}}{\frac{3 \cdot 1}{3+1} + 2} e_2 = \frac{3}{11} e_2$$

La tensión u_0 será la suma de ambas tensiones, u_0' y u_0'':

$$u_0 = u_0' + u_0'' = \frac{6}{11} i_1 + \frac{3}{11} e_2$$

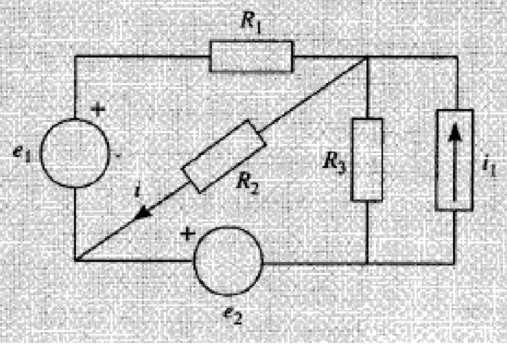
A continuación, se particularizan los resultados para los valores indicados de fuente de tensión y corriente:

$$i_1 = 4 \text{ A} \quad ; \quad e_2 = 5 \text{ V} \quad u_0 = \frac{6}{11} 4 + \frac{3}{11} 5 = \frac{39}{11} \text{ V}$$

$$i_1 = 8 \text{ A} \quad ; \quad e_2 = 3 \text{ V} \quad u_0 = \frac{6}{11} 8 + \frac{3}{11} 3 = \frac{57}{11} \text{ V}$$

Ejercicio 5.2

Hallar por aplicación del teorema de superposición la intensidad i del circuito de la figura.



SOLUCIÓN

Valor de i cuando sólo actúa e_1. Se aplica la fórmula del divisor de tensión:

$$i' = \frac{e_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{e_1 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Valor de i cuando sólo actúa e_2:

$$i'' = \frac{-e}{R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{-e_2 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Valor de i cuando sólo actúa i_1. Se aplica la fórmula del divisor de corriente:

$$i''' = \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \, i_1 = \frac{R_1 R_3 i_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

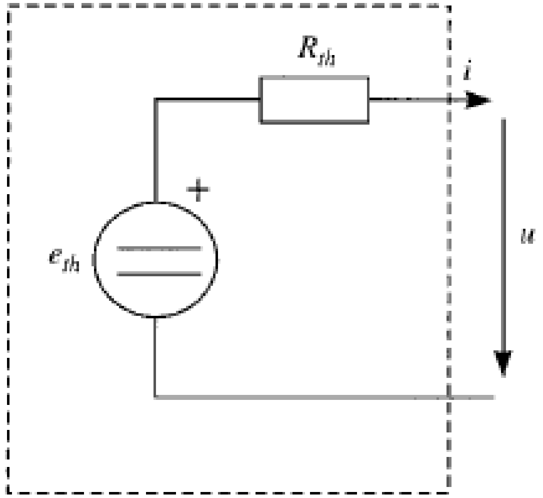
El valor final de la corriente es la suma de las tres componentes:

$$i = i' + i'' + i''' = \frac{e_1 R_3 - e_2 R_1 + R_1 R_3 i_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Teorema de Thévenin

Teorema de Thévenin

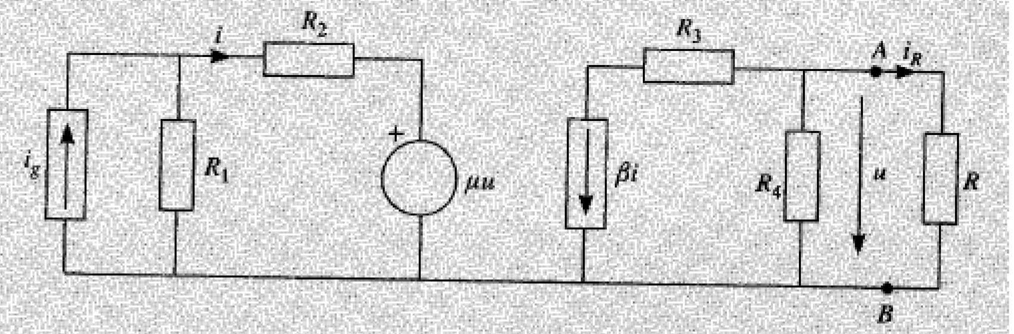
Sea una carga conectada a un dipolo. La carga no está acoplada con el dipolo a través de fuentes dependientes, y el dipolo sólo contiene resistencias lineales y fuentes dependientes e independientes. Pues bien, dicho dipolo se puede representar como una fuente de tensión y una resistencia en serie con ella. El valor de la fuente es la tensión a circuito abierto del dipolo entre los terminales, en tanto que la resistencia es la resistencia de entrada del dipolo con todas las fuentes independientes anuladas



Equivalente Thévenin.

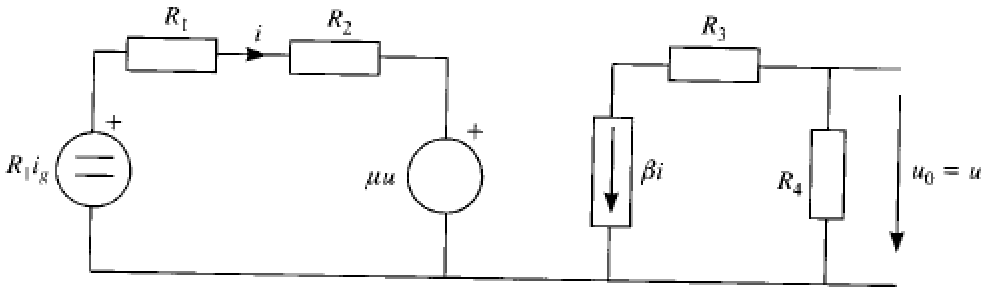
Ejercicio 5.3

Determinar la intensidad i_R por aplicación del teorema de Thévenin.



SOLUCIÓN

Tensión a circuito abierto, esto es, suponiendo desconectada la resistencia R.



$$u_0 = -R_4 \beta i$$

$$i = \frac{R_1 i_g - \mu u_0}{R_1 + R_2}$$

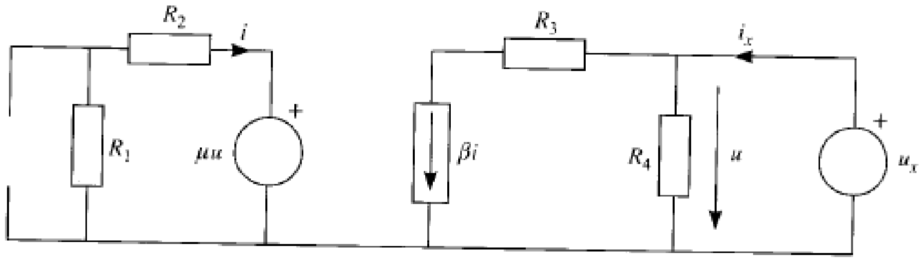
$$u_0 = -R_4 \beta \frac{R_1 i_g - \mu u_0}{R_1 + R_2}$$

$$u_0(R_1 + R_2 - R_4 \mu \beta) = -R_1 R_4 \beta i_g$$

$$\boxed{u_0 = \frac{-R_1 R_4 \beta i_g}{R_1 + R_2 - R_4 \mu \beta}}$$

Ejercicio 5.3

Resistencia Thévenin. Para obtenerla se anulan todas las fuentes independientes, y se conecta entre los terminales *A* y *B* una fuente con un valor genérico u_x. Se obtiene el valor de la corriente i_x que produce esta fuente en función del parámetro u_x. En este problema, el circuito resultante sería el siguiente:



$$i_x = \frac{u_x}{R_4} + \beta i \qquad i = -\frac{\mu u_x}{R_1 + R_2}$$

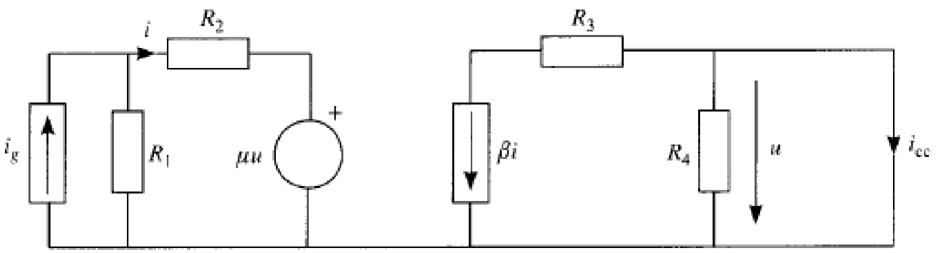
$$i_x = u_x\left(\frac{1}{R_4} - \frac{\beta\mu}{R_1 + R_2}\right)$$

La resistencia Thévenin es el cociente entre u_x e i_x. Se puede definir como la tensión que suministraría una fuente de corriente de 1 A de valor en el circuito estudiado, pero pasivo (sin fuentes independientes). En este caso:

$$\boxed{R_{th} = \frac{u_x}{i_x} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_4} - \dfrac{\beta\mu}{R_1 + R_2}} = \frac{R_4(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 - \beta\mu R_4}}$$

Aunque no es necesario, se va a obtener el valor de la corriente de cortocircuito con el fin de verificar si los cálculos previos son correctos. El que coincidan los dos resultados, es una condición necesaria, no suficiente, para que los cálculos sean correctos.

Para hallar la corriente de cortocircuito, es necesario sustituir la resistencia *R* por una resistencia nula, o cortocircuito. El circuito resultante será:



y el valor de la corriente de cortocircuito i_{cc} será, aplicando la fórmula del divisor de intensidad,

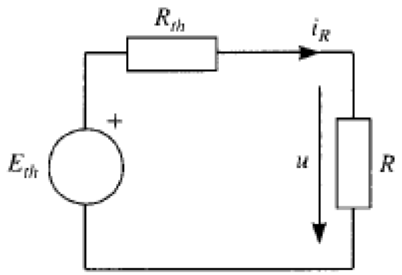
$$\boxed{i_{cc} = -\beta\frac{R_1}{R_1 + R_2}\, i_g}$$

Comprobación:

$$R_{th} = \frac{u_0}{i_{cc}} = \frac{\dfrac{-R_1R_4\beta i_g}{R_1 + R_2 - R_4\mu\beta}}{\dfrac{-\beta R_1}{R_1 + R_2}\, i_g} = \frac{R_4(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 - R_4\mu\beta}$$

Ejercicio 5.3

Una vez obtenido el equivalente Thévenin, se puede sustituir todo el circuito al que está conectada la resistencia R, puesto que la relación entre tensión y corriente del circuito y su equivalente es la misma. Esto hace que el circuito se pueda dibujar de la forma siguiente:



En este caso, la corriente que circula por la resistencia será:

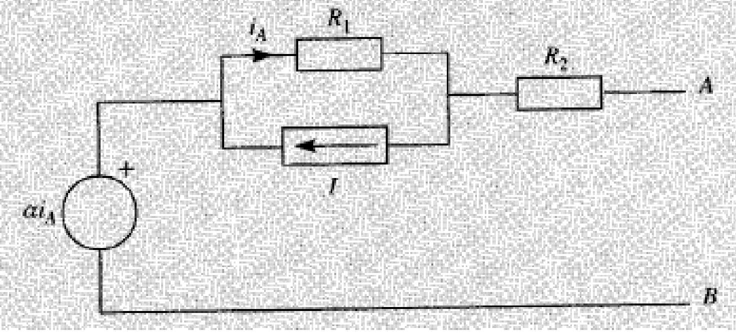
$$i_R = \frac{E_{th}}{R + R_{th}}$$

Y si se sustituyen los valores, el resultado es:

$$\boxed{i_R = \frac{-R_1 R_4 \beta}{(R_1 + R_2)(R + R_4) - \mu\beta R_4 R}\, i_g}$$

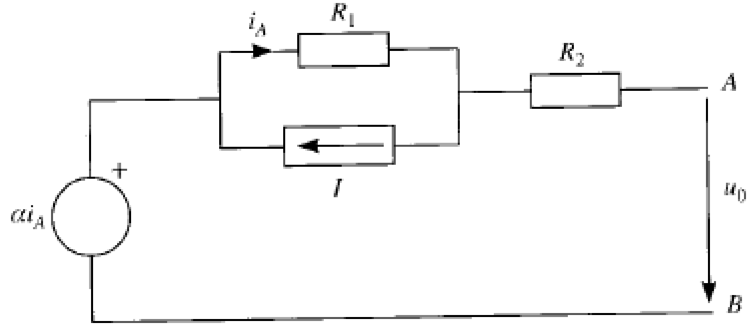
Ejercicio 5.4

Hallar el equivalente Thévenin del circuito de la figura con respecto a los terminales A y B $(\alpha > 0)$.



SOLUCIÓN

Tensión a circuito abierto, u_0:

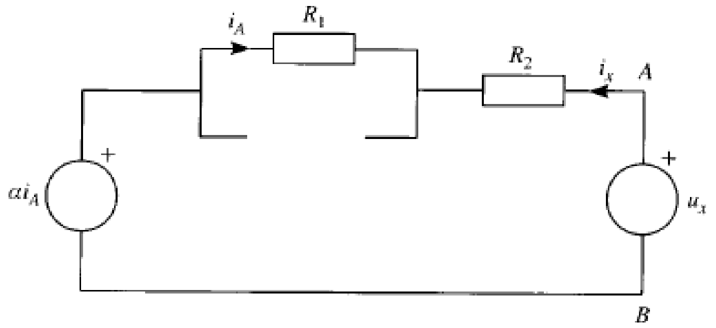


Por la resistencia R_2 no circula corriente al estar abierto el circuito y, por tanto,

$$u_0 = -R_1 i_A + \alpha i_A = (\alpha - R_1) i_A = (\alpha - R_1) I$$

Resistencia Thévenin, R_{th}:

Se anulan las fuentes independientes del circuito, y se conecta entre los terminales A y B una fuente con un valor genérico u_x. El circuito resultante se muestra a continuación.

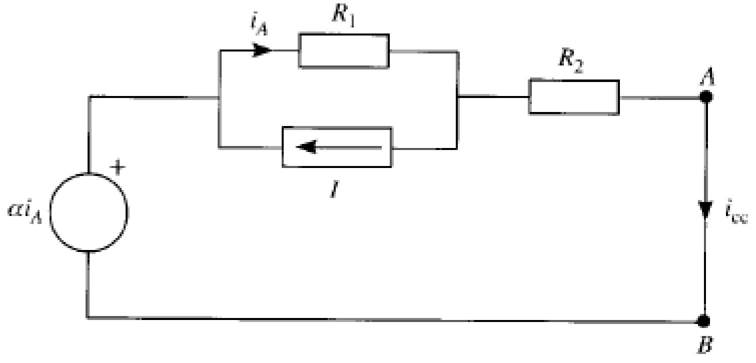


$$u_x = R_2 i_x + R_1 i_x - \alpha i_x = (R_2 + R_1 - \alpha) i_x$$

$$R_{th} = \frac{u_x}{i_x} = R_1 + R_2 - \alpha$$

Ejercicio 5.4

Corriente de cortocircuito, i_{cc}:



Por la primera ley de Kirchhoff:

$$i_{cc} = i_A - \mathrm{I} \qquad (1)$$

Por la segunda ley de Kirchhoff:

$$\alpha i_A = i_A R_1 + i_{cc} R_2 \qquad (2)$$

Se despeja i_A de (1) y se sustituye en (2):

$$(\alpha - R_1)(i_{cc} + I) = i_{cc} R_2$$

$$(\alpha - R_1)I = (R_1 + R_2 - \alpha) i_{cc}$$

La corriente de cortocircuito es, por tanto:

$$i_{cc} = \frac{\alpha - R_1}{R_1 + R_2 - \alpha} I$$

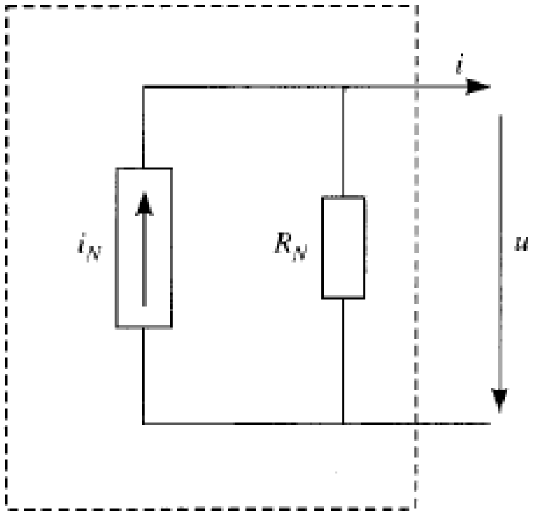
Comprobación:

$$R_{th} = \frac{u_0}{i_{cc}} = \frac{(\alpha - R_1)I}{\dfrac{(\alpha - R_1)I}{R_1 + R_2 - \alpha}} = R_1 + R_2 - \alpha$$

Teorema de Norton

Teorema de Norton

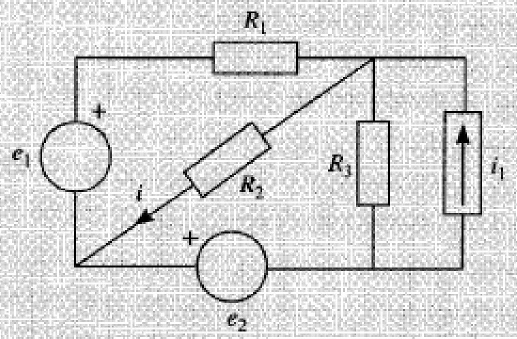
Sea una carga conectada a un dipolo. La carga no está acoplada con el dipolo a través de fuentes dependientes, y el dipolo no contiene más que resistencias lineales y fuentes dependientes e independientes. Pues bien, dicho dipolo se puede representar como una fuente de corriente y una resistencia en paralelo con ella. El valor de la fuente es la corriente que circula entre los terminales del dipolo cuando éstos están en cortocircuito, en tanto que la resistencia es la resistencia de entrada del dipolo con todas las fuentes independientes anuladas.



Equivalente Norton.

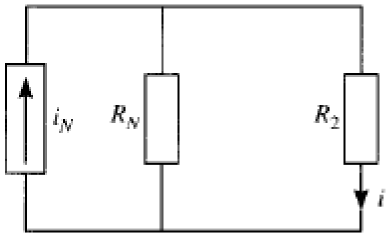
Ejercicio 5.5

Hallar por aplicación del teorema de Norton la intensidad i del circuito de la figura.



SOLUCIÓN

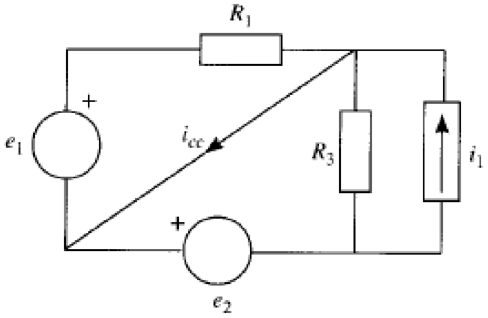
Se trata de hallar el quivalente Norton del circuito visto desde R_2, es decir:



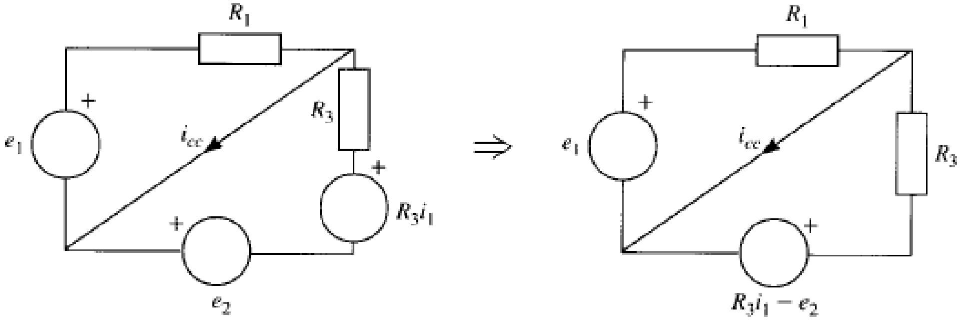
De esta forma se tiene un divisor de corriente, y la corriente que circula por la resistencia R_2 es:

$$i = \frac{R_N}{R_N + R_2}\, i_N$$

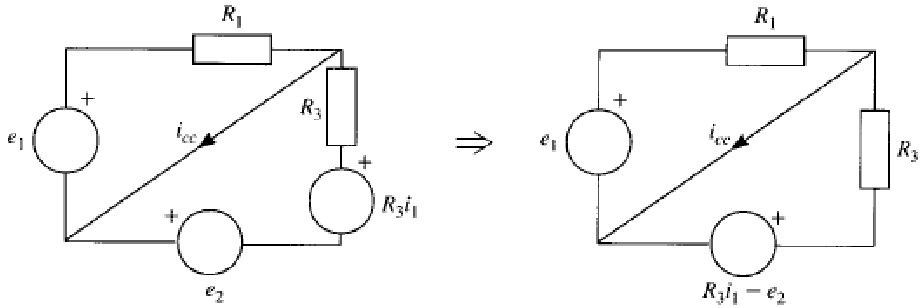
Cálculo de la corriente de cortocircuito i_{cc}:



La fuente de corriente ideal en paralelo con la resistencia R_3 se puede transformar a una fuente de tensión ideal en serie con una resistencia:



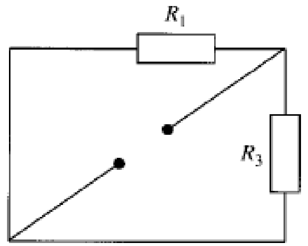
Ejercicio 5.5



La intensidad de cortocircuito es:

$$i_{cc} = \frac{e_1}{R_1} + \frac{R_3 i_1 - e_2}{R_3} = \frac{e_1}{R_1} - \frac{e_2}{R_3} + i_1 = \frac{e_1 R_3 - e_2 R_1 + i_1 R_1 R_3}{R_1 R_3}$$

Cálculo de la resistencia Norton:

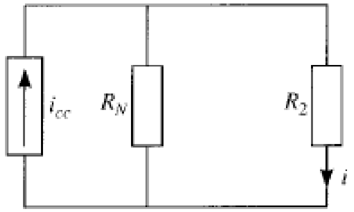


Para hallar la resistencia Norton se anulan las fuentes de tensión y de corriente, siendo el circuito resultante el que se muestra en la figura. La resistencia equivalente es el paralelo entre R_1 y R_3:

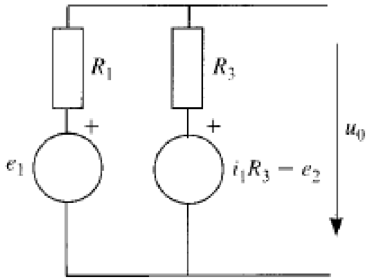
$$R_N = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$$

El equivalente buscado se muestra en la figura, y la corriente que circula por la resistencia R_2 es:

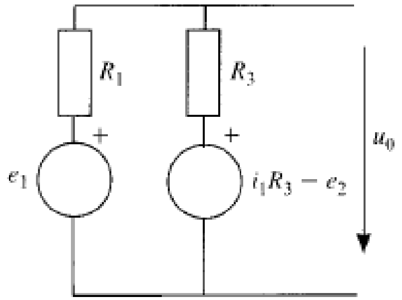
$$i = \frac{R_N}{R_N + R_2} i_{cc} = \frac{\dfrac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}}{\dfrac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + R_2} \cdot \frac{e_1 R_3 - e_2 R_1 + i_1 R_1 R_3}{R_1 R_3} = \frac{e_1 R_3 - e_2 R_1 + i_1 R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$



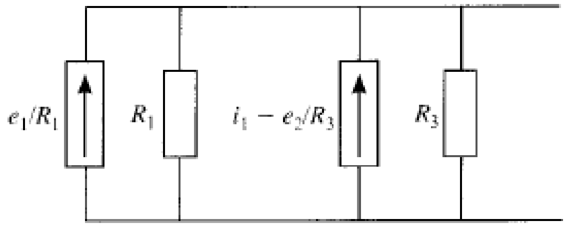
Como comprobación se calcula la tensión a circuito abierto. Para ello se toma el circuito equivalente mostrado a continuación:



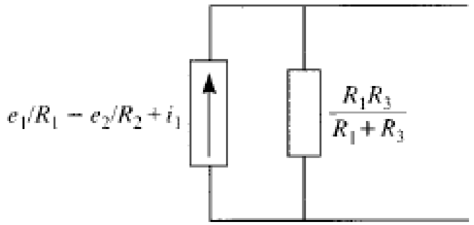
Ejercicio 5.5



Se transforman las fuentes de tensión reales a fuentes de corriente:



Agrupando las fuentes de corriente por un lado y las resistencias por otro, se obtiene el equivalente Norton buscado:



Fórmula de Millmann

Esta fórmula es aplicable a un circuito como el de la Figura 1.21.

$$u_{AB} = \frac{G_1 u_{A1} + G_2 u_{A2} + \cdots + G_n u_{An}}{G_1 + G_2 + \cdots + G_n}$$

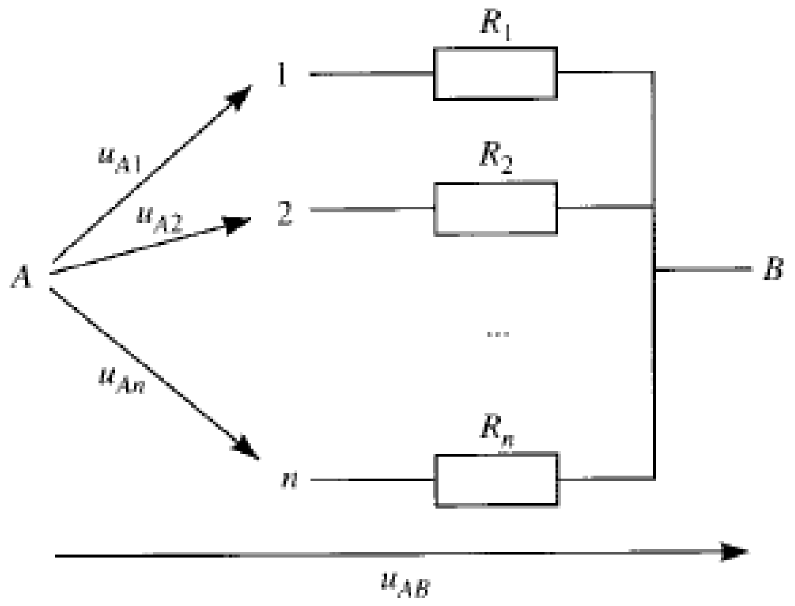
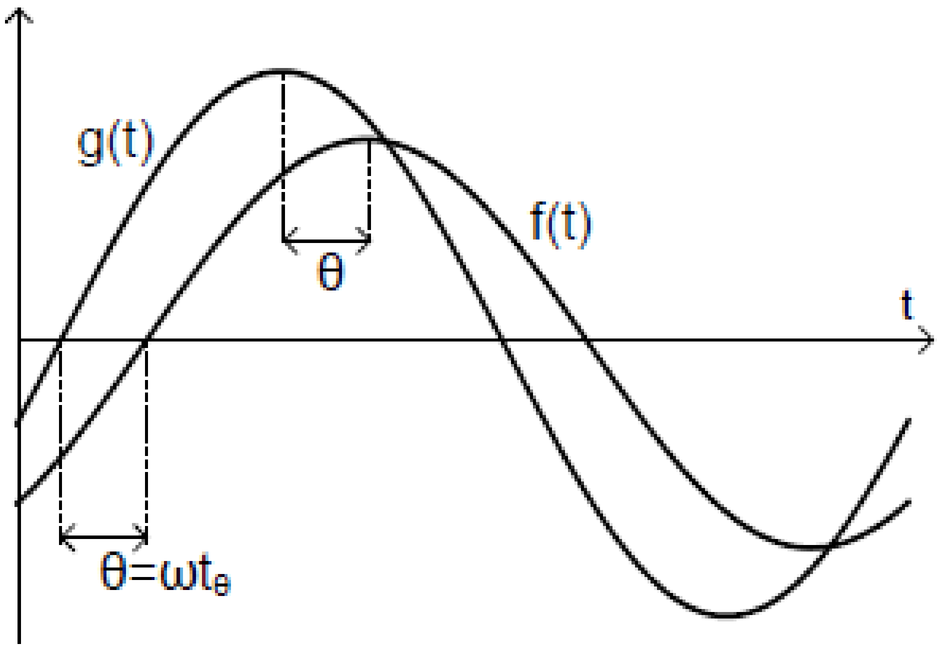


Figura 1.21.

Tema 6

Análisis de circuitos en régimen estacionario senoidal

Magnitudes características de una onda sinusoidal



$$g(t)) = A_m \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

los valores que la definen son:

- Pulsación (ω), frecuencia (f) y periodo (T) $\rightarrow$ $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$
- Valor máximo o amplitud $\rightarrow$ $G_m = A_m$
- Ángulo de fase inicial o desfase inicial $\rightarrow$ φ_0
- Valor medio $\rightarrow$ $G_{med} = 0$
- Valor medio absoluto o rectificado $\rightarrow$ $G_{med,r} = \dfrac{2\,A_m}{\pi}$
- Valor eficaz $\rightarrow$ $G = \dfrac{A_m}{\sqrt{2}}$
- Factor de cresta $\rightarrow$ $F_m = \sqrt{2}$
- Factor de forma $\rightarrow$ $F = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$

Magnitudes características de una onda sinusoidal

Valor máximo. G_m, también denominado **valor de pico** o **valor de cresta**, es el valor instantáneo máximo que alcanza la señal en el periodo; si éste valor es distinto al del valor absoluto del valor instantáneo mínimo, entonces se distinguen ambos y se habla del valor de pico máximo G_{max} y del valor de pico mínimo G_{min}.

Valor medio. Es el valor medio integral de la señal $g(t)$ a lo largo de un periodo:

$$G_{med} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} g(t)\,dt \tag{5.6}$$

Las señales periódicas que tienen valor medio nulo se denominan alternas (dada su importancia, sus valores se estudian de forma particular más adelante) y para ellas el valor medio se define para el valor absoluto de la señal, por lo que se denomina **valor medio absoluto** o **valor rectificado**:

$$G_{med,r} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |g(t)|\,dt \tag{5.7}$$

Si la forma de onda es simétrica respecto al eje de abcisas, lo que se denomina simetría de semionda (lo que ocurre, por ejemplo, en las funciones seno o coseno), el valor medio absoluto se calcula mediante la ecuación general (5.6) aplicada sobre medio periodo, concretamente sobre la semionda positiva:

$$G_{med,r} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T/2} g(t)\,dt \tag{5.8}$$

Valor eficaz. Se define como la raíz cuadrada del valor medio integral del cuadrado de la función $g(t)$ a lo largo de un periodo:

$$G = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} g(t)^2\,dt} \tag{5.9}$$

Factor de cresta. Se define como el cociente entre el máximo valor absoluto y el valor eficaz:

$$F_m = \frac{G_m}{G} \tag{5.10}$$

Factor de forma. Se define como el cociente entre el valor eficaz y el valor medio:

$$F = \frac{G}{G_{med}} \tag{5.11}$$

Ejercicio 6.1

Calcular el valor eficaz, el valor medio, el factor de cresta y el factor de forma de cada una de las tres señales alternas de la figura 5.2, considenado que la amplitud de las tres es la misma, A_m.

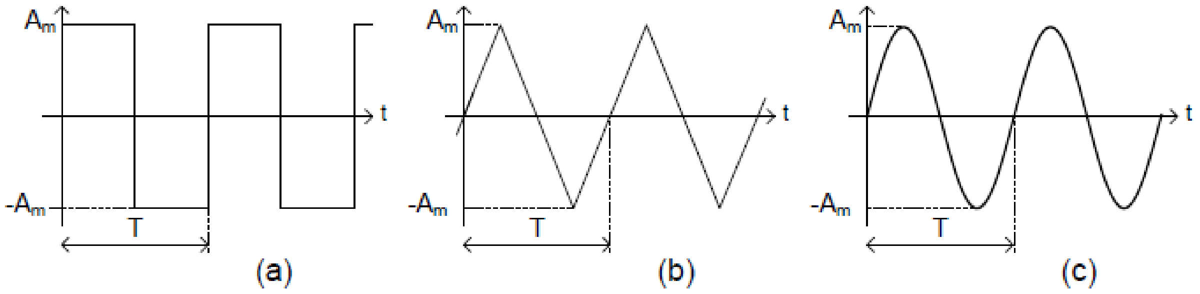


Figura 5.2

(a) La función alterna cuadrada (figura 5.2.a) puede expresarse matemáticamente como:

$$g(t) = \begin{cases} A_m & 0 \leq t \leq \dfrac{T}{2} \\ -A_m & \dfrac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$

Su valor medio es 0, ya que se trata de una onda alterna (lo que se comprueba fácilmente aplicando la expresión (5.6)), por lo que el valor que se pide es, en realidad, el valor medio absoluto o valor medio rectificado. Como la función tiene simetría de semionda, se aplica la expresión (5.8):

$$G_{med,r} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} A_m\,dt = \frac{2}{T}\Big[A_m\,t\Big]_0^{T/2} = A_m$$

En cuanto a su valor eficaz, como la función tiene simetría de media onda, la aplicación de la expresión (5.9) es:

$$G = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T} g(t)^2\,dt} = \sqrt{\frac{2}{T}\int_0^{T/2} g(t)^2\,dt}$$

Con lo que el valor eficaz es:

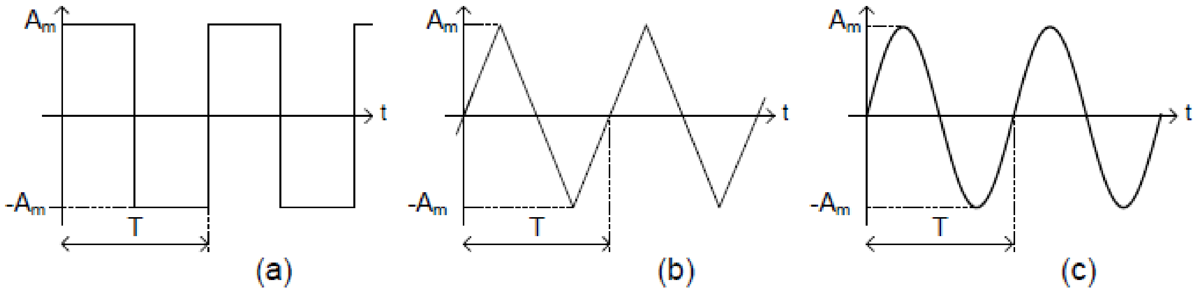
$$G = \sqrt{\frac{2}{T}\int_0^{T/2} A_m^2\,dt} = \sqrt{\frac{2}{T}\Big[A_m^2\,t\Big]_0^{T/2}} = A_m$$

Con estos valores, el factor de cresta (ecuación (5.10)) y el factor de forma (ecuación (5.11)) de la onda alterna cuadrada son:

$$F_m = \frac{G_m}{G} = \frac{A_m}{A_m} = 1 \qquad \text{y} \qquad F = \frac{G}{G_{med,r}} = \frac{A_m}{A_m} = 1$$

Ejercicio 6.1

Calcular el valor eficaz, el valor medio, el factor de cresta y el factor de forma de cada una de las tres señales alternas de la figura 5.2, considenado que la amplitud de las tres es la misma, A_m.



(b) La función alterna triangular (figura 5.2.b) puede expresarse matemáticamente como:

$$g(t) = \begin{cases} \frac{4\,A_m}{T}\,t & 0 \le t \le \frac{T}{4} \\ -\frac{4\,A_m}{T}\,t + 2\,A_m & \frac{T}{4} \le t \le \frac{3\,T}{4} \\ \frac{4\,A_m}{T}\,t - 4\,A_m & \frac{3\,T}{4} \le t \le T \end{cases}$$

Para calcular el valor medio rectificado, calculamos antes la integral definida:

$$\int_0^{T/2} g(t)\,dt = \int_0^{T/4} \frac{4\,A_m}{T}\,t\,dt + \int_{T/4}^{T/2} \left(-\frac{4\,A_m}{T}\,t + 2\,A_m \right) dt$$

donde:

$$\int_0^{T/4} \frac{4\,A_m}{T}\,t\,dt = \left[\frac{2\,A_m}{T}\,t^2 \right]_0^{T/4} = \frac{A_m}{8}\,T$$

y

$$\int_{T/4}^{T/2} \left(-\frac{4\,A_m}{T}\,t + 2\,A_m \right) dt = \left[-\frac{2\,A_m}{T}\,t^2 + 2\,A_m\,t \right]_{T/4}^{T/2} = \frac{A_m}{8}\,T$$

Con lo que el valor medio rectificado es:

$$G_{med,r} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} g(t)\,dt = \frac{2}{T} \left(\frac{A_m\,T}{8} + \frac{A_m\,T}{8} \right) = \frac{A_m}{2}$$

Para calcular el valor eficaz, de la misma forma calculamos antes la integral definida:

$$\int_0^{T/2} g(t)^2\,dt = \int_0^{T/4} \left(\frac{4\,A_m}{T}\,t \right)^2 dt + \int_{T/4}^{T/2} \left(-\frac{4\,A_m}{T}\,t + 2\,A_m \right)^2 dt$$

Ejercicio 6.1

donde:

$$\int_0^{T/4}\left(\frac{4\,A_m}{T}t\right)^2 dt = \left[\frac{16\,A_m^2}{3\,T^2}t^3\right]_0^{T/4} = \frac{A_m^2}{12}T$$

y

$$\int_{T/4}^{T/2}\left(-\frac{4\,A_m}{T}t + 2\,A_m\right)^2 dt = \left[\frac{16\,A_m^2}{3\,T^2}t^3 - \frac{8\,A_m^2}{T}t^2 + 4\,A_m^2\,t\right]_{T/4}^{T/2} = \frac{A_m^2}{12}T$$

Con lo que el valor eficaz es:

$$G = \sqrt{\frac{2}{T}\int_0^{T/2} g(t)^2\,dt} = \sqrt{\frac{2}{T}\left(\frac{A_m^2\,T}{12} + \frac{A_m^2\,T}{12}\right)} = \frac{A_m}{\sqrt{3}}$$

Con estos valores, el factor de cresta (ecuación (5.10)) y el factor de forma (ecuación (5.11)) de la onda alterna triángular son:

$$F_m = \frac{G_m}{G} = \frac{A_m}{A_m/\sqrt{3}} = \sqrt{3} \qquad \text{y} \qquad F = \frac{G}{G_{med,r}} = \frac{A_m/\sqrt{3}}{A_m/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Calcular el valor eficaz, el valor medio, el factor de cresta y el factor de forma de cada una de las tres señales alternas de la figura 5.2, considenado que la amplitud de las tres es la misma, A_m.

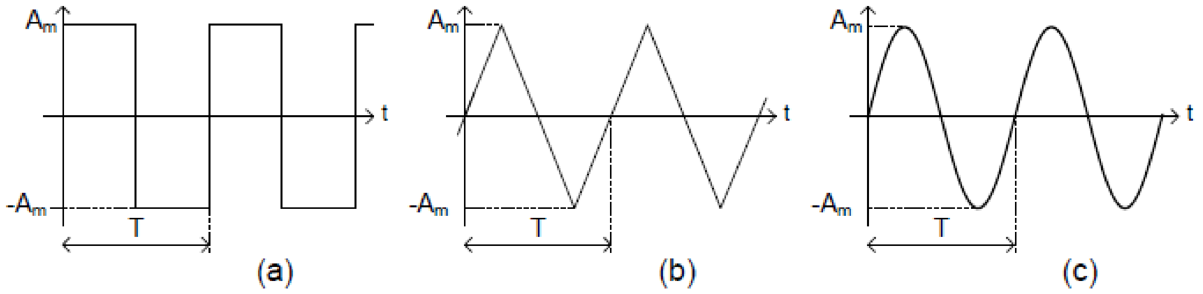


Figura 5.2

(c) Por último, para la función seno (figura 5.2.c):

$$g(t) = A_m\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

Su valor medio (su valor medio absoluto o rectificado es):

$$G_{med,r} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} A_m\,\mathrm{sen}(\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\left[-\frac{A_m\,\cos\omega t}{\omega}\right]_0^{T/2} = \frac{2\,A_m}{\pi}$$

Ejercicio 6.1

Para calcular el valor eficaz, calculamos antes la integral definida:

$$\int_0^{T/2} g(t)^2\, dt \;=\int_0^{T/2} (A_m \operatorname{sen}\omega t)^2\, dt = \int_0^{T/2} A_m^2 \left(\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\right) dt$$

$$= A_m^2 \left[\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\,\omega t}{4\,\omega}\right]_0^{T/2} = \frac{A_m^2\, T}{4}$$

Con lo que el valor eficaz de la onda senoidal es:

$$G = \sqrt{\frac{2}{T}\int_0^{T/2} g(t)^2\, dt} = \sqrt{\frac{2}{T}\cdot\frac{A_m^2\, T}{4}} = \frac{A_m}{\sqrt{2}}$$

Con estos valores, el factor de cresta (ecuación (5.10)) y el factor de forma (ecuación (5.11)) de la onda senoidal son:

Tabla 5.1. Valores característicos de las formas de onda alterna básicas

(Para $A_m = 1$)	Onda cuadrada	Onda triangular	Onda senoidal
Valor medio ()absoluto):	1	0,5	0,6366
Valor eficaz:	1	0,5774	0,7071
Factor de cresta:	1	1,7321	1,4142
Factor de forma:	1	1,1547	1,1107

$$F_m = \frac{G_m}{G} = \frac{A_m}{A_m/\sqrt{2}} = \sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad F = \frac{G}{G_{med,r}} = \frac{A_m/\sqrt{2}}{2\,A_m/\pi} = \frac{\pi}{2\,\sqrt{2}}$$

En la tabla 5.1 se resumen los valores característicos obtenidos de las tres ondas alternas para una amplitud A_m igual a 1.

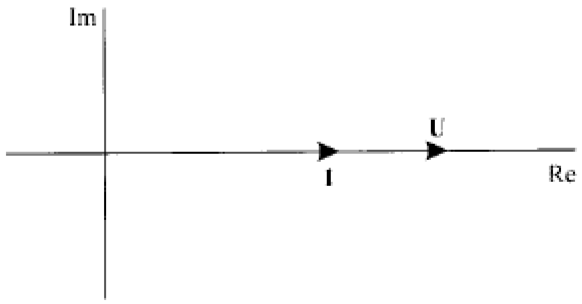
Elementos pasivos del circuito en corriente alterna

- **Resistencia**

$$\mathbf{U} = \mathrm{R} \cdot \mathbf{I} \qquad \mathbf{I} = \frac{U}{R}$$

$$I = \frac{U}{R} \qquad \theta = 0$$

Diagrama vectorial de tensión e intensidad:



- **Condensador**

$$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{U}$$

$$I = \omega C U \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

Diagrama vectorial de tensión e intensidad:

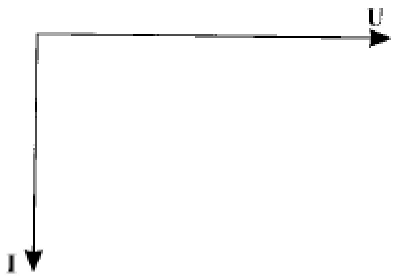
Elementos pasivos del circuito en corriente alterna

- **Bobina**

$$\mathbf{U} = j\omega L\mathbf{I}$$

$$U = \omega LI \qquad \theta = -\frac{\pi}{2}$$

Diagrama vectorial:



- **Bobinas acopladas**

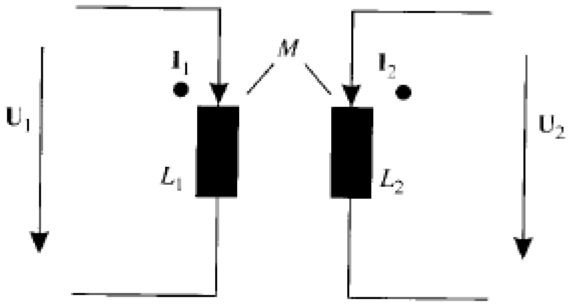


Figura 2.5.

$$\mathbf{U}_1 = j\omega L_1 \cdot \mathbf{I}_1 + j\omega M \cdot \mathbf{I}_2$$
$$\mathbf{U}_2 = j\omega M \cdot \mathbf{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \mathbf{I}_2$$

Elementos pasivos del circuito en corriente alterna

- **Impedancia**

En general:

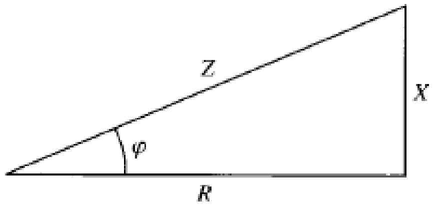
$$\mathbf{U} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$$

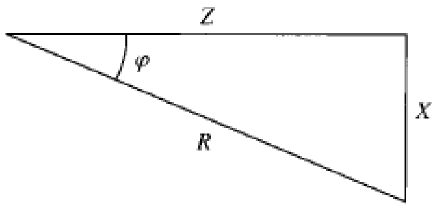
$$\mathbf{Z} = R + j \cdot X$$

$\mathbf{Z}$ *impedancia del circuito* (Ω)
R *resistencia* del circuito (Ω)
X *reactancia* (Ω)

$$Z^2 = R^2 + X^2$$

Triángulo de impedancias:





- **Admitancia Y**

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = G + j \cdot B = \frac{1}{R + j \cdot X} = \frac{R^2}{R^2 + X^2} - j \cdot \frac{X^2}{R^2 + X^2}$$

G conductancia (S)
B susceptancia (S)

Elementos pasivos del circuito en corriente alterna

- **Transformador ideal. Adaptación de impedancias**

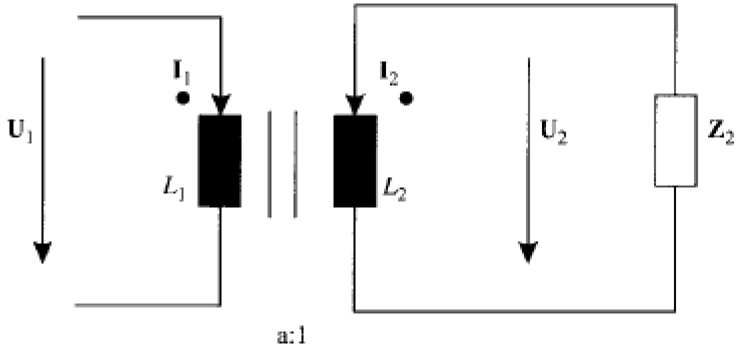


Figura 2.7.

