Modelos avanzados de IO

Tema 4. Programación con incertidumbre

4.1.- Introducción y conceptos básicos
4.2.- Métodos de resolución
4.3.- Aplicaciones
4.4.- Optimización fuzzy (difusa)
4.5.- Sinergia entre temas

4.1.– Introducción y conceptos básicos

Introducción y conceptos básicos

La **programación/optimización con incertidumbre o estocástica** trata de resolver problemas de optimización donde alguno de los parámetros del problema no es determinista, sino que está sujeto a una cierta variabilidad o incertidumbre. Esta variabilidad se puede tratar de diferentes maneras.

Programación/optimización determinista: todos los parámetros del problema son conocidos con certeza. En MBIO todos los modelos eran deterministas.

En programación estocástica alguno de los valores siguen una distribución estadística. En los métodos fuzzy admitiremos cierta flexibilidad en algunos parámetros.

Decisiones del tipo *aquí y ahora*
Las decisiones se toman basándose en información a priori, sin realizar observaciones adicionales.

Recurso
Capacidad de tomar una acción correctora después de que haya ocurrido un suceso aleatorio.

Introducción y conceptos básicos

Problema Lineal Bietapa

1) Se toman hoy un conjunto de decisiones x_1 con valores de los parámetros conocidos (deterministas).
2) Durante la noche se producen sucesos aleatorios (exógenos).
3) Al día siguiente se toman un conjunto de acciones correctoras que mitigan/corrigen los efectos de los sucesos aleatorios sobre las decisiones de hoy.

- Las decisiones de la segunda etapa son los **recursos**.
- La función objetivo asociada a estas decisiones es la función de recursos.
- Depende de las decisiones de la 1ª etapa y de los sucesos aleatorios acaecidos.
- Ejemplo: Vender el pan/bollería al día siguiente a mitad de precio.

No anticipatividad
Las decisiones en un momento dado dependen **exclusivamente** de la información disponible en ese momento. No pueden utilizar información futura.

Introducción y conceptos básicos

Newsvendor Problem (problema del vendedor de periódicos)

Un vendedor de periódicos compra cada día un cierto número de periódicos. Vende tantos periódicos como puede. El exceso es una pérdida (problema de un solo periodo).
Comprar pocos periódicos tiene un coste de oportunidad asociado (margen no logrado por quiebre de stock), sin contar a los posibles clientes perdidos para siempre. La demanda cambia cada día (incertidumbre). ¿Cuántos periódicos debe comprar para maximizar las ganancias?

Q: cantidad de pedido (nº de periódicos que pide)
C(Q): coste total esperado en función del tamaño de pedido
D: demanda de periódicos
c_0: coste unitario del producto excedente (le sobran periódicos que no vende)
c_u: coste unitario del producto faltante (quieren comprarle y no tiene)
f(x): función de distribución de probabilidad de la demanda
F(x): función de distribución acumulada de la demanda (probabilidad de que la demanda sea menor o igual a x)

Introducción y conceptos básicos

Newsvendor Problem (problema del vendedor de periódicos)

Q: cantidad de pedido (nº de periódicos que pide) D: demanda de periódicos
c_0: coste unitario del producto excedente; c_u: coste unitario del producto faltante
f(x): func de distribución de prob de la demanda; F(x): func de distribución acumulada de la demanda
C(Q): coste total esperado en función del tamaño de pedido

El nº de unidades de producto sobrantes al final del día son $\begin{cases} Q - D \; si \; Q \geq D \\ 0 \; si Q < D \end{cases}$
La función de coste esperado se define como

$$C(Q) = C(Q|Q \geq D) + C(Q|Q < D) = c_0 \int_0^Q (Q - x) f(x) dx + c_u \int_Q^{+\infty} (x - Q) f(x) dx$$

Para encontrar el mínimo se deriva e iguala a 0

$$0 = \frac{dC(Q)}{dx} = c_0 \int_0^Q 1 \cdot f(x) dx + c_u \int_Q^{+\infty} (-1)\, f(x) dx = c_0 F(Q) - c_u(1 - F(Q))$$

La solución óptima Q* es aquella que cumpla la ecuación

$$F(Q*) = \frac{c_u}{c_0 + c_u}$$

Introducción y conceptos básicos

Newsvendor Problem (problema del vendedor de periódicos)