El cociente entre la tensión y la corriente en el primario del transformador será:

$$\frac{\mathbf{U}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{a \cdot \mathbf{U}_2}{\frac{1}{a} \cdot \mathbf{I}_2} = a^2 \cdot \frac{\mathbf{U}_2}{\mathbf{I}_2} = a^2 \mathbf{Z}_2$$

$\mathbf{Z}_1 = a^2 \mathbf{Z}_2$. Es la *impedancia referida al primario.*

Mediante un transformador ideal se pueden transformar las impedancias en otras de distinto valor. Este proceso se denomina *adaptación de impedancias*.

Circuito serie RLC

En un circuito como el representado en la Figura 2.8, del que se desea conocer sus tensiones y corrientes en régimen estacionario sinusoidal,

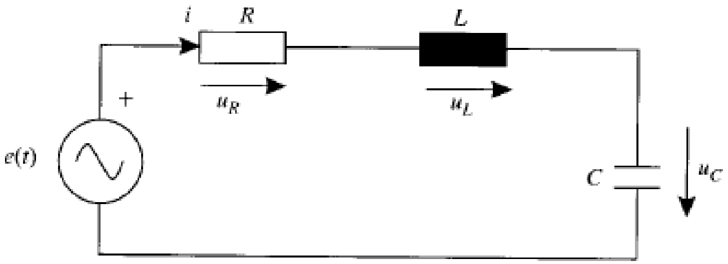


Figura 2.8.

se obtiene el circuito equivalente en alterna:

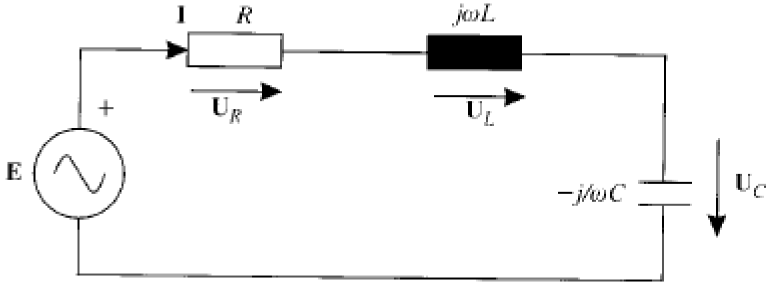


Figura 2.9.

donde $\mathbf{E} = E\underline{/0}$. La impedancia del circuito es:

$$\mathbf{Z} = R + j \cdot X = R + j\omega L - j \cdot \frac{1}{\omega C} = Z\underline{/\varphi}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$$

El valor de la corriente es:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{E}}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}$$

$$I = \frac{E}{Z} \qquad \theta = -\varphi$$

Circuito serie RLC

Las tensiones en cada uno de los elementos son:

$$\mathbf{U}_R = R \cdot \mathbf{I} = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)} \mathbf{E}$$

$$\mathbf{U}_L = j\omega L \cdot \mathbf{I} = \frac{j\omega L}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)} \mathbf{E}$$

$$\mathbf{U}_C = -j \frac{1}{\omega C} \cdot \mathbf{I} = \frac{-j \dfrac{1}{\omega C}}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)} \mathbf{E}$$

En este circuito se pueden distinguir dos casos, y en cada uno de los cuales se presenta el diagrama vectorial:

- $\omega L > \dfrac{1}{\omega C}$ (reactancia inductiva) $\qquad \varphi > 0 \qquad \theta = -\varphi < 0$

En este caso, la corriente está retrasada con respecto a la tensión de la fuente.

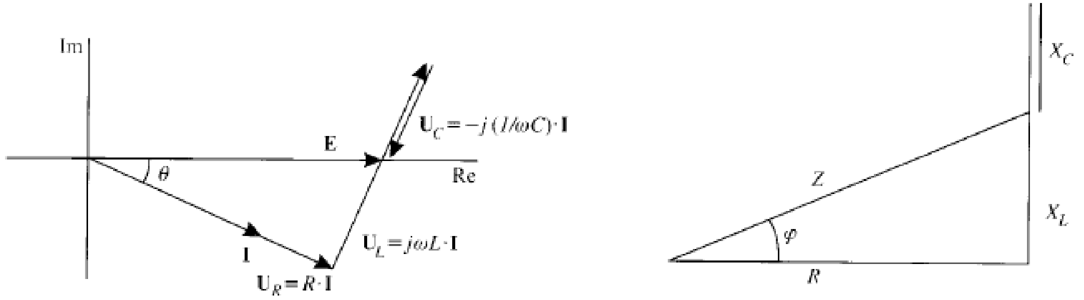


Figura 2.10.

- $\omega L < \dfrac{1}{\omega C}$ (reactancia capacitiva) $\qquad \varphi < 0 \qquad \theta = -\varphi > 0$

En este caso, la corriente está adelantada con respecto a la tensión de la fuente.

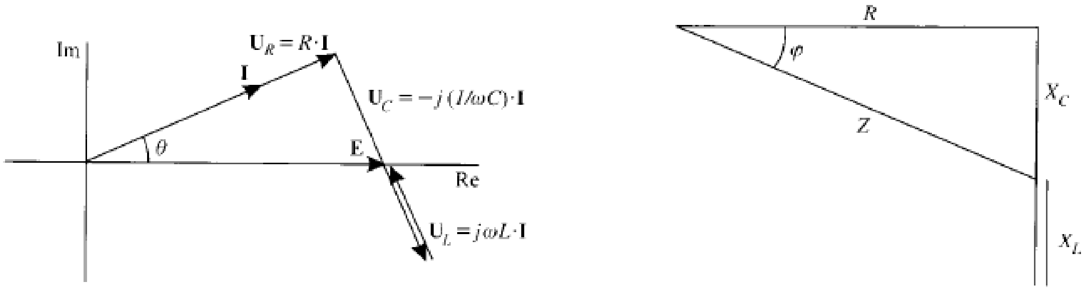
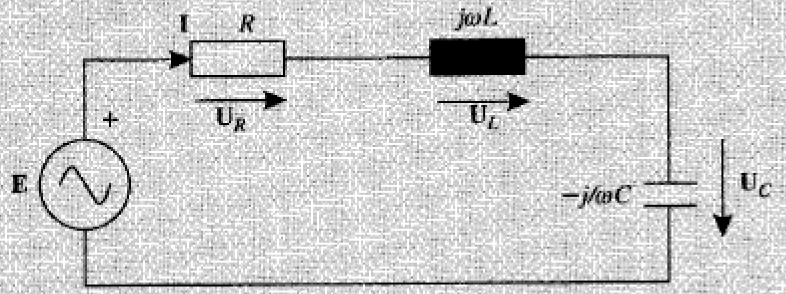


Figura 2.11.

Ejercicio 6.2

En el circuito de la figura, calcúlese en módulo y argumento el valor de la fuente de te
E, tomando como origen de fases la corriente **I**. (Se aconseja dibujar el diagrama vecto

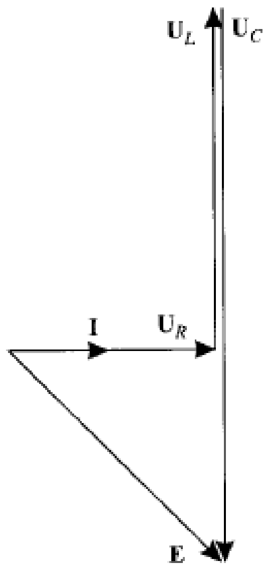
Datos: $U_R = 10$ V, $U_L = 20$ V, $U_C = 30$ V.



SOLUCIÓN

Se aplica la segunda ley de Kirchhoff, según la cual: $\mathbf{E} = \mathbf{U}_R + \mathbf{U}_L + \mathbf{U}_C$.

Y el diagrama vectorial:

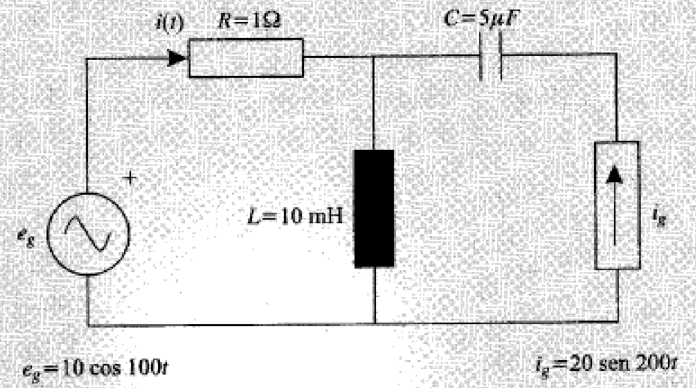


La relación entre los módulos de estas tensiones es, según el diagrama:

$$E = \sqrt{U_R^2 + (U_C - U_L)^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \text{ V} \qquad \mathbf{E} = 10\sqrt{2}\,\underline{/-45^\circ} \text{ V}$$

Ejercicio 6.3

En el circuito de la figura, calcúlese la intensidad instantánea $i(t)$ que en el régimen estacionario circula por la resistencia de 1 Ω.



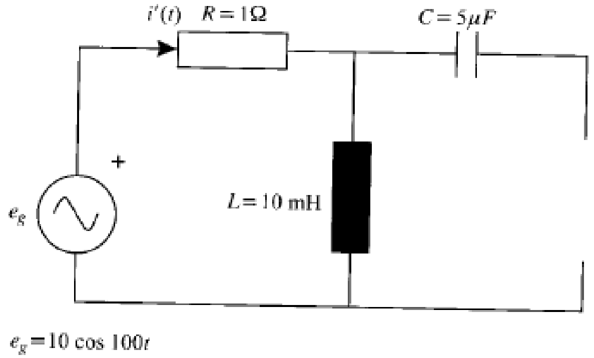
SOLUCIÓN

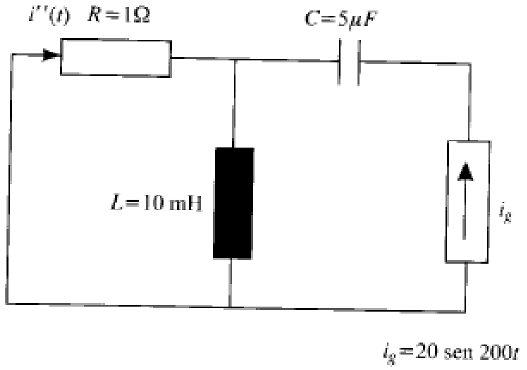
En la resolución de este circuito no se pueden utilizar directamente los métodos de alterna, puesto que las fuentes del mismo son de frecuencias diferentes. No obstante, y dado que el circuito es lineal, se puede aplicar el principio de superposición. Por tanto, la corriente buscada será la suma de dos corrientes:

$$i = i' + i''$$

donde i' es la corriente que circula cuando sólo actúa la fuente de tensión, e i'' es la corriente que circula cuando sólo actúa la fuente de corriente. Puesto que en cada uno de los circuitos auxiliares sólo hay una fuente, sí que se podrán usar en cada uno de ellos los fasores.

Por otra parte, la corriente que circula por el condensador está impuesta por la fuente de corriente, luego, para calcular las corrientes i e i'' este condensador se puede eliminar porque no aporta ninguna información.





$$\mathbf{I}' = \frac{\mathbf{E}_g}{R + j\omega_1 L} = \frac{10}{1+j} \qquad \mathbf{I}'' = \frac{-j\omega_2 L}{R + j\omega_2 L} \cdot \mathbf{I}_g = \frac{j2}{1+j2} \cdot 20$$

$$\mathbf{I}' = 5(1-j) = 5\sqrt{2}\underline{/\pi/4} \qquad \mathbf{I}'' = -8(2-j) = 8\sqrt{5}\underline{/-0{,}85\pi}$$

Una vez obtenidas las corrientes en cada circuito auxiliar, hay que obtener la expresión temporal de las mismas con el fin de poder aplicar superposición:

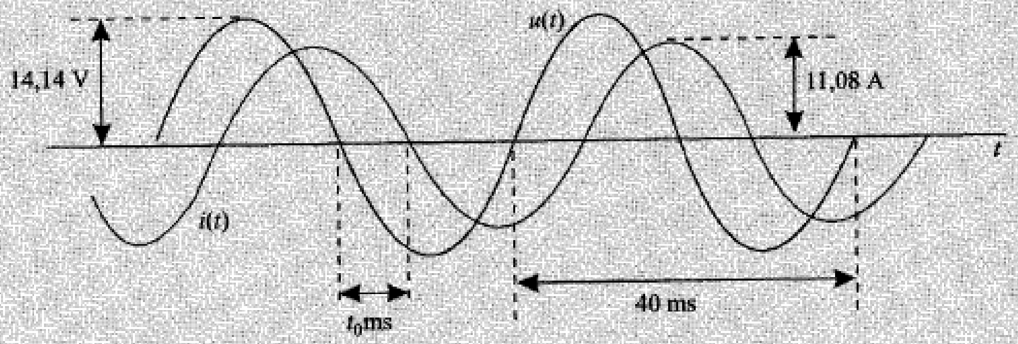
$$i'(t) = 5\sqrt{2}\cos(100t - \pi/4) \qquad i''(t) = 8\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,(200t - 0{,}85\pi)$$

$$i(t) = i'(t) + i''(t) = 5\sqrt{2}\cos(100t - \pi/4) + 8\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,(200t - 0{,}85\pi)$$

Ejercicio 6.4

En la figura se muestra la tensión aplicada y la corriente circulante por una impedan**cia** **Z**. Determínense los valores de las partes real e imaginaria de **Z**, indicando el signo **de** ambas.

(*Dato*: $t_o = 8$ ms).



Solución

Las expresiones de corriente y tensión, deducidas a partir del oscilograma son:

$$\mathbf{U} = \frac{14,14}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \quad \text{(V)} \qquad \text{(que se toma, arbitrariamente, como origen de fases).}$$

$$\mathbf{I} = \frac{11,08}{\sqrt{2}} \angle -72^\circ \quad \text{(A)}$$

El ángulo se ha obtenido a partir del tiempo de retraso de una onda respecto a otra:

$$\alpha = \frac{t_o}{T} \cdot 360^\circ = \frac{8}{40} \cdot 360^\circ = 72^\circ$$

Una vez conocidas tensión y corriente, la impedancia se calcula como cociente en**tre** ambas:

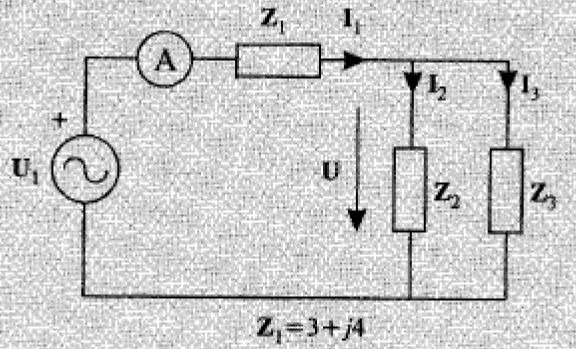
$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}} = \frac{\dfrac{14,14}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{\dfrac{11,08}{\sqrt{2}} \angle -72^\circ} = 1,276 \angle 72^\circ = 0,394 + j1,214 \ (\Omega)$$

Se puede observar en el oscilograma que $i(t)$ está retrasada con respecto a $u(t)$.

Ejercicio 6.5

En el circuito de la figura el amperímetro marca 4 A y $\mathbf{Z}_1 = 3 + j4$. Se sabe además que $\mathbf{Z}_2$ es puramente capacitiva y que $\mathbf{Z}_3$ es de carácter inductivo, con el mismo valor en su parte resistiva que en su parte reactiva. El conjunto formado por $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_3$ en paralelo es puramente resistivo, con una impedancia de valor 5 Ω. Se pide:

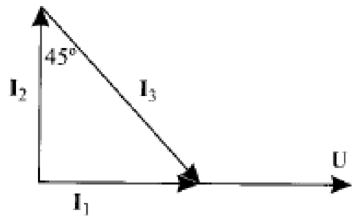
1. Dibújese el diagrama vectorial de intensidades.
2. El valor de las impedancias complejas $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_3$.
3. El valor de la fuente de tensión.



SOLUCIÓN

1. La resolución de este problema es más sencilla si se traza el diagrama vectorial de acuerdo con las condiciones del enunciado. Se toma como origen de fases, por comodidad, la tensión $\mathbf{U}$, puesto que hay dos elementos en paralelo.

Si se aplica la primera ley de Kirchhoff $\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_1$. Por otra parte, según el enunciado, el conjunto formado por $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_3$ es puramente resistivo, luego $\mathbf{I}_1 = 4$ (pues es la lectura del amperímetro).



Las otras dos corrientes vienen dadas, puesto que los desfases relativos están impuestos por las impedancias ($\mathbf{I}_2$ debe estar adelantada 90° respecto a la tensión, e $\mathbf{I}_3$ retrasada 45° respecto a la misma tensión) y el hecho de que $\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_1$. Esto permite deducir los valores de las corrientes.

$$\mathbf{I}_2 = j4 \qquad \mathbf{I}_3 = 4 - j4$$

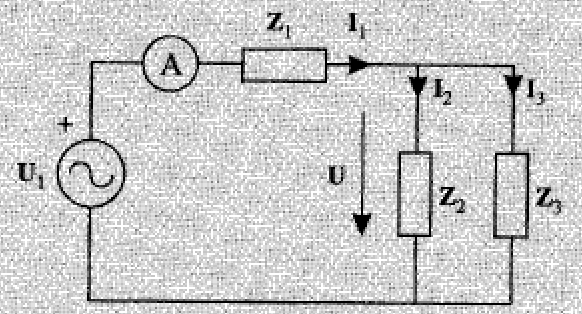
Y por tanto, el de la tensión, puesto que se conoce la impedancia paralelo de ambas, en módulo y argumento:

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z}_{eq}\mathbf{I}_1 = 5 \cdot 4 = 20$$

Ejercicio 6.5

En el circuito de la figura el amperímetro marca 4 A y $\mathbf{Z}_1 = 3 + j4$. Se sabe además q $\mathbf{Z}_2$ es puramente capacitiva y que $\mathbf{Z}_3$ es de carácter inductivo, con el mismo valor en parte resistiva que en su parte reactiva. El conjunto formado por $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_3$ en paralelo puramente resistivo, con una impedancia de valor 5 Ω. Se pide:

1. Dibújese el diagrama vectorial de intensidades.
2. El valor de las impedancias complejas $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_3$.
3. El valor de la fuente de tensión.



$\mathbf{Z}_1 = 3 + j4$

2. Las impedancias se obtienen como cociente entre la tensión y las corrientes respectivas.

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}_2} = \frac{20}{j4} = -j5$$

$$\mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}_3} = \frac{20}{4(1-j)} = \frac{5}{2}(1+j)$$

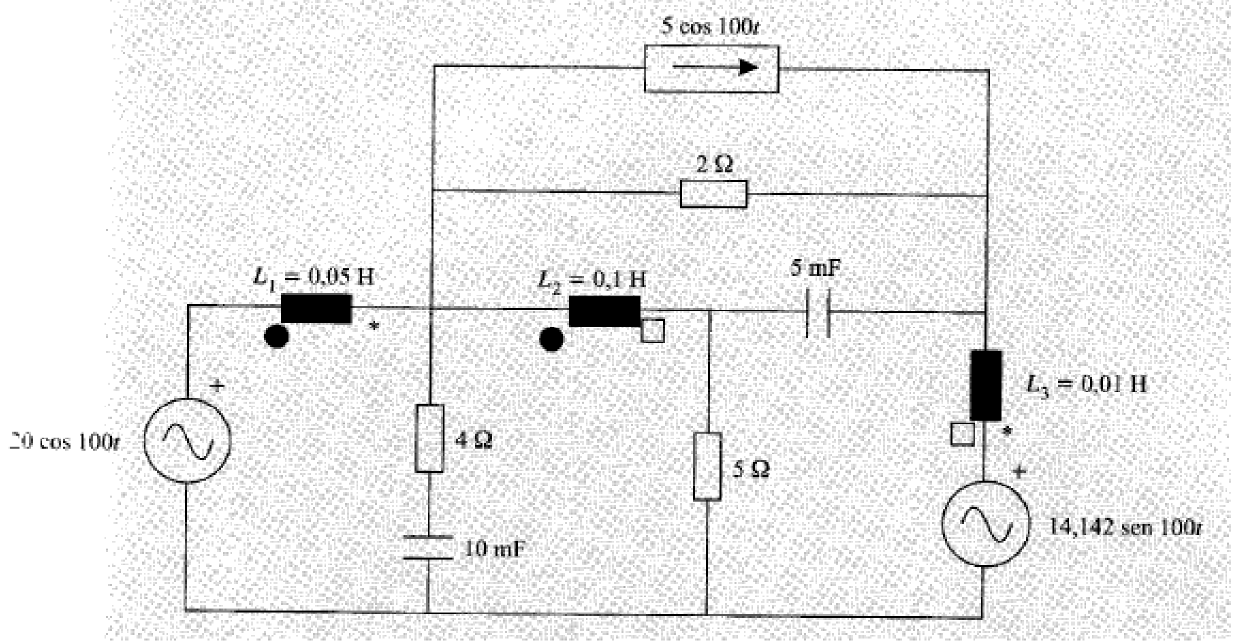
3. Y por último la tensión de la fuente, que se halla por aplicación de la segunda ley de Kirchhoff.

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{Z}_1\mathbf{I}_1 + \mathbf{U} = (3 + j4)4 + 20 = 16(2 + j)$$

Ejercicio 6.6

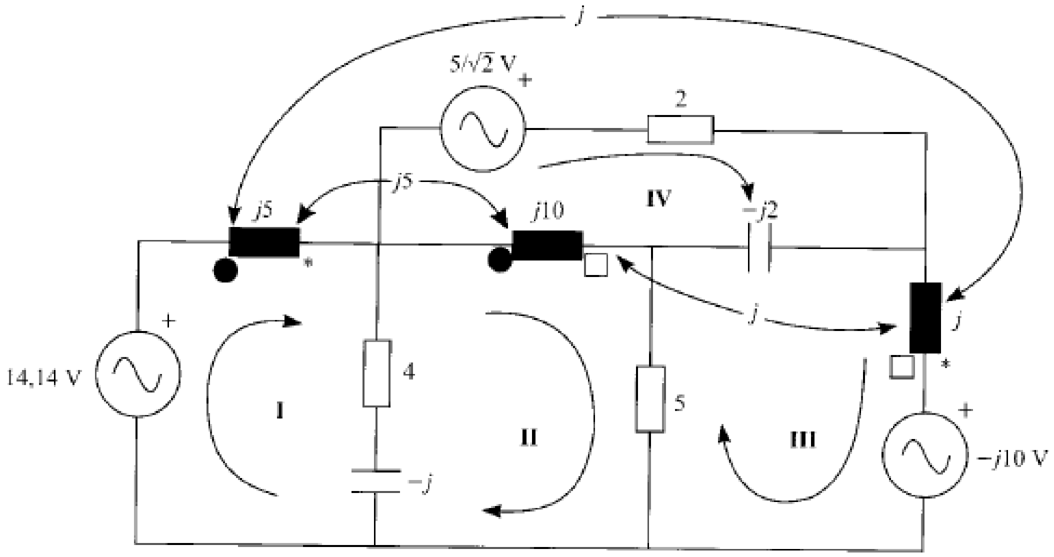
En el circuito de la figura plantear las ecuaciones correspondientes al análisis por mallas en régimen estacionario sinuosidal.

Datos: $M_{12} = 50$ mH, $M_{13} = 10$ mH, $M_{23} = 10$ mH



SOLUCIÓN

En primer lugar se obtiene el circuito de alterna.



Se plantean las ecuaciones por mallas del circuito:

$$(4 - j + j5)\mathbf{I}_{I} - (4 - j)\mathbf{I}_{II} + j5\mathbf{I}_{II} + j\mathbf{I}_{III} - j5\mathbf{I}_{IV} = 20/\sqrt{2}$$

$$(4 + 5 + j10 - j)\mathbf{I}_{II} - (4 - j)\mathbf{I}_{I} - 5\mathbf{I}_{III} - j10\mathbf{I}_{IV} + j5\mathbf{I}_{I} + j\mathbf{I}_{III} = 0$$

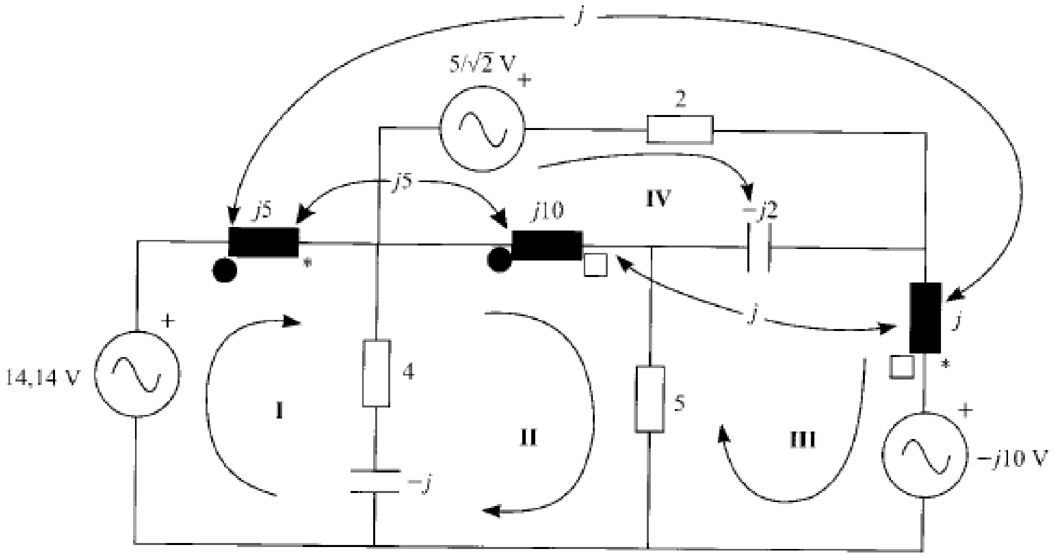
$$(5 - j2 + j)\mathbf{I}_{III} - 5\mathbf{I}_{II} + j2\mathbf{I}_{IV} + j\mathbf{I}_{I} + j\mathbf{I}_{II} - j\mathbf{I}_{IV} = j10$$

$$(2 + j10 - j2)\mathbf{I}_{IV} - j10\mathbf{I}_{II} + j2\mathbf{I}_{III} - j5\mathbf{I}_{I} - j\mathbf{I}_{III} = 5\sqrt{2}$$

Ejercicio 6.6

SOLUCIÓN

En primer lugar se obtiene el circuito de alterna.



Se plantean las ecuaciones por mallas del circuito:

$$(4 - j + j5)\mathbf{I}_{\mathrm{I}} - (4 - j)\mathbf{I}_{\mathrm{II}} + j5\mathbf{I}_{\mathrm{II}} + j\mathbf{I}_{\mathrm{III}} - j5\mathbf{I}_{\mathrm{IV}} = 20/\sqrt{2}$$

$$(4 + 5 + j10 - j)\mathbf{I}_{\mathrm{II}} - (4 - j)\mathbf{I}_{\mathrm{I}} - 5\mathbf{I}_{\mathrm{III}} - j10\mathbf{I}_{\mathrm{IV}} + j5\mathbf{I}_{\mathrm{I}} + j\mathbf{I}_{\mathrm{III}} = 0$$

$$(5 - j2 + j)\mathbf{I}_{\mathrm{III}} - 5\mathbf{I}_{\mathrm{II}} + j2\mathbf{I}_{\mathrm{IV}} + j\mathbf{I}_{\mathrm{I}} + j\mathbf{I}_{\mathrm{II}} - j\mathbf{I}_{\mathrm{IV}} = j10$$

$$(2 + j10 - j2)\mathbf{I}_{\mathrm{IV}} - j10\mathbf{I}_{\mathrm{II}} + j2\mathbf{I}_{\mathrm{III}} - j5\mathbf{I}_{\mathrm{I}} - j\mathbf{I}_{\mathrm{III}} = 5\sqrt{2}$$

Se simplifican estas ecuaciones, llegándose a:

$$(4 + j4)\mathbf{I}_{\mathrm{I}} - (4 - j6)\mathbf{I}_{\mathrm{II}} + j\mathbf{I}_{\mathrm{III}} - j5\mathbf{I}_{\mathrm{IV}} = 20/\sqrt{2}$$

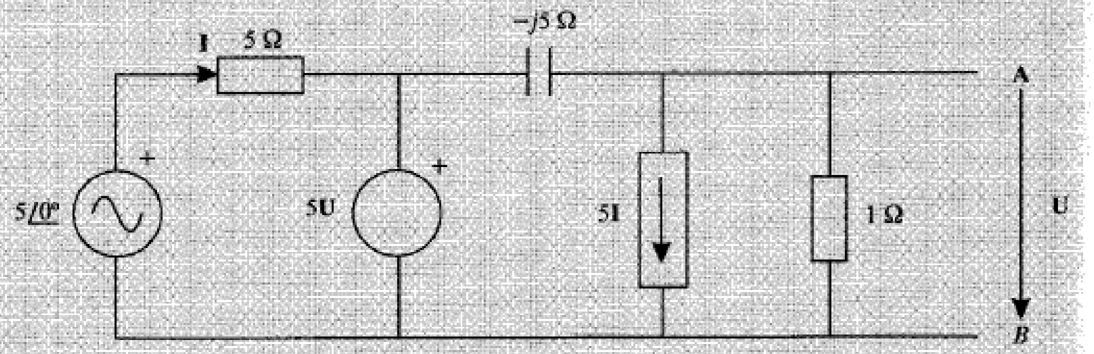
$$-(4 + j6)\mathbf{I}_{\mathrm{I}} + (9 + j9)\mathbf{I}_{\mathrm{II}} - (5 - j)\mathbf{I}_{\mathrm{III}} - j10\mathbf{I}_{\mathrm{IV}} = 0$$

$$j\mathbf{I}_{\mathrm{I}} - (5 - j)\mathbf{I}_{\mathrm{II}} + (5 - j)\mathbf{I}_{\mathrm{III}} + j\mathbf{I}_{\mathrm{IV}} = j10$$

$$-j5\mathbf{I}_{\mathrm{I}} - j10\mathbf{I}_{\mathrm{II}} + j\mathbf{I}_{\mathrm{III}} + (2 + j8)\mathbf{I}_{\mathrm{IV}} = 5\sqrt{2}$$

Ejercicio 6.7

Determinar el equivalente Norton del circuito de la figura visto desde los terminales *A* y



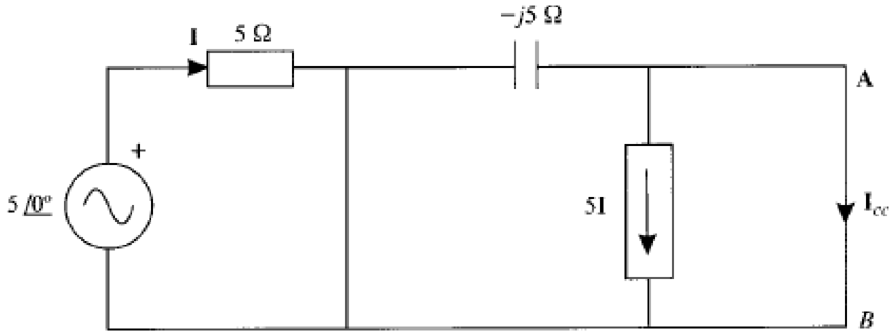
Todas las fuentes son senoidales y de la misma frecuencia.

En el cálculo de la impedancia equivalente su valor puede salir negativo debido a
engloba a las fuentes dependientes.

SOLUCIÓN

Corriente de cortocircuito

Al cortocircuitar los terminales *A* y *B*, la tensión *U* entre esos terminales vale cero y por ta
se anula la fuente de tensión de valor 5**U**, convirtiéndose dicha fuente en otro cortocirc
Por otra parte, la resistencia de valor 1 Ω, entre *A* y *B*, se puede eliminar ya que por ella
circula corriente. El circuito equivalente es:



La corriente de cortocircuito es:

$$\mathbf{I}_{cc} = -5\mathbf{I}$$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la primera malla:

$$5\underline{/0} = 5\mathbf{I}$$

de donde:

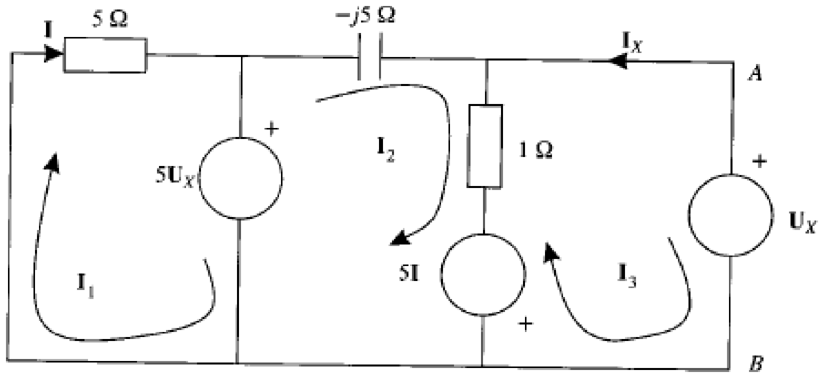
$$\mathbf{I} = 1 \text{ A}$$

Y la corriente de cortocircuito es $\mathbf{I}_{cc} = -5$.

Ejercicio 6.7

Impedancia Norton equivalente

Se anulan las fuentes independientes y se conecta una fuente de tensión $\mathbf{U}_x$ entre A y B. La fuente real de intensidad se convierte a fuente de tensión y se resuelve por el método de mallas, buscando la expresión de la corriente $\mathbf{I}_x$ en función de $\mathbf{U}_x$, pues $\mathbf{Z}_N = \mathbf{U}_x/\mathbf{I}_x$:



$$5\mathbf{I}_1 = -5\mathbf{U}_x$$

$$\mathbf{I}_2(-j5+1) - \mathbf{I}_3 = 5\mathbf{I} + 5\mathbf{U}_x$$

$$\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2 = -\mathbf{U}_x - 5\mathbf{I}$$

Pero:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{I}_3 = -\mathbf{I}_x$$

Por tanto:

$$5\mathbf{I} = -5\mathbf{U}_x \qquad (1)$$

$$\mathbf{I}_2(1-j5) + \mathbf{I}_x = 5\mathbf{I} + 5\mathbf{U}_x \qquad (2)$$

$$\mathbf{I}_x + \mathbf{I}_2 = \mathbf{U}_x + 5\mathbf{I} \qquad (3)$$

Se sustituye (1) en (2) y (3):

$$\mathbf{I}_2(1-j5) + \mathbf{I}_x = 0 \qquad (2')$$

$$\mathbf{I}_x + \mathbf{I}_2 = -4\mathbf{U}_x \qquad (3')$$

Se despeja $\mathbf{I}_2$ de (3') y se sustituye en (2'):

$$\mathbf{I}_2 = -\mathbf{I}_x - 4\mathbf{U}_x$$

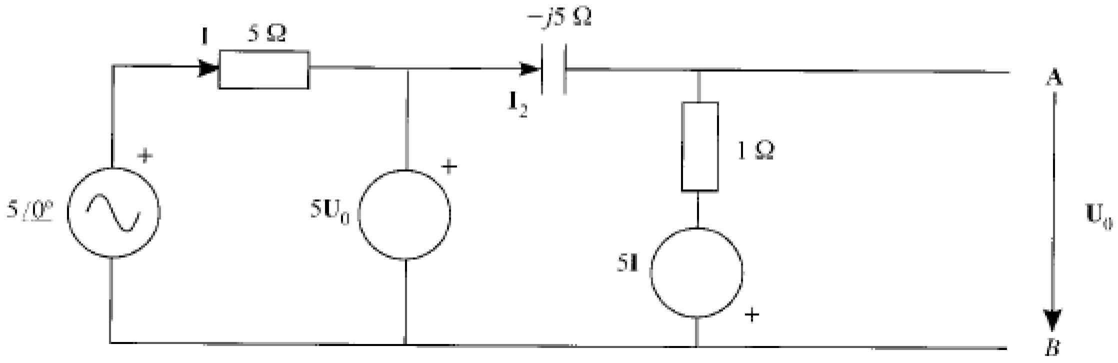
$$(-\mathbf{I}_x - 4\mathbf{U}_x)(1-j5) + \mathbf{I}_x = 0$$

$$\mathbf{I}_x(-j5) = -4(1-j5)\mathbf{U}_x$$

$$\mathbf{Z}_N = \frac{\mathbf{U}_x}{\mathbf{I}_x} = \frac{j5}{4(1-j5)} = -0{,}2404 + j0{,}0481$$

Como comprobación se calcula la tensión a circuito abierto, $\mathbf{U}_0$. La fuente de corriente real se transforma en una fuente de tensión y se resuelve por mallas:

Ejercicio 6.7



$$5\mathbf{I} = 5 - 5\mathbf{U}_0 \qquad (1)$$

$$-j5\mathbf{I}_2 = 5\mathbf{U}_0 - \mathbf{U}_0 = 4\mathbf{U}_0 \qquad (2)$$

Por otra parte:

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{I}_2 - 5\mathbf{I} \qquad (3)$$

Al sustituir en esta última ecuación las ecuaciones (1) y (2):

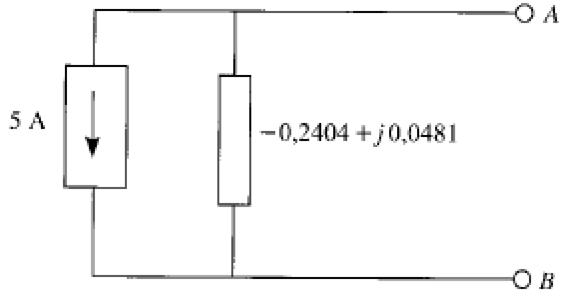
$$\mathbf{U}_0 = j\,\frac{4}{5}\,\mathbf{U}_0 - (5 - 5\mathbf{U}_0)\left(4 + j\,\frac{4}{5}\right)\mathbf{U}_0 = 5$$

$$\mathbf{U}_0 = \frac{5}{4 + j\,\frac{4}{5}} = 1{,}2019 - 0{,}2404i$$

Y la impedancia Norton:

$$\mathbf{Z}_N = \frac{\mathbf{U}_0}{\mathbf{I}_{cc}} = \frac{1{,}2019 - j0{,}2404}{-5} = -0{,}2404 + j0{,}0481$$

El equivalente Norton del circuito se muestra en la figura.



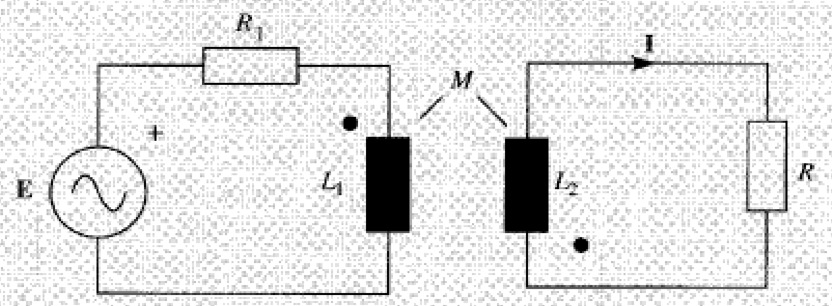
Ejercicio 6.8

En el circuito de la figura:

1. Calcúlese el equivalente Thévenin del circuito con respecto a los puntos *A* y *B*.
2. Calcúlese la corriente *I* por aplicación del teorema de Thévenin.

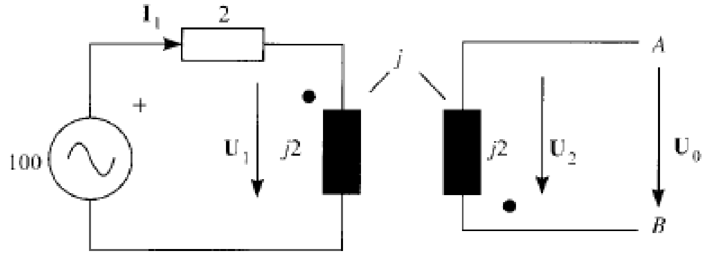
$$L_1 = L_2 = 2 \text{ mH} \qquad M = 1 \text{ mH} \qquad R_1 = 2\ \Omega \qquad R = 1\ \Omega$$

$$E = 100\underline{/0^\circ} \text{ V} \qquad \omega = 1.000 \text{ rad/s}$$



SOLUCIÓN

1. En primer lugar, se determina la tensión a circuito abierto. El circuito resultante será:



En este circuito se cumple que $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_2$. Además, según las ecuaciones de las bobinas acopladas:

$$\mathbf{U}_2 = -j\mathbf{I}_1$$

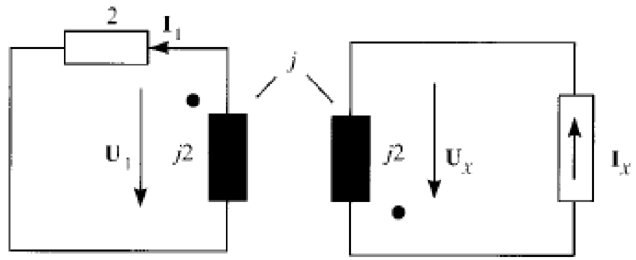
$$\mathbf{U}_1 = j2\mathbf{I}_1$$

Por otra parte, en la primera malla se satisface que:

$$\mathbf{E} = 2\mathbf{I}_1 + \mathbf{U}_1 = 2\mathbf{I}_1 + j2\mathbf{I}_1 = (2 + j2)\mathbf{I}_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_1 = \frac{100}{2 + j2} = 25 - j25 = 35{,}35\underline{/-45^\circ} \text{ A}$$

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{E}_{th} = -j\mathbf{I}_1 = -25 - j25 = 35{,}35\underline{/-135^\circ} \text{ V}$$

A continuación se obtiene la impedancia Thévenin, para lo cual se hace pasivo el circuito y se inserta una fuente de corriente de valor $\mathbf{I}_x$:



Ecuaciones de las bobinas acopladas:

$$\mathbf{U}_x = j2\mathbf{I}_x + j\mathbf{I}_1$$

$$\mathbf{U}_1 = -j2\mathbf{I}_1 - j\mathbf{I}_x$$

Ejercicio 6.8

Además $\mathbf{U}_1 = 2\mathbf{I}_1$, y sustituyendo en la segunda ecuación: $\mathbf{I}_1(2 + j2) = -j\mathbf{I}_x$.

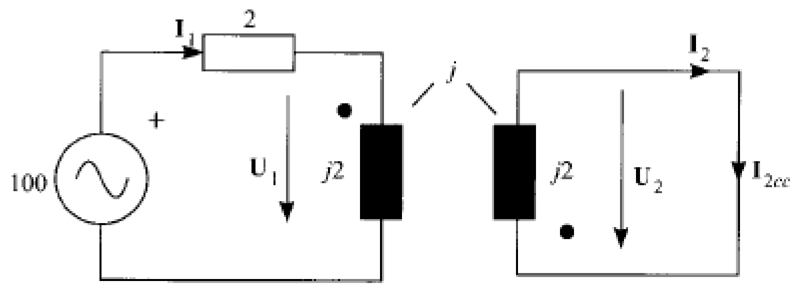
Por tanto, si se sustituye el valor de $\mathbf{I}_1$ en la primera ecuación, se tiene:

$$\mathbf{U}_x = \left(j2 + \frac{1}{2 + j2}\right)\mathbf{I}_x$$

Y la impedancia Thévenin será:

$$\mathbf{Z}_{th} = \frac{\mathbf{U}_x}{\mathbf{I}_x} = j2 + \frac{1}{2 + j2} = 0{,}25 + j1{,}75 = 1{,}77\underline{/81{,}87^\circ}\ \Omega$$

Con el fin de verificar los resultados, se obtiene la corriente de cortocircuito:



Planteamiento de las ecuaciones en las bobinas acopladas:

$$(1)\quad \mathbf{U}_2 = -j2\mathbf{I}_2 - j\mathbf{I}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_1 = -2\mathbf{I}_2 = -2\mathbf{I}_{cc} \quad (3)$$

$$(2)\quad \mathbf{U}_1 = j2\mathbf{I}_1 + j\mathbf{I}_2$$

Por otra parte, aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la primera malla:

$$(4)\quad \mathbf{U}_1 = \mathbf{E} - 2\mathbf{I}_1$$

Si se igualan las ecuaciones (2) y (4) y se sustituye el valor de $\mathbf{I}_1$ dado por (3), se tien

$$-j2 \cdot 2\mathbf{I}_{cc} + j\mathbf{I}_{cc} = \mathbf{E} + 4\mathbf{I}_{cc}$$

$$\mathbf{I}_{cc} = \frac{\mathbf{E}}{-4 - j3} = -16 + j12 = 20\underline{/143{,}13^\circ}\ \text{A}$$

Comprobación: $\mathbf{Z}_{th} = \dfrac{\mathbf{E}_{th}}{\mathbf{I}_{cc}} = 1{,}77\underline{/81{,}87^\circ}\ \Omega$

2. La corriente **I**, una vez conocida el equivalente Thévenin del circuito respecto a los t minales *A* y *B* viene dada por:

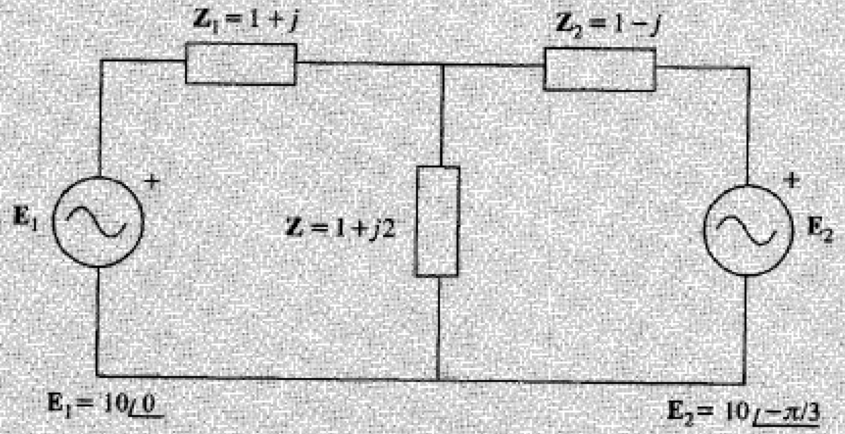
$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}_{th}}{\mathbf{Z}_{th} + R} = \frac{-25 - j25}{0{,}25 + j1{,}75 + 1} = \frac{-25 - j25}{1{,}25 + j1{,}75} = -16{,}22 + j2{,}70 = 16{,}44\underline{/170{,}54^\circ}\ \mathbf{A}$$

Ejercicio 6.9

En el circuito de la figura, hallar la intensidad que circula por la impedancia $\mathbf{Z} = 1 + j$

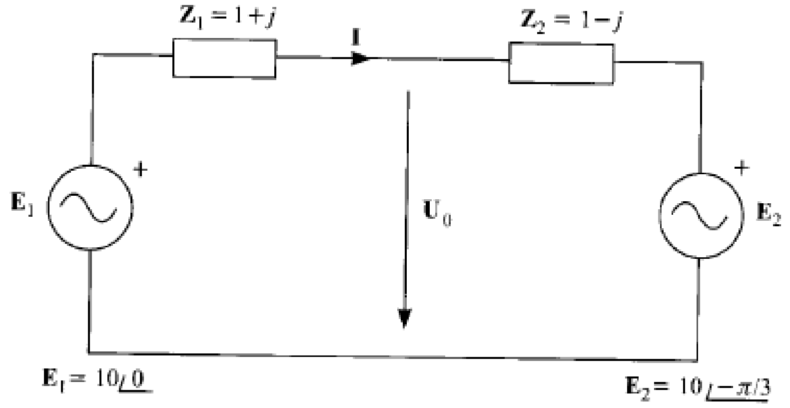
a) Por aplicación del teorema de Thévenin.

b) Por aplicación del teorema de Millman.



SOLUCIÓN

a) En primer lugar se resolverá aplicando el teorema de Thévenin.
Se halla la tensión a circuito abierto, para lo que se debe resolver el siguiente circuito.



En vista de la figura anterior, la corriente $\mathbf{I}$ viene dada por:

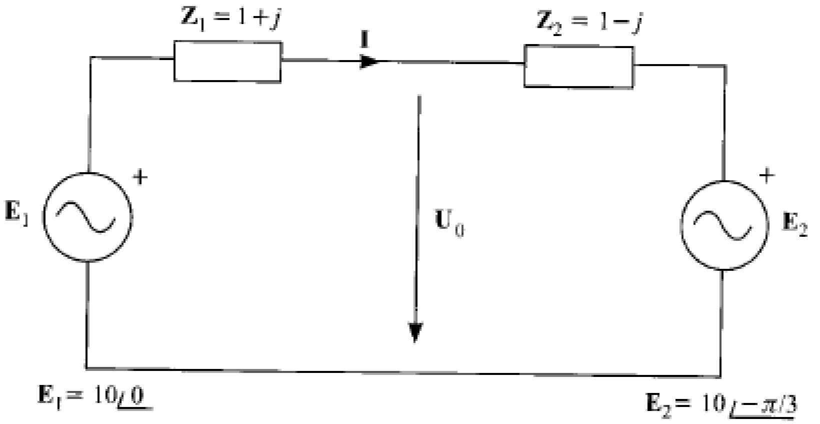
$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2}{(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)} = \frac{10\angle 0 - 10\angle -\pi/3}{(1 + j) + (1 - j)} = 5\angle \pi/3 \text{ A}$$

Luego la tensión Thévenin (o tensión a circuito abierto) es:

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{E}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{I} = \mathbf{E}_2 + \frac{\mathbf{Z}_2(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{\mathbf{Z}_2\mathbf{E}_1 + \mathbf{Z}_1\mathbf{E}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} =$$

$$= \frac{(1 - j)10 + (1 + j)10\angle -\pi/3}{2} = 11{,}83 - j6{,}83 = 13{,}66\angle -30^\circ \text{ V}$$

Ejercicio 6.9



A continuación se obtiene la impedancia de Thévenin, como la asociación en paralelo de las dos impedancias.

$$\mathbf{Z}_{th} = \frac{\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{(1+j)(1-j)}{2} = 1\ \Omega$$

La intensidad que recorre la impedancia **Z** es finalmente:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{U}_0}{\mathbf{Z}_{th} + \mathbf{Z}} = \frac{13{,}66\underline{/-30^\circ}}{1 + (1 + j2)} = 4{,}82\underline{/-75^\circ}\ \text{A}$$

b) Aplicando el teorema de Millman:

La tensión entre los extremos de la impedancia **Z** es:

$$\mathbf{U} = \frac{\dfrac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{Z}_1} + \dfrac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{Z}_2}}{\dfrac{1}{\mathbf{Z}_1} + \dfrac{1}{\mathbf{Z}_2} + \dfrac{1}{\mathbf{Z}_3}} = \frac{\dfrac{10}{1+j} + \dfrac{10\underline{/-\pi/3}}{1-j}}{\dfrac{1}{1+j} + \dfrac{1}{1-j} + \dfrac{1}{1+j2}} = 10{,}8\underline{/-11{,}56^\circ}\ \text{V}$$

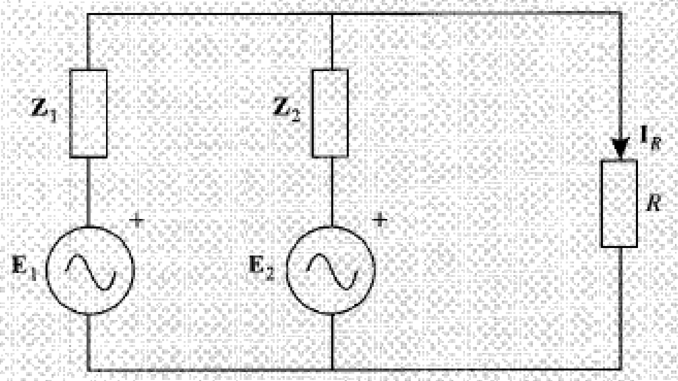
Y la intensidad que circula por la impedancia:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}} = \frac{10{,}8\underline{/-11{,}56^\circ}}{1 + j2} = 4{,}82\underline{/-75^\circ}\ \text{A}$$

Ejercicio 6.10

En el circuito de la figura, calcular, en régimen permanente, la intensidad instantánea que circula por la resistencia R, así como los valores correspondientes a $t = 1$ ms y $t =$ ms.

$$e_1 = 10\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,1.000t, \quad e_2 = 20\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,1.000t, \quad \mathbf{Z}_1 = 1 + j, \quad \mathbf{Z}_2 = 1 - j, \quad \mathrm{R} =$$



SOLUCIÓN

Aplicando la fórmula de Millman al circuito de la figura, se calcula la tensión **U** que cae la resistencia:

$$\mathbf{U} = \frac{\dfrac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{Z}_1} + \dfrac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{Z}_2}}{\dfrac{1}{\mathbf{Z}_1} + \dfrac{1}{\mathbf{Z}_2} + \dfrac{1}{R}} = \frac{\dfrac{10}{1+j} + \dfrac{20}{1-j}}{\dfrac{1}{1+j} + \dfrac{1}{1-j} + 1} = 10 \text{ V}$$

La corriente que circula por la resistencia es, por tanto $I_R = 10/1 = 10$ A.
El valor instantáneo de dicha corriente tendrá como expresión:

$$i_R(t) = 10\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,1.000t$$

y los valores para $t = 1$ ms y $t = 2$ ms son, respectivamente:

$$i_R(1) = 10\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,(1.000 \cdot 0{,}001) = 10\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,1 = 11{,}90 \text{ A}$$

$$i_R(2) = 10\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,(1.000 \cdot 0{,}002) = 10\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,2 = 12{,}86 \text{ A}$$

Tema 7

Asociaciones de dipolos y teoremas del análisis de circuitos en corriente alterna

Potencia consumida por un dipolo. Potencia activa, reactiva y aparente

Sea el dipolo representado en la Figura 2.12, en la que se han puesto referencias de potencia entrante.

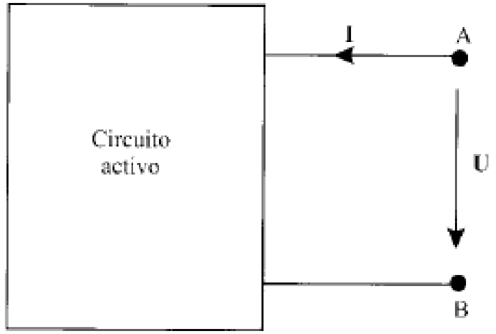


Figura 2.12.

La tensión y la corriente tendrán la expresión siguiente:

$$u(t) = \sqrt{2}\ U \cos \omega t$$

$$i(t) = \sqrt{2}\ I \cos(\omega t - \varphi)$$

La tensión y la corriente vendrán representadas por los fasores $\mathbf{U} = U\underline{/0}$ y $\mathbf{I} = I\underline{/-\varphi}$.
La potencia *instantánea* consumida por el dipolo será:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = UI \cos \varphi (1 + \cos 2\omega t) + UI \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} 2\omega t$$

En esta descomposición de la potencia instantánea el primer término

$$UI \cos \varphi (1 + \cos 2\omega t)$$

es una potencia oscilante de una frecuencia doble que la de la red y con un valor medio no nulo, mientras que el segundo término

$$UI \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} 2\omega t$$

es una oscilación de potencia de valor medio nulo y de frecuencia doble que la de la red.
Se definen los siguientes términos:

$P = UI \cos \varphi$ Potencia activa: se mide en vatios (W)

$Q = UI \operatorname{sen} \varphi$ Potencia reactiva: se mide en voltamperios reactivos (VAr)

A partir de las potencias activa y reactiva se define la potencia aparente, S, que se mide en voltamperios (VA).

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \text{(VA)}$$

También se define el número complejo $\mathbf{S}$ o potencia aparente compleja:

$$\mathbf{S} = P + jQ = UI(\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi) = UIe^{j\varphi} = Se^{j\varphi}$$

El módulo de la potencia aparente compleja es la potencia aparente.

Potencia consumida por un dipolo. Potencia activa, reactiva y aparente

- **Distintas expresiones de la potencia en alterna**

En una impedancia:

$$\mathbf{S} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{I}^* = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}\mathbf{I}^* = \mathbf{Z} \cdot I^2 = (R + j \cdot X) \cdot I^2 = R \cdot I^2 + j \cdot X \cdot I^2$$

$$P = R \cdot I^2 \qquad\qquad Q = X \cdot I^2$$

En una admitancia:

$$\mathbf{S} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{I}^* = \mathbf{U}\mathbf{Y}^*\mathbf{U}^* = \mathbf{Y}^* U^2 = (G - j \cdot B) \cdot U^2 = G \cdot U^2 - j \cdot B \cdot U^2$$

$$P = G \cdot U^2 \qquad\qquad Q = -B \cdot U^2$$

Se puede definir un triángulo de potencias análogo al de impedancias, que se muestra en la Figura 2.13.

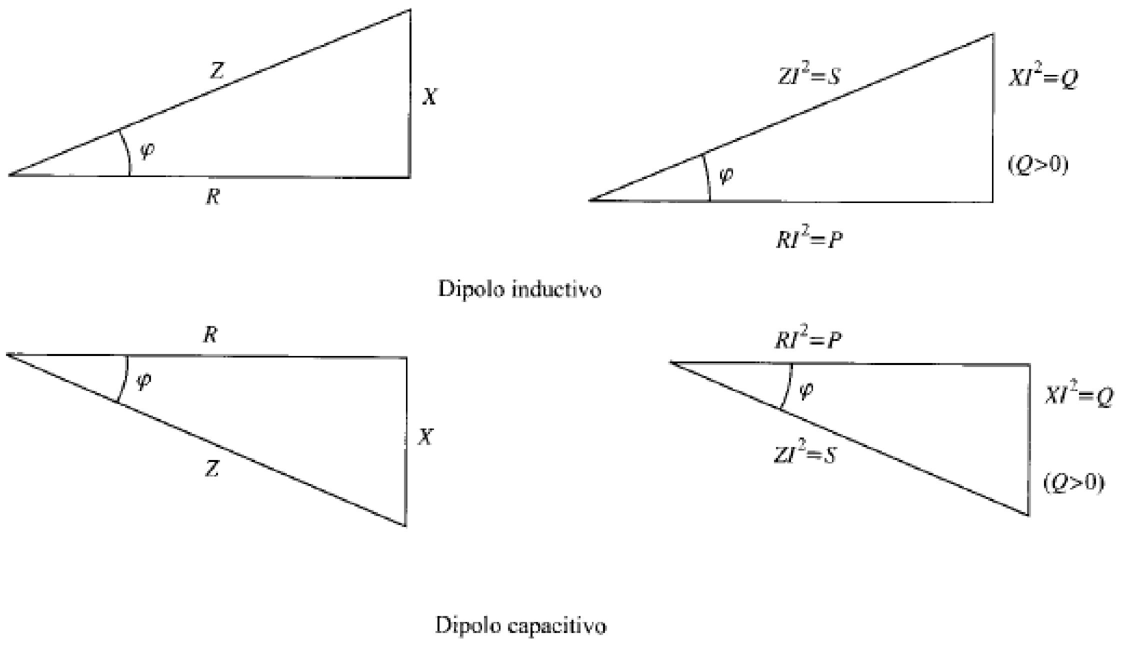


Figura 2.13.

Teorema de Boucherot. Factor de potencia

- **Teorema de Boucherot**

Este teorema es una formulación del teorema de conservación de la energía, y su aplicación es una generalización del balance de potencias que se realiza en los circuitos de continua. Su enunciado es el siguiente:

> «En un circuito lineal, para una frecuencia constante, hay conservación de la potencia activa, por una parte, y de la potencia reactiva, por otra.»

- **Factor de potencia**

El *factor de potencia* de una carga o circuito, o $\cos\varphi$, es:

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{U \cdot I}$$

Conviene que el factor de potencia sea lo más alto posible, y para poder conseguir esto hay que corregirlo. Dado que las cargas son normalmente inductivas, habrá que conectar condensadores en paralelo con la carga.

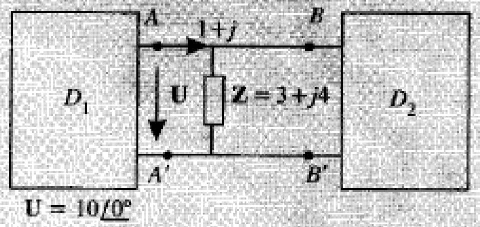
El valor del condensador necesario es:

$$C = \frac{P(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')}{\omega U^2}$$

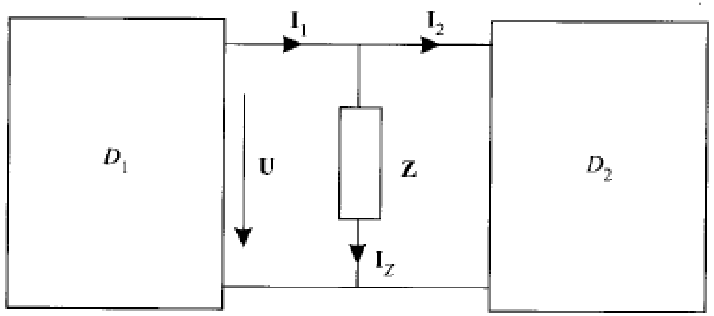
Ejercicio 7.1

En el circuito de la figura:

1. Señálese qué dipolos actúan como generador y como receptor.
2. En caso de receptor, indíquese si es inductivo o capacitivo.
3. En caso de generador, indíquese si la carga conectada a él es de carácter inductivo o capacitivo.
4. Balance de potencias.



SOLUCIÓN



Con las referencias de la figura, la corriente en la impedancia será $\mathbf{I}_z = \dfrac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}}$, luego la corriente $\mathbf{I}_2$:

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1 - \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}} = (1 + j) - \frac{10}{3 + j4} = -0{,}2 + j2{,}6$$

Potencias:

$\mathbf{S}_1 = \mathbf{U}\cdot\mathbf{I}_1^* = 10(1 - j)$	$P = 10$ W	(generador)
	$Q = -10$ VAr	(consumidor inductivo)
$\mathbf{S}_2 = \mathbf{U}\cdot\mathbf{I}_2^* = 10(-0{,}2 - j2{,}6)$	$P = -2$ W	(generador)
	$Q = -26$ VAr	(consumidor inductivo)

Potencia generada total: $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = 12 + j16$

Potencia consumida en la impedancia:

$\mathbf{S} = \mathbf{U}\left(\dfrac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}}\right)^* = \dfrac{U^2}{\mathbf{Z}^*} = \dfrac{100}{3 - j4} = 12 + j16$	$P = 12$ W	(carga)
	$Q = 16$ VAr	(inductiva)

Ejercicio 7.2

En un dipolo en régimen estacionario sinuosidal los valores instantáneos de tensión y tencia son:

$$u(t) = 100 \operatorname{sen} 100\pi t \quad \text{(V)} \qquad p(t) = 125 - 250 \cos(200\pi t - \pi/3) \quad \text{(W)}$$

Se pide:

a) Factor de potencia y potencia activa y reactiva.

b) Intensidad instantánea.

c) Energía consumida por el dipolo al cabo de 3 horas.

d) Valores de R y L suponiendo que el dipolo se representa por la asociación en para de una resistencia y una bobina.

SOLUCIÓN

a) Se parte de las expresiones genéricas de tensión y de corriente.

$$u(t) = \sqrt{2}U \operatorname{sen} \omega t$$
$$i(t) = \sqrt{2}I \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$$

La expresión de la potencia instantánea es:

$$p(t) = 2UI \operatorname{sen}(\omega t) \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) = UI \cos\varphi(1 - \cos 2\omega t) - UI \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} 2\omega t =$$
$$= UI\cos\varphi - UI\cos\varphi\cos 2\omega t - UI \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} 2\omega t$$

que se identifica con la expresión dada:

$$p(t) = 125 - 125\cos 200\pi t - 125\sqrt{3} \operatorname{sen} 200\pi t$$

que se identifica con la expresión dada:

$$p(t) = 125 - 125\cos 200\pi t - 125\sqrt{3} \operatorname{sen} 200\pi t$$

Esto equivale a:

$$UI\cos\varphi = 125$$
$$UI \operatorname{sen}\varphi = 125\sqrt{3}$$

De ambas:

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3} \qquad \cos\varphi = 1/2 \qquad \varphi = \pi/3$$

Y por tanto:

$$P = UI\cos\varphi = 125 \text{ W}$$
$$Q = UI \operatorname{sen}\varphi = 125\sqrt{3} \text{ VAr}$$

b) $$I = \frac{P}{U\cos\varphi} = \frac{125}{\frac{100}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \text{ A}$$

$$i(t) = 5 \operatorname{sen}\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

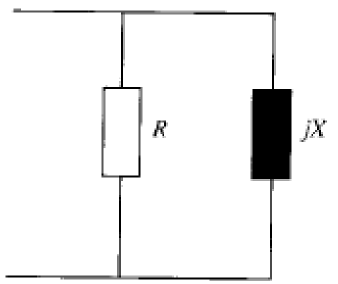
Ejercicio 7.2

c) La potencia activa es el valor medio de la potencia instantánea en un ciclo. Dado que 3 horas comprende un número entero de ciclos (además de que el período de un ciclo de 50 Hz es de 20 ms, despreciable frente a 3 horas), la energía total se podrá calcular como:

$$W = P \cdot t = 125 \cdot 3 \cdot 3.600 = 1.350 \text{ kJ}$$

d) $$P = \frac{U^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{U^2}{P} = \frac{(100/\sqrt{2})^2}{125} = 40\ \Omega$$

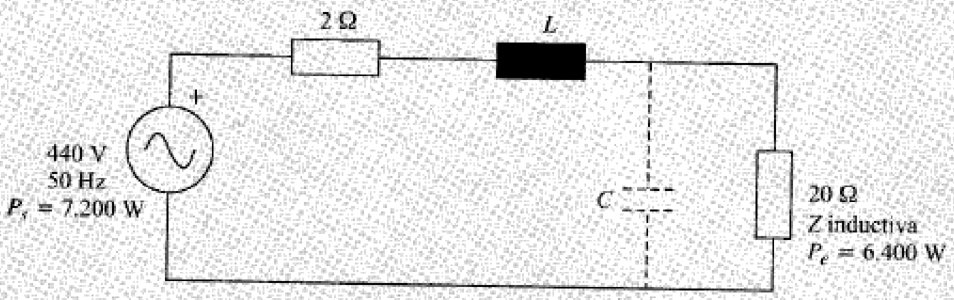
$$X = \frac{U^2}{Q} = \frac{(100/\sqrt{2})^2}{125\sqrt{3}} = 23{,}09\ \Omega \quad \Rightarrow \quad L = \frac{X}{\omega} = \frac{23{,}09}{100\pi} = 0{,}0735\ \text{H}$$



Ejercicio 7.3

Calcúlese en el circuito de la figura, tomando como origen de ángulos la tensión en la carga:

1. Intensidad absorbida por la carga.
2. Factor de potencia de la impedancia de carga.
3. Factor de potencia del generador.
4. Valor de la inductancia L.
5. Diagrama vectorial de tensión e intensidad.
6. Condensador que debería colocarse en paralelo con la carga para que el conjunto de ambas tuviese un $\cos\varphi = 0{,}9$ inductivo.



S...CIÓN

1. Pérdidas que se producen en la línea (diferencia entre potencia generada y consumida):

$$\Delta P = P_s - P_e = 7.200 - 6.400 = 800 \text{ W}$$

$$\Delta P = R \cdot I^2 \quad \Rightarrow \quad I^2 = 800/2 = 400 \quad \Rightarrow \quad I = 20 \text{ A}$$

2. La impedancia tendrá la forma $\mathbf{Z} = R + jX$ (impedancia inductiva):

$$P_e = R \cdot I^2 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{P_e}{I^2} = \frac{6.400}{400} = 16 \ \Omega$$

$$X = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12 \ \Omega$$

Por tanto:

$$\mathbf{Z} = 16 + j12 \qquad \cos\varphi = \frac{16}{20} = 0{,}8$$

De otra forma

$$\cos\varphi = \frac{P_e}{UI} = \frac{P_e}{ZI^2} = \frac{6.400}{20 \cdot 20^2} = 0{,}8$$

Ejercicio 7.3

3. Potencia aparente producida por la fuente:

$$S_s = EI = 440 \cdot 20 = 8.800 \text{ VA}$$

$$\cos \varphi_s = \frac{P_s}{S_s} = \frac{7.200}{8.800} = 0{,}818$$

4. Potencias reactivas generada y consumida en la carga:

$$Q_s = \sqrt{S_s^2 - P_s^2} = \sqrt{8.800^2 - 7.200^2} = 5.059{,}6 \text{ VAr}$$

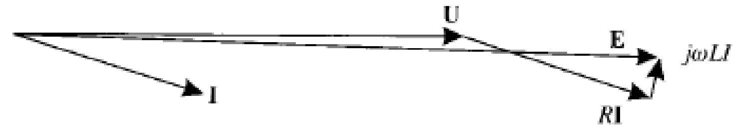
$$Q_e = I^2 \cdot X = 20^2 \cdot 12 = 4.800 \text{ VAr}$$

La diferencia se consume en la línea:

$$\Delta Q = Q_s - Q_e = 259{,}6 \text{ VAr}$$

$$\Delta Q = I^2 X_L \quad \Rightarrow \quad X_L = \frac{259{,}6}{20^2} = 0{,}649 \ \Omega \quad \Rightarrow \quad L = \frac{0{,}649}{100\pi} = 2{,}06 \text{ mH}$$

5. El diagrama vectorial de tensiones e intensidades se muestra en la figura, siendo **U** tensión en la carga:



6. $\mathbf{U} = U\underline{/0^\circ}$

Tensión en la carga:

$$U = Z \cdot I = 20 \cdot 20 = 400 \text{ V}$$

$$\Delta Q_c = Q_c - Q_c' = P \cdot (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi')$$

$$\Delta Q_c = \omega C U^2$$

$$C = \frac{P \cdot (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi')}{\omega U^2} = \frac{6.400 \cdot (0{,}75 - 0{,}4843)}{100\pi 400^2} = 40 \ \mu\text{F}$$

Tema 8

Circuitos trifásicos, equilibrados y desequilibrados

Tensiones trifásicas

Un sistema trifásico es aquel en el que sus elementos están dispuestos en tres fases. Una fase es «cada una de las partes de un circuito en que se genera, se transmite, o se utiliza una de las tensiones del sistema». Las tensiones que aparecen en un sistema trifásico equilibrado de *secuencia directa* como el que se muestra en la Figura 3.1 son:

$$\mathbf{E}_a = E\angle 0$$

$$\mathbf{E}_b = E\angle -2\pi/3$$

$$\mathbf{E}_c = E\angle 2\pi/3$$

$$\mathbf{U}_{ab} = \mathbf{E}_a - \mathbf{E}_b = \sqrt{3}\cdot E\angle \pi/6$$

$$\mathbf{U}_{bc} = \mathbf{E}_b - \mathbf{E}_c = \sqrt{3}\cdot E\angle \pi/6 - 2\pi/3$$

$$\mathbf{U}_{ca} = \mathbf{E}_c - \mathbf{E}_a = \sqrt{3}\cdot E\angle \pi/6 + 2\pi/3$$

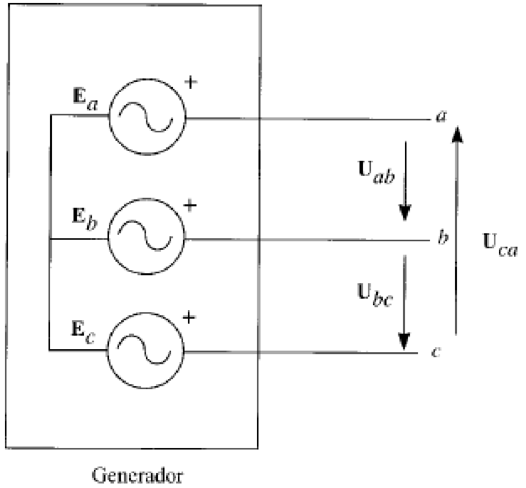


Figura 3.1. Tensiones de un sistema trifásico.

Si la *secuencia* es *inversa*, las tensiones son:

$$\mathbf{E}_a = E\angle 0$$

$$\mathbf{E}_b = E\angle 2\pi/3$$

$$\mathbf{E}_c = E\angle -2\pi/3$$

Los diagramas vectoriales que representan las tensiones indicadas se muestran en la Figura 3.2.

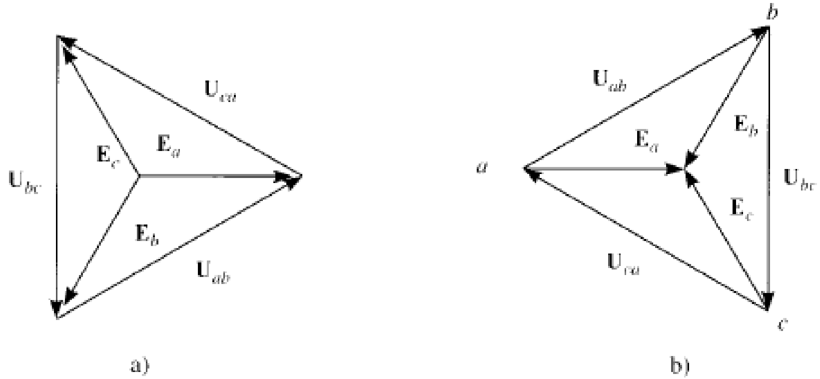


Figura 3.2.

Corrientes en los sistemas trifásicos

En un sistema de tres impedancias conectadas en estrella, si las tensiones que hay en c una de las fases son $\mathbf{U}_a$, $\mathbf{U}_b$, $\mathbf{U}_c$ y cada una de las impedancias es $\mathbf{Z}_Y = Z_Y\underline{/\varphi}$, las corrie que circulan por ella serán:

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{U}_a}{\mathbf{Z}_Y} = \frac{U}{Z_Y}\underline{/\varphi} = I\underline{/\varphi}$$

$$\mathbf{I}_b = \frac{\mathbf{U}_b}{\mathbf{Z}_Y} = \frac{U}{Z_Y}\underline{/-\varphi - 2\pi/3} = I\underline{/-\varphi - 2\pi/3}$$

$$\mathbf{I}_c = \frac{\mathbf{U}_c}{\mathbf{Z}_Y} = \frac{U}{Z_Y}\underline{/-\varphi + 2\pi/3} = I\underline{/-\varphi + 2\pi/3}$$

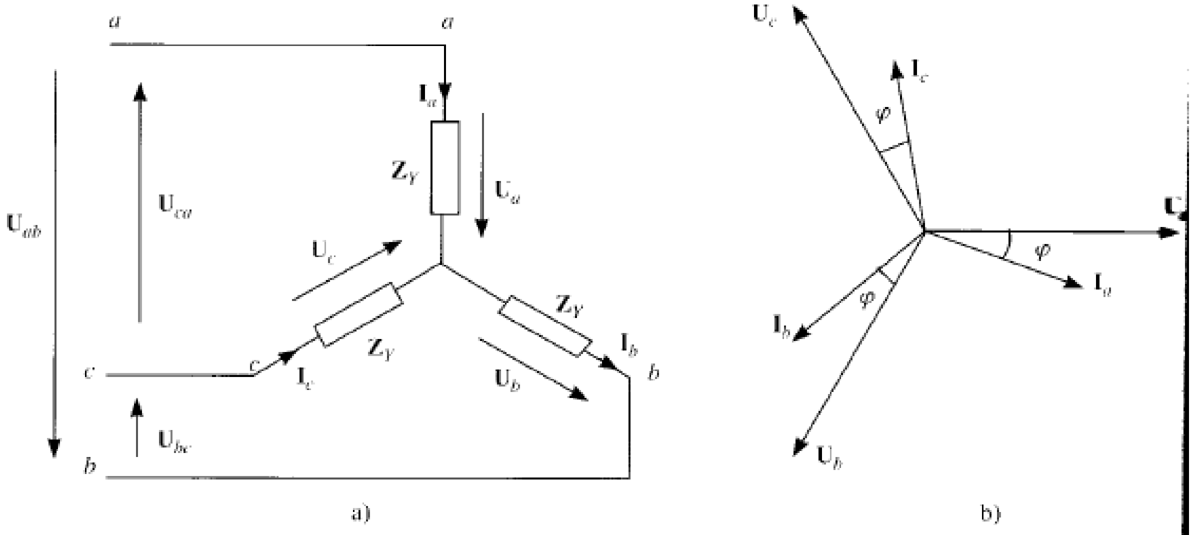


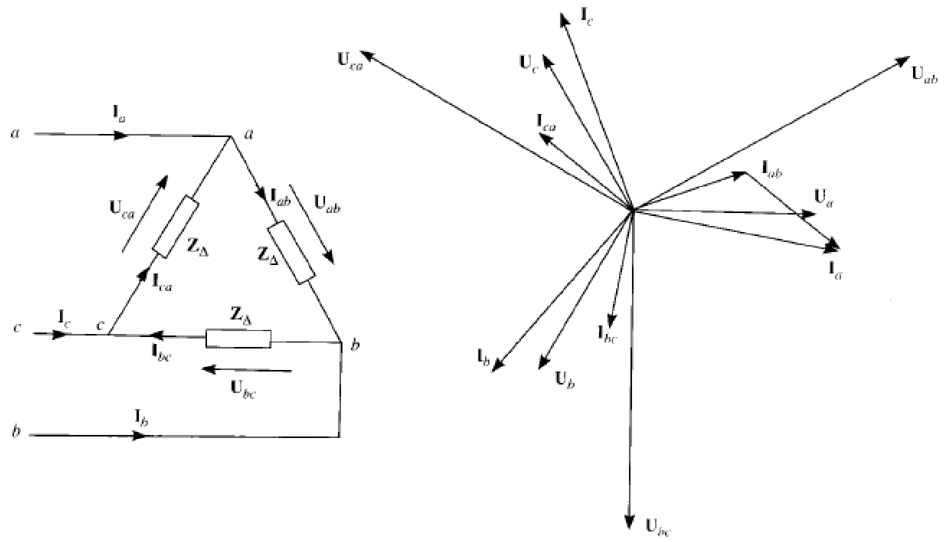
Figura 3.3.

Si conectan en triángulo tres impedancias iguales $\mathbf{Z}_\Delta$ tales que formen un sistema en triángulo equivalente al previo en estrella ($\mathbf{Z}_\Delta = 3 \cdot \mathbf{Z}_Y$), las corrientes que circularán por cada una de las impedancias serán:

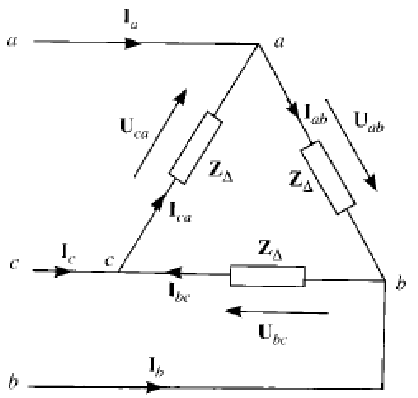
$$\mathbf{I}_{ab} = \frac{\mathbf{U}_{ab}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\sqrt{3}U}{3 \cdot Z_Y}\underline{/\pi/6 - \varphi} = \frac{I}{\sqrt{3}}\underline{/\pi/6 - \varphi}$$

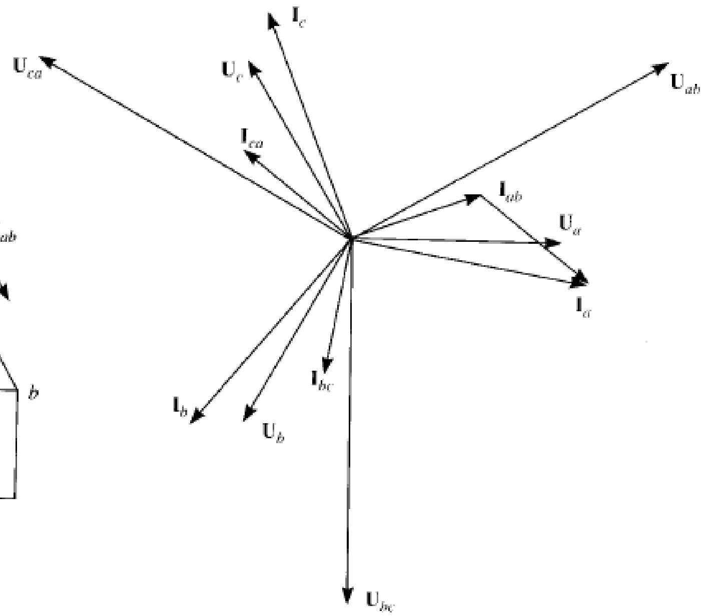
$$\mathbf{I}_{bc} = \frac{\mathbf{U}_{bc}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\sqrt{3}U}{3 \cdot Z_Y}\underline{/\pi/6 - \varphi - 2\pi/3} = \frac{I}{\sqrt{3}}\underline{/\pi/6 - \varphi - 2\pi/3}$$

$$\mathbf{I}_{ca} = \frac{\mathbf{U}_{ca}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\sqrt{3}U}{3 \cdot Z_Y}\underline{/\pi/6 - \varphi + 2\pi/3} = \frac{I}{\sqrt{3}}\underline{/\pi/6 - \varphi + 2\pi/3}$$



Corrientes en los sistemas trifásicos





Corrientes $\mathbf{I}_a$, $\mathbf{I}_b$, $\mathbf{I}_c$:

$$\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_{ab} - \mathbf{I}_{ca} = I\underline{/-\varphi}$$

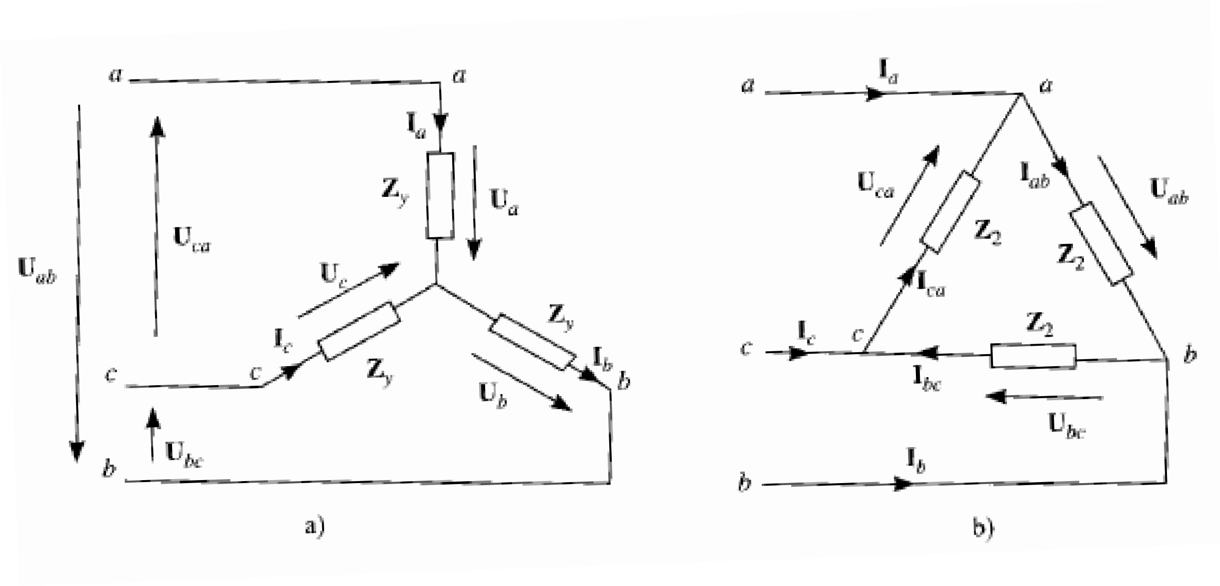
$$\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_{bc} - \mathbf{I}_{ab} = I\underline{/-\varphi - 2\pi/3}$$

$$\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_{ca} - \mathbf{I}_{cb} = I\underline{/-\varphi + 2\pi/3}$$

Hay que observar que en un sistema con tres hilos, la aplicación de la primera ley de Kirchhoff implica que:

$$\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c = 0$$

Magnitudes de fase y de línea



- **Magnitudes de línea:**

$$\mathbf{I}_a = I\underline{/-\varphi} \qquad \mathbf{U}_{ab} = U\underline{/\pi/6}$$

$$\mathbf{I}_b = I\underline{/-\varphi - 2\pi/3} \qquad \mathbf{U}_{bc} = U\underline{/\pi/6 - 2\pi/3}$$

$$\mathbf{I}_c = I\underline{/-\varphi + 2\pi/3} \qquad \mathbf{U}_{ca} = U\underline{/\pi/6 + 2\pi/3}$$

- **Magnitudes de fase:**

En triángulo | *En estrella*

$$\mathbf{I}_{ab} = \frac{I}{\sqrt{3}}\underline{/\pi/6 - \varphi} \qquad \mathbf{U}_a = \frac{U}{\sqrt{3}}\underline{/0}$$

$$\mathbf{I}_{bc} = \frac{I}{\sqrt{3}}\underline{/\pi/6 - \varphi - 2\pi/3} \qquad \mathbf{U}_b = \frac{U}{\sqrt{3}}\underline{/-2\pi/3}$$

$$\mathbf{I}_{ca} = \frac{I}{\sqrt{3}}\underline{/\pi/6 - \varphi + 2\pi/3} \qquad \mathbf{U}_c = \frac{U}{\sqrt{3}}\underline{/2\pi/3}$$

Conversión de fuentes reales de estrella a triángulo y viceversa

- **Paso de Y a Δ**

$$\mathbf{Z}_{\Delta} = 3 \cdot \mathbf{Z}_{Y} \qquad \mathbf{E}_{ab} = \mathbf{E}_{a} - \mathbf{E}_{b}$$

- **Paso de Δ a Y**

$$\mathbf{Z}_{Y} = \mathbf{Z}_{\Delta}/3 \qquad \mathbf{E}_{a} = \frac{\mathbf{E}_{ab} - \mathbf{E}_{bc}}{3}$$

Circuito monofásico equivalente

- **Circuito equivalente fase-neutro**

Sea un sistema trifásico equilibrado como el representado en la Figura 3.6 en la que tanto el receptor como el generador están conectados en estrella, y ambos están enlazados por una línea trifásica.