Q: cantidad de pedido (nº de periódicos que pide) D: demanda de periódicos
c_0: coste unitario del producto excedente; c_u: coste unitario del producto faltante
f(x): func de distribución de prob de la demanda; F(x): func de distribución acumulada de la demanda
C(Q): coste total esperado en función del tamaño de pedido

La solución óptima Q* es aquella que cumpla la ecuación $F(Q*) = \frac{c_u}{c_0 + c_u}$

Ejemplo:
El coste de un periódico es 1.5€ pero puede devolverlo al editor por 0.9€.
Cada cliente que llega a por un periódico y no hay implica un coste de 2.5€ para el vendedor.
Calcular la solución óptima si variable sigue una distribución

a) U(50,150)
b) N(50,15)

Introducción y conceptos básicos

Escenario

Valor concreto que toma cada parámetro del problema. En particular, comprende el valor que toma cada parámetro sujeto a variabilidad.

Dicho de otra manera, es una posible evolución de los parámetros del problema. Cada escenario tiene su probabilidad de que ocurra (en distribuciones discretas o discretizaciones de las distribuciones).

Árbol de escenarios
Representación de un conjunto de escenarios, cada rama será una posible evolución del sistema.

Optimización robusta

Trata de encontrar un equilibrio entre la optimalidad y la factibilidad para la mayoría de escenarios.

4.2.– Métodos de resolución

Métodos de resolución

Métodos de decomposición

Aprovechan la estructura del problema para descomponerlo y resolver sus partes.

Desarrollo explícito por escenarios

Se desarrollan todos los escenarios explícitamente y se optimiza teniéndolos en cuenta.

Discretización de distribuciones estadísticas

Cuando algún parámetro sigue una distribución estadística continua, se discretiza esta distribución, y a continuación se resuelve el problema por desarrollo explícito por escenarios.

Desarrollo explícito por escenarios

Empezamos suponiendo que la variabilidad está en los coeficientes de la función objetivo. Supongamos también que todos los parámetros siguen una **distribución discreta**. Llamamos K al número de escenarios, p_k a la probabilidad del escenario k.
Denominamos $f_k(x)$ a la función objetivo bajo el escenario k.
Podemos obtener diferentes soluciones óptimas dependiendo de la función objetivo que optimicemos. Que sea s.o. con una función objetivo NO significa que sea 'la mejor solución' o la solución a implementar. Para decidir cuál implementar hay que decidir qué es lo más importante para el decisor.

Escenario optimista: Es aquel escenario donde los coeficientes de la función objetivo son más favorables para nuestros intereses. Por ejemplo, en una función lineal si estamos maximizando y los coeficientes son positivos, los más favorables son los más altos.
Escenario pesimista: Coeficientes de la función objetivo más desfavorables para nuestros intereses.
Esperanza o valor esperado de la función: La media ponderada de las funciones bajo todos los escenarios. Las ponderaciones se realizan usando las probabilidades.

$$E[f(x)] = \sum_{i=1}^{k} p_k \cdot f_k(x)$$

Desarrollo explícito por escenarios

Solución óptima bajo el escenario optimista: Es la solución óptima que se obtiene de optimizar la función objetivo del escenario optimista.
Solución óptima bajo el escenario pesimista: Es la solución óptima que se obtiene de optimizar la función objetivo del escenario pesimista.
Solución óptima bajo la esperanza: Es la solución óptima que se obtiene de optimizar la esperanza de la función objetivo.

Una vez tenemos calculada una s.o. habiendo usado una función objetivo u otra podemos evaluarlas utilizando otros escenarios o la media ponderada.
Evaluación de una solución S usando el escenario optimista: Es $f_{optimista}(S)$, es decir, sustituir los valores de la solución S en la función objetivo del escenario optimista.
Evaluación de una solución S usando el escenario pesimista: Es $f_{pesimista}(S)$, es decir, sustituir los valores de la solución S en la función objetivo del escenario pesimista.
Evaluación de una solución S usando la media ponderada: Es E[f(S)], es decir, sustituir los valores de la solución S en la media ponderada de todas las funciones.