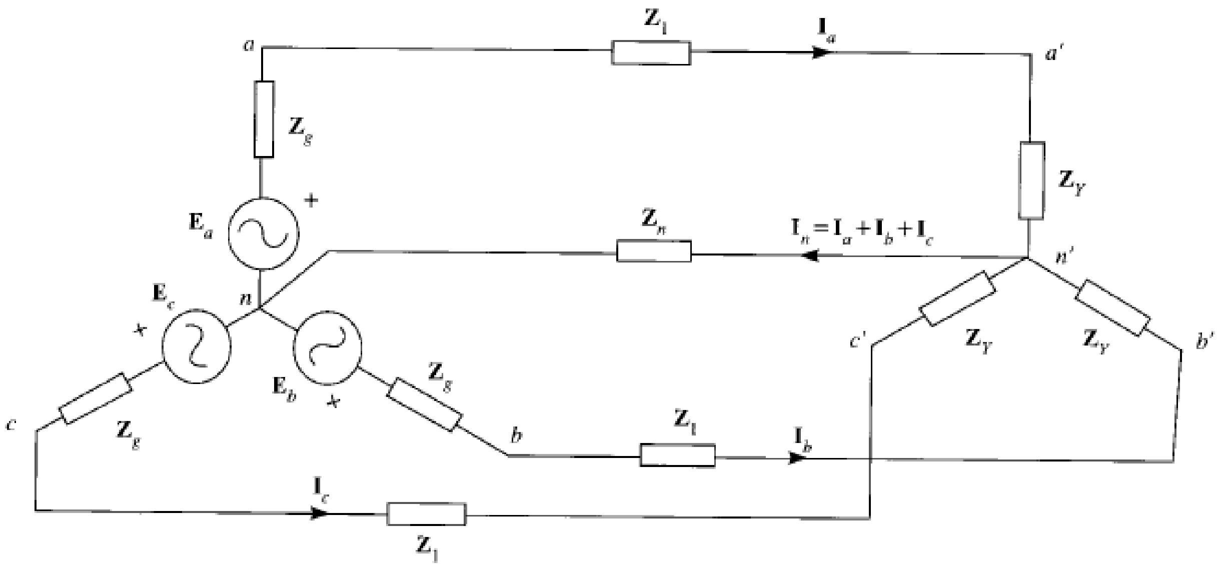


Figura 3.6.

Un circuito equivalente que tuviera la misma relación entre la tensión en la fuente y la corriente sería el representado en la Figura 3.7.

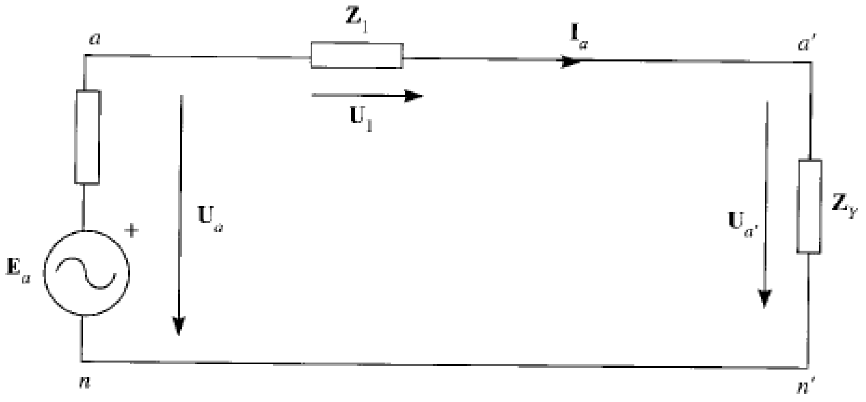


Figura 3.7.

La corriente $\mathbf{I}_a$ se puede obtener mediante la expresión:

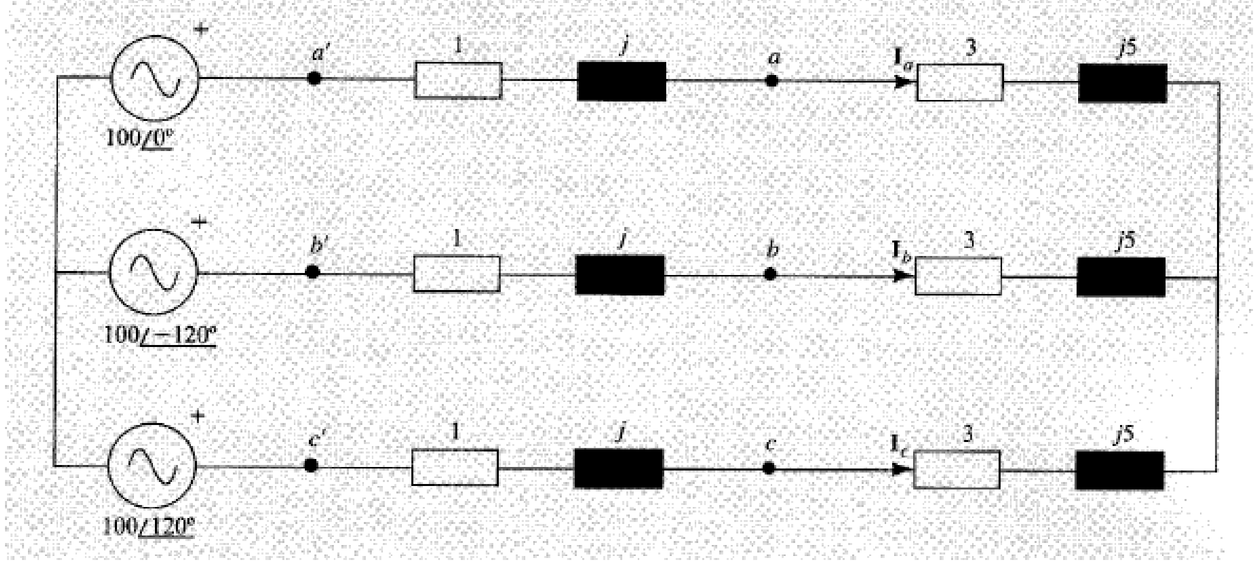
$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{E}_a}{\mathbf{Z}_g + \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_Y}$$

Las tensiones $\mathbf{U}_a$, $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_{a'}$ se obtendrán de la forma siguiente:

$$\mathbf{U}_a = \mathbf{Z}_Y \cdot \mathbf{I}_a \qquad \mathbf{U}_1 = \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{I}_a \qquad \mathbf{U}_{a'} = \mathbf{E}_a - \mathbf{Z}_g \cdot \mathbf{I}_a$$

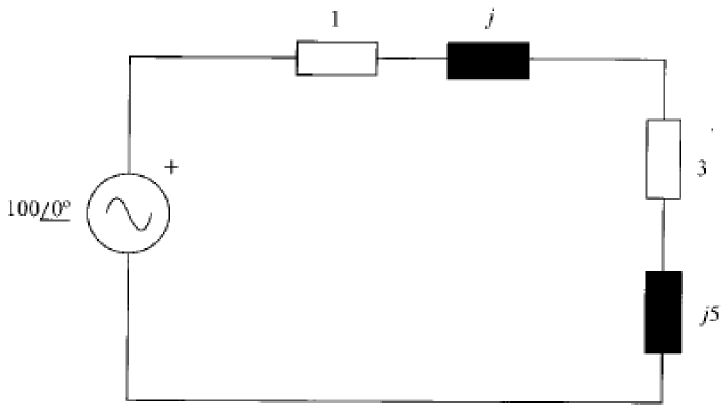
Ejercicio 8.1

Calcular las corrientes de línea en el sistema trifásico equilibrado de la figura.



SOLUCIÓN

Puesto que se trata de un circuito trifásico equilibrado, se puede obtener el circuito monofásico equivalente, cuya obtención es inmediata al estar conectadas en estrella, tanto la fuente como las cargas. El circuito equivalente es el siguiente:



Por tanto, la corriente que circula por la fase a tiene el valor:

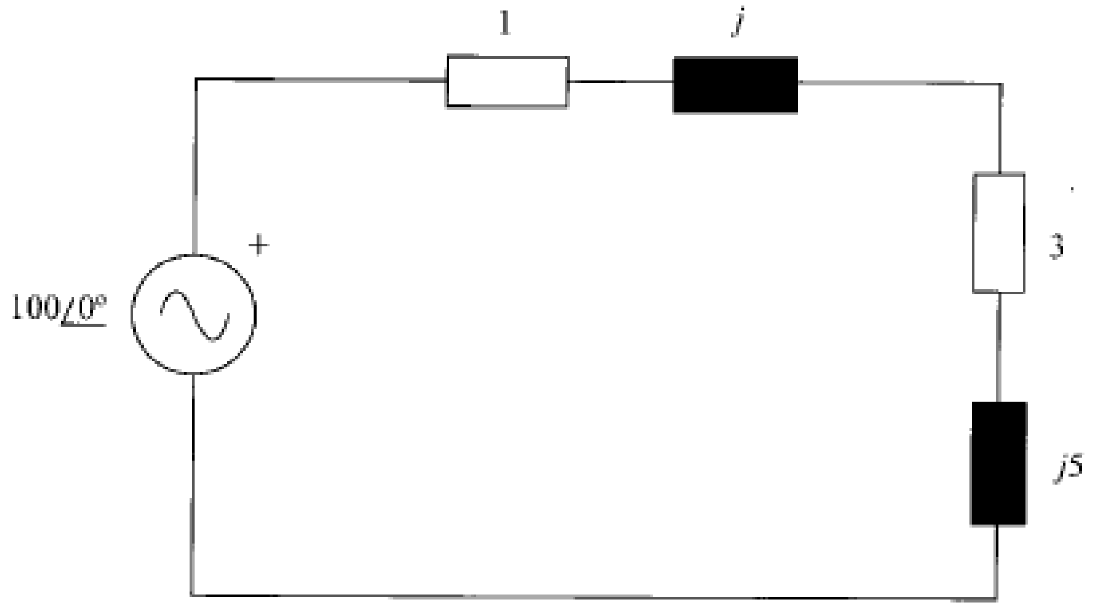
$$\mathbf{I}_a = \frac{100}{1 + j + 3 + j5} = \frac{100}{4 + j6} = 13{,}87\underline{/-56{,}31^\circ}$$

Y consecuentemente,

$$\mathbf{I}_b = 13{,}87\underline{/-56{,}31^\circ - 120^\circ}$$

$$\mathbf{I}_c = 13{,}87\underline{/-56{,}31^\circ + 120^\circ}$$

Ejercicio 8.1



Valor de las tensiones:

$$\mathbf{U}_a = \mathbf{I}_a(3 + j5) = 13{,}87\underline{/-56{,}31^\circ} \cdot 5{,}831\underline{/59{,}036} = 80{,}86\underline{/2{,}75^\circ}$$

$$U_b = 80{,}86\underline{/2{,}75^\circ - 120^\circ}$$

$$U_c = 80{,}86\underline{/2{,}75^\circ + 120^\circ}$$

Caída de tensión en cada una de las fases de la línea:

$$\Delta U_a = \mathbf{I}_a(1 + j) = 13{,}87\underline{/-56{,}31^\circ} \cdot \sqrt{2}\underline{/45^\circ} = 19{,}61\underline{/-11{,}31^\circ}$$

$$\Delta U_b = 19{,}61\underline{/-11{,}31^\circ - 120^\circ}$$

$$\Delta U_c = 19{,}61\underline{/-11{,}31^\circ + 120^\circ}$$

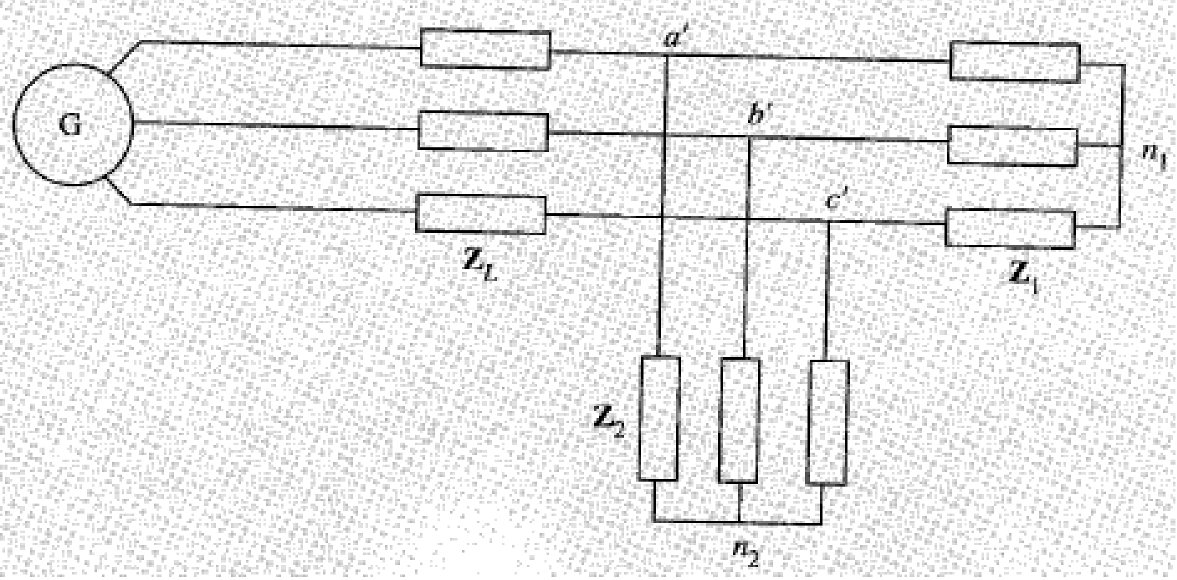
Ejercicio 8.2

En la figura se representa un circuito trifásico equilibrado en carga y de secuencia directa, siendo la tensión de línea en el generador supuesto ideal 220 V (eficaz).

$$\mathbf{Z}_L = 1 + j \quad , \quad \mathbf{Z}_1 = 10(3 - j) \quad , \quad \mathbf{Z}_2 = 10(2 + j)$$

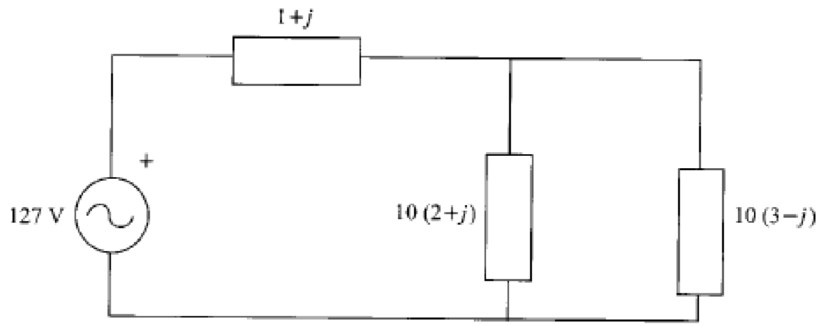
La frecuencia es de 50 Hz. Se pide:

1. Intensidad de línea en el generador.
2. Tensión de fase en cada una de las cargas.
3. Intensidad de línea en cada una de las cargas.



SOLUCIÓN

1. El equivalente monofásico fase-neutro será el siguiente:



La impedancia equivalente de las dos cargas es, puesto que están conectadas en paralelo:

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = 14$$

A partir de aquí se obtiene el valor de la corriente de línea (coincidente con la de fase a):

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{U}_a}{\mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_{eq}} = 8{,}43\underline{/-3{,}81^\circ} \text{ A}$$

Las corrientes de las tres fases serán, por tanto:

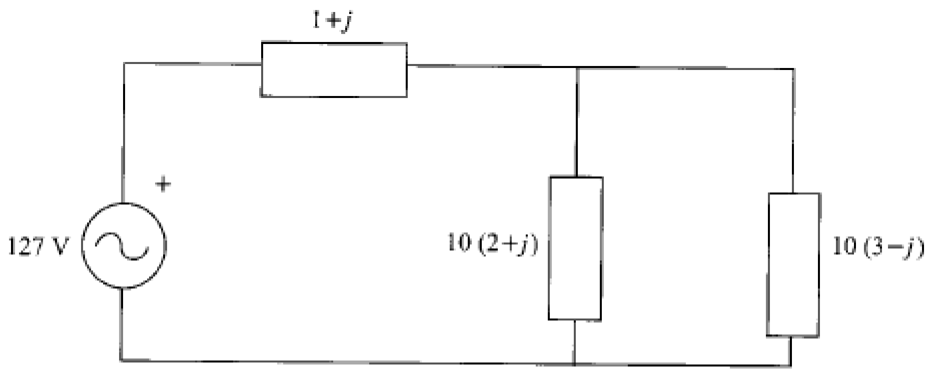
$$\mathbf{I}_a = 8{,}43\underline{/-3{,}81^\circ} \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_b = 8{,}3\underline{/-3{,}81^\circ - 120^\circ} \text{ A} = 8{,}3\underline{/-123{,}81^\circ} \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_c = 8{,}3\underline{/-3{,}81^\circ + 120^\circ} \text{ A} = 8{,}3\underline{/116{,}19^\circ} \text{ A}$$

Ejercicio 8.2

El equivalente monofásico fase-neutro será el siguiente:



2. La tensión de fase en ambas cargas es la misma por estar conectadas en paralelo:

$$\mathbf{U}_{a'n1} = \mathbf{U}_{a'n2} = \mathbf{I}_a \cdot \mathbf{Z}_{eq} = 118{,}02\angle{-3{,}89^\circ}$$

$$\mathbf{U}_{b'n1} = \mathbf{U}_{b'n2} = 118{,}02\angle{-3{,}89^\circ - 120^\circ}$$

$$\mathbf{U}_{c'n1} = \mathbf{U}_{c'n2} = 118{,}02\angle{-3{,}89^\circ - 120^\circ}$$

3. La intensidad de línea en cada una de las cargas es:

$$\mathbf{I}_{a1} = \frac{\mathbf{U}_{a'n1}}{\mathbf{Z}_1} = 3{,}73\angle{14{,}62^\circ}\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_{b1} = 3{,}73\angle{14{,}62^\circ - 120^\circ}\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_{c1} = 3{,}73\angle{14{,}62^\circ + 120^\circ}\ \text{A}$$

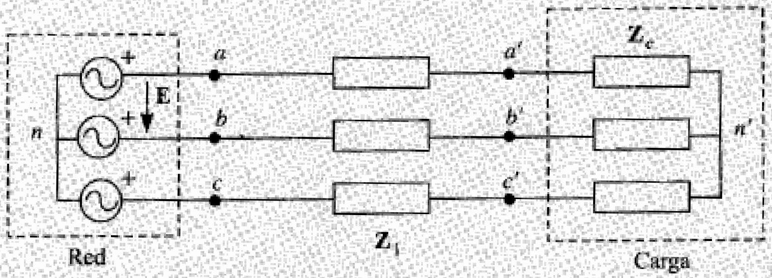
$$\mathbf{I}_{a2} = \frac{\mathbf{U}_{a'n1}}{\mathbf{Z}_2} = 5{,}27\angle{-30{,}37^\circ}\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_{b2} = 5{,}27\angle{-30{,}37^\circ - 120^\circ}\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_{c2} = 5{,}27\angle{-30{,}37^\circ + 120^\circ}\ \text{A}$$

Ejercicio 8.3

En el circuito de la figura, la carga está formada por tres impedancias conectadas en estrella.



Cuando la tensión aplicada a la carga es de 400 V, consume una potencia activa $P = 12{,}8$ kW y una potencia reactiva $Q = 9{,}6$ kVAr.

a) Hállese el valor de la impedancia de carga.

b) Calcúlense las corrientes y las tensiones en a', b', c' con respecto a tierra en el siste[ma] si se produce un cortocircuito entre el punto a' y tierra, y, n y n' no están conecta[dos] a tierra («neutro aislado»).

c) Calcúlense corrientes y tensiones en el caso anterior cuando el neutro n' está conecta[do] a tierra mediante una impedancia nula («neutro puesto rígidamente a tierra») y [n] está aislado.

d) Calcúlense corrientes y tensiones en el caso anterior cuando ambos neutros n y n' es[tán] puestos rígidamente a tierra.

Datos: $\mathbf{Z}_l = 0{,}6 + j0{,}8$; tensión de línea de la red $E = 400$ V. Se considera que la tensi[ón] de tierra es 0 V.

SOLUCIÓN

a) Impedancia de carga.

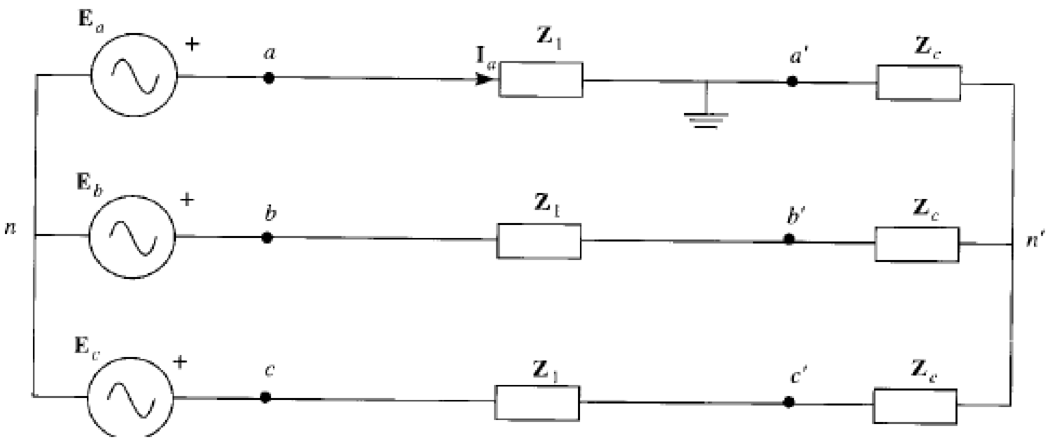
En esta ocasión también se trabajará con admitancias en vez de con impedancias. El valor de la admitancia de la carga será:

$$G = \frac{P}{3U_{FN}^2} = \frac{12.800}{3 \cdot 400^2/3} = 0{,}08 \text{ S}$$

$$B = -\frac{Q}{3U_{FN}^2} = \frac{-9.600}{400^2} = -0{,}06 \text{ S}$$

Por tanto, la admitancia de la carga será $\mathbf{Y}_c = 0{,}008 - j0{,}06$ y la impedancia $\mathbf{Z}_c = 8 + j6 = 10\underline{/36{,}87°}$.

b) El circuito que queda tras este cortocircuito es el que se muestra a continuación:



Ejercicio 8.3

La corriente $\mathbf{I}_a$ no resulta alterada por la presencia del cortocircuito, pues por él no se puede derivar corriente, al tratarse del único punto que está conectado a tierra. La corriente por esta fase, valdrá, por tanto:

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{E}_a}{\mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_c} = \frac{400/\sqrt{3}\angle 0^\circ}{0.6 + j0{,}8 + 8 + j6} = 21{,}06\angle{-38{,}33^\circ}$$

Las tensiones entre los puntos a', b', c' y tierra, sin embargo, han variado, puesto que ahora la tensión nula está en el punto a'. La tensión del punto a' con respecto a n' será:

$$\mathbf{U}_{a'n'} = \mathbf{I}_a\mathbf{Z}_c = 21{,}06\angle{-38{,}33^\circ}\ 10\angle 36{,}87^\circ = 210{,}6\angle{-1{,}46^\circ}$$

Y la tensión a la que está el punto n' con respecto a tierra será:

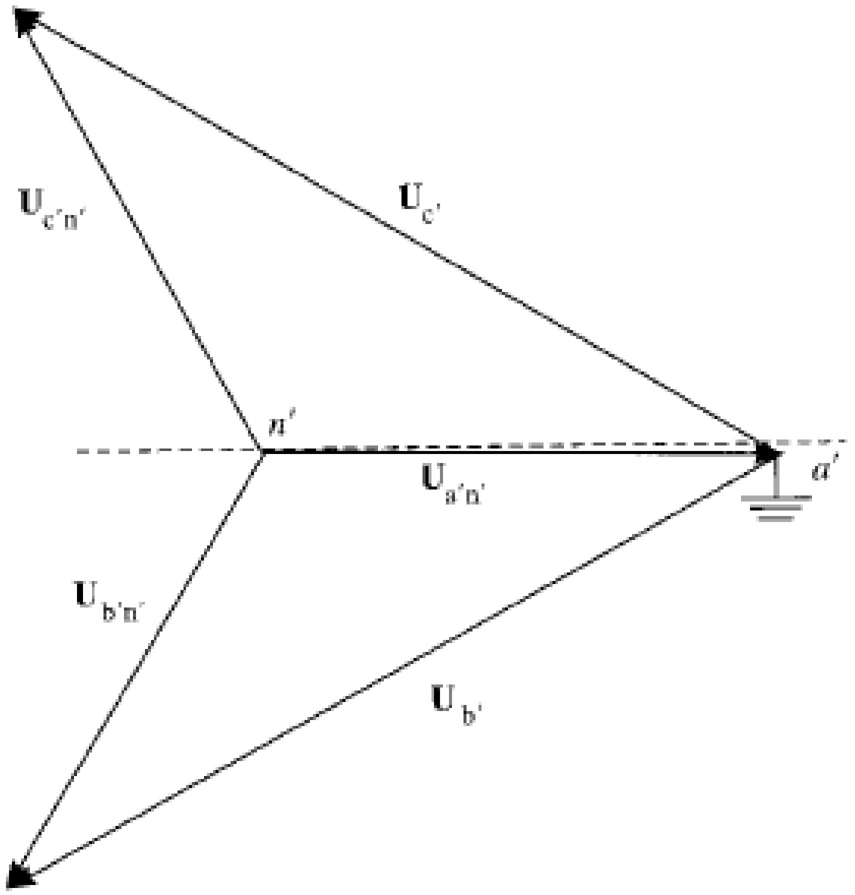
$$\mathbf{U}_{n'} = -\mathbf{U}_{a'n'} = -(21{,}06\angle{-38{,}33^\circ}\ 10\angle 36{,}87^\circ) = 210{,}6\ \angle 178{,}53^\circ$$

En cuanto a las tensiones en los puntos b' y c', con respecto a tierra, serán:

$$\mathbf{U}_{b'} = \mathbf{U}_{b'a'} = \sqrt{3}\cdot 210{,}6\angle{-1{,}46 - 150^\circ} = 364{,}77\angle{-151{,}46^\circ}$$

$$\mathbf{U}_{c'} = \mathbf{U}_{c'a'} = \sqrt{3}\cdot 210{,}6\angle 148{,}54^\circ = 364{,}77\angle 148{,}54^\circ$$

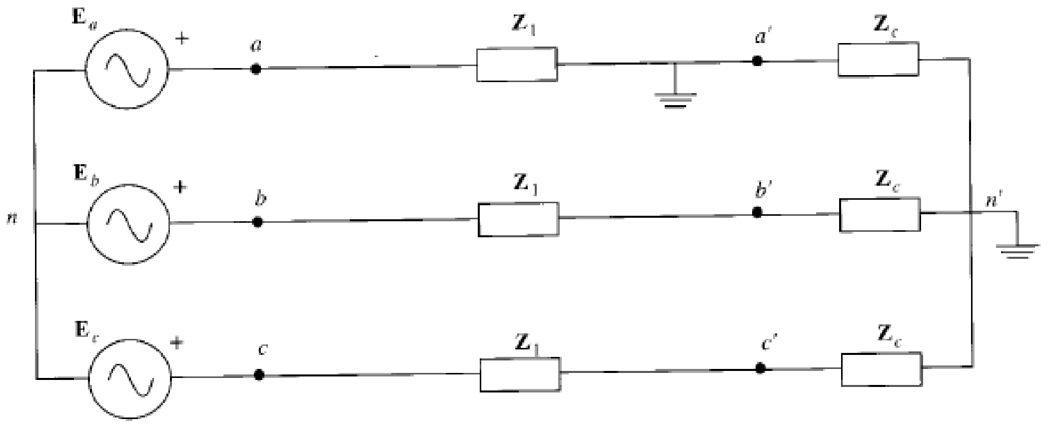
Esto se muestra en el diagrama vectorial adjunto:



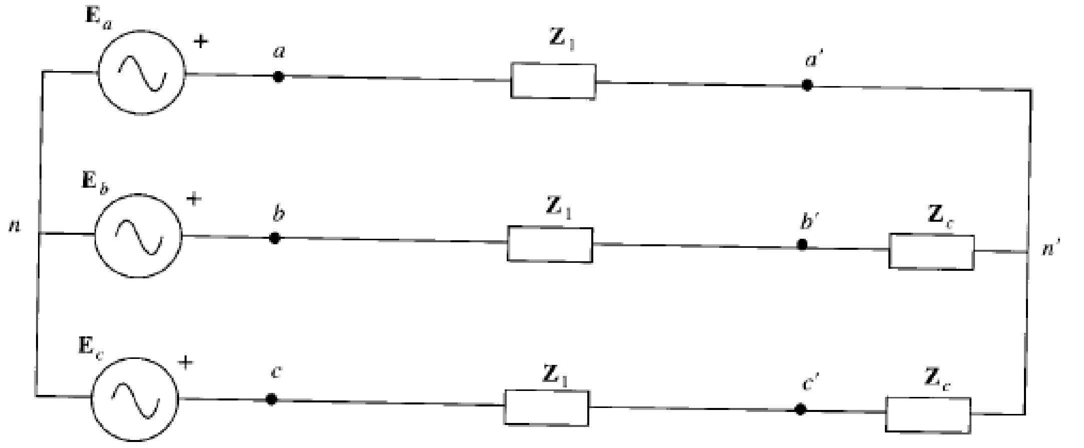
Ejercicio 8.3

c) Calcúlense corrientes y tensiones en el caso anterior cuando el neutro n' está conect
do a tierra mediante una impedancia nula («neutro puesto rígidamente a tierra») y
está aislado.

c) El circuito en estas condiciones es el representado en la figura siguiente, que es un circuito desequilibrado:



Puesto que los puntos a' y n' están conectados a tierra, la tensión entre ambos puntos es nula, es decir, el circuito es equivalente al siguiente:



Para obtener las tensiones y corrientes, una forma sencilla es aplicar la fórmula de Millman

$$\mathbf{U}_{nn'} = \frac{\sum_k \mathbf{Y}_k \mathbf{U}_k}{\sum_k \mathbf{Y}_k} = \frac{\dfrac{\mathbf{E}_a}{\mathbf{Z}_l} + \dfrac{\mathbf{E}_b}{\mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_c} + \dfrac{\mathbf{E}_c}{\mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_c}}{\dfrac{1}{\mathbf{Z}_l} + \dfrac{1}{\mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_c} + \dfrac{1}{\mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_c}}$$

Si se hace uso de la propiedad de que $\mathbf{E}_a + \mathbf{E}_b + \mathbf{E}_c = 0$, entonces la fórmula anterior queda

$$\mathbf{U}_{nn'} = \frac{\dfrac{\mathbf{E}_a}{\mathbf{Z}_l} - \dfrac{\mathbf{E}_a}{\mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_c}}{\dfrac{1}{\mathbf{Z}_l} + \dfrac{2}{\mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_c}} = \frac{\mathbf{Z}_c}{\mathbf{Z}_c + 3\mathbf{Z}_l}\,\mathbf{E}_a$$

Ejercicio 8.3

Al sustituir valores se obtiene el valor numérico de $\mathbf{U}_{nn'}$

$$\mathbf{U}_{nn'} = \frac{8 + j6}{8 + j6 + 3(0{,}6 + j0{,}8)} \frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 179\angle -3{,}73^\circ$$

En cuanto a las corrientes, se obtienen a partir de estas tensiones:

$$\mathbf{I}_a = -\frac{\mathbf{U}_{nn'} - \mathbf{E}_a}{\mathbf{Z}_l} = 53{,}59\angle -40{,}6^\circ$$

Y las otras corrientes:

$$\mathbf{I}_b = -\frac{\mathbf{U}_{nn'} - \mathbf{E}_b}{\mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_c} = 31{,}85\angle 174{,}3^\circ$$

$$\mathbf{I}_c = -\frac{\mathbf{U}_{nn'} - \mathbf{E}_c}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_c} = 33{,}04\angle 105{,}92^\circ$$

Y las tensiones restantes tendrán el valor:

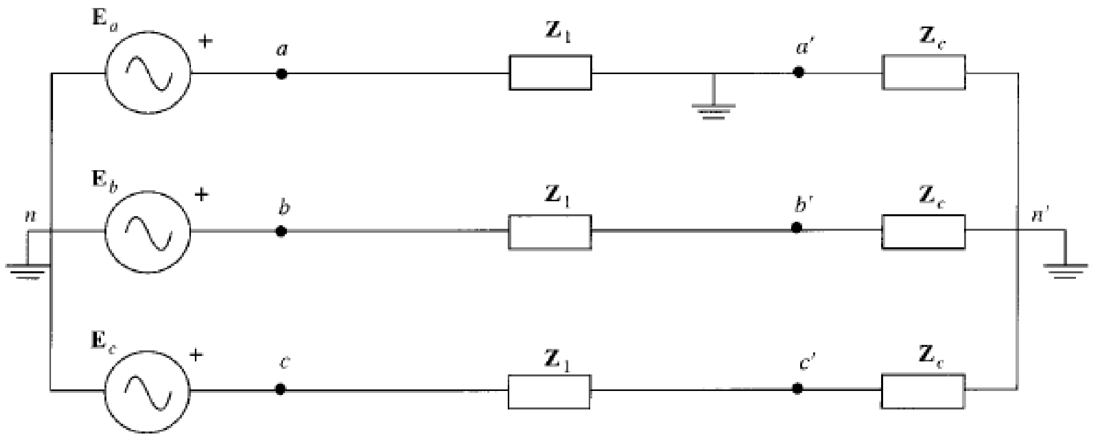
$$\mathbf{U}_{a'n'} = 0$$

$$\mathbf{U}_{b'n'} = \mathbf{I}_b \cdot \mathbf{Z}_c = 318{,}5\angle -148{,}83^\circ$$

$$\mathbf{U}_{c'n'} = \mathbf{I}_c \cdot \mathbf{Z}_c = 330{,}48\angle 142{,}79^\circ$$

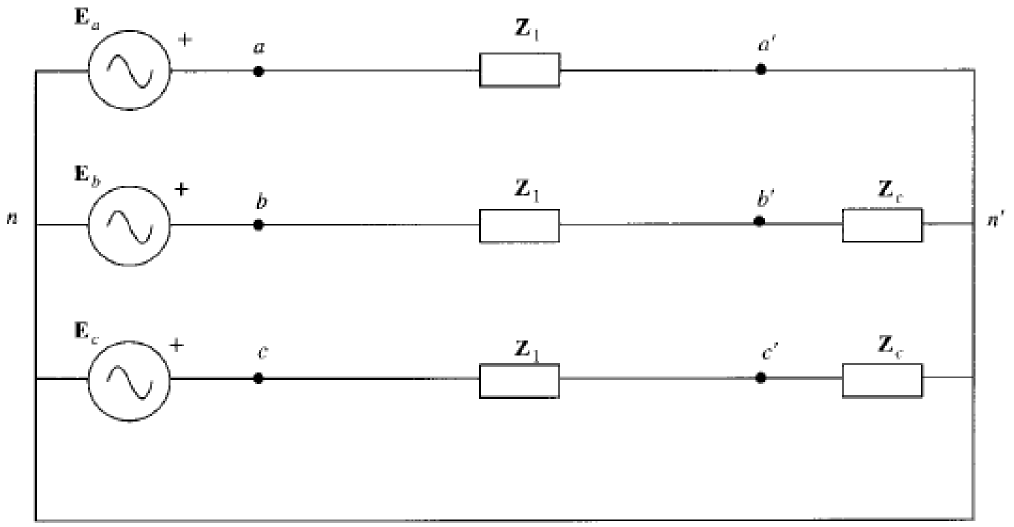
d) Calcúlense corrientes y tensiones en el caso anterior cuando ambos neutros n y n' es-
tán puestos rígidamente a tierra.

d) En este caso, el circuito que representa estas condiciones es el representado en la figura siguiente:



Ejercicio 8.3

Si se unen todos los puntos a la misma tensión, se obtiene el circuito equivalente siguiente:



La resolución de este circuito es más simple, puesto que cada una de las fases se comporta de forma independiente.

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{E}_a}{\mathbf{Z}_l} = 231\underline{/-53{,}13^o}$$

$$\mathbf{I}_b = \frac{\mathbf{E}_b}{\mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_c} = 21{,}06\underline{/-158{,}33^o}$$

$$\mathbf{I}_c = \; = \frac{\mathbf{E}_b}{\mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_c} = 21{,}06\underline{/81{,}67^o}$$

En cuanto a las tensiones, con respecto a tierra, y por lo tanto con respecto a los neutros, serán:

$$\mathbf{U}_{a'} = 0$$

$$\mathbf{U}_{b'} = \mathbf{Z}_c \cdot \mathbf{I}_b = 10\underline{/36{,}87} \cdot 21{,}06\underline{/-158{,}33^o} = 210{,}6\underline{/-121{,}46^o}$$

$$\mathbf{U}_{c'} = \mathbf{Z}_c \cdot \mathbf{I}_c = 10\underline{/36{,}87} \cdot 21{,}06\underline{/81{,}67^o} = 210{,}6\underline{/118{,}54^o}$$

Tema 9

Medida de potencia en circuitos trifásicos

Potencias activa, reactiva y aparente. Compensación del factor de potencia en los sistemas trifásicos

Potencias activa y reactiva en función de las magnitudes de fase:

$$P = P_a + P_b + P_c = 3 \cdot P_F = 3U_F \cdot I_F \cdot \cos\varphi$$

$$Q = Q_a + Q_b + Q_c = 3 \cdot Q_F = 3U_F \cdot I_F \cdot \operatorname{sen}\varphi$$

Potencia activa y reactiva en función de las magnitudes de línea:

$$P = \sqrt{3}U \cdot I \cos\varphi$$

$$Q = \sqrt{3}U \cdot I \operatorname{sen}\varphi$$

Hay que hacer notar que el ángulo φ es el desfase entre las tensiones y las corrientes ***de fase***. La potencia reactiva consumida es positiva si la carga es inductiva.

Potencia aparente:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3}U \cdot I$$

Potencia aparente compleja:

$$\mathbf{S} = P + j \cdot Q = \sqrt{3}U \cdot I(\cos\varphi + j \cdot \operatorname{sen}\varphi)$$

Factor de potencia:

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{3}U \cdot I}$$

La potencia instantánea absorbida por un sistema trifásico equilibrado es constante, e igual al valor de la potencia activa.

Sea un sistema trifásico con una potencia P y un factor de potencia $\cos\varphi$ al que se conecta en paralelo una batería de condensadores para aumentar su factor de potencia a $\cos\varphi'$.

- **Valor de la batería si se conecta en estrella**

$$C_Y = \frac{P \cdot (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')}{\omega U^2}$$

- **Valor de la batería si se conecta en triángulo**

$$C_\Delta = \frac{P \cdot (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')}{3\omega U^2}$$

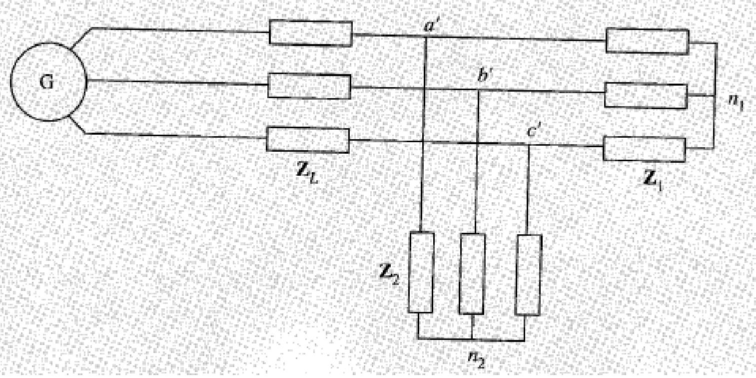
Ejercicio 9.1

En la figura se representa un circuito trifásico equilibrado en carga y de secuencia directa, siendo la tensión de línea en el generador supuesto ideal 220 V (eficaz).

$$\mathbf{Z}_L = 1 + j \quad , \quad \mathbf{Z}_1 = 10(3 - j) \quad , \quad \mathbf{Z}_2 = 10(2 + j)$$

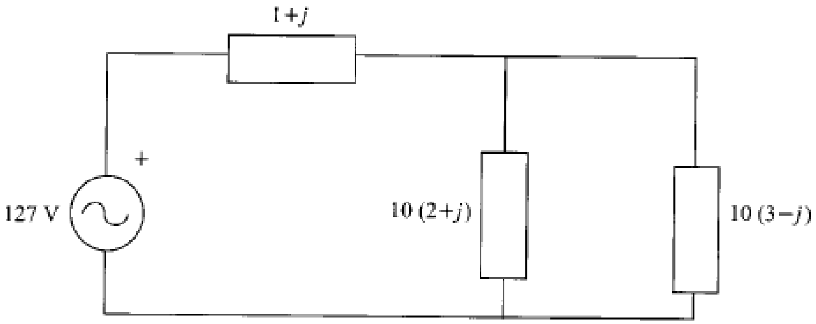
La frecuencia es de 50 Hz. Se pide:

1. Intensidad de línea en el generador.
2. Tensión de fase en cada una de las cargas.
3. Intensidad de línea en cada una de las cargas.
4. Potencia activa y reactiva consumida por cada carga.
5. Dibujar dónde se colocaría un vatímetro para medir la potencia reactiva consumida por el conjunto de ambas cargas indicando lo que marcaría dicho vatímetro.
6. Potencia perdida en la línea.
7. Indicar la capacidad por fase de la batería de condensadores que debería colocarse en triángulo, en paralelo con la carga conjunto de ambas, para que el total presentase $\cos \varphi = 1$.
8. *Ídem* si se conectase en estrella.



Solución

1. El equivalente monofásico fase-neutro será el siguiente:



La impedancia equivalente de las dos cargas es, puesto que están conectadas en paralelo:

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = 14$$

A partir de aquí se obtiene el valor de la corriente de línea (coincidente con la de fase a):

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{U}_a}{\mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_{eq}} = 8{,}43\underline{/-3{,}81^\circ}\ \mathrm{A}$$

Las corrientes de las tres fases serán, por tanto:

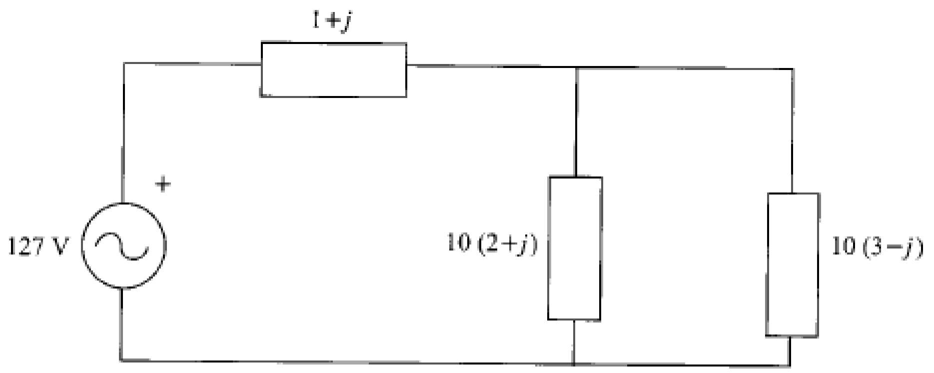
$$\mathbf{I}_a = 8{,}43\underline{/-3{,}81^\circ}\ \mathrm{A}$$

$$\mathbf{I}_b = 8{,}3\underline{/-3{,}81^\circ - 120^\circ}\ \mathrm{A} = 8{,}3\underline{/-123{,}81^\circ}\ \mathrm{A}$$

$$\mathbf{I}_c = 8{,}3\underline{/-3{,}81^\circ + 120^\circ}\ \mathrm{A} = 8{,}3\underline{/116{,}19^\circ}\ \mathrm{A}$$

Ejercicio 9.1

El equivalente monofásico fase-neutro será el siguiente:



2. La tensión de fase en ambas cargas es la misma por estar conectadas en paralelo:

$$\mathbf{U}_{a'n1} = \mathbf{U}_{a'n2} = \mathbf{I}_a \cdot \mathbf{Z}_{eq} = 118{,}02\underline{/-3{,}89^\circ}$$

$$\mathbf{U}_{b'n1} = \mathbf{U}_{b'n2} = 118{,}02\underline{/-3{,}89^\circ - 120^\circ}$$

$$\mathbf{U}_{c'n1} = \mathbf{U}_{c'n2} = 118{,}02\underline{/-3{,}89^\circ - 120^\circ}$$

3. La intensidad de línea en cada una de las cargas es:

$$\mathbf{I}_{a1} = \frac{\mathbf{U}_{a'n1}}{\mathbf{Z}_1} = 3{,}73\underline{/14{,}62^\circ}\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_{b1} = 3{,}73\underline{/14{,}62^\circ - 120^\circ}\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_{c1} = 3{,}73\underline{/14{,}62^\circ + 120^\circ}\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_{a2} = \frac{\mathbf{U}_{a'n1}}{\mathbf{Z}_2} = 5{,}27\underline{/-30{,}37^\circ}\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_{b2} = 5{,}27\underline{/-30{,}37^\circ - 120^\circ}\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_{c2} = 5{,}27\underline{/-30{,}37^\circ + 120^\circ}\ \text{A}$$

4. Potencia consumida por cada una de las cargas:

$$\mathbf{S}_1 = 3 \cdot (\mathbf{U}_{a'n1}\mathbf{I}_{a1}^*) = 3\mathbf{Z}_1 I_{a1}^2 = 1.252{,}6 - 417{,}39$$

$$\mathbf{S}_2 = 3 \cdot (\mathbf{U}_{a'n1}\mathbf{I}_{a2}^*) = 3\mathbf{Z}_2 I_{a2}^2 = 1.666{,}37 + j833{,}19$$

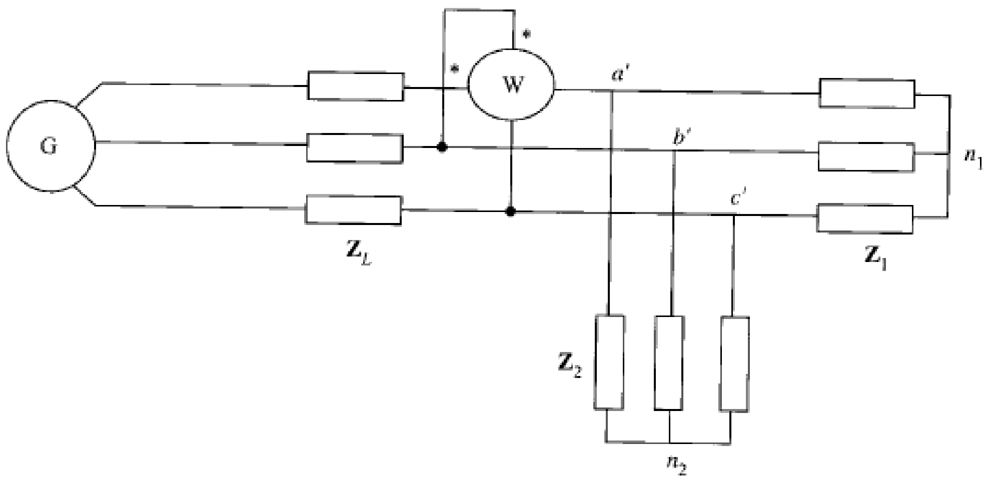
Luego:

$$P_1 = 1.252{,}16\ \text{W} \qquad Q_1 = -417{,}39\ \text{VAr}$$

$$P_2 = 1666{,}37\ \text{W} \qquad Q_2 = 833{,}19\ \text{VAr}$$

Ejercicio 9.1

5. El vatímetro se colocaría con la bobina amperimétrica en serie con la fase a' y la bobi[na] voltimétrica en paralelo con las fases b' y c', tal como muestra la figura:



La medida del vatímetro sería proporcional a la potencia reactiva consumida por las dos cargas:

$$W = \frac{Q}{\sqrt{3}} = 241 \text{ W}$$

6. La potencia activa y reactiva perdidas en la línea son:

$$\Delta P_L = 3R_L I^2 = 3 \cdot 1 \cdot 8{,}43^2 = 213{,}19 \text{ W}$$
$$\Delta Q_L = 3X_L I^2 = 3 \cdot 1 \cdot 8{,}43_2 = 213{,}19 \text{ VAr}$$

7. Para compensar el factor de potencia a $\cos\varphi' = 1$, la potencia reactiva debe ser $Q' = P \cdot \text{tg}\,\varphi' = 0$ VAr, y por tanto la diferencia entre la potencia reactiva inicial y final debe ser la que cedan los condensadores:

$$\Delta Q = P(\text{tg}\,\varphi - \text{tg}\,\varphi')$$

Pero, si la batería de condensadores se conecta en triángulo: $\Delta Q = 3\omega C U^2$. Igualando ambas expresiones se tiene el valor de la capacidad de cada condensador:

$$C_\Delta = \frac{\Delta Q}{3\omega U^2} = 10{,}6\ \mu\text{F}$$

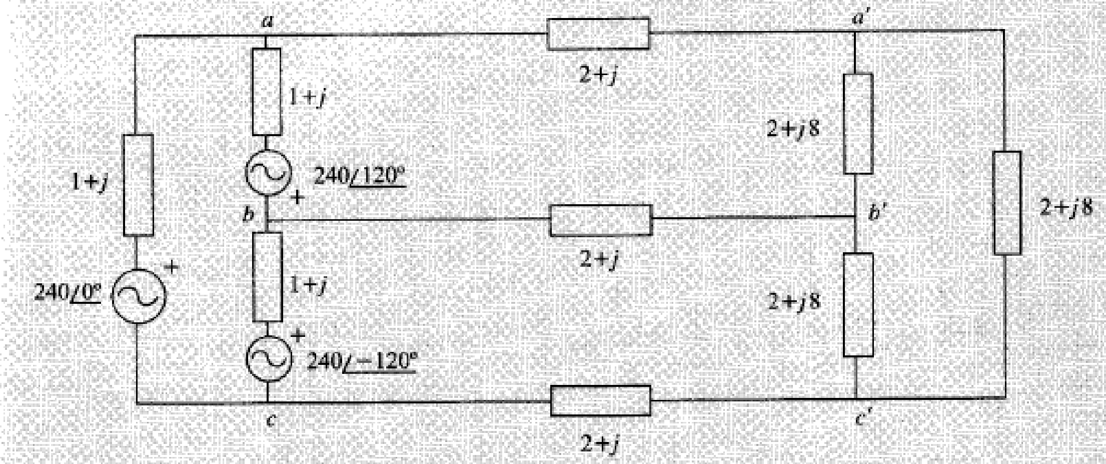
8. Si la batería de condensadores se conecta en estrella, la capacidad de cada condensador es:

$$C_Y = \frac{\Delta Q}{3\omega(U/\sqrt{3})^2} = 31{,}8\ \mu\text{F}$$

Ejercicio 9.2

Dado el sistema de la figura, calcular:

1. Intensidad de fase y de línea.
2. Tensiones en bornes del generador y del receptor.
3. Potencias activa y reactiva suministradas por el generador trifásico.
4. Potencias activa y reactiva consumidas por cada impedancia receptora y en la línea.
5. Comprobar aplicando el teorema de Boucherot.
6. Calcular lo que marcaría un vatímetro derivando su bobina de tensión entre a y b, e intercalando su bobina amperimétrica entre a y a'.



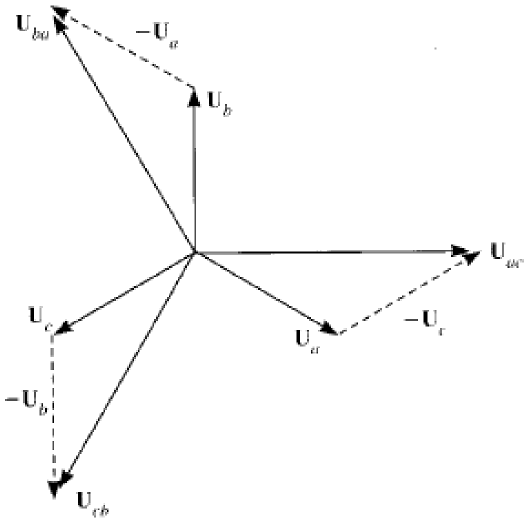
SOLUCIÓN

Para resolver este circuito es preciso, en primer lugar, obtener el equivalente monofásico fase-neutro, para lo cual hay que convertir las fuentes (reales) y la carga, ambas en triángulo, en sus respectivas estrellas equivalentes.

La fuente real entre fases del enunciado equivale a una fuente real en estrella que constará de una fuente ideal, cuyo valor eficaz será:

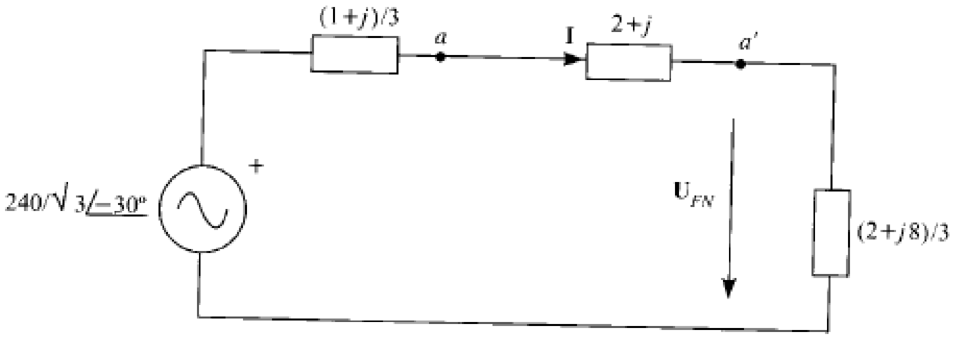
$$U = 240/\sqrt{3} = 138{,}56 \text{ V}$$

En cuanto a las fases, habrá que tener en cuenta los ángulos existentes entre las distintas fases, tal como se muestra en el diagrama vectorial siguiente.



Ejercicio 9.2

En esta figura se puede comprobar que el sistema es de secuencia inversa, y que la t
sión $\mathbf{U}_a$ tiene un argumento de -30^o, tomando como referencia la tensión $\mathbf{U}_{ac}$. En cua
las impedancias, tanto de la fuente como de la carga, deberán dividirse entre 3 para ob
su valor equivalente en estrella. Esto se muestra en el circuito que aparece a continuación:



La intensidad de línea se obtiene de forma sencilla en este circuito:

$$\mathbf{I} = \frac{240/\sqrt{3}\angle -30^o}{3 + j4} = 27{,}71\angle -83{,}13^o$$

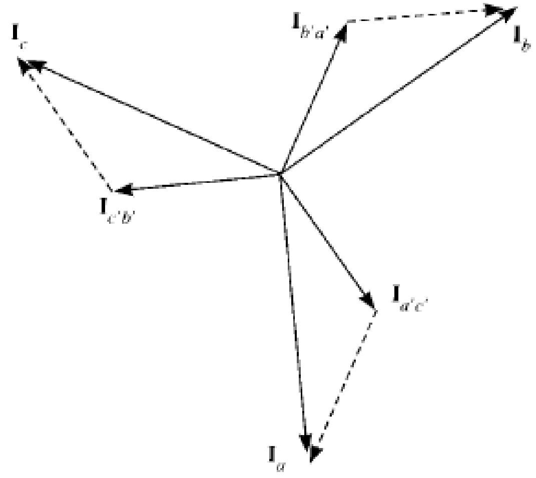
Y por tanto, la tensión fase-neutro en el equivalente monofásico de la carga, será:

$$\mathbf{U}_{FN} = 27{,}71\angle -83{,}13^o \cdot (2 + j8)/3 = 76{,}20\angle -7{,}17^o$$

La tensión fase-neutro en bornes del generador (punto a) será:

$$\mathbf{U}_{gFN} = \mathbf{U}_{FN} + (2 + j) \cdot \mathbf{I} = 125{,}76\angle -30{,}49^o$$

Una vez resuelto el circuito equivalente monofásico, se obtienen las corrientes de fase po
el circuito original, de acuerdo con el diagrama vectorial siguiente:



En él, el origen de fases sigue estando en $\mathbf{E}_{ca}$. Las corrientes de fase por los triángulos están adelantadas 30º con respecto a las corrientes de línea, y tienen una magnitud $\sqrt{3}$ veces menor. Por tanto:

$$\mathbf{I}_a = 27{,}71\angle -83{,}13^o \qquad \mathbf{I}_{a'c'} = 16\angle -53{,}13^o$$

$$\mathbf{I}_b = 27{,}71\angle -36{,}87^o \qquad \mathbf{I}_{b'a'} = 16\angle 66{,}87^o$$

$$\mathbf{I}_c = 27{,}71\angle 156{,}87^o \qquad \mathbf{I}_{c'b'} = 16\angle -173{,}13^o$$

Ejercicio 9.2

En cuanto a las tensiones de línea en la carga (que coinciden con la tensión de fase), serán $\sqrt{3}$ superiores a las tensiones fase-neutro, y estarán adelantadas 30º.

$$\mathbf{U}_a = 76{,}20\angle{-7{,}17^\circ} \qquad \mathbf{U}_{a'c'} = 131{,}98\angle{22{,}83^\circ}$$

$$\mathbf{U}_b = 76{,}20\angle{112{,}83^\circ} \qquad \mathbf{U}_{b'a'} = 131{,}98\angle{142{,}83^\circ}$$

$$\mathbf{U}_c = 76{,}20\angle{-127{,}17^\circ} \qquad \mathbf{U}_{c'b'} = 131{,}98\angle{-97{,}17^\circ}$$

Las potencias se pueden hallar en el propio equivalente monofásico fase-neutro:

$$\mathbf{S}_g = 3 \cdot \mathbf{U}_{gFN} \cdot \mathbf{I}^* = 3 \cdot 125{,}76\angle{-29{,}18^\circ} \cdot 27{,}71\angle{83{,}13^\circ} = 6.152 + j8.452$$

Por tanto,

$$P_g = 6.152 \text{ W} \qquad Q_g = 8.452 \text{ VAr}$$

La fuente ideal generará:

$$\mathbf{S}_{gi} = 3 \cdot \mathbf{E}_{FN} \cdot \mathbf{I}^* = 3 \cdot 138{,}56\angle{-30^\circ} \cdot 27{,}71\angle{83{,}13^\circ} = 6.910 + 9.214$$

Es decir,

$$P_{gi} = 6.910 \text{ W} \qquad Q_{gi} = 9.214 \text{ VAr}$$

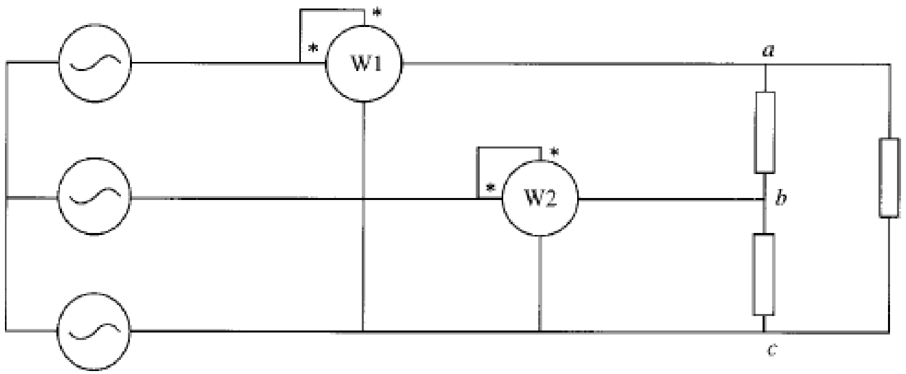
En cuanto al consumo en las distintas impedancias, será el siguiente

$$\mathbf{S}_{zg} = 3 \cdot I_{ac}^2 \mathbf{Z}_g = 3 \cdot 16^2 \cdot (1 + j) = 768 + j768$$
$$\mathbf{S}_l = 3 \cdot I^2 \mathbf{Z}_l = 3 \cdot 27{,}71^2 \cdot (2 + j) = 4.607 + j2.304$$
$$\mathbf{S}_c = 3 \cdot I_{a'c'} \mathbf{Z}_g = 3 \cdot 16^2 \cdot (2 + j8) = 1.536 + j6.144$$

Se puede comprobar que se cumple el teorema de Boucherot.

En cuanto al vatímetro, debido a las operaciones que tienen lugar en el mismo, tendría una lectura de:

$$W = 131{,}98 \cdot 27{,}71 \cdot \cos(22{,}83^\circ + 83{,}13^\circ) = -1.005 \text{ W}$$



La medida de cada vatímetro es:

$$W_1 = UI\cos(\mathbf{U}_{ac}, \mathbf{I}_a) = UI\cos(30^\circ + \varphi) = \frac{300\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{180}{\sqrt{2}} \cos(30^\circ + 53{,}13^\circ) = 5.594 \text{ W}$$

$$W_2 = UI\cos(\mathbf{U}_{bc}, \mathbf{I}_b) = UI\cos(30^\circ - \varphi) = \frac{300\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{180}{\sqrt{2}} \cos(30^\circ - 53{,}13^\circ) = 43.024 \text{ W}$$

La potencia activa y reactiva es:

$$P = W_1 + W_2 = 5.594 + 43.024 = 48.618 \text{ W}$$
$$Q = \sqrt{3}(W_2 - W_1) = \sqrt{3}(43.024 - 5.594) = 64.831 \text{ VAr}$$

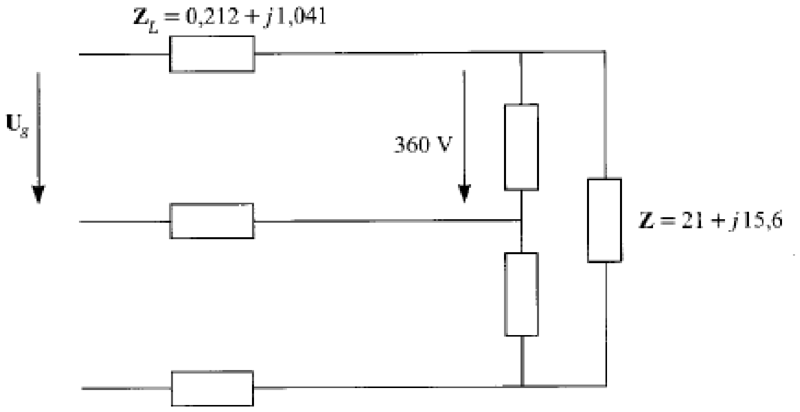
Ejercicio 9.3

Un sistema trifásico equilibrado está formado por una carga unida por una línea de impedancia $\mathbf{Z}_L = 0{,}212 + j \cdot 1{,}041\ \Omega$ por fase a una fuente trifásica de tensiones equilibradas de secuencia directa y frecuencia 50 Hz. La carga consiste en tres impedancias iguales, de valor $\mathbf{Z} = 21 + j \cdot 15{,}6\ \Omega$ conectadas en triángulo. Si el valor eficaz de la tensión de línea en bornes de la carga trifásica es de 360 V calcúlese:

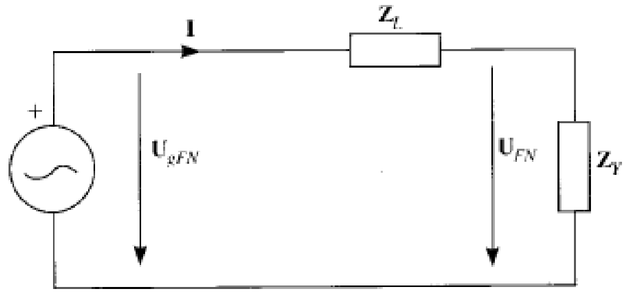
1. Valor eficaz de las corrientes de línea y de fase consumidas por la carga.
2. Potencias activa y reactiva consumidas por la carga.
3. Valor eficaz de la tensión de línea de la fuente trifásica de tensiones.
4. Potencias activa y reactiva generadas por la fuente trifásica.
5. Capacidad por fase de la batería de condensadores que es necesario conectar en triángulo, en paralelo con la carga, para que el factor de potencia del conjunto condensador-carga sea de 0,9 capacitivo.

SOLUCIÓN

1. El esquema del circuito viene dado en la siguiente figura:



De ella se deduce el equivalente monofásico fase-neutro, que se representa a continuación.



Ejercicio 9.3

2. El valor de la impedancia $\mathbf{Z}_Y$ del equivalente es un tercio de la impedancia $\mathbf{Z}$. Si se toma el valor de la tensión monofásica en la carga como origen de ángulos, la corriente de línea es:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{U}_{FN}}{\mathbf{Z}_Y} = \frac{360/\sqrt{3}}{21 + j15{,}6} = 19{,}13 - j14{,}21 \text{ A} = 23{,}83\underline{/-36{,}61^{\circ}} \text{ A}$$

La corriente de fase en la carga en triángulo es $\sqrt{3}$ veces menor. Luego, los valores ... ces de las corrientes de línea y de fase son:

$$I = 23{,}83 \text{ A}$$

$$I_F = I/\sqrt{3} = 13{,}76 \text{ A}$$

Las potencias activa y reactiva consumidas por la carga son:

$$P = 3RI_F^2 = 3 \cdot 21 \cdot 13{,}76^2 = 11.930 \text{ W}$$

$$Q = 3XI_F^2 = 3 \cdot 15{,}6 \cdot 13{,}76^2 = 8.861 \text{ VAr}$$

3. La tensión fase-neutro en el generador, se puede calcular aplicando la segunda l... Kirchhoff al circuito monofásico equivalente dibujado en el primer apartado:

$$\mathbf{U}_{gFN} = \mathbf{Z}_L\mathbf{I} + \mathbf{U}_{FN} = (0{,}212 + j1{,}041)(19{,}13 - j14{,}21) + \frac{360}{\sqrt{3}} = 226{,}7 + j16{,}9 \text{ V} = 227{,}3\underline{/4{,}2...}$$

Y la tensión de línea en el generador será:

$$U_g = \sqrt{3}U_{gFN} = \sqrt{3} \cdot 227{,}3 = 393{,}7 \text{ V}$$

4. Las potencias activa y reactiva generadas por la fuente serán iguales a las consumidas ... la línea y la carga:

$$P_g = \Delta P_L + P = 3R_L \cdot I^2 + P = 3 \cdot 0{,}121 \cdot 23{,}83^2 + 11.930 = 12136 \text{ W}$$

$$Q_g = \Delta Q_L + Q = 3X_L \cdot I^2 + Q = 3 \cdot 1{,}041 \cdot 23{,}83^2 + 8.861 = 10.634 \text{ VAr}$$

5. La capacidad de la batería de condensadores en triángulo se calcula mediante la sigui... expresión:

$$C_{\Delta} = \frac{P(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')}{3\omega U^2} = \frac{11.930(0{,}74 + 0{,}48)}{3 \cdot 100\pi \cdot 360^2} = 119{,}2\ \mu\text{F}$$

ya que:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Q}{P} = 0{,}74$$

$$\operatorname{tg}\varphi' = -\operatorname{tg}(\arccos(0{,}9)) = -0{,}48$$

(el signo negativo se debe al carácter capacitivo que debe tener el conjunto después de con... tar la batería de condensadores).

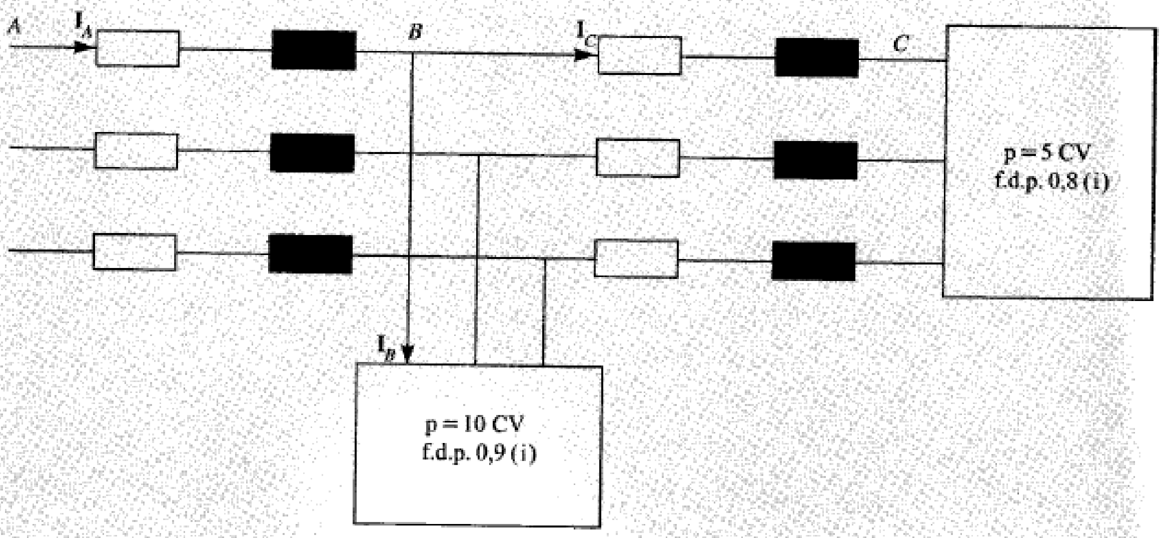
Ejercicio 9.4

En el circuito de la figura, la distancia de A a B es de 2 km y la distancia de B a C es de 3 km. La línea tiene en todo su recorrido una sección de 95 mm^2, con una resistividad de 0,018 $\Omega \cdot$ mm^2/m y una reactancia de 0,25 Ω/km. Si se conoce que la tensión de línea en C es de 380 V, calcúlese:

a) Tensiones de línea en A y en B.

b) Valores eficaces de las intensidades $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$, e $\mathbf{I}_C$.

c) Capacidad de cada uno de los condensadores que sería necesario conectar en triángulo en el punto A para que el factor de potencia del conjunto sea la unidad.



Nota: 1 CV = 736 W. Fecuencia f = 50 Hz.

SOLUCIÓN

a) Se calcula en primer lugar la resistencia y reactancia de cada uno de los tramos:

$$R_{AB} = \rho \frac{l_{AB}}{s} = 0{,}018 \frac{2.000}{95} = 0{,}38\ \Omega$$

$$R_{BC} = \rho \frac{l_{BC}}{s} = 0{,}018 \frac{3.000}{95} = 0{,}57\ \Omega$$

$$X_{AB} = 0{,}25 \cdot 2 = 0{,}5\ \Omega$$

$$X_{BC} = 0{,}25 \cdot 3 = 0{,}75\ \Omega$$

Luego:

$$\mathbf{Z}_{AB} = 0{,}38 + j0{,}5$$

$$\mathbf{Z}_{BC} = 0{,}57 + j0{,}75$$

Por otra parte, se puede calcular la intensidad de línea en C, a partir de la expresión de la potencia activa, teniendo en cuenta que 1 CV equivale a 736 W:

$$I_C = \frac{P_C}{\sqrt{3} U_C \cos\varphi} = \frac{5 \cdot 736}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0{,}8} = 7\ \text{A}$$

Si se toma la tensión de fase en C como origen de ángulos,

$$\mathbf{U}_{CF} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ$$

el factor de potencia de la carga permite conocer la fase de la intensidad de línea en C:

$$\cos\varphi = 0{,}8(i) \quad \Rightarrow \quad \varphi = -36{,}87^\circ$$

$$\mathbf{I}_C = 7\angle -36{,}87^\circ\ \text{A} = 5{,}6 - j4{,}2\ \text{A}$$

Ejercicio 9.4

Conocidas la intensidad y la impedancia de la línea, se puede hallar la tensión fase-neutro en B:

$$\mathbf{U}_{BFN} = \mathbf{U}_{CFN} + \mathbf{Z}_{BC} \cdot \mathbf{I}_C = \frac{380}{\sqrt{3}} + (0{,}57 + j0{,}75) \cdot (5{,}6 - j4{,}2) = 225{,}74 + j1{,}81 = 225{,}74\underline{/0{,}46^\circ} \text{ V}$$

Y la tensión de línea en B *es*:

$$U_B = \sqrt{3} \cdot 225{,}74 = 391 \text{ V}$$

Conocida la tensión en B se calcula la corriente de línea en B:

$$I_B = \frac{P_B}{\sqrt{3} U_B \cos\varphi} = \frac{10 \cdot 736}{\sqrt{3} \cdot 391 \cdot 0{,}9} = 12{,}08 \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_B = 12{,}08\underline{/0{,}46^\circ} - \text{arc}\cos(0{,}9) = 12{,}08\underline{/-25{,}38^\circ} \text{ A} = 10{,}91 - j5{,}18 \text{ A}$$

A partir de las corrientes de línea en B y C se tiene la corriente de línea en A:

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C = (10{,}91 - j5{,}18) + (5{,}6 - j4{,}2) = 16{,}51 - j9{,}38 = 19\underline{/-29{,}59^\circ} \text{ A}$$

La tensión fase-neutro en A será:

$$\mathbf{U}_{AFN} = \mathbf{U}_{BFN} + \mathbf{Z}_{AB} \cdot \mathbf{I}_A = (225{,}74 + j1{,}81) + (0{,}38 + j0{,}5) \cdot (16{,}51 - j9{,}38) =$$
$$= 236{,}70 + j6{,}50 = 236{,}79\underline{/1{,}57^\circ} \text{ V}$$

Y, por tanto, la tensión de línea en A:

$$\mathbf{U}_A = \sqrt{3} \cdot 236{,}79 = 410 \text{ V}$$

Los valores eficaces de las intensidades en A, B y C son $I_A = 19$ A, $I_B = 12{,}08$ A $I_C = 7$ A.

Para que el factor de potencia del conjunto sea la unidad, los condensadores deben ced toda la potencia reactiva consumida por el conjunto de las dos cargas y de la línea. Dic potencia reactiva se puede calcular a partir de la potencia aparente en el punto A. La poten aparente de cada fase en el punto A es:

$$\mathbf{S}_{AF} = \mathbf{U}_{AF} \cdot \mathbf{I}_A^* = 236{,}79\underline{/1{,}57^\circ} \cdot 19\underline{/29{,}59^\circ} = 4.499\underline{/31{,}16^\circ} \text{ VA} = 3.849{,}91 + j2.327{,}92 \text{ VA}$$

Luego, la potencia reactiva cedida por cada condensador debe ser $Q = 2.327{,}92$ VAr. Co mo dicha potencia tiene por expresión:

$$Q = \omega C_\Delta U_A^2$$

La capacidad de cada condensador debe ser:

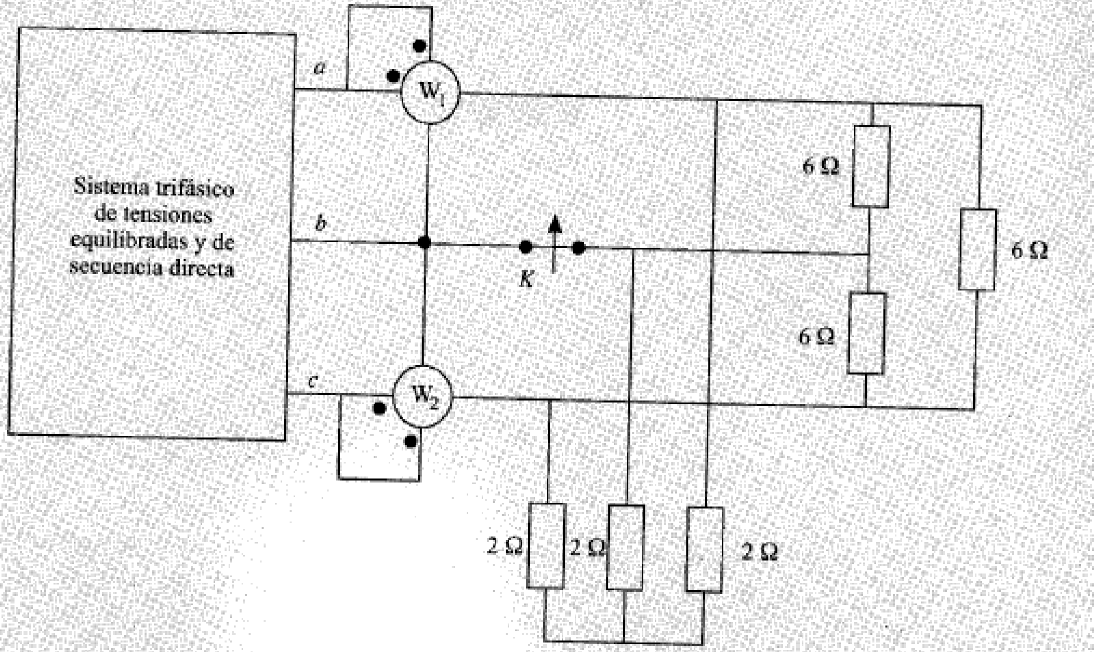
$$C_\Delta = \frac{Q}{\omega U_A^2} = \frac{2.327{,}92}{100\pi \cdot 410^2} = 4{,}41 \cdot 10^{-5} \text{ F} = 44{,}1 \ \mu\text{F}$$

Ejercicio 9.5

En el sistema trifásico equilibrado de secuencia directa de la figura se pide:

a) Lectura del vatímetro W_2 y la tensión de alimentación si la lectura del vatímetro W_1 es de 150 W.

b) Lectura de los vatímetros cuando se abre el interruptor K y se mantienen las tensiones de alimentación.



SOLUCIÓN

a) Por la conexión de los dos vatímetros, se tiene:

$$W_1 + W_2 = P$$

$$W_2 - W_1 = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

Como el conjunto de las dos cargas es puramente resistivo, la potencia reactiva es nula y de la segunda expresión se deduce el valor de W_2, $W_2 = W_1 = 150$ W.

Entrando en la primera expresión se tiene el valor de la potencia activa:

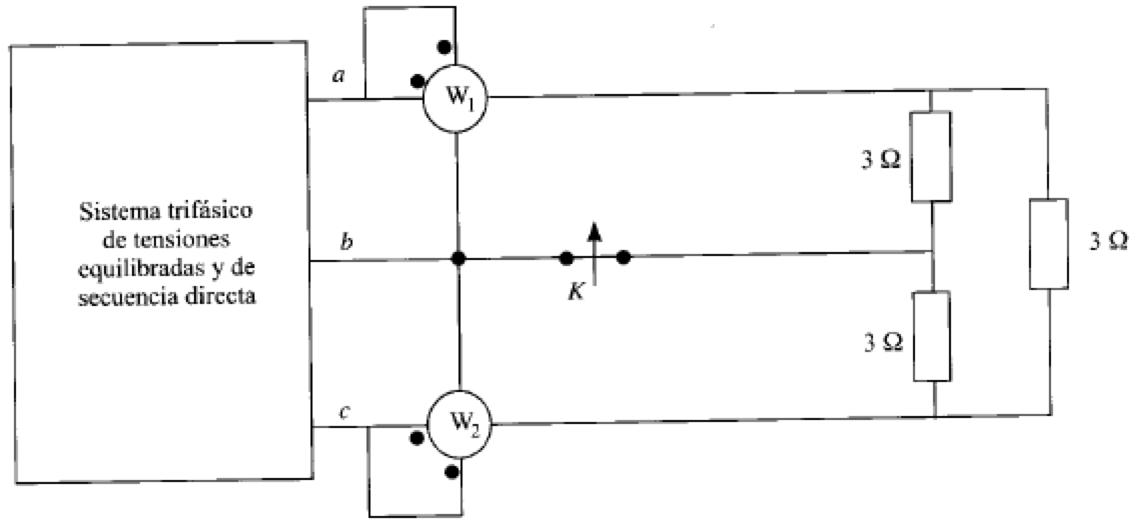
$$P = 2 \cdot 150 = 300 \text{ W}$$

Una vez conocido este valor, habrá que hallar la resistencia equivalente de las dos cargas en paralelo con el fin de obtener la tensión. En primer lugar se halla la resistencia equivalente al triángulo de la carga de 2 Ω por fase, que será $R_{1\Delta} = 3 \cdot 2\ \Omega$. A continuación se obtiene la resistencia resultante del paralelo de las dos cargas:

$$R_{eq} = \frac{R_{1\Delta} \cdot R_{2\Delta}}{R_{1\Delta} + R_{2\Delta}} = \frac{6 \cdot 6}{6 + 6} = 3\ \Omega$$

y el circuito resultante es el de la figura.

Ejercicio 9.5



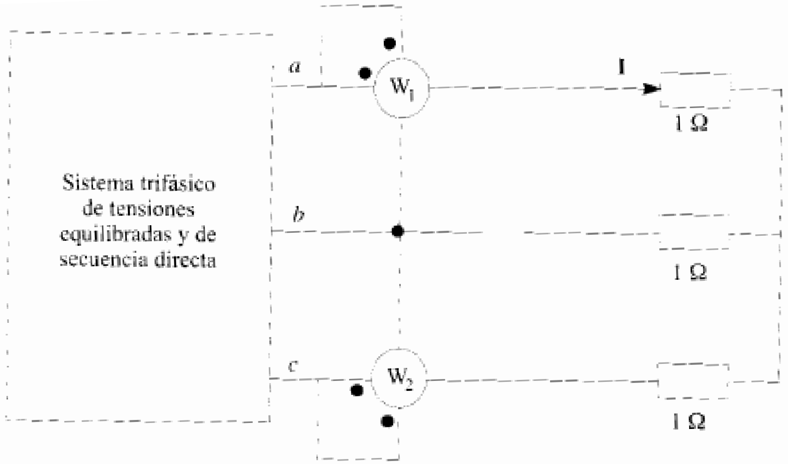
La potencia consumida por el conjunto de ambas cargas tiene por expresión:

$$P = 3\,\frac{U^2}{R_{eq}}$$

Y la tensión de línea:

$$U = \sqrt{\frac{P \cdot R_{eq}}{3}} = \sqrt{\frac{300 \cdot 3}{3}} = 10\sqrt{3}\ \text{V}$$

b) Cuando se abre el interruptor, el circuito queda como se muestra a continuación. En la figura se ha sustituido el triángulo por su estrella equivalente:



La intensidad I vale:

$$I = \frac{U_{ac}}{2R} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ \text{A}$$

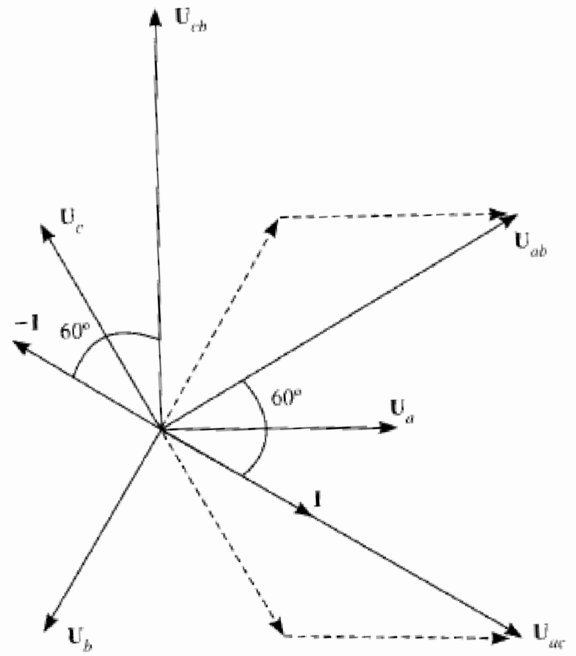
De la figura se deduce que las medidas de ambos vatímetros son, respectivamente:

$$W_1 = UI\cos(\mathbf{U}_{ab}, \mathbf{I}_a) = UI\cos(\mathbf{U}_{ab}, \mathbf{I})$$

$$W_2 = UI\cos(\mathbf{U}_{cb}, \mathbf{I}_c) = UI\cos(\mathbf{U}_{cb}, -\mathbf{I})$$

Se necesita conocer el ángulo formado por $\mathbf{I}$ y $\mathbf{U}_{ab}$ en el primer caso y el formado por $-\mathbf{I}$ y $\mathbf{U}_{cb}$ en el segundo, para lo cual se dibuja el diagrama vectorial de tensiones e intensidades:

Ejercicio 9.5



Para que aparezcan las tensiones $\mathbf{U}_a$, $\mathbf{U}_b$ y $\mathbf{U}_c$, es necesario suponer que las tensiones de la alimentación están conectadas en estrella.

Se puede observar que los dos ángulos buscados son iguales entre sí y con un valor de 60º, por lo que la medida de ambos vatímetros es:

$$W_1 = W_2 = 5\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3} \cdot \cos(60^{\circ}) = 75 \text{ W}$$

Ejercicio 9.6

El siguiente circuito trifásico es totalmente equilibrado y el amperímetro indica:

$$\frac{10}{\sqrt{3}}\ \text{A}$$

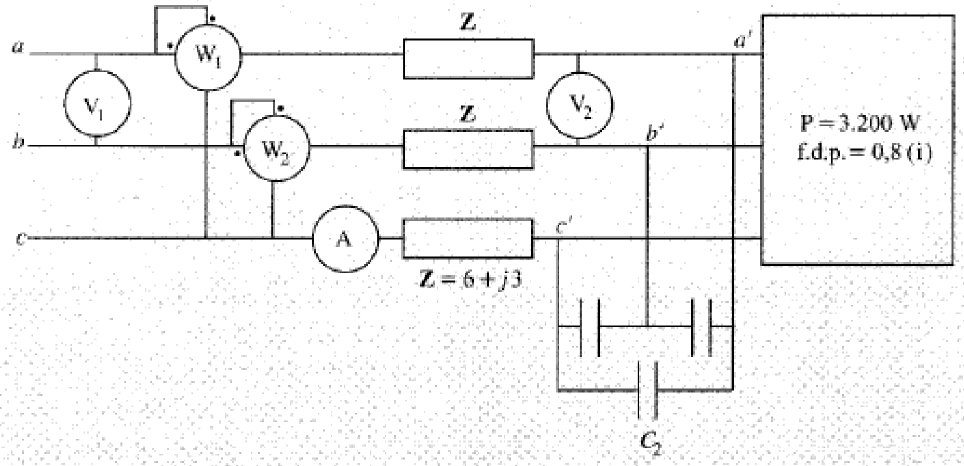
Se pide:

a) Potencia reactiva necesaria de los condensadores conectados en $a'b'c'$ para que el sistema total conectado en abc tenga un factor de potencia unidad.

b) Indicación del voltímetro V_1 y de los vatímetros W_1 y W_2.

c) Indicación del voltímetro V_2.

d) Capacidad por fase de los condensadores conectados en triángulo.



Nota: frecuencia $f = 50$ Hz.

SOLUCIÓN

a) La potencia reactiva consumida por la carga es:

$$Q = P \cdot \operatorname{tg} \varphi = 3.200 \cdot 0{,}75 = 2.400 \text{ VAr}$$

La potencia reactiva consumida por la línea es:

$$Q_L = 3 \cdot X_L \cdot I^2 = 3 \cdot 3 \cdot \left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 = 300 \text{ VAr}$$

Luego los condensadores deben ceder la suma de ambas:

$$Q_C = Q + Q_L = 2.400 + 300 = 2.700 \text{ VAr}$$

b) La potencia activa consumida por la línea es:

$$P_L = 3R_L I^2 = 3 \cdot 6 \cdot \left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 = 600 \text{ W}$$

Entonces:

Potencia activa total $\quad P_T = P + P_L = 3.200 + 600 = 3.800$ W

Potencia reactiva total $\quad Q_T = Q + Q_L - Q_C = 2.400 + 300 - 2.700 = 0$ VAr

Como:

$$W_1 + W_2 = P \quad \text{y} \quad W_1 - W_2 = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

se tiene que $W_1 = W_2 = P_T/2 = 1.900$ W.

Ejercicio 9.6

La tensión de línea en *abc* es:

$$U_1 = \frac{P_T}{\sqrt{3} I \cos\varphi} = \frac{3.800}{\sqrt{3} \cdot \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot 1} = 380 \text{ V}$$

c) Para obtener la tensión de línea en $a'b'c'$ se calcula la potencia aparente del conjunto ca ga-condensadores:

$$S = \sqrt{P^2 + (Q - Q_C)^2} = \sqrt{3.200^2 + (2.400 - 2.700)^2} = 3.214 \text{ VA}$$

$$S = \sqrt{3} I U_2 \quad \Rightarrow \quad U_2 = \frac{S}{\sqrt{3} I} = \frac{3.214}{\sqrt{3} \frac{10}{\sqrt{3}}} = 321{,}4 \text{ V}$$

d) La capacidad por fase de los condensadores es:

$$C_\Delta = \frac{Q_C}{3\omega U_2^2} = \frac{2.700}{3 \cdot 100\pi \cdot 321{,}4^2} = 27{,}73 \ \mu\text{F}$$

Tema 10

Análisis de circuitos en régimen transitorio. Circuitos de primer orden

Expresión de la corriente en circuitos R-L

Los circuitos que se van a estudiar en este capítulo son circuitos con un solo elemento dinámico. El resto del sistema estará representado por su equivalente Thévenin, que será necesariamente resistivo. Se estudiarán circuitos *R-L*, y circuitos *R-C*.