Ejemplo: Viaje casa – uni, minimizando el tiempo de trayecto

Desarrollo explícito por escenarios

Ejemplo. Una empresa produce dos productos con cantidades x, y, con dos restricciones de recurso.
El beneficio del primer producto es 3 con probabilidad 0.3 y 5 con probabilidad 0.7
El beneficio del 2º producto es 1 con probabilidad 0.2 y 10 con probabilidad 0.8

Escenario optimista: $f_{opt}(x,y) = 5x + 10y$

Escenario pesimista: $f_{pes}(x,y) = 3x + y$

$$E[f(x)] = 0.06(3x+y) + 0.24(3x+10y) + 0.14(5x+y) + 0.56(5x+10y)$$

Modelo con la esperanza

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 0.06(3x+y) + 0.24(3x+10y) + 0.14(5x+y) + 0.56(5x+10y) \\ \text{s.a.} \quad & 2x + y \leq 10 \\ & 5x + 3y \leq 15 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Calcula la solución óptima bajo el escenario optimista, pesimista y usando la esperanza. Además, evalúa las s.o. obtenidas usando los otros escenarios (escenario optimista, pesimista y usando la esperanza).

Desarrollo explícito por escenarios

Ejemplo. Una empresa produce dos productos con cantidades x, y, con dos restricciones de recurso.
El beneficio del primer producto es 3 con probabilidad 0.3 y 5 con probabilidad 0.7
El beneficio del 2º producto es 1 con probabilidad 0.2 y 10 con probabilidad 0.8

S.o. bajo el escenario optimista: $S_{opt} = (0,5)$
S.o. bajo el escenario pesimista: $S_{pes} = (3,0)$
S.o. bajo la esperanza : $S_{esp} = (0,5) = S_{opt}$.

	f_{opt}	f_{pes}	$E[f(x)]$
$S_{opt} = (0,5)$	50	5	41
$S_{pes} = (3,0)$	15	9	13.2
(2,1.66)	26.67	7.67	22.47

1) ¿Qué solución escogeríamos?
2) Diferencias y similitudes con multiobjetivo.

Desarrollo explícito por escenarios

Ejemplo. Una empresa produce dos productos con cantidades x, y, con dos restricciones de recurso.
El beneficio del 1er producto sigue una uniforme [3,4]
El beneficio del 2º producto sigue una uniforme [4,10]

1. Escoger K.
2. Calcular K escenarios aleatorios
    2.1. Consideramos el parámetro i, i=1,…,n.
    2.2. Generar un número aleatorio de la distribución para cada parámetro i
    2.3. El escenario k es el vector c con la realización de cada parámetro.
    2.4. Construimos f_k, la función bajo el escenario k.
3. El problema de optimización a resolver es equivalente al resuelto con las distribuciones discretas.

Desarrollo explícito por escenarios

Ejemplo. Una empresa produce dos productos con cantidades x, y, con dos restricciones de recurso.
El beneficio del 1er producto sigue una uniforme [3,4]
El beneficio del 2º producto sigue una uniforme [4,10]

Calculamos 10 escenarios aleatorios, y al calcular un número de cada distribución nos sale

1. (3.2,7.1), 2. (3.4,5.3), 3. (3.8,4.9), 4. (3.2,9.5), 5. (3.9,9.2),
6. (3.6,7.4), 7. (3.3,4.5), 8. (3.4,8.1), 9. (3.4, 7.6), 10. (3.2,8.7)

Obtenemos el siguiente modelo. La solución obtenida no tiene por qué ser la óptima para todos los escenarios. Además, si en las restricciones hay incertidumbre, la solución obtenida no tiene por qué ser factible para todos los escenarios.

$$\text{Max } 0.1\cdot[\, (3.2x+7.1y) + (3.4x+5.3y) + \ldots + (3.2x+8.7y)]$$

$$\text{s.a.} \quad \mathbf{x} \in S$$

4.3.– Aplicaciones

PERT

El curso pasado vimos los proyectos y cómo trabajar con ellos cuando los datos son deterministas. En este apartado vemos una manera de trabajar cuando las duraciones siguen una distribución.

PERT = Program Evaluation and Review Techniques, inventado en 1957 en USA como parte del proyecto Polaris de misil balístico móvil lanzado desde submarino.

Se define:

$t_{op}(i)$ = tiempo optimista, menor tiempo que puede durar la actividad i

$t_{mp}(i)$ = tiempo más probable que puede durar la actividad i

$t_{pe}(i)$ = tiempo pesimista, mayor tiempo que puede durar la actividad i

$t_{es}(i)$ = tiempo esperado, la media del tiempo que puede durar la actividad i

Se supone que la duración de una actividad sigue una distribución B de Euler