Los circuitos *R-L*, por tanto, se podrán representar como:

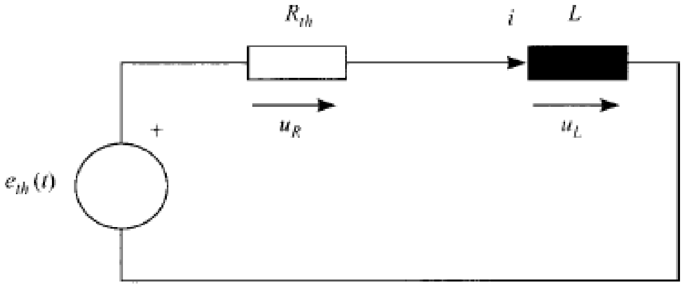


Figura 4.1.

La corriente que circula por la bobina es la que describe el comportamiento del circuito, y a partir de la cual se pueden obtener las restantes magnitudes. Se denomina *variable de estado* del circuito. La expresión de la corriente que circula por la bobina en función del tiempo es:

$$e_{th}(t) = R_{th} \cdot i + L\,\frac{di}{dt}$$

Su solución proporciona la expresión de la corriente que circula por la bobina en función del tiempo, i, que tiene la expresión siguiente:

$$i(t) = i_{\infty}(t) + (i(t_o) - i_{\infty}(t_o)) \cdot e^{-(t-t_o)/\tau}$$

$i(t_o)$ es el valor de la corriente en un instante, t_o.

El término $i_{\infty}(t)$ es la expresión de la corriente en régimen permanente e $i_{\infty}(t_o)$ es el val
de esta función en el instante $t = t_o$.

τ es la *constante de tiempo* del circuito, cuya expresión viene dada por:

$$\tau = \frac{1}{R_{th}}$$

Expresión de la tensión en circuitos R-C

En cuanto a los circuitos *R-C*, se representarán como un equivalente Norton al que se ha conectado un condensador, tal como se muestra en la Figura 4.2:

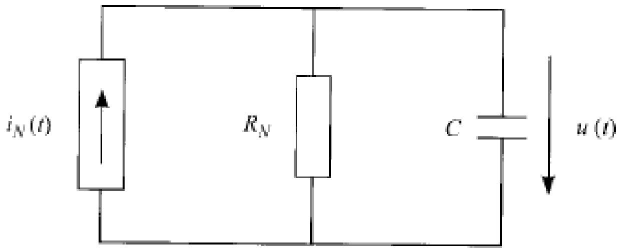


Figura 4.2.

En este caso es la tensión la variable de estado del circuito. Suponiendo conocida la tensión para un instante t_o, la ecuación diferencial que describe el comportamiento del circuito es:

$$i_N(t) = \frac{u}{R_N} + C\,\frac{du}{dt}$$

La solución de esta ecuación proporciona la expresión temporal de la tensión en el condensador, que es la reflejada a continuación.

$$u(t) = u_{\infty}(t) + (u(t_o) - u_{\infty}(t_o)) \cdot e^{-(t-t_o)/\tau}$$

$u_{\infty}(t)$ es la tensión en el condensador en régimen permanente y $u_{\infty}(t_o)$ es el valor de la tensión en el instante $t = t_o$.

La constante de tiempo de este circuito viene dada por:

$$\tau = R_N C$$

Estas expresiones se pueden escribir de forma general:

$$f(t) = f_{\infty}(t) + (f(t_o) - f_{\infty}(t_o)) \cdot e^{-(t-t_o)/\tau}$$

Donde f es la tensión en los circuitos *R-C* de primer orden, o la corriente en los circuitos *R-L* de primer orden, $f(t_o)$ es el valor de la magnitud en un instante cualquiera t_o, $f_{\infty}(t)$ es su expresión en régimen permanente (o estado estacionario), y $f_{\infty}(t_o)$ es el valor de esta función para el instante t_o.

Análisis sistemático de sistemas de primer orden

La fórmula anterior indica que el valor de la solución de la ecuación homogénea decrece con el tiempo de forma exponencial, y que, después de transcurrido un tiempo infinito, el comportamiento del circuito viene dado por la solución particular.

Cuando el valor de la solución de la ecuación homogénea se considera despreciable, se dice que el circuito se encuentra en régimen permanente, que se denomina igualmente *estado estacionario*. En caso contrario, se dice que el circuito se encuentra en régimen transitorio. La rapidez con la que se alcanza el régimen permanente depende de la constante de tiempo que afecta a la exponencial de la solución de la homogénea; cuanto menor sea dicha constante, más rápidamente decaerá la solución de la homogénea, y por lo tanto se estará antes más cerca del régimen permanente.

En los circuitos eléctricos las constantes de tiempo son pequeñas (del orden de los milisegundos), y por tanto, la mayor parte del tiempo el circuito se considera que se está en régimen permanente. El régimen transitorio sólo será importante en los instantes siguientes a algún cambio. Este cambio puede ser una modificación de la topología del circuito (por ejemplo, debido a un accidente), o bien una maniobra como la conexión o la desconexión de un circuito. Suponiendo que esta maniobra o cambio en el circuito se efectúe en el instante $t = 0$, el instante previo a la maniobra se denominará $t = 0^-$, en tanto que el inmediatamente posterior se llamará $t = 0^+$.

A partir de las expresiones de la corriente y de la tensión en circuitos inductivos y capacitivos, respectivamente, se deduce que para conocer el comportamiento de los circuitos de primer orden se necesita determinar una serie de parámetros:

1. Constantes de tiempo: su determinación es muy sencilla, pues basta hallar el equivalente Thévenin del circuito con respecto al elemento dinámico correspondiente, y aplicar la fórmula adecuada.
2. Solución particular o solución en régimen permanente: en una gran parte de los casos las excitaciones son fuentes de corriente continua o de corriente alterna. En este último caso, se puede determinar el estado estacionario mediante técnicas de análisis de alterna. En el caso de fuentes de corriente continua, el tratamiento es distinto, y se describe más adelante.
3. Condiciones iniciales: en ocasiones no se conocen directamente, sino que es necesario deducirlas a partir de otros valores del circuito.

La forma de determinar la solución particular en el caso de excitaciones de corriente continua, y las condiciones iniciales se expone en los siguientes apartados.

Análisis sistemático de sistemas de primer orden

- **Cálculo del régimen permanente en circuitos con fuentes de corriente continua**

La ecuación que define el comportamiento de una bobina es:

$$u = L \frac{di}{dt}$$

Y la de un condensador:

$$i = C \frac{du}{dt}$$

En ambos casos, en el régimen permanente, las tensiones y corrientes son constantes, y por tanto, sus variaciones en el tiempo son nulas. Por esta razón, la tensión en una bobina en un circuito de continua y en régimen permanente será nula, al igual que la corriente en el condensador.

Esto significa que, en régimen permanente y en corriente continua, una bobina se comporta como un cortocircuito, en tanto que un condensador se comporta como un circuito abierto. Por tanto, en las condiciones indicadas, se pueden sustituir ambos elementos por cortocircuitos y circuitos abiertos, y resolver el circuito de esta forma.

- **Cálculo de condiciones iniciales**

Las ecuaciones que definen el comportamiento de la bobina y del condensador son:

$$u = L \frac{di}{dt} \qquad i = C \frac{du}{dt}$$

La corriente en las bobinas, y la tensión en los condensadores no pueden variar bruscamente, puesto que esto produciría, respectivamente, una tensión y una corriente infinitas. Esto se puede comprobar observando que la corriente en las bobinas, y la tensión en los condensadores en el instante posterior a una modificación del circuito, $t = 0^+$, vienen dadas por:

$$i(0^+) = i(0^-) + \frac{1}{L}\int_{0-}^{0+} u(t)\,dt \qquad u(0^+) = u(0^-) + \frac{1}{C}\int_{0-}^{0+} i(t)\,dt$$

En la ecuación anterior, las integrales son nulas, salvo que las tensiones y corrientes sean un impulso de Dirac.

Por tanto, se puede establecer que:

1. La tensión en un condensador no varía bruscamente en un circuito en el que no se producen impulsos de Dirac.
2. La corriente en una bobina no varía bruscamente en un circuito en el que no se producen impulsos de Dirac.

Sin embargo, tanto la corriente en los condensadores, como la tensión en las bobinas sí pueden variar bruscamente.

Una vez conocidas las condiciones iniciales en bobinas y condensadores, las condiciones iniciales del resto del circuito se obtendrán sustituyendo los condensadores por fuentes de tensión, y las bobinas por fuentes de corriente, cuyos valores serán las condiciones iniciales de tensión y de corriente.

Obtención directa de magnitudes que no sean variables de estado

La expresión que da el valor de $f(t)$ es válida también para obtener cualquier magnitud en el circuito, si bien hay que tener en cuenta dos cosas:

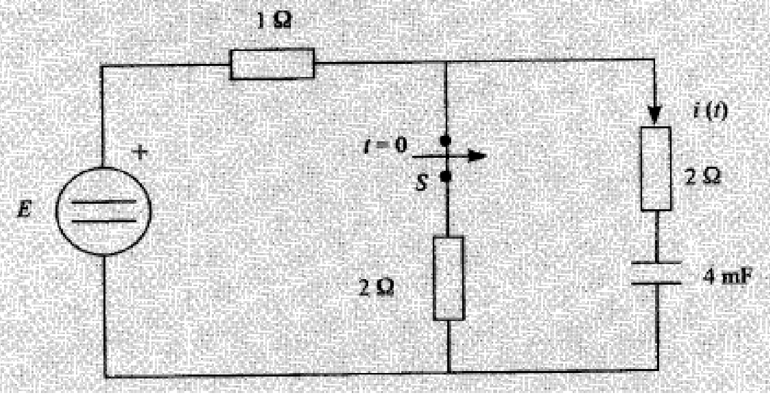
1. Las condiciones iniciales deben ser las de $t = 0^+$, puesto que en las resistencias las corrientes y tensiones sí pueden variar bruscamente, así como las tensiones en bobinas y las corrientes en condensadores.
2. La constante de tiempo es la del elemento dinámico que produzca el transitorio.

Teniendo en cuenta estas salvedades, esta expresión se puede reescribir de la forma siguiente, de un modo más general.

$$f(t) = f_{\infty}(t) + (f(0^+) - f_{\infty}(0)) \cdot e^{-t/\tau} \tag{3.1}$$

Ejercicio 10.1

El interruptor S de la figura, lleva cerrado un tiempo que se puede considerar infinito. En el instante $t = 0$ se abre, permaneciendo en esta posición definitivamente. Calcúlese la expresión de la intensidad $i(t)$ desde $t = 0$ en adelante.

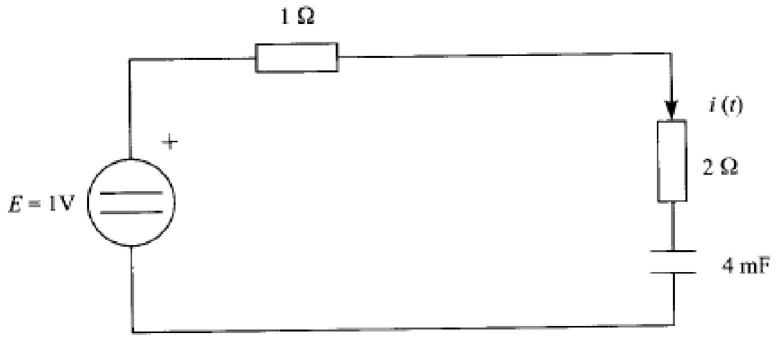


SOLUCIÓN

La expresión de la tensión en el condensador tendrá la forma:

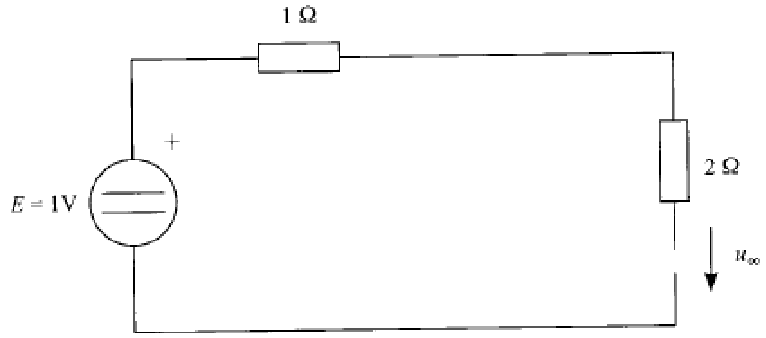
$$i(t) = C\frac{du}{dt} \qquad u(t) = u_\infty(t) + [u(0) - u_\infty(0)]e^{-t/\tau}$$

Cuando el interruptor está abierto, el circuito resultante, en el que se produce el transitorio, será:



La constante de tiempo tendrá la expresión $\tau = R_{th}C$, y dado que la resistencia Thévenin es la asociación en serie de las dos resistencias, $\tau = 4 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 12$ ms.

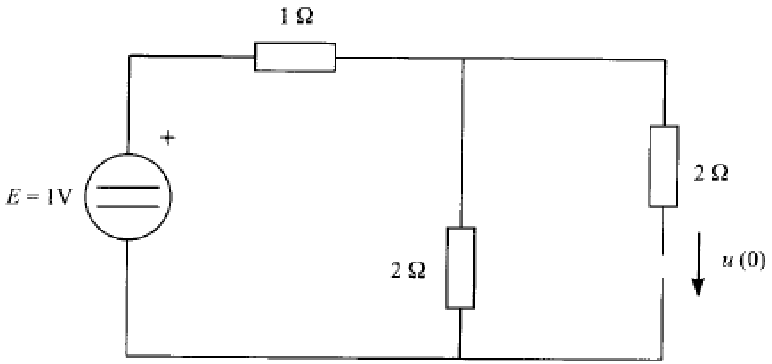
En régimen permanente, el comportamiento del circuito se puede representar por un circuito equivalente en el que se ha sustituido el condensador por un circuito abierto, que emula el comportamiento del condensador en estas condiciones.



Ejercicio 10.1

La tensión en régimen permanente u_∞ coincidirá con la tensión en la fuente, al no circular ninguna corriente por el circuito abierto, esto es, $u_\infty = E = 1$ V.

Para hallar las condiciones iniciales en el condensador, es necesario considerar el circuito existente antes de la maniobra. Puesto que este circuito llevaba en estas condiciones un tiempo infinito, el comportamiento del condensador en ese momento equivale, de nuevo, al de un circuito abierto:



Y por tanto, la tensión en el condensador, un instante antes de que se produzca la maniobra es:

$$u(0^-) = \frac{2}{1+2} E = \frac{2}{3} E = 2/3 \text{ V}$$

que es la misma que la que tiene en el instante inmediatamente posterior a la apertura del interruptor.

Se introducen todos estos resultados en la expresión general de la tensión del condensador, con lo que se obtiene la expresión:

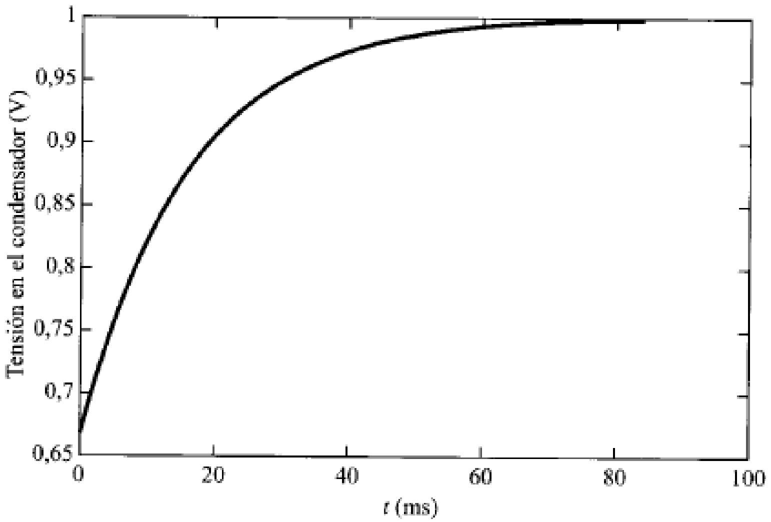
$$u(t) = 1 + \left[\frac{2}{3} - 1\right] e^{-t/\tau} = 1 - \frac{1}{3} e^{-t\tau}$$

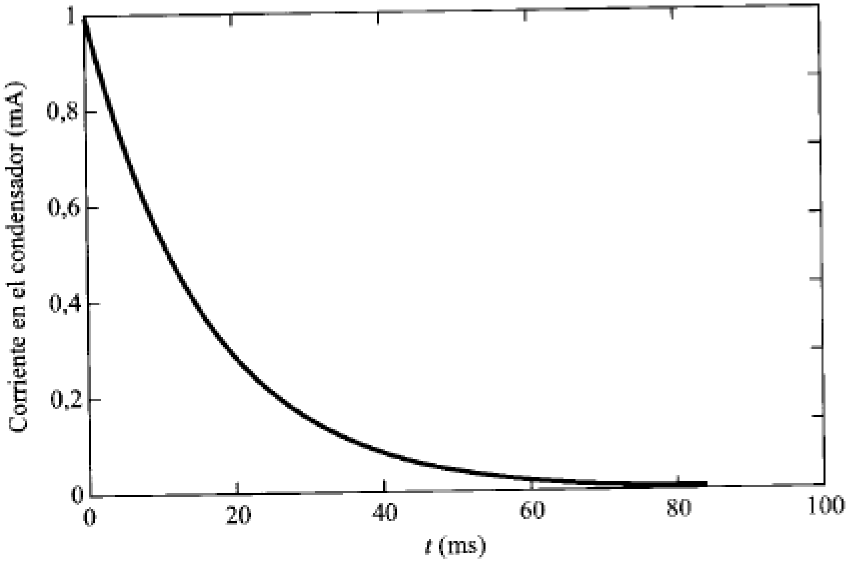
Para obtener la corriente en el condensador se emplea la relación entre ésta y la corriente:

$$i(t) = C \frac{du}{dt} = 4 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{3} \frac{1}{4 \cdot 3} e^{-t/\tau} = \frac{10^{-3}}{9} e^{-t/\tau}$$

Ejercicio 10.1

A continuación se muestran las evoluciones temporales de la tensión y de la corriente en el condensador:





Ejercicio 10.2

Un circuito activo constituido únicamente por fuentes independientes de corriente continua y resistencias tiene dos terminales accesibles A y B. Se sabe que:

- Si entre los terminales A y B se conecta una bobina de 2 mH, circula, en régimen permanente, una corriente de 10 A.
- Si entre los terminales A y B se conecta una resistencia de 8 Ω, la potencia que consume dicha resistencia es de 32 W.

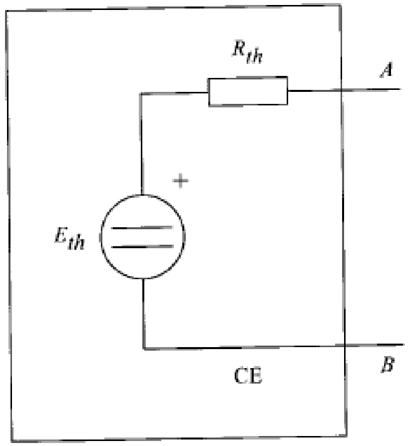
Se pide:

a) Equivalente Thévenin del circuito activo visto entre los terminales A y B.

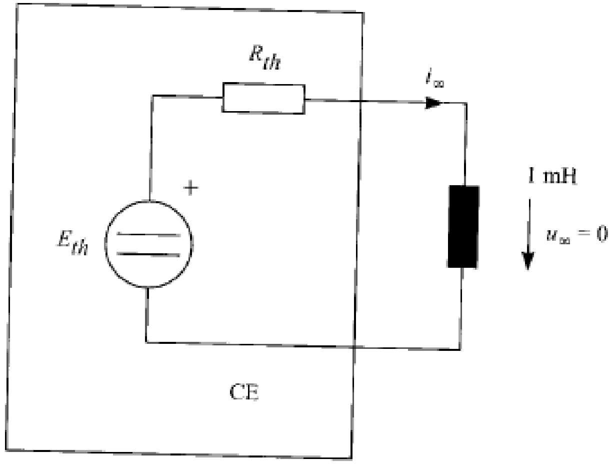
b) Si entre los terminales A y B se conecta un condensador de 5 μF cargado inicialmente a una tensión de 15 V, calcular la expresión de la corriente circulante en el condensador tomando como origen de tiempos el instante de la conexión del condensador.

SOLUCIÓN

Puesto que el circuito sólo consta de fuentes de corriente y continua, se le puede representar por su equivalente Thévenin entre los puntos A y B.



Puesto que es un circuito de continua, la conexión de una bobina entre A y B equivale, en régimen permanente, a un cortocircuito entre A y B, tal como se muestra en la figura siguiente:



Por tanto, la corriente que circula por la bobina será:

$$i_\infty = E_{th}/R_{th} = 10$$

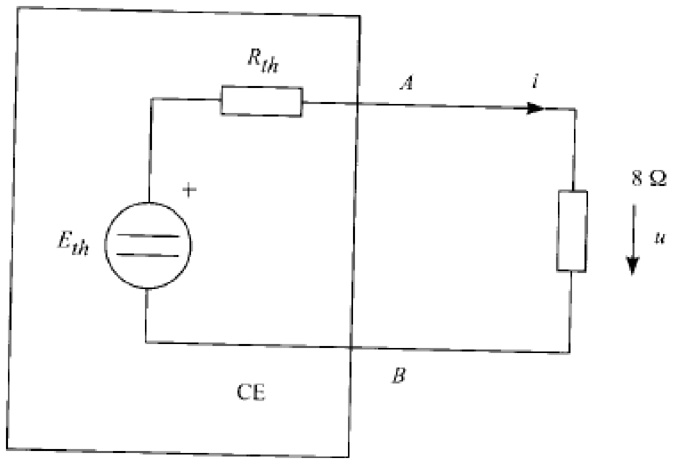
Por otra parte, si se conecta entre A y B una resistencia de 8 Ω, y ésta consume una potencia de 32 W, la tensión entre los extremos de la resistencia será:

$$u = \sqrt{32 \cdot 8} = 16 \text{ V}$$

Y la corriente, por tanto:

$$i = 16/8 = 2 \text{ A}$$

Ejercicio 10.2



La relación entre ambas magnitudes estará determinada por los valores del circuito eléctrico, es decir:

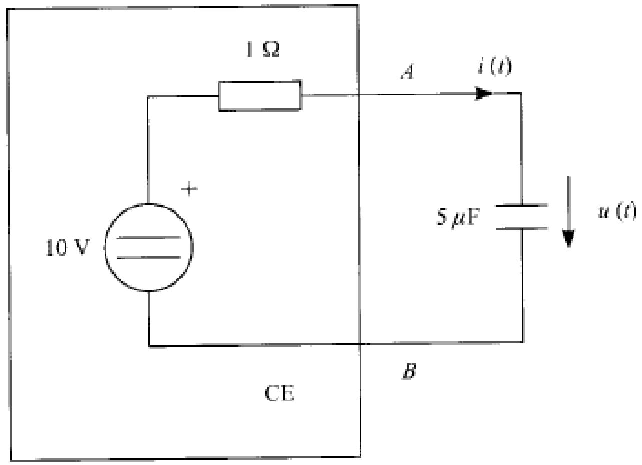
$$E_{th} - R_{th} \cdot 2 = 8$$

Esta ecuación, unida a la anterior, proporciona un sistema en el que se puede obtener E_{th} y R_{th}:

$$E_{th} - R_{th} \cdot 2 = 8$$
$$E_{th} = 10 \cdot R_{th}$$

cuya resolución proporciona los valores $E_{th} = 10$ V, y $R_{th} = 1\ \Omega$.

Una vez obtenidos estos valores, se puede abordar la resolución de la segunda parte del problema. El circuito resultante será el siguiente:



En primer lugar, se obtendrá la tensión en el condensador. A partir de ella, se deducirá la corriente que circula por él. De esta forma, no es necesario obtener la corriente en $i(0^+)$.

La expresión de la tensión en el condensador tendrá la forma:

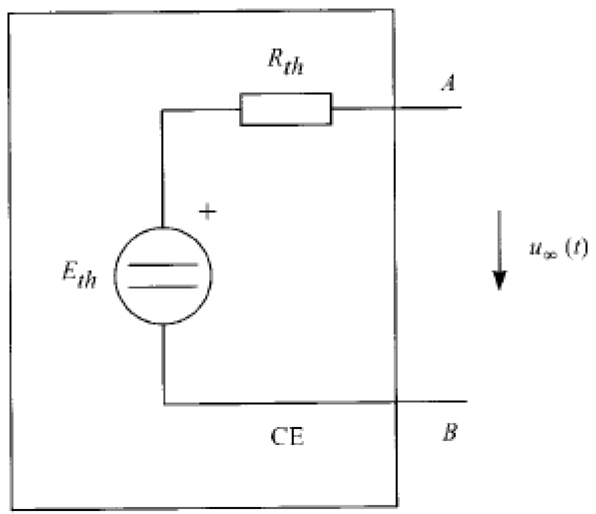
$$u(t) = u_{\infty}(t) + [u(0) - u_{\infty}(0)]e^{-t/\tau}$$

El valor de la tensión inicial es un dato del enunciado, y vale 15 V. En cuanto a la constante de tiempo, se obtiene de forma inmediata, puesto que se conoce el valor de la resistencia del equivalente Thévenin.

$$\tau = 1 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 5\ \mu s$$

Ejercicio 10.2

En cuanto al valor final, el circuito en régimen permanente, teniendo en cuenta que se trata de un circuito con fuentes de continua, será:



En este caso, la tensión en régimen permanente en el condensador coincide con el valor de la fuente del equivalente Thévenin, es decir, $u_\infty = u_\infty(0) = 10$ V. Por tanto, la tensión en el condensador será:

$$u(t) = 10 + (15 - 10) \cdot e^{-200.000t} = 10 + 5 \cdot e^{-200.000t}$$

Y la corriente que circula por el condensador será:

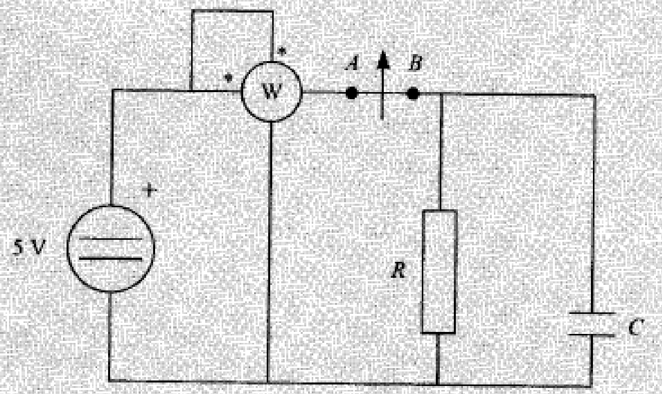
$$i(t) = C\,\frac{du}{dt} = -5 \cdot 10^{-6} \cdot (5 \cdot 200.000) \cdot e^{-200.000t} = -5 \cdot e^{-200.000t}$$

Ejercicio 10.3

El circuito de la figura se encuentra en régimen permanente. Se pide:

a) Determinar R y C sabiendo que el vatímetro indica 25 W y que el condensador almacena una energía de 100 μJ.

b) Expresión de la tensión u_{AB} en bornes del interruptor para $t = 0$ cuando éste se abre en $t = 0$.



SOLUCIÓN

La potencia que indica el vatímetro es la consumida en la resistencia. Por tanto:

$$P = \frac{e^2}{R} = \frac{25}{R}$$

$$R = \frac{25}{25} = 1\ \Omega$$

En cuanto al condensador, la energía almacenada tiene la expresión:

$$w = \frac{1}{2}\,Cu^2$$

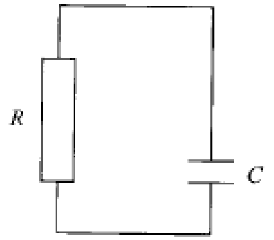
La tensión en el condensador será por consiguiente:

$$C = \frac{2w}{u^2} = \frac{200 \cdot 10^{-6}}{25} = 8\ \mu\text{F}$$

En cuanto a la tensión entre A y B, una vez abierto el interruptor, será la diferencia entre la tensión de la fuente y la del condensador. La tensión de la fuente es constante e igual a 5 V, en tanto que la tensión en el condensador tendrá la expresión:

$$u(t) = u_\infty(t) + [u(0) - u_\infty(0)]e^{-t/\tau}$$

Puesto que en el circuito resultante tras la maniobra, que se muestra a continuación, no hay ninguna fuente de tensión que alimente al condensador, su tensión en régimen permanente es nula.



Ejercicio 10.3

En cuanto a la constante de tiempo, será el producto del valor de la resistencia por el del condensador, es decir $\tau = R \cdot C = 1 \cdot 8 \cdot 10^{-6} = 8\ \mu s$.

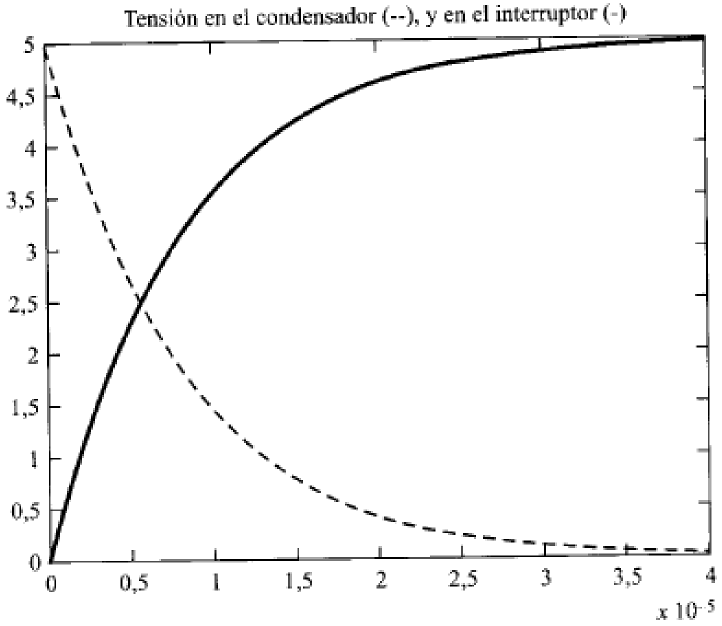
La tensión inicial será la tensión de la fuente, ya que era la tensión aplicada antes de la maniobra, como ya se ha indicado.

Por consiguiente, la tensión en el condensador será:

$$u(t) = 5 \cdot e^{-125.000t}$$

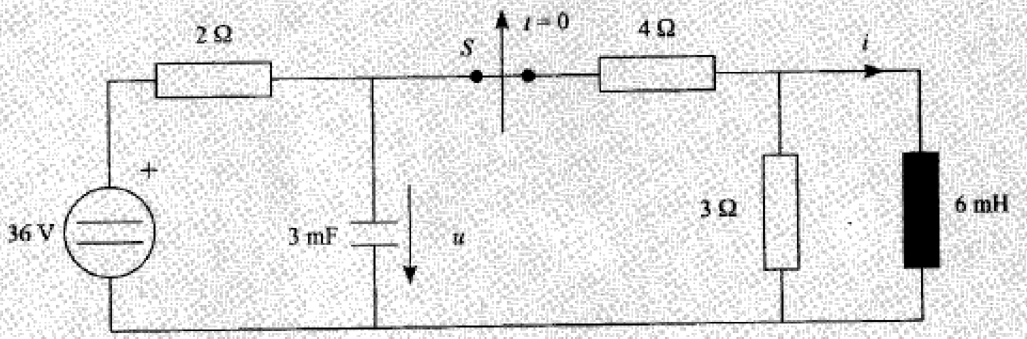
Y la tensión entre los dos terminales del interruptor será:

$$u_{AB} = 5 - 5 \cdot e^{-125.000t}$$



Ejercicio 10.4

El interruptor S lleva cerrado un tiempo que se considera infinito. En el instante $t = 0$ se abre S y ya permanece en dicha posición definitivamente. Hállese la expresión de $u(t)$ e $i(t)$ para $t \geqslant 0$.



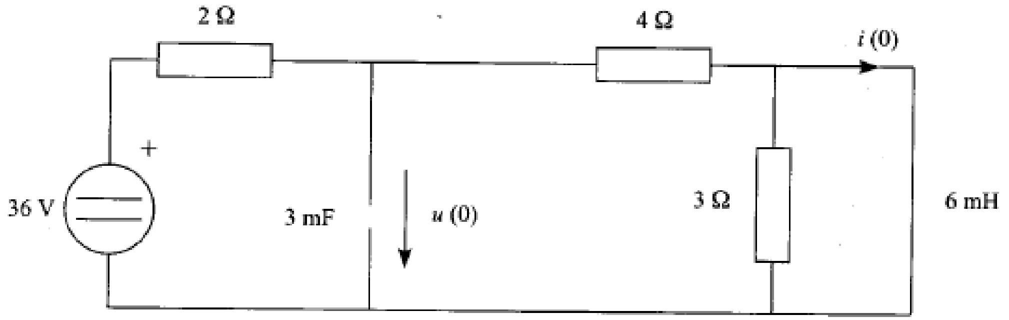
SOLUCIÓN

De nuevo se trata de un circuito con dos elementos dinámicos que, una vez efectuada la maniobra, se convierte en dos circuitos de primer orden. En esta ocasión, las variables tomarán las siguientes expresiones:

$$i(t) = i_\infty(t) + [i(0) - i_\infty(0)] \cdot e^{-t/\tau 1}$$

$$u(t) = u_\infty(t) + [u(0) - u_\infty(0)] \cdot e^{-t/\tau}$$

Las condiciones iniciales se tendrán que obtener a partir del circuito inicial, con ambos elementos dinámicos representados por sus equivalentes en régimen permanente de continua.



La corriente inicial $i(0)$ tendrá el valor:

$$i(0) = \frac{36}{2 + 4} = 6 \text{ A}$$

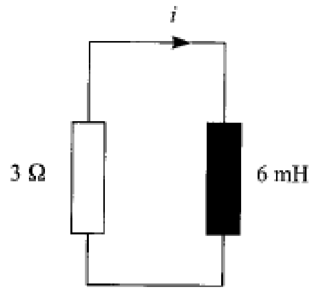
Y la tensión $u(0)$ en el condensador puede obtenerse de la siguiente manera:

$$u(0) = \frac{4}{2 + 4} \cdot 36 = 24 \text{ V}$$

Ejercicio 10.4

Nótese que, por estar la resistencia de 3 Ω en paralelo con un cortocircuito, la tensión en el condensador es la misma que la que está aplicada en la resistencia de 4 Ω, que por estar en serie con la de 2 Ω puede hallarse mediante la fórmula del divisor de tensión.

Las constantes de tiempo de ambos circuitos se obtendrán de los circuitos resultantes. El circuito de la bobina será:

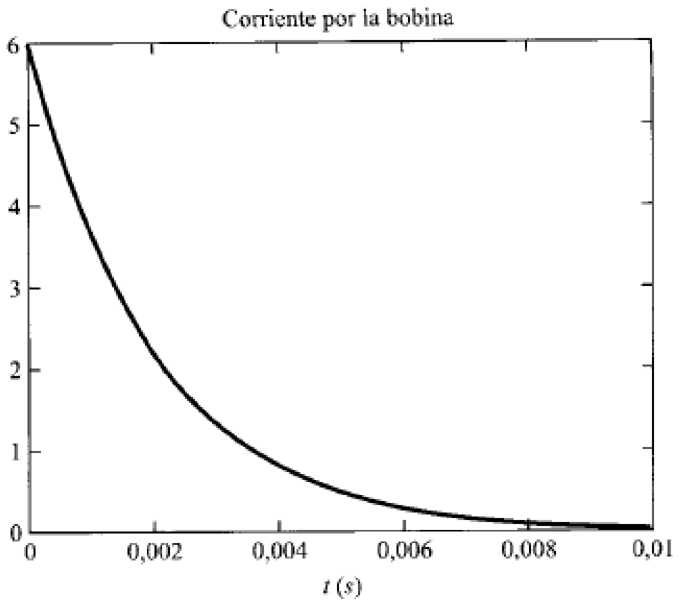


que tiene una constante de tiempo $\tau_1 = 6 \cdot 10^{-3}/3 = 2$ ms. Adviértase que la resistencia de 4 Ω no interviene en este circuito (ni en el del condensador, claro está) puesto que por ella no circula ninguna corriente.

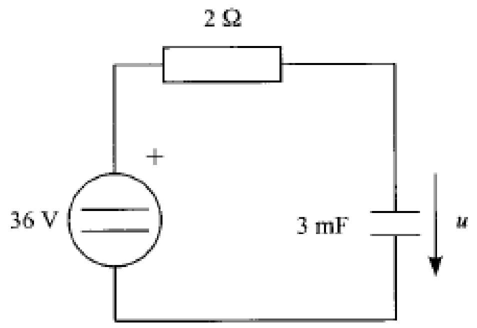
En cuanto al régimen permanente en este circuito, será nulo, ya que no hay ninguna fuente en este circuito.

Por tanto, la expresión de la corriente que circula por la bobina será:

$$i(t) = 6 \cdot e^{-500t}$$



El circuito del condensador, una vez efectuada la maniobra, queda como sigue:



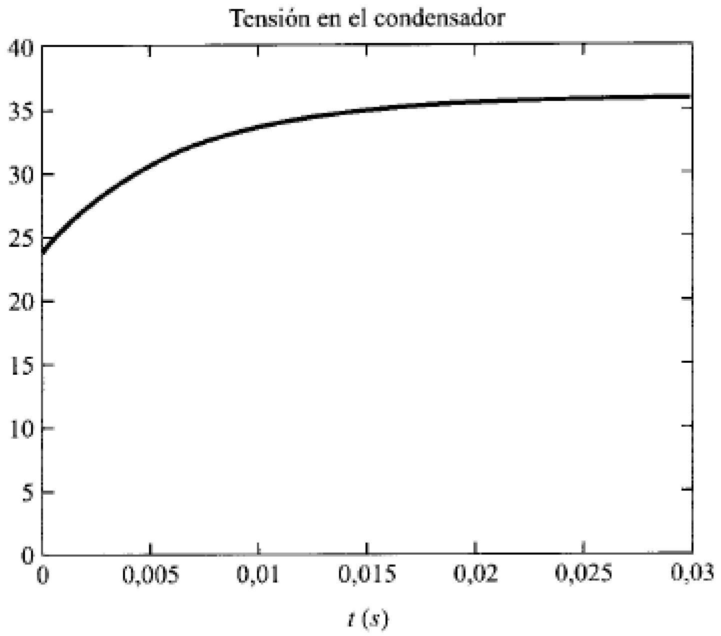
Ejercicio 10.4

En este circuito, la constante de tiempo será $\tau = 2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 6$ ms. La tensión en régimen permanente del condensador coincidirá con la tensión en la fuente, es decir, $u_\infty = 36$ V.

Por tanto, la tensión en el condensador será:

$$u(t) = 36 + (24 - 36) \cdot e^{-166,66t}$$

La evolución de esta tensión se muestra en la figura siguiente:



Ejercicio 10.5

El circuito de la figura P14.1 se encuentra en régimen permanente. En un instante dado, que se toma como origen de tiempos se cierra el interruptor S. Hallar la intensidad $i(t)$ para $t > 0$.

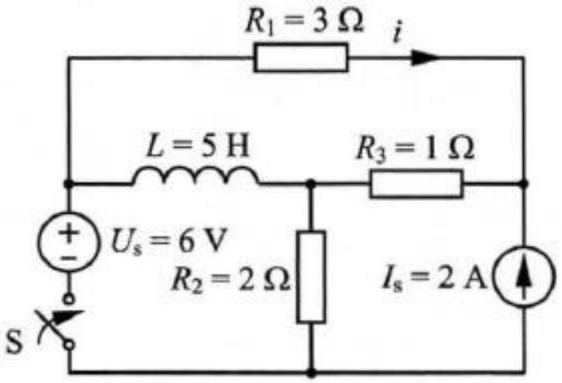
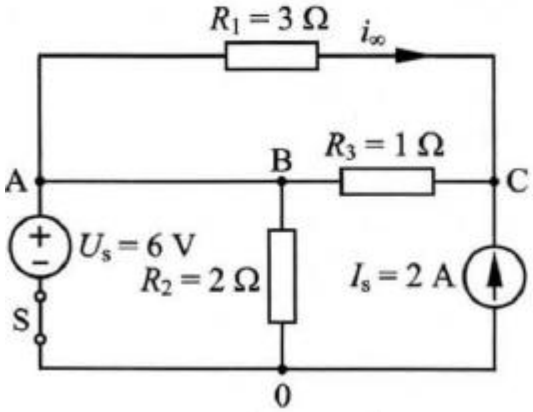


Figura P14.1

Solución

$$i(t) = i_\infty(t) + [i(0^+) - i_\infty(0^+)]e^{-t/\tau}$$

La respuesta de régimen permanente, $i_\infty(t)$ se calcula

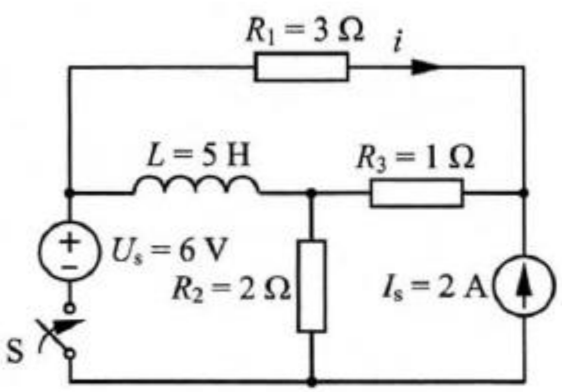


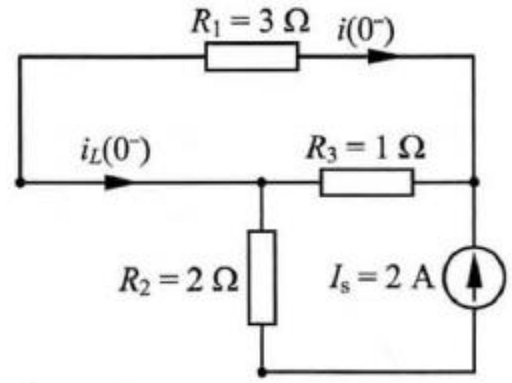
$$-\frac{1}{3}u_A - 1u_B + \left(1+\frac{1}{3}\right)u_C = 2$$

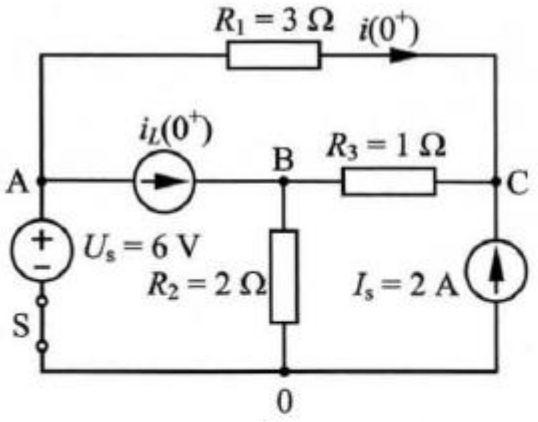
$$-\left(1+\frac{1}{3}\right)u_A + \left(1+\frac{1}{3}\right)u_C = 2$$

de donde, al sustituir $u_A = 6$ V, se obtiene $u_C = 15/2$ V. Conocidas las tensiones de nudo se determina $i_\infty(t) = -1/2$ A $= i_\infty(0^+)$.

Ejercicio 10.5







Para hallar $i(0^+)$ hay que determinar primero $i_L(0^-)$. En $t = 0^-$ el circuito está en un régimen permanente de continua por lo que, de nuevo, la bobina se trata como un cortocircuito. Además el interruptor está abierto, por lo que la rama donde está la fuente de tensión se puede sustituir por un circuito abierto. Queda el circuito de la figura SP 14.1b, en el que al aplicar el concepto de divisores de intensidad se tiene

$$i_L(0^-) = \frac{R_3}{R_1 + R_3} I_s = \frac{1}{1+3} 2 = 0{,}5 \text{ A}$$

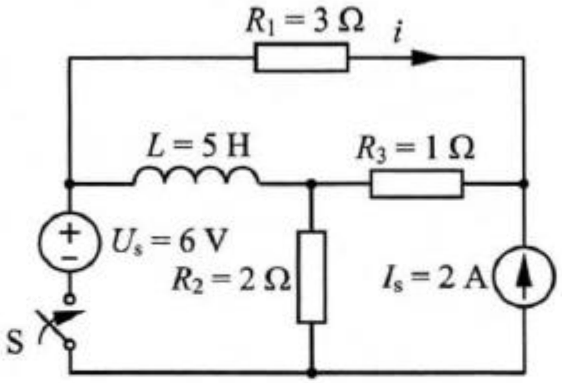
Una vez determinada $i_L(0^-)$ se pasa al instante $t = 0^+$ en el que se cumple $i_L(0^+) = i_L(0^-)$. Si se aplica la regla de sustitución, para ese instante, la bobina se puede sustituir por una fuente de intensidad de valor $i_L(0^+)$, tal como se hace en la figura SP 14.1c. Se tiene, así, un circuito resistivo en el que se determina $i(0^+)$, por ejemplo mediante el método de análisis por nudos. Se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente, para los nudos B y C (la ecuación del nudo A no es necesaria ya que u_A es conocida)

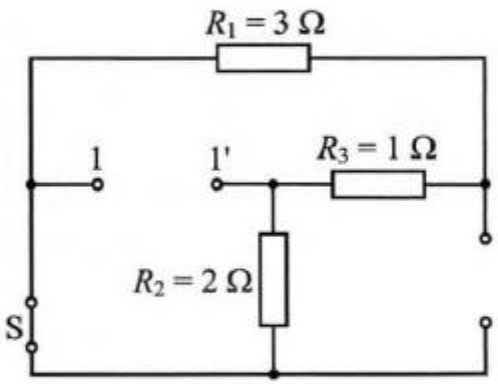
$$\left(\frac{1}{2} + 1\right) u_B - 1.u_C = 0{,}5$$

$$-\frac{1}{3} u_A - 1.u_B + \left(1 + \frac{1}{3}\right) u_C = 2$$

de donde se deduce $u_B = 14/3$ V y $u_C = 13/2$ V. Conocidas las tensiones de nudo se halla $i(0^+) = -1/6$ A

Ejercicio 10.5





Por último, hay que determinar la constante de tiempo del circuito. Para ello, se anulan las fuentes independientes y se determina la resistencia de entrada del dipolo conectado a la bobina. Se muestra este dipolo en la figura SP 14.1d, del que se deduce, por simple inspección,

$$R_{\text{eq}\,1\text{-}1'} = \frac{R_2 \cdot (R_1 + R_3)}{R_2 + R_1 + R_3} = \frac{2(3+1)}{2+3+1} = \frac{4}{3}\ \Omega$$

La constante de tiempo del circuito es

$$\tau = \frac{L}{R_{\text{eq}\,1\text{-}1'}} = \frac{5}{4/3} = \frac{15}{4}\ \text{s} \qquad i(0^+) = -1/6\ \text{A} \qquad i_\infty(t) = -1/2\ \text{A}$$

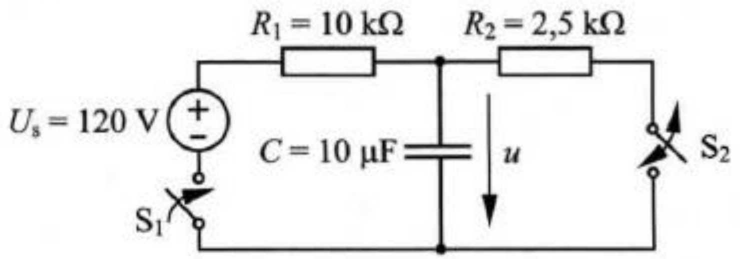
$$i(t) = i_\infty(t) + [i(0^+) - i_\infty(0^+)]e^{-t/\tau}$$

$$i(t) = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)e^{-4t/15} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^{-4t/15}\ \text{A}$$

Ejercicio 10.6

En el circuito de la figura P14.2 el condensador está descargado. En un instante dado, que se toma como origen de tiempos, se cierra el interruptor S_1 que permanece cerrado para todo instante posterior. Cuando la tensión en el condensador, u, alcanza 100 V se cierra el interruptor S_2, que permanece así hasta que la tensión u desciende a 90 V, en cuyo momento se vuelve a abrir.

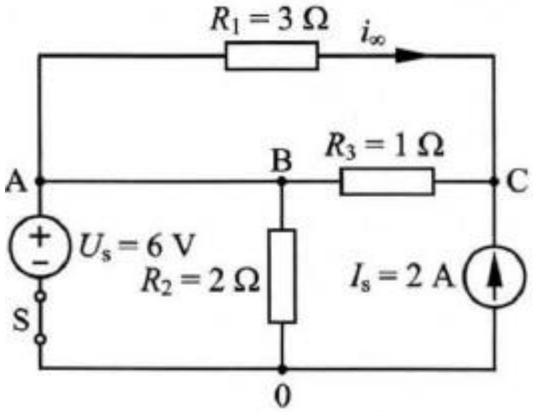
Determinar la forma de onda de la tensión $u(t)$ para $t > 0$, supuesto que se repite cíclicamente esta operación de cierre y apertura de S_2.



Solución

$$i(t) = i_\infty(t) + [i(0^+) - i_\infty(0^+)]e^{-t/\tau}$$

La respuesta de régimen permanente, $i_\infty(t)$ se calcula

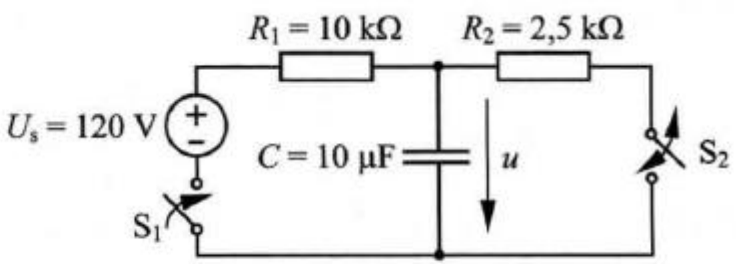


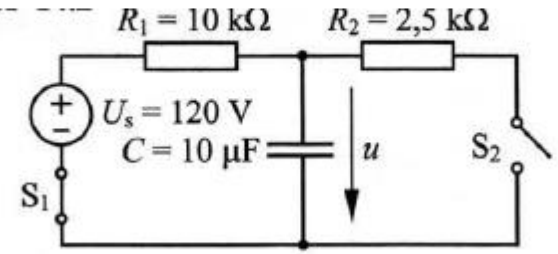
$$-\frac{1}{3}u_A - 1u_B + \left(1+\frac{1}{3}\right)u_C = 2$$

$$-\left(1+\frac{1}{3}\right)u_A + \left(1+\frac{1}{3}\right)u_C = 2$$

de donde, al sustituir $u_A = 6$ V, se obtiene $u_C = 15/2$ V. Conocidas las tensiones de nudo se determina $i_\infty(t) = -1/2$ A $= i_\infty(0^+)$.

Ejercicio 10.6





a)

a) *Primer transitorio. S_1 cerrado y S_2 abierto.*

Una vez cerrado el interruptor S_1 en $t = 0$, se tiene el circuito de la figura SP 14.2a. En éste se produce un transitorio para el que la tensión $u(t)$ viene dada por la expresión

$$u(t) = u_\infty(t) + [u(0^+) - u_\infty(0^+)]e^{-t/\tau} \qquad [14.108]$$

donde, de manera inmediata, se tiene

$u_\infty(t) = 120$ V; $u(0^+) = 0$ V; $u_\infty(0^+) = 120$ V; $\tau = R_1 C = 0,1$ s. Si se sustituyen estos valores en la expresión [14.108] resulta

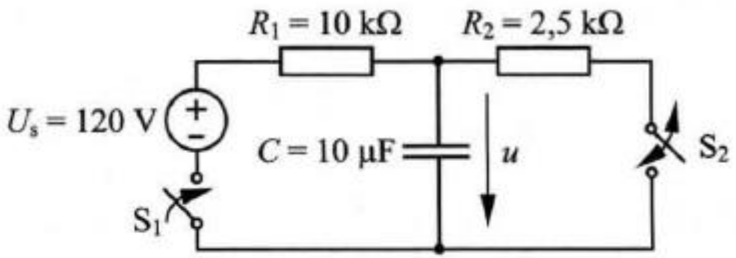
$$u(t) = 120(1 - e^{-10t})\text{ V}$$

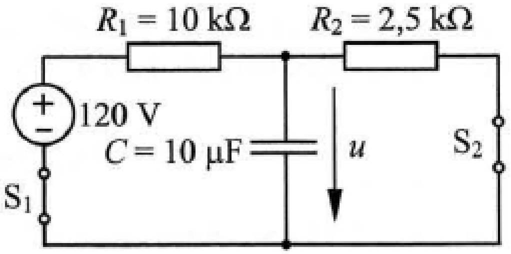
La tensión u vale 100 V en un instante t_1, tal que

$$100 = 120(1 - e^{-10t_1})$$

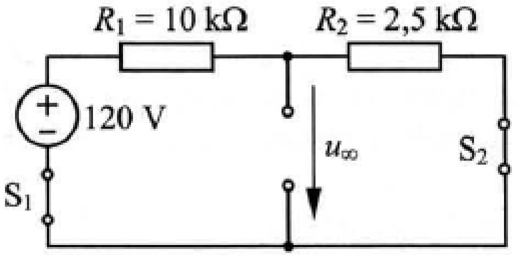
de donde, $t_1 = 0,179$ s.

Ejercicio 10.6





b)



c)

b) Segundo transitorio. S_1 cerrado y S_2 cerrado

En t_1 se cierra el interruptor S_2, con lo que se tiene el circuito de la figura SP 14.2b. Se produce un segundo transitorio con la condición inicial

$$u(t_1^+) = u(t_1^-) = 100 \text{ V}$$

Si se hace un cambio de variable, de forma que $t' = t - t_1$, lo que implica que $u(t = t_1) = u(t' = 0)$, la tensión u está dada por

$$u(t') = u_\infty(t') + [u(t' = 0^+) - u_\infty(t' = 0^+)]e^{-t'/\tau'} \qquad [14.109]$$

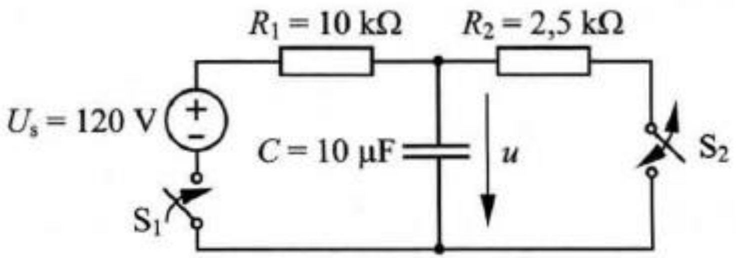
Se conoce del transitorio anterior

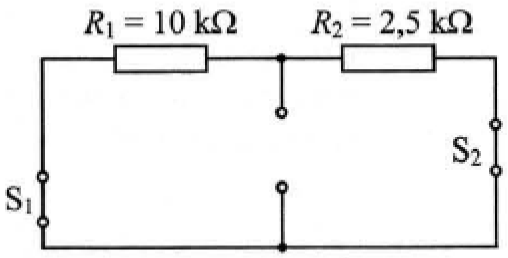
$$u(t' = 0^+) = 100 \text{ V}$$

El valor $u_\infty(t')$ se determina mediante el circuito de la figura SP 14.2c en el que el condensador se ha sustituido por un circuito abierto, ya que, en $t = \infty$, se tendrá un régimen permanente de continua. Mediante divisores de tensión se obtiene

$$u_\infty(t') = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_s = \frac{2{,}5.10^3}{10.10^3 + 2{,}5.10^3} 120 = 24 \text{ V}$$

Ejercicio 10.6





d)

Para determinar la constante de tiempo se anulan las fuentes independientes del dipolo conectado al condensador, con lo que se obtiene el circuito dado en la figura SP 14.2d. La resistencia de entrada de este dipolo es

$$R'_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10.10^3 \cdot 2,5.10^3}{12,5.10^3} = 2.10^3\ \Omega$$

La nueva constante de tiempo es

$$\tau' = R'_{eq}C = 2.10^{-2}\ s$$

Si estos resultados se sustituyen en la expresión [14.109] se obtiene

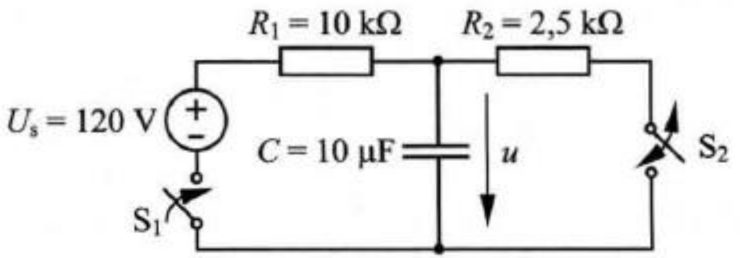
$$u(t') = 24 + (100 - 24)e^{-t'/0,02} = 24 + 76.e^{-50t'}$$

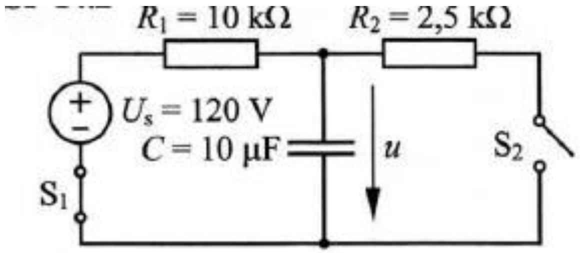
La tensión u alcanza un valor de 90 V para un valor t'_2 tal que

$$90 = 24 + 76e^{-50t'_2}$$

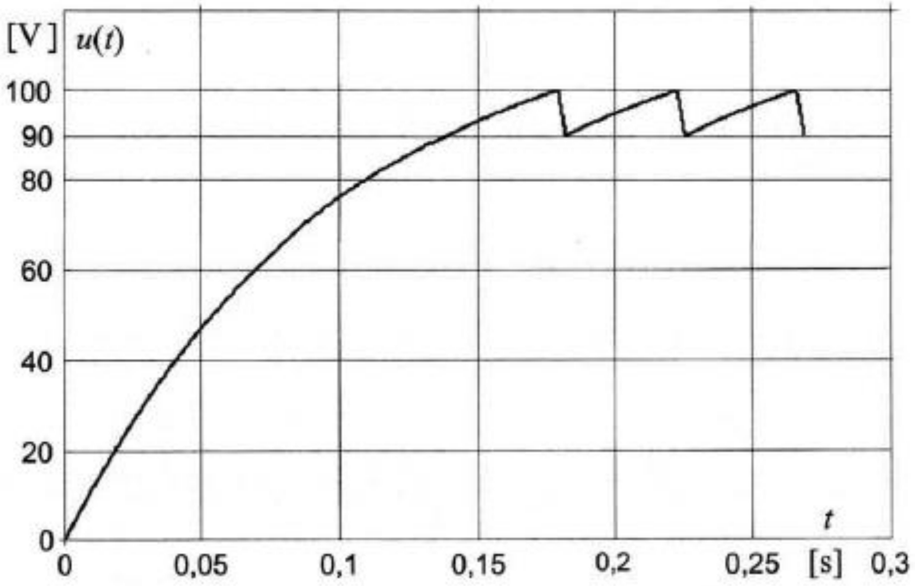
de donde $t'_2 = 0,00282$ s, o bien, $t_2 = t_1 + t'_2 \approx 0,182$ s

Ejercicio 10.6





a)



c) *Tercer transitorio: S_1 cerrado, S_2 abierto*

Se tiene, de nuevo, el circuito de la figura SP 14.2a, en el que se produce un nuevo transitorio. Si se hace $t'' = t - t_2$, la tensión u está dada por

$$u(t'') = u_\infty(t'') + [u(t'' = 0^+) - u_\infty(t'' = 0^+)]e^{-t''/\tau''}$$

con los siguientes valores:

$$u(t'' = 0^+) = 90 \text{ V}$$
$$u_\infty(t'') = u_\infty(t'' = 0^+) = 120 \text{ V}$$
$$\tau'' = \tau = R_1 C = 0{,}1 \text{ s}$$

de donde resulta

$$u(t'') = 120 + (90 - 120)e^{-10t''}$$

El tercer transitorio acaba al cerrarse de nuevo el interruptor S_1, cuando $u = 100$ V. Esto sucede en un instante t''_3 para el que se verifica

$$100 = 120 - 30e^{-10t''_3}$$

esto es, $t''_3 = 0{,}0405$ s, o bien, $t_3 = t_2 + t''_3 \approx 0{,}223$ s

Tema 11

Parámetros y matrices que los representan. Cuadripolos elementales

Parámetros de un cuadripolo. Matriz de impedancias a circuito abierto.

- Las tensiones e intensidades en los terminales de entrada y salida del cuadripolo (i_1, u_1, i_2 y u_2) corresponden a las de la figura 5.2 con las referencias dadas en esta figura.

- Siempre que no se indique lo contrario, con el término cuadripolo nos estaremos refiriendo a un cuadripolo pasivo en el que todos los elementos que contiene son pasivos, lineales e invariables con el tiempo.

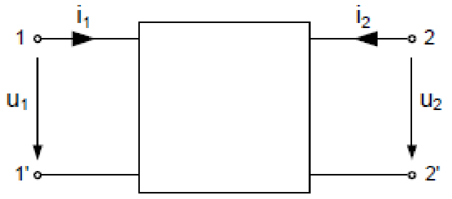


Figura 5.2

Matriz [Z] de impedancias a circuito abierto.

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad [u] = [Z]\,[i] \tag{5.4}$$

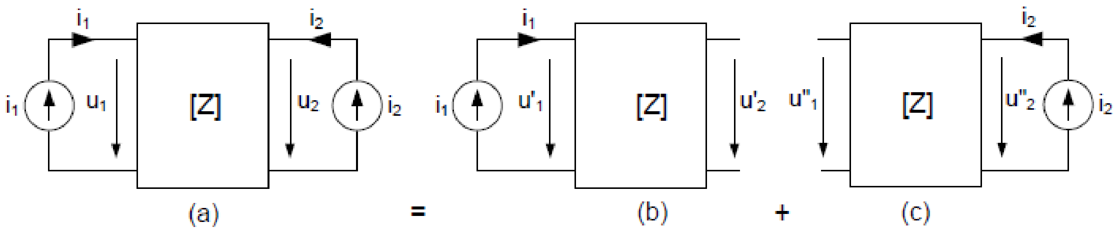


Figura 5.3

- El elemento Z_{11} es la **impedancia de entrada del cuadripolo** [con su salida] **a circuito abierto**, y su valor viene dado por la relación:

$$Z_{11} = \left.\frac{u_1}{i_1}\right|_{i_2=0} \tag{5.5}$$

- El elemento Z_{21} se denomina **impedancia de transferencia directa a circuito abierto**, y su valor viene dado por la relación:

$$Z_{21} = \left.\frac{u_2}{i_1}\right|_{i_2=0} \tag{5.6}$$

- El elemento Z_{12} se denomina **impedancia de transferencia inversa a circuito abierto**, y su valor viene dado por la relación:

$$Z_{12} = \left.\frac{u_1}{i_2}\right|_{i_1=0} \tag{5.7}$$

- El elemento Z_{22} es la **impedancia de salida del cuadripolo** [con su entrada] **a circuito abierto**, y su valor viene dado por la relación:

$$Z_{22} = \left.\frac{u_2}{i_2}\right|_{i_1=0} \tag{5.8}$$

Relación entre los parámetros

$$[Z] = [Y]^{-1}$$

Ejercicio 11.1

Calcular la matriz de impedancias a circuito abierto del cuadripolo de la figura 5.4.

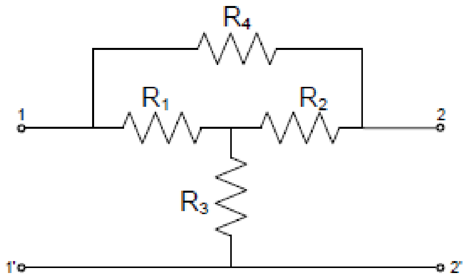


Figura 5.4

Los elementos de la matriz [Z] de impedancias a circuito abierto del cuadripolo pueden calcularse analizando dos circuitos. El primero corresponde al circuito de la figura 5.5.a en el que los terminales de salida están a circuito abierto, es decir, cuando i_2 es igual a cero. Analizando este circuito se tiene que:

$$u_1 = \left(\frac{R_1\,(R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_4} + R_3 \right) i_1 \qquad \rightarrow \qquad Z_{11} = \left.\frac{u_1}{i_1}\right|_{i_2=0} = R_3 + \frac{R_1\,(R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_4}$$

y

$$u_2 = R_2\, i_a + R_3\, i_1$$

Mediante el divisor de intensidad:

$$i_a = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_4} i_1$$

luego

$$u_2 = \left(\frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2 + R_4} + R_3 \right) i_1 \qquad \rightarrow \qquad Z_{21} = \left.\frac{u_2}{i_1}\right|_{i_2=0} = R_3 + \frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2 + R_4}$$

Ejercicio 11.1

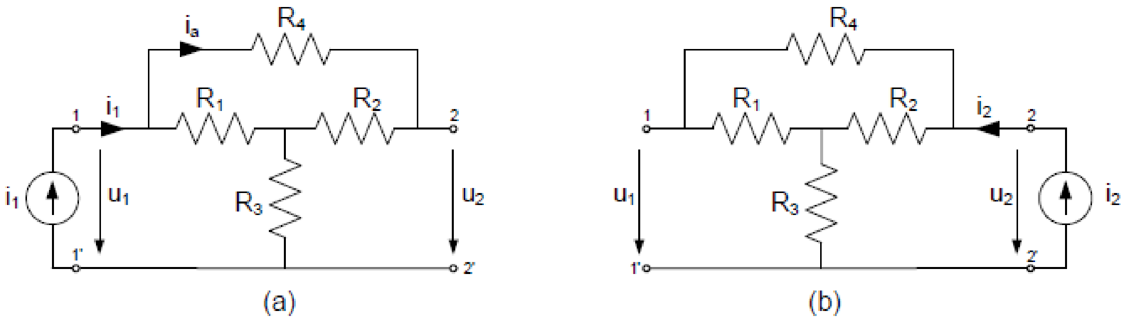


Figura 5.5

El segundo circuito que hay que analizar es el circuito de la figura 5.5.b en el que ahora es la entrada la que está a circuito abierto y, por tanto, i_1 es nula. De la misma forma se llega a que:

$$Z_{22} = \left.\frac{u_2}{i_2}\right|_{i_1=0} = R_3 + \frac{R_2\,(R_1 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_4}$$

y

$$Z_{21} = \left.\frac{u_1}{i_2}\right|_{i_1=0} = R_3 + \frac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2 + R_4}$$

Con lo que la matriz de impedancias a circuito abierto del cuadripolo es:

$$[Z] = \begin{pmatrix} R_3 + \dfrac{R_1\,(R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_4} & R_3 + \dfrac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2 + R_4} \\ R_3 + \dfrac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2 + R_4} & R_3 + \dfrac{R_2\,(R_1 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_4} \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

A continuación, vamos a comprobar este resultado obteniendo los cuatro parámetros directamente a partir del análisis por mallas del cuadripolo. Considerando el circuito de la figura 5.6 con las intensidades de malla indicadas, se puede ver que hay dos intensidades de malla que coinciden con las intensidades i_1 e i_2 del cuadripolo. Así, las ecuaciones del análisis por mallas de este circuito son:

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= (R_1 + R_3)\,i_1 + R_3\,i_2 - R_1\,i_3 \\ u_2 &= R_3\,i_1 + (R_2 + R_3)\,i_2 + R_2\,i_3 \\ 0 &= -R_1\,i_1 + R_2\,i_2 + (R_1 + R_2 + R_4)\,i_3 \end{aligned}\right.$$

De este sistema de ecuaciones hay que eliminar la variable i_3, lo que se consigue despejándola de la tercera ecuación y sustituyendo la expresión que se obtiene en las otras dos ecuaciones (si este proceso lo hace expresando las ecuaciones de forma matricial, verá que simplemente se está haciendo la reducción de Kron). Así:

Ejercicio 11.1

$$i_3 = \frac{R_1\, i_1 - R_2\, i_2}{R_1 + R_2 + R_4}$$

Sustituyéndola en las otras dos ecuaciones:

$$\begin{cases} u_1 = & (R_1 + R_3)\, i_1 + R_3\, i_2 - R_1\, \dfrac{R_1\, i_1 - R_2\, i_2}{R_1 + R_2 + R_4} \\[2ex] u_2 = & R_3\, i_1 + (R_2 + R_3)\, i_2 + R_2\, \dfrac{R_1\, i_1 - R_2\, i_2}{R_1 + R_2 + R_4} \end{cases}$$

Y operando se obtiene finalmente:

$$\begin{cases} u_1 = \left(R_3 + \dfrac{R_1\,(R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_4}\right) i_1 + \left(R_3 + \dfrac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2 + R_4}\right) i_2 \\[2ex] u_2 = \left(R_3 + \dfrac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2 + R_4}\right) i_1 + \left(R_3 + \dfrac{R_2\,(R_1 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_4}\right) i_2 \end{cases}$$

Como se ve, este sistema de ecuaciones corresponde a la ecuación (5.4), sus coeficientes son, por tanto, los elementos de la matriz [Z] del cuadripolo y, como era de esperar, coincide la matriz obtenida antes (5.9).

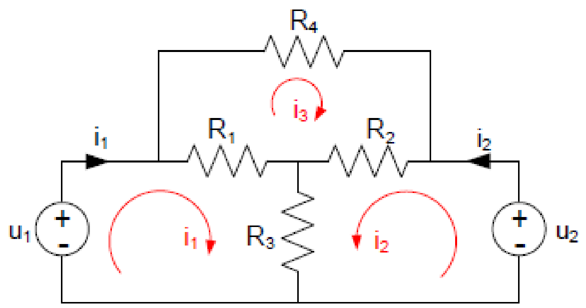


Figura 5.6

Parámetros de un cuadripolo. Matriz de admitancias a cortocircuito.

Matriz [Y] de admitancias en cortocircuito.

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad [i] = [Y]\,[u] \tag{5.13}$$

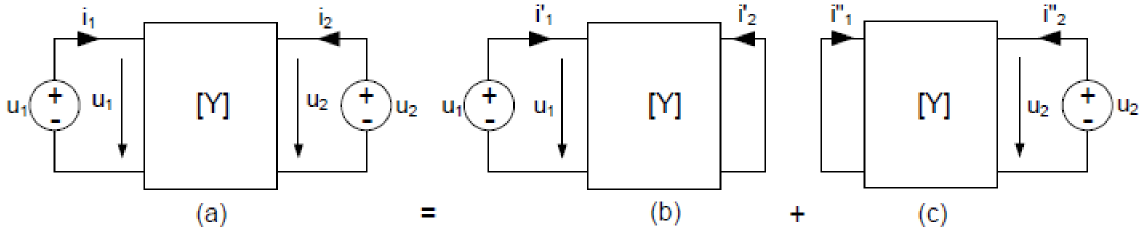


Figura 5.7

- El elemento Y_{11} es la **admitancia de entrada del cuadripolo** [con su salida] **en cortocircuito**, y su valor viene dado por la relación:

$$Y_{11} = \left.\frac{i_1}{u_1}\right|_{u_2=0} \tag{5.14}$$

- El elemento Y_{21} se denomina **admitancia de transferencia directa en cortocircuito**, y su valor viene dado por la relación:

$$Y_{21} = \left.\frac{i_2}{u_1}\right|_{u_2=0} \tag{5.15}$$

- El elemento Y_{12} se denomina **admitancia de transferencia inversa en cortocircuito**, y su valor viene dado por la relación:

$$Y_{12} = \left.\frac{i_1}{u_2}\right|_{u_1=0} \tag{5.16}$$

- El elemento Y_{22} es la **admitancia de salida del cuadripolo** [con su entrada] **en cortocircuito**, y su valor viene dado por la relación:

$$Y_{22} = \left.\frac{i_2}{u_2}\right|_{u_1=0} \tag{5.17}$$

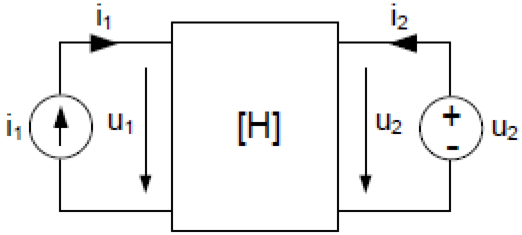
Relación entre los parámetros

$$[Z] = [Y]^{-1}$$

Parámetros de un cuadripolo. Matriz de parámetros híbridos.

Matrices [H] y [K] de parámetros híbridos.

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = [H] \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{5.18}$$



Relación entre los parámetros

$$[H] = [K]^{-1}$$

- El elemento H_{11} es la **impedancia de entrada en cortocircuito**, su unidad es, por tanto, el ohmio y su valor viene dado por la relación:

$$H_{11} = \left.\frac{u_1}{i_1}\right|_{u_2=0} \tag{5.19}$$

- El elemento H_{21} se denomina **relación de transferencia directa de corriente en cortocircuito**, es adimensional y su valor viene dado por la relación:

$$H_{21} = \left.\frac{i_2}{i_1}\right|_{u_2=0} \tag{5.20}$$

- El elemento H_{12} se denomina **relación de transferencia inversa de tensión a circuito abierta**, es adimensional y su valor viene dado por la relación:

$$H_{12} = \left.\frac{u_1}{u_2}\right|_{i_1=0} \tag{5.21}$$

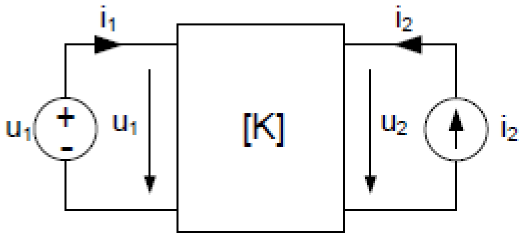
- El elemento H_{22} es la **admitancia de salida a circuito abierto**, su unidad es Ω^{-1} y su valor viene dado por la relación:

$$H_{22} = \left.\frac{i_2}{u_2}\right|_{i_1=0} \tag{5.22}$$

Parámetros de un cuadripolo. Matriz de parámetros híbridos.

Matrices [H] y [K] de parámetros híbridos.

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = [K] \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \tag{5.23}$$



Relación entre los parámetros

$[H] = [K]^{-1}$

- El elemento K_{11} es la **admitancia de entrada a circuito abierto**, su unidad es Ω^{-1} y su valor viene dado por la relación:

$$K_{11} = \left.\frac{i_1}{u_1}\right|_{i_2=0} \tag{5.24}$$

- El elemento K_{21} se denomina **relación de transferencia directa de tensión a circuito abierto**, es adimensional y su valor viene dado por la relación:

$$K_{21} = \left.\frac{u_2}{u_1}\right|_{i_2=0} \tag{5.25}$$

- El elemento K_{12} se denomina **relación de transferencia inversa de corriente en cortocircuito**, es adimensional y su valor viene dado por la relación:

$$K_{12} = \left.\frac{i_1}{i_2}\right|_{u_1=0} \tag{5.26}$$

- El elemento K_{22} es la **impedancia de salida en cortocircuito**, su unidad es el ohmio y su valor viene dado por la relación:

$$K_{22} = \left.\frac{u_2}{i_2}\right|_{u_1=0} \tag{5.27}$$

Ejercicio 11.2

Calcular la matriz [K] de parámetros híbridos del cuadripolo de la figura 5.9, sabiendo que el amplificador operacional es ideal.

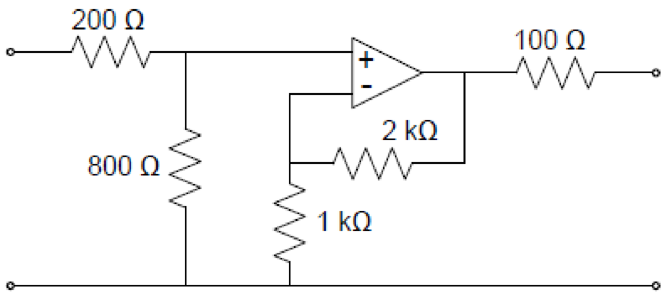


Figura 5.9

La forma más sencilla de obtener los parámetros híbridos K es analizando dos circuitos, cada uno de los cuales corresponde a hacer cero una de las dos variables independientes u_1 e i_2. Con estos dos circuitos se calculan las relaciones dadas en la ecuaciones (5.24)−(5.27).

Suponemos que el amplificador operacional está funcionando en la zona lineal. El primer circuito corresponde a considerar la salida del cuadripolo a circuito abierto ($i_2 = 0$), con lo que el circuito a resolver es el circuito de la figura 5.10. De esta forma la tensión en el nudo A (terminal no inversor del AO) y la intensidad de entrada son:

$$i_1 = \frac{u_1}{1000} \qquad \text{y} \qquad u_A = \frac{800\,u_1}{1000} = \frac{4\,u_1}{5}$$

En la malla de la realimentación, como la tensión en el nudo B (terminal inversor del AO) es la misma que la que hay en el nudo A, se tiene que:

$$i_b = \frac{u_B}{1000} = \frac{4\,u_1}{5000}$$

Luego la tensión en la salida del cuadripolo es:

$$u_2 = u_0 = 2000 \cdot \frac{4\,u_1}{5000} + \frac{4\,u_1}{5} = \frac{12\,u_1}{5}$$

Con lo que los parámetros K_{11} y K_{21} resultan:

$$K_{11} = \left.\frac{i_1}{u_1}\right|_{i_2=0} = \frac{1}{1000} = 1\ \text{m}\Omega^{-1} \qquad \text{y} \qquad K_{21} = \left.\frac{u_2}{u_1}\right|_{i_2=0} = \frac{12}{5} = 2,4$$

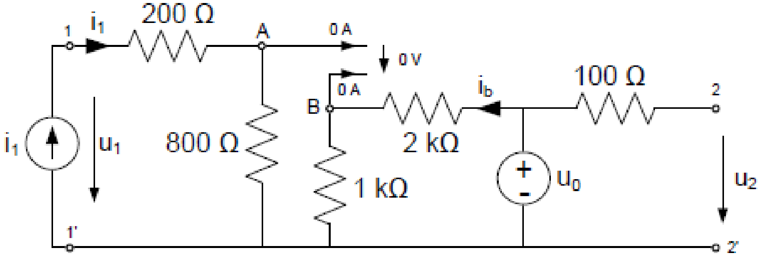


Figura 5.10

Ejercicio 11.2

El segundo circuito corresponde a considerar la entrada en cortocircuito ($u_1 = 0$), lo que se muestra en el circuito de la figura 5.11. A la vista de este circuito, para que se cumpla la Segunda Ley de Kirchhoff en la malla de la entrada, la intensidad i_1 sólo puede ser cero y, por tanto, las tensiones en los nudos A y B son también nulas. Si la tensión u_B es cero, la intensidad i_b por la malla de la realimentación también es nula, lo que hace que la tensión de salida del AO, u_0, sea también cero. De esta forma:

$$i_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad u_2 = 100\, i_2$$

Con lo que los parámetros K_{12} y K_{22} son:

$$K_{12} = \left.\frac{i_1}{i_2}\right|_{u_1=0} = 0 \qquad \text{y} \qquad K_{22} = \left.\frac{u_2}{i_1}\right|_{u_1=0} = 100\ \Omega$$

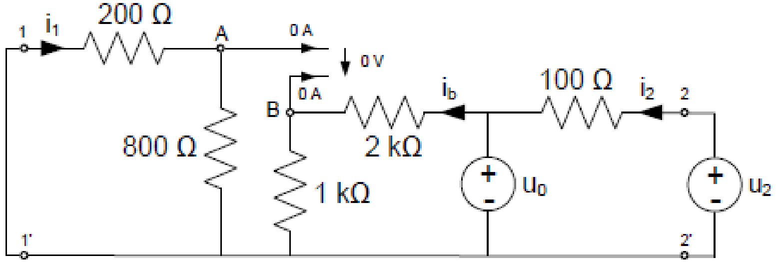


Figura 5.11

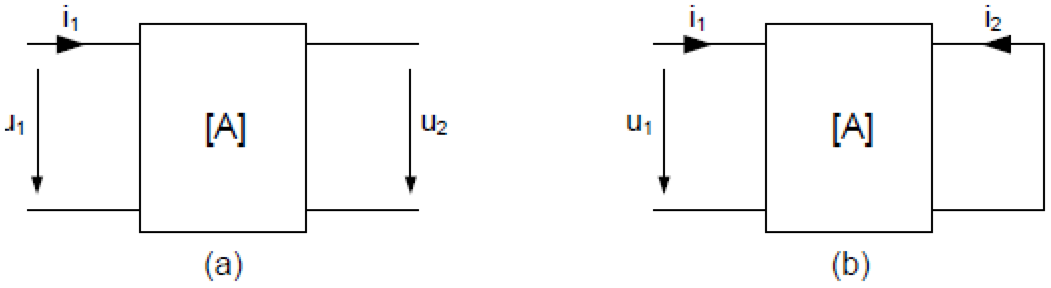
De esta forma, la matriz [K] de parámetros híbridos del cuadripolo de la figura 5.9 es:

$$[K] = \begin{pmatrix} 10^{-3} & 0 \\ 2,4 & 100 \end{pmatrix}$$

Parámetros de un cuadripolo. Matriz de cadena y cadena inversa.

Matrices de cadena [A] y de cadena inversa [B]

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{pmatrix} = [A] \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{pmatrix} \qquad (5.28)$$



Relación entre los parámetros

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & -B_{12} \\ -B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}^{-1}$$

- Con la salida del cuadripolo a circuito abierto (figura 5.12.a) se obtienen los dos elementos de la primera columna y sus valores vienen dados por las relaciones:

$$A_{11} = \left.\frac{u_1}{u_2}\right|_{i_2=0} \qquad \text{y} \qquad A_{21} = \left.\frac{i_1}{u_2}\right|_{i_2=0} \qquad (5.29)$$

  Como se ve, el parámetro A_{11} es adimensional y el parámetro A_{21} es una admitancia por lo que su dimensión es Ω^{-1}.

- Con la salida en cortocircuito (figura 5.12.b) se obtienen los dos elementos de la segunda columna y sus valores vienen dados por las relaciones:

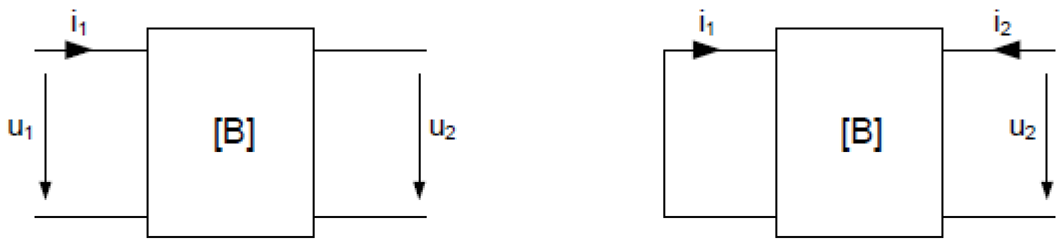
$$A_{12} = \left.\frac{u_1}{-i_2}\right|_{u_2=0} \qquad \text{y} \qquad A_{22} = \left.\frac{i_1}{-i_2}\right|_{u_2=0} \qquad (5.30)$$

  Como se ve, el parámetro A_{22} es adimensional y el parámetro A_{12} es una impedancia por lo que su dimensión es Ω.

Parámetros de un cuadripolo. Matriz de cadena y cadena inversa.

Matrices de cadena [A] y de cadena inversa [B]

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ -i_1 \end{pmatrix} = [B] \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ -i_1 \end{pmatrix} \tag{5.31}$$



(a) (b)

Relación entre los parámetros

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & -B_{12} \\ -B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}^{-1}$$

- Con la entrada del cuadripolo a circuito abierto (figura 5.13.a) se obtienen los dos elementos de la primera columna y sus valores vienen dados por las relaciones:

$$B_{11} = \left.\frac{u_2}{u_1}\right|_{i_1=0} \quad \text{y} \quad B_{21} = \left.\frac{i_2}{u_1}\right|_{i_1=0} \tag{5.32}$$

Se ve que el parámetro B_{11} es adimensional y el parámetro B_{21} es una admitancia por lo que su dimensión es Ω^{-1}.

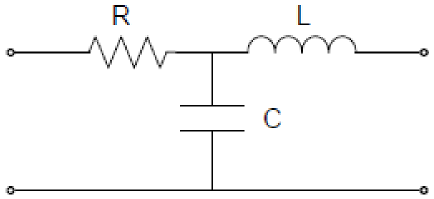
- Con la entrada en cortocircuito (figura 5.13.b) se obtienen los dos elementos de la segunda columna y sus valores vienen dados por las relaciones:

$$B_{12} = \left.\frac{u_2}{-i_1}\right|_{u_1=0} \quad \text{y} \quad B_{22} = \left.\frac{i_2}{-i_1}\right|_{u_1=0} \tag{5.33}$$

Siendo el parámetro B_{22} adimensional y el parámetro B_{12} una impedancia por lo que su dimensión es Ω.

Ejercicio 11.3

Calcular la matriz de cadena del cuadripolo de la figura 5.14 y la expresión de la ganancia de tensión a circuito abierto. A continuación, y para la aplicación numérica dada en la misma figura, si se conecta en su entrada una fuente de tensión alterna de 12 V y pulsación 100 rad/s, calcular el valor de la resistencia que, conectada en la salida, consume la máxima potencia y el valor de esa potencia (realizar estos cálculos utilizando la matriz de cadena obtenida).



R = 4 Ω
L = 30 mH
C = 2,5 mF

Figura 5.14

Con la salida del cuadripolo a circuito abierto ($i_2 = 0$) se calculan los parámetros A_{11} y A_{21} con (5.29). Así, analizando el circuito de la figura 5.15.a, se tiene que:

$$u_2 = \frac{\frac{1}{CD}}{R + \frac{1}{CD}} u_1 = \frac{u_1}{1 + RCD} \qquad \rightarrow \qquad A_{11} = \left.\frac{u_1}{u_2}\right|_{i_2=0} = 1 + RCD$$

y

$$u_2 = \frac{1}{CD} i_1 \qquad \rightarrow \qquad A_{21} = \left.\frac{i_1}{u_2}\right|_{i_2=0} = CD$$

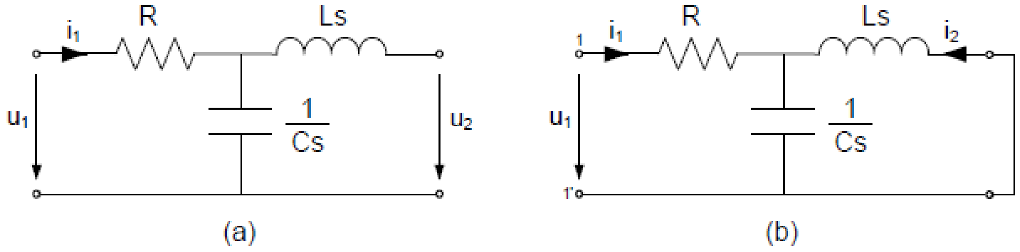


Figura 5.15

El segundo circuito que hay que analizar, para obtener los parámetros A_{12} y A_{22} con (5.30), es el circuito de la figura 5.15.b en el que la salida del cuadripolo está en cortocircuito ($u_2 = 0$). Mediante el divisor de intensidad se tiene que:

$$i_2 = \frac{-\frac{1}{CD} i_1}{LD + \frac{1}{CD}} = \frac{-i_1}{1 + LCD^2} \qquad \rightarrow \qquad A_{22} = \left.\frac{i_1}{-i_2}\right|_{u_2=0} = 1 + LCD^2$$

Ejercicio 11.3

Y como:

$$\frac{u_1}{i_1} = R + \frac{\frac{L}{C}}{LD + \frac{1}{CD}} = R + \frac{LD}{1 + LCD^2}$$

Se obtiene que:

$$u_1 = -i_2\,(1 + LCD^2)\left(R + \frac{LD}{1 + LCD^2}\right) \quad \rightarrow \quad A_{12} = \left.\frac{u_1}{-i_2}\right|_{u_2=0} = R\,(1 + LCD^2) + LD$$

De esta forma, la matriz de cadena [A] del cuadripolo es:

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 + RCD & R\,(1 + LCD^2) + LD \\ CD & 1 + LCD^2 \end{pmatrix}$$

Que también puede escribirse en función de la pulsación ω como:

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 + j\,\omega RC & R\,(1 - LC\omega^2) + j\,\omega L \\ j\,\omega C & 1 - LC\omega^2 \end{pmatrix}$$

Para una pulsación ω igual a 100 rad/s y para los valores de los tres elementos dados en la figura 5.14, la matriz de cadena del cuadripolo es:

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 + j & 1 + j\,3 \\ j\,0,25 & 0,25 \end{pmatrix}$$

Para aplicar el teorema de la máxima transferencia de potencia, hay que calcular la impedancia equivalente Thevenin del circuito visto entre los terminales 2—2', lo que corresponde a resolver el circuito de la figura 5.16.a. Así, a partir de la matriz [A]:

$$u_1 = A_{11}\,u_2 - A_{12}\,i_2 = 0 \quad \rightarrow \quad A_{11}\,u_2 = A_{12}\,i_2$$

De donde:

$$\vec{Z}_{Th} = \frac{u_2}{i_2} = \frac{A_{12}}{A_{11}} = \frac{1 + j\,3}{1 + j} = 2 + j$$

Conforme al teorema de la máxima transferencia de potencia, en este caso la resistencia R_m que conectada entre los terminales 2 y 2' consume la máxima potencia es:

Ejercicio 11.3

$$R_m = Z_{Th} = \sqrt{2^2+1} = \sqrt{5}\ \Omega$$

Una vez conectada esta resistencia, se tiene el circuito de la figura 5.16.b. Utilizando nuevamente la matriz de cadena del cuadripolo, se tiene que:

$$12\underline{\lfloor 0^o} = (1+j)\cdot u_2 - j\,3\cdot i_2 = (1+j)\cdot\left(\sqrt{5}\cdot(-i_2)\right) - (1+j\,3)\cdot i_2$$

Con lo que la intensidad en la resistencia R_m es:

$$i_m = -i_2 = \frac{12\underline{\lfloor 0^o}}{(1+\sqrt{5})+j\ (3+\sqrt{5})} = 1,95\underline{\lfloor -58,3^o}\ \ \text{A}$$

Y la potencia consumida por esa resistencia es:

$$P_m = 1,95^2\cdot\sqrt{5} = 8,24\ \text{W}$$

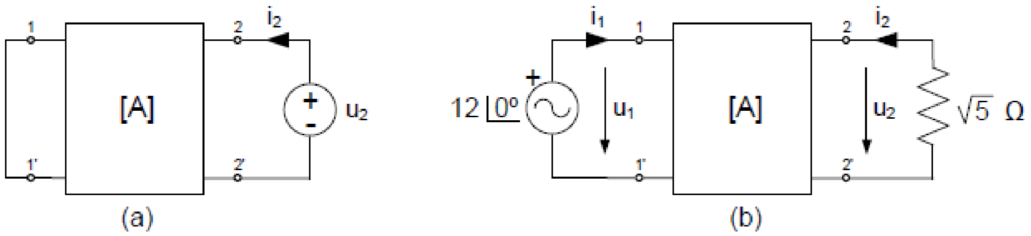


Figura 5.16

Para comprobar este resultado, vamos a resolver ahora el ejercicio analizando el circuito de alterna de la figura 5.17. La impedancia equivalente Thevenin vista entre los terminales 2 y 2' y la resistencia que consume la máxima potencia son:

$$\vec{Z}_{Th} = \frac{(-j\,4)\cdot 4}{4-j\,4} + j\,3 = 2+j \qquad \rightarrow \qquad R_m = Z_{Th} = \sqrt{5}\,\Omega$$

Con esa resistencia R_m conectada en la salida, la intensidad que suministra la fuente es:

$$i_1 = \frac{12\underline{\lfloor 0^o}}{4+\dfrac{(-j\,4)\cdot(\sqrt{5}+j\,3)}{\sqrt{5}-j}} = 1,194\underline{\lfloor 7,6^o}$$

Y mediante el divisor de intensidad, la intensidad que circula por esa resistencia es:

$$i_m = \frac{-j\,4}{\sqrt{5}-j}\cdot 1,194\underline{\lfloor 7,6^o} = 1,95\underline{\lfloor -58,3^o}\ \ \text{A}$$

Que, como era de esperar, coincide con el valor obtenido antes utilizando la matriz de cadena [A] del cuadripolo.

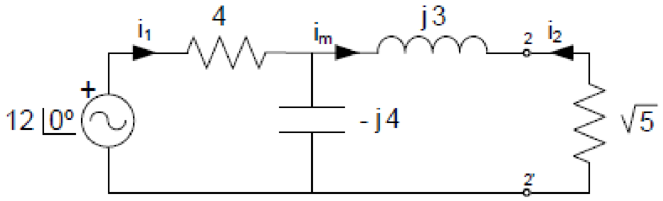


Figura 5.17

Cuadripolos elementales. Cuadripolos recíprocos

Se dice que un cuadripolo es recíproco cuando se verifica el teorema de reciprocidad aplicado a sus dos puertas.

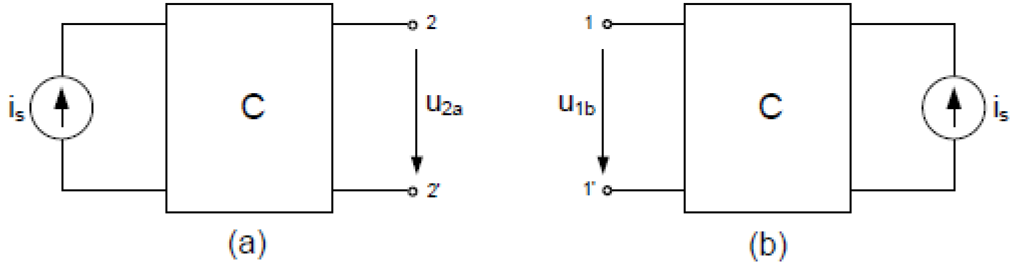


Figura 5.18

$$\text{Recíproco:} \quad \begin{cases} Z_{21} = Z_{12} \\ Y_{21} = Y_{12} \\ H_{21} = -H_{12} \\ K_{21} = -K_{12} \\ A_{11}\,A_{22} - A_{21}\,A_{12} = \Delta_A = 1 \\ B_{11}\,B_{22} - B_{21}\,B_{12} = \Delta_B = 1 \end{cases} \tag{5.46}$$

Este conjunto de igualdades (5.46), permiten deducir que para definir un cuadripolo recíproco mediante cualquiera de sus matrices de definición solo son necesarios tres de sus parámetros.

Cuadripolos elementales. Cuadripolos simétricos

Se dice que un cuadripolo recíproco es también simétrico cuando al intercambiar sus dos puertas, de tal forma que la entrada sea salida y la salida pase a ser la entrada, no se ve afectado el resto del circuito

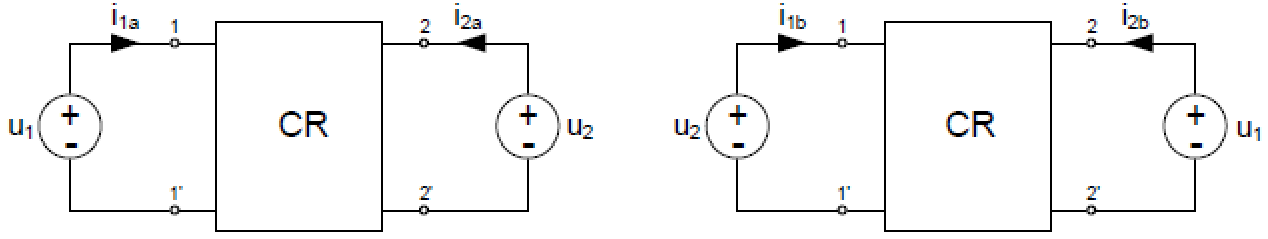


Figura 5.19

$$\text{Simétrico:} \quad (5.46) \text{ y } \begin{cases} Z_{11} = Z_{22} \\ Y_{11} = Y_{22} \\ H_{11}\, H_{22} - H_{21}\, H_{12} = \Delta_H = 1 \\ K_{11}\, K_{22} - K_{21}\, K_{12} = \Delta_K = 1 \\ A_{11} = A_{22} \\ B_{11} = B_{22} \end{cases} \qquad (5.50)$$

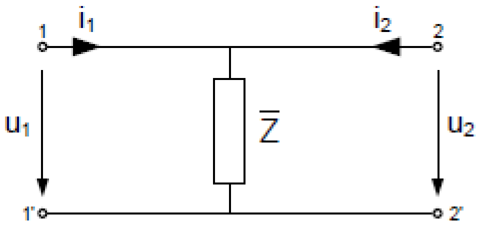
Con estas condiciones de simetría, (5.50), y como todo cuadripolo simétrico es también recíproco, se puede deducir que para definir un cuadripolo simétrico por cualquiera de sus matrices de definición solo son necesarios dos de sus parámetros.

Cuadripolos elementales. Configuraciones básicas

- **Dipolo en paralelo.**

$$\begin{cases} u_1 = & \vec{Z}\, i_1 + \vec{Z}\, i_2 \\ u_2 = & \vec{Z}\, i_1 + \vec{Z}\, i_2 \end{cases} \qquad [Z] = \begin{pmatrix} \vec{Z} & \vec{Z} \\ \vec{Z} & \vec{Z} \end{pmatrix}$$

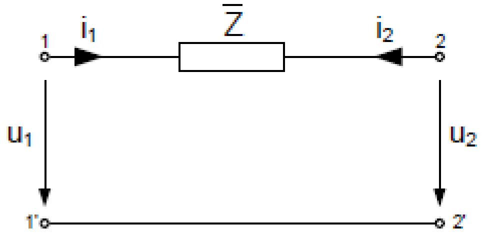
$$[H] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \vec{Y} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [K] = \begin{pmatrix} \vec{Y} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad [A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vec{Y} & 1 \end{pmatrix}$$



- **Dipolo en serie.**

$$\begin{cases} i_1 = & \vec{Y}\, u_1 - \vec{Y}\, u_2 \\ i_2 = & -\vec{Y}\, u_1 + \vec{Y}\, u_2 \end{cases} \qquad [Y] = \begin{pmatrix} \vec{Y} & -\vec{Y} \\ -\vec{Y} & \vec{Y} \end{pmatrix}$$

$$[H] = \begin{pmatrix} \vec{Z} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [K] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \vec{Z} \end{pmatrix} \qquad [A] = \begin{pmatrix} 1 & \vec{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

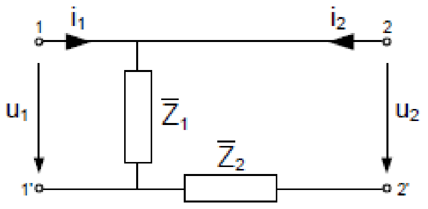


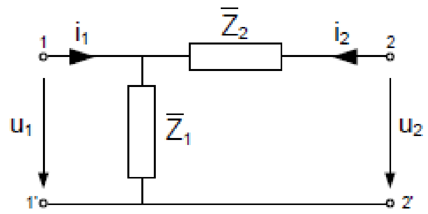
Cuadripolos elementales. Configuraciones básicas

- **Cuadripolo en L y cuadripolo en Γ.**

$$[Z] = \begin{pmatrix} \vec{Z}_1 & \vec{Z}_1 \\ \vec{Z}_1 & \vec{Z}_1 + \vec{Z}_2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad [A] = \begin{pmatrix} 1 & \vec{Z}_2 \\ \dfrac{1}{\vec{Z}_1} & 1 + \dfrac{\vec{Z}_2}{\vec{Z}_1} \end{pmatrix}$$

Como indican ambas matrices, estos dos cuadripolos son recíprocos pero no son simétricos.

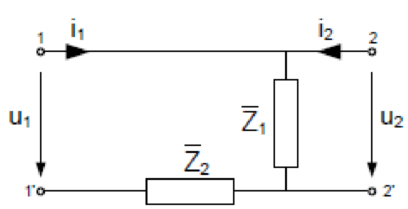


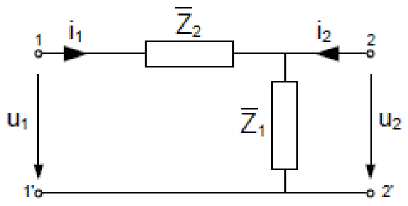


- **Cuadripolo en L invertida y cuadripolo en Γ invertida.**

$$[Z] = \begin{pmatrix} \vec{Z}_1 + \vec{Z}_2 & \vec{Z}_1 \\ \vec{Z}_1 & \vec{Z}_1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad [A] = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{\vec{Z}_1}{\vec{Z}_2} & \vec{Z}_1 \\ \dfrac{1}{\vec{Z}_2} & 1 \end{pmatrix}$$

Como en el caso anterior, con estas matrices se deduce que estos dos cuadripolos son recíprocos pero no son simétricos.



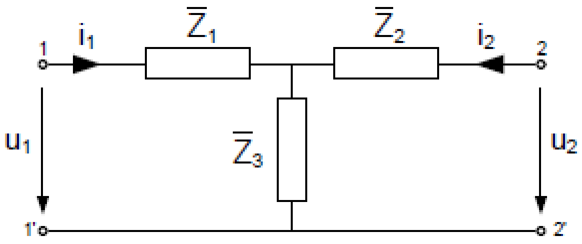


Cuadripolos elementales. Configuraciones básicas

- **Cuadripolo en T.**

$$\begin{cases} u_1 = & (\vec{Z}_1 + \vec{Z}_3)\, i_1 + \vec{Z}_3\, i_2 \\ u_2 = & \vec{Z}_3\, i_1 + (\vec{Z}_2 + \vec{Z}_3)\, i_2 \end{cases} \qquad [Z] = \begin{pmatrix} \vec{Z}_1 + \vec{Z}_3 & \vec{Z}_3 \\ \vec{Z}_3 & \vec{Z}_2 + \vec{Z}_3 \end{pmatrix}$$

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{\vec{Z}_1}{\vec{Z}_3} & \vec{Z}_1 + \vec{Z}_2 + \dfrac{\vec{Z}_1\,\vec{Z}_2}{\vec{Z}_3} \\ \dfrac{1}{\vec{Z}_3} & 1 + \dfrac{\vec{Z}_2}{\vec{Z}_3} \end{pmatrix}$$

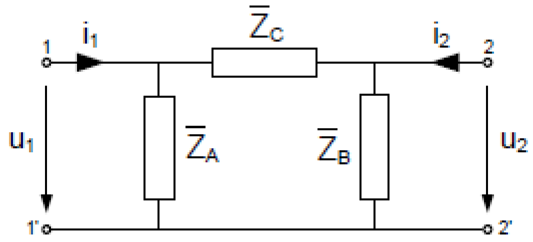


- **Cuadripolo en Π.**

$$\begin{cases} i_1 = & (\vec{Y}_A + \vec{Y}_C)\, u_1 - \vec{Y}_C\, u_2 \\ i_2 = & -\vec{Y}_C\, u_1 + (\vec{Y}_B + \vec{Y}_C)\, u_2 \end{cases} \qquad [Y] = \begin{pmatrix} \vec{Y}_A + \vec{Y}_C & -\vec{Y}_C \\ -\vec{Y}_C & \vec{Y}_B + \vec{Y}_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\vec{Z}_A + \vec{Z}_C}{\vec{Z}_A\,\vec{Z}_C} & \dfrac{-1}{\vec{Z}_C} \\ \dfrac{-1}{\vec{Z}_C} & \dfrac{\vec{Z}_B + \vec{Z}_C}{\vec{Z}_B\,\vec{Z}_C} \end{pmatrix}$$

$$[Z] = [Y]^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{(\vec{Z}_B + \vec{Z}_C)\,\vec{Z}_A}{\vec{Z}_A + \vec{Z}_B + \vec{Z}_C} & \dfrac{\vec{Z}_A\,\vec{Z}_B}{\vec{Z}_A + \vec{Z}_B + \vec{Z}_C} \\ \dfrac{\vec{Z}_A\,\vec{Z}_B}{\vec{Z}_A + \vec{Z}_B + \vec{Z}_C} & \dfrac{(\vec{Z}_A + \vec{Z}_C)\,\vec{Z}_B}{\vec{Z}_A + \vec{Z}_B + \vec{Z}_C} \end{pmatrix}$$

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{\vec{Z}_C}{\vec{Z}_B} & \vec{Z}_C \\ \dfrac{\vec{Z}_A + \vec{Z}_B + \vec{Z}_C}{\vec{Z}_A\,\vec{Z}_B} & 1 + \dfrac{\vec{Z}_C}{\vec{Z}_A} \end{pmatrix}$$

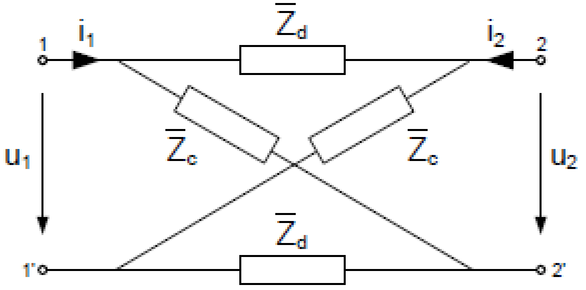


Cuadripolos elementales. Configuraciones básicas

- **Cuadripolo en celosía o en X. Teorema de Bartlett.**

La impedancia $\vec{Z}_d$ se denomina **impedancia directa** y $\vec{Z}_c$ es la **impedancia cruzada**.

$$[Z] = \begin{pmatrix} \dfrac{\vec{Z}_c + \vec{Z}_d}{2} & \dfrac{\vec{Z}_c - \vec{Z}_d}{2} \\ \dfrac{\vec{Z}_c - \vec{Z}_d}{2} & \dfrac{\vec{Z}_c + \vec{Z}_d}{2} \end{pmatrix}$$



Como un cuadripolo simétrico y, por tanto, recíproco queda definido por dos de sus parámetros y como el cuadripolo en X simétrico contiene sólo dos elementos distintos, se deduce que, en general, cualquier cuadripolo simétrico puede representarse por un cuadripolo en X simétrico.

Esta propiedad da lugar al **teorema de Bartlett** que dice que todo cuadripolo lineal y pasivo que tenga simetría física puede representarse por un cuadripolo en X simétrico cuya impedancia directa es la impedancia de entrada en cortocircuito del multipolo que queda al cortar el cuadripolo original por su eje de simetría, y cuya impedancia cruzada es la impedancia de entrada a circuito abierto de ese mismo multipolo mitad. En la figura 5.27.a el cuadripolo CS es un cuadripolo simétrico con simetría física y en la figura 5.27.b se visualiza el teorema de Bartlett.

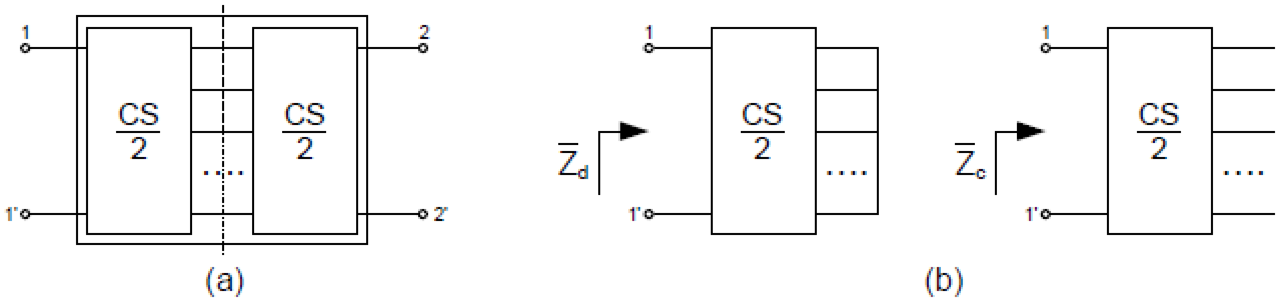


Figura 5.27

Ejercicio 11.4

Sea un cuadripolo formado únicamente por resistencias del que se conoce su matriz de cadena:

$$[A] = \begin{pmatrix} 1,025 & 50 \\ 1,0125 \cdot 10^{-3} & 1,025 \end{pmatrix}$$

Se pide calcular: (a) ¿Es recíproco?, ¿es simétrico?, justifique su respuesta. (b) La ganancia de tensión y la impedancia de entrada a circuito abierto. (b) Su impedancia característica. (c) La atenuación en decibelios. (d) La ganancia de tensión y la impedancia de entrada cuando el cuadripolo está cargado con su impedancia característica. (e) Diseñar su cuadripolo en Π equivalente.

(a) El cuadripolo es recíproco, ya que el determinante de su matriz de cadena [A] es igual a 1, y además es simétrico porque los parámetros A_{11} y A_{22} son iguales.

(b) A circuito abierto ($i_2 = 0$), la ganancia de tensión es:

$$G_U = \left.\frac{u_2}{u_1}\right|_{i_2=0} = \frac{1}{A_{11}} = \frac{1}{1,025} = 0,9756$$

En estas mismas condiciones ($i_2 = 0$), la impedancia de entrada es:

$$\vec{Z}_1 = \left.\frac{u_1}{i_1}\right|_{i_2=0} = \frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{50}{1,0125 \cdot 10^{-3}} = 1012,35\ \Omega$$

La impedancia de entrada es resistiva ya que el cuadripolo, nos dicen, solo contiene resistencias.

(c) Como el cuadripolo es simétrico, su impedancia característica es también resistiva y su valor es (ecuación (5.80)):

$$\vec{Z}_C = \frac{u_2}{-i_2} = \sqrt{\frac{A_{11}}{A_{21}}} = \sqrt{\frac{1,025}{1,0125 \cdot 10^{-3}}} = 222,2\ \Omega$$

En cuanto a la relación entre las tensiones de entrada y de salida:

$$u_1 = A_{11}\, u_2 - A_{12}\, i_2 \qquad \rightarrow \qquad \frac{u_1}{u_2} = A_{11} - A_{12}\,\frac{i_2}{u_2}$$

e introduciendo la definición de impedancia característica, se obtiene que esta relación es:

$$\left.\frac{u_1}{u_2}\right|_{Z_C} = A_{11} + \frac{A_{12}}{\vec{Z}_C} \qquad \rightarrow \qquad \left.\frac{u_1}{u_2}\right|_{Z_C} = 1,025 + \frac{50}{222,22} = 1,25$$

Como el cuadripolo es simétrico este valor también se puede obtener aplicando directamente la ecuación (5.81):

$$\left.\frac{u_1}{u_2}\right|_{Z_C} = A_{11} + \sqrt{A_{11}^2 - 1} = 1,025 + \sqrt{1,025^2 - 1} = 1,25$$

Con lo que la atenuación en decibelios es:

$$At_{dB} = 20 \log \left(\frac{u_1}{u_2}\right) = 20 \log 1,25 = 1,938\ \text{dB}$$

Ejercicio 11.4

(d) Cuando el cuadripolo tiene conectada en su salida su impedancia característica, la ganancia de tensión es la inversa de la relación de tensiones del apartado anterior:

$$G_U = \left.\frac{u_2}{u_1}\right|_{Z_C} = \frac{1}{1,25} = 0,8$$

En cuanto a la impedancia de entrada, ésta es:

$$\vec{Z}_1 = \left.\frac{u_1}{i_1}\right|_{Z_C} = \frac{A_{11}\, u_2 - A_{12}\, i_2}{A_{21}\, u_2 - A_{22}\, i_2}$$

Como el cuadripolo está cargado por su impedancia característica, la relación entre u_2 e i_2 es:

$$u_2 = -\vec{Z}_C\, i_2$$

que sustituida en la ecuación anterior y dando valores se obtiene finalmente:

$$\vec{Z}_1 = \left.\frac{u_1}{i_1}\right|_{Z_C} = \frac{-A_{11}\, \vec{Z}_C\, i_2 - A_{12}\, i_2}{-A_{21}\, \vec{Z}_C\, i_2 - A_{22}\, i_2} = \frac{A_{11}\, \vec{Z}_C + A_{12}}{A_{21}\, \vec{Z}_C + A_{22}} =$$

$$= \frac{1,025 \cdot 222,2 + 50}{1,0125 \cdot 10^{-3} \cdot 222,2 + 1,025} = 222,2\ \Omega$$

Este resultado es el esperado ya que corresponde a la definición de impedancia característica.

(e) Como el cuadripolo es recíproco y simétrico se puede representar mediante un cuadripolo en Π que también es recíproco y simétrico cuyos valores se pueden calcular mediante dos de los cuatro parámetros de su matriz [A]. A partir de la matriz de cadena del cuadripolo en Π dada por la ecuación (5.70) se tiene que:

$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= 1 + \frac{R_C}{R_B} = 1,025 \\ A_{12} &= R_C = 50 \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} R_A &= R_B = 2000\ \Omega \\ R_C &= 50\ \Omega \end{aligned}\right.$$

En la figura 5.33 se muestra este cuadripolo equivalente. Con él (considerándolo como un circuito eléctrico) compruebe todos los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

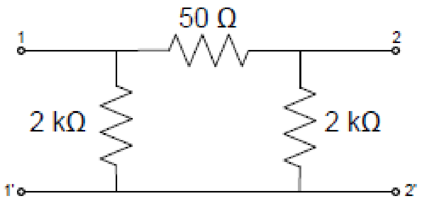


Figura 5.33

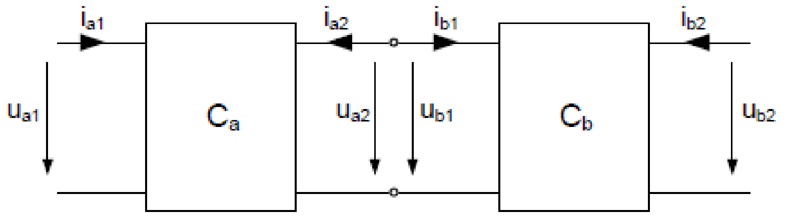
Tema 12

Asociación de cuadripolos. Cuadripolos no recíprocos y cuadripolos activos

Asociación de cuadripolos

Conexión en cascada.

$$\begin{pmatrix} u_{a2} \\ -i_{a2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{b1} \\ i_{b1} \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} u_{a1} \\ i_{a1} \end{pmatrix} = [A_a] \cdot \begin{pmatrix} u_{a2} \\ -i_{a2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} u_{b1} \\ i_{b1} \end{pmatrix} = [A_b] \cdot \begin{pmatrix} u_{b2} \\ -i_{b2} \end{pmatrix}$$

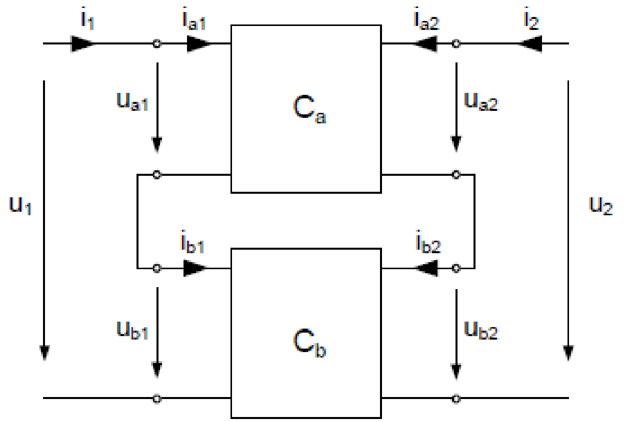
$$\begin{pmatrix} u_{a1} \\ i_{a1} \end{pmatrix} = [A_a] \cdot \begin{pmatrix} u_{a2} \\ -i_{a2} \end{pmatrix} = [A_a] \cdot [A_b] \cdot \begin{pmatrix} u_{b2} \\ -i_{b2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{a1} \\ i_{a1} \end{pmatrix} = [A] \cdot \begin{pmatrix} u_{b2} \\ -i_{b2} \end{pmatrix} \qquad [A] = [A_a] \cdot [A_b]$$

Conexión en serie.

$$\begin{pmatrix} i_{a1} \\ i_{a2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{b1} \\ i_{b2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{a1} \\ u_{a2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{b1} \\ u_{b2} \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} u_{a1} \\ u_{a2} \end{pmatrix} = [Z_a] \cdot \begin{pmatrix} i_{a1} \\ i_{a2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} u_{b1} \\ u_{b2} \end{pmatrix} = [Z_b] \cdot \begin{pmatrix} i_{b1} \\ i_{b2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = [Z_a] \cdot \begin{pmatrix} i_{a1} \\ i_{a2} \end{pmatrix} + [Z_b] \cdot \begin{pmatrix} i_{b1} \\ i_{b2} \end{pmatrix} = ([Z_a] + [Z_b]) \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

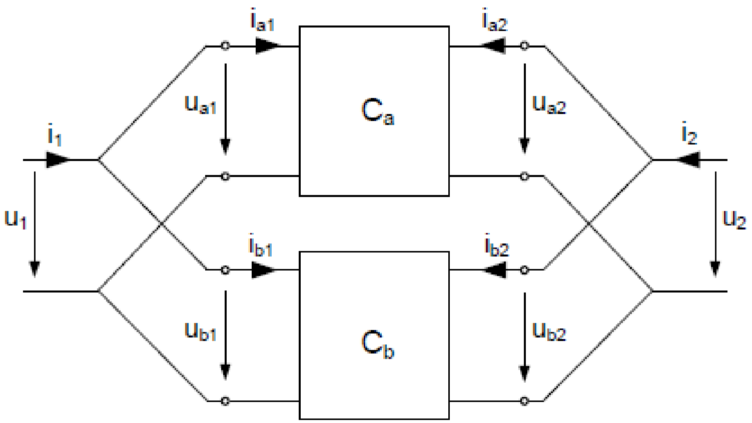
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = [Z] \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \qquad [Z] = [Z_a] + [Z_b]$$

Asociación de cuadripolos

Conexión en paralelo.

$$\begin{pmatrix} u_{a1} \\ u_{a2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{b1} \\ u_{b2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{a1} \\ i_{a2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_{b1} \\ i_{b2} \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} i_{a1} \\ i_{a2} \end{pmatrix} = [Y_a] \cdot \begin{pmatrix} u_{a1} \\ u_{a2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} i_{b1} \\ i_{b2} \end{pmatrix} = [Y_b] \cdot \begin{pmatrix} u_{b1} \\ u_{b2} \end{pmatrix}$$

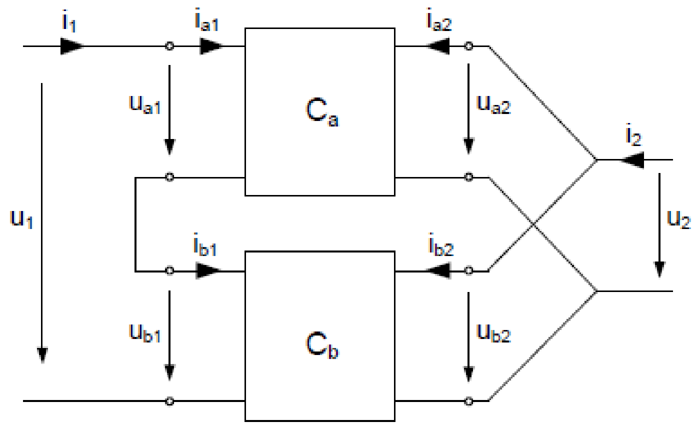
$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = [Y_a] \cdot \begin{pmatrix} u_{a1} \\ u_{a2} \end{pmatrix} + [Y_b] \cdot \begin{pmatrix} u_{b1} \\ u_{b2} \end{pmatrix} = ([Y_a] + [Y_b]) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = [Y] \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad [Y] = [Y_a] + [Y_b]$$

Conexión en serie-paralelo.

$$\begin{pmatrix} i_{a1} \\ u_{a2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{b1} \\ u_{b2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{a1} \\ i_{a2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{b1} \\ i_{b2} \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = [H_a] \cdot \begin{pmatrix} i_{a1} \\ u_{a2} \end{pmatrix} + [H_b] \cdot \begin{pmatrix} i_{b1} \\ u_{b2} \end{pmatrix} = ([H_a] + [H_b]) \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

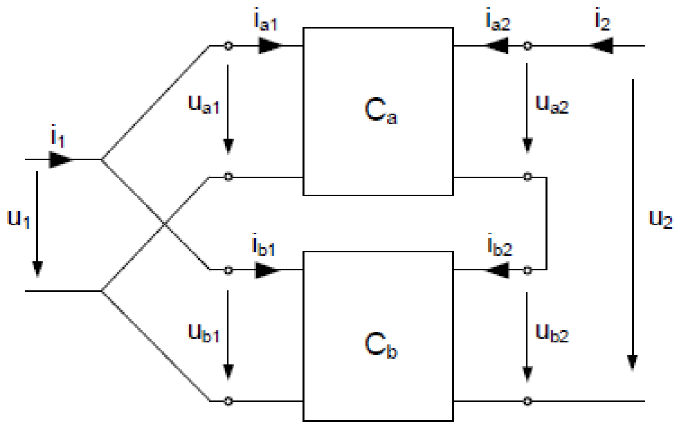
$$[H] = [H_a] + [H_b]$$

Asociación de cuadripolos

Conexión en paralelo-serie.

$$\begin{pmatrix} u_{a1} \\ i_{a2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{b1} \\ i_{b2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{a1} \\ u_{a2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_{b1} \\ u_{b2} \end{pmatrix}$$

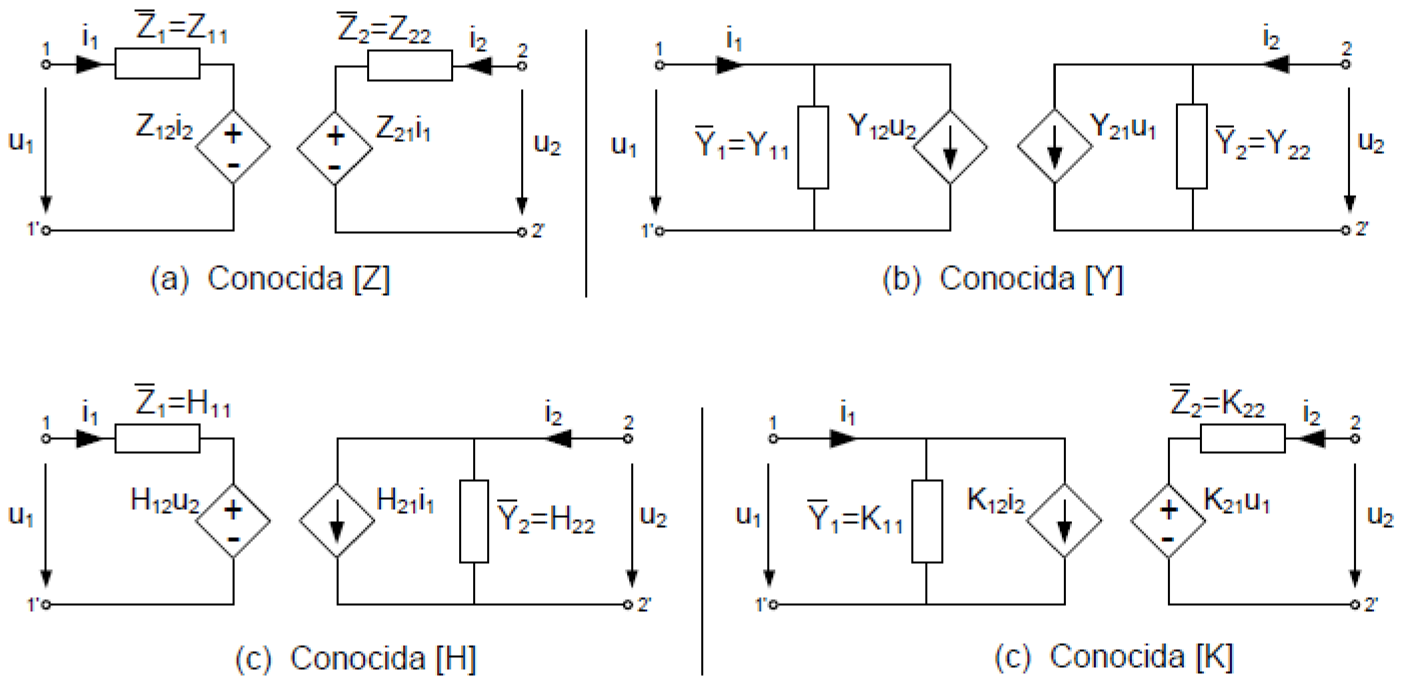


$$\begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = [K_a] \cdot \begin{pmatrix} u_{a1} \\ i_{a2} \end{pmatrix} + [K_b] \cdot \begin{pmatrix} u_{b1} \\ i_{b2} \end{pmatrix} = ([K_a] + [K_b]) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

$$[K] = [K_a] + [K_b]$$

Cuadripolos no recíprocos

Cuando un cuadripolo es recíproco existe una relación entre sus parámetros y que, además, se puede representar mediante un cuadripolo pasivo en T o PI en , que serán simétricos si el cuadripolo original también lo es. Sin embargo, existen cuadripolos en los que no existe ninguna relación entre sus cuatro parámetros por lo que no se pueden representar mediante un cuadripolo con elementos pasivos y hay que incluir fuentes dependientes. Estos cuadripolos son no recíprocos y se representan habitualmente mediante un cuadripolo equivalente con una configuración en T o en PI que incluye una fuente dependiente. Lo más sencillo es utilizar un cuadripolo equivalente constituido por dos puertas sin conexión eléctrica, cada una formada por un elemento pasivo y una fuente dependiente. Esto es inmediato en los casos de conocer una de las matrices [Z], [Y], [H] o [K] del cuadripolo original. En la figura se muestran los cuatro cuadripolos equivalentes posibles de un cuadripolo no recíproco dado, y se utilizará uno u otro según cuál de esas matrices se conoce. Por ejemplo, si se conoce la matriz [H] de un cuadripolo no recíproco, la forma más sencilla que tiene su cuadripolo equivalente es la de la figura c).



(a) Conocida [Z] (b) Conocida [Y]

(c) Conocida [H] (c) Conocida [K]

Cuadripolos con fuentes independientes

Sea el cuadripolo de la figura 5.59.a, que es un cuadripolo activo ya que contiene fuentes independientes en su interior. Este hecho (el que contenga fuentes independientes en su interior) lo indicamos en la figura denominándolo como C.A.

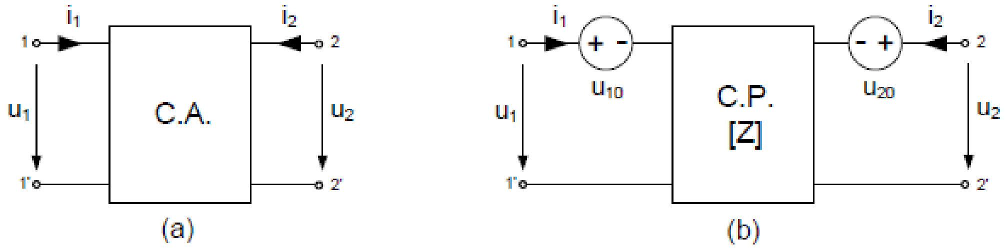


Figura 5.59

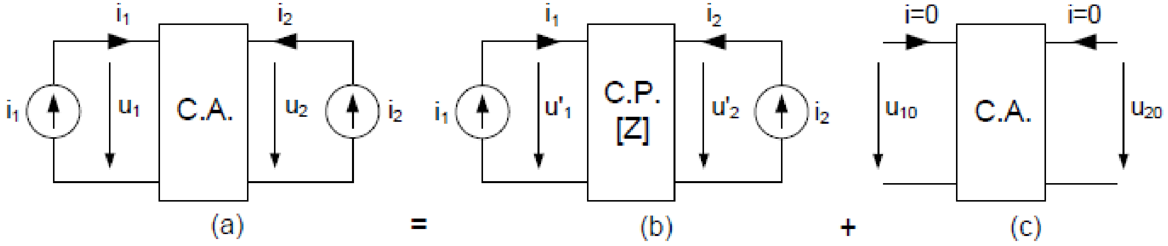


Figura 5.60

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{pmatrix} = [Z] \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{pmatrix} \tag{5.130}$$

La ecuación (5.130) responde al cuadripolo de la figura 5.59.b que es, por tanto, un cuadripolo equivalente del cuadripolo de partida de la figura 5.59.a. A esta representación se la conoce como **cuadripolo equivalente Thevenin** del cuadripolo activo C.A. que está definido por la matriz de impedancias a circuito abierto [Z] del cuadripolo pasivo C.P. y por las tensiones a circuito abierto del cuadripolo activo C.A.

De la misma forma, si se conoce la matriz de admitancias en cortocircuito [Y] del cuadripolo pasivo C.P., se puede hacer el análisis del mismo cuadripolo activo de la figura 5.59.a en términos de admitancias. Ahora las variables independientes del análisis son las tensiones u_1 y u_2; aplicando el teorema de superposición (figura 5.61) se tiene que las intensidades i_1 e i_2 en función de las tensiones u_1 y u_2 en los terminales del cuadripolo son:

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i'_1 \\ i'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_{1cc} \\ i_{2cc} \end{pmatrix} = [Y] \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_{1cc} \\ i_{2cc} \end{pmatrix} \tag{5.131}$$

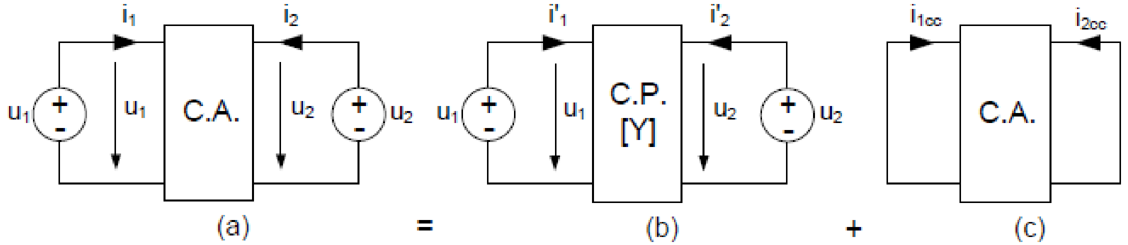


Figura 5.61

Esta ecuación (5.131) responde al cuadripolo de la figura 5.62 que es, por tanto, un cuadripolo equivalente del cuadripolo de partida de la figura 5.59.a. A esta representación se la conoce como **cuadripolo equivalente Norton** del cuadripolo activo C.A.

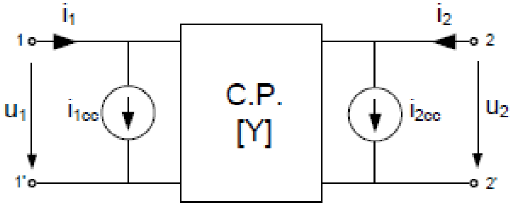


Figura 5.62

Cuadripolos con fuentes independientes

Por último y de forma totalmente análoga, si se conocen las matriz [H] o [K] de parámetros híbridos del cuadripolo pasivo C.P. se obtienen, aplicando el teorema de superposición, los circuitos equivalentes del cuadripolo activo C.A. de la figura 5.59.a que se denominan **cuadripolo equivalente Thevenin-Norton** (figura 5.63.a) y **cuadripolo equivalente Norton-Thevenin** (figura 5.63.b).

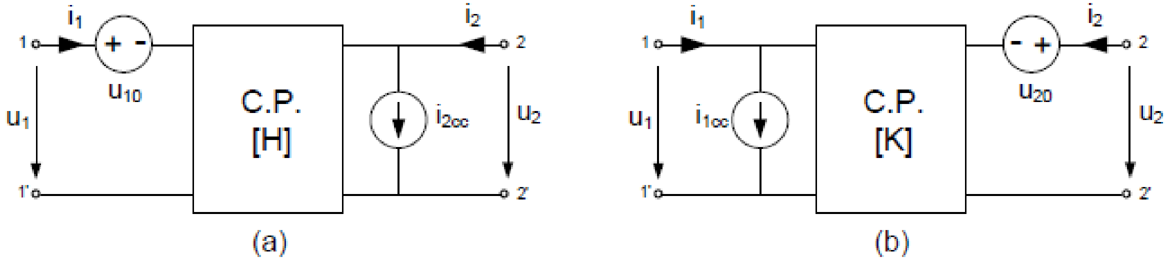


Figura 5.63

Muchas gracias, por su atención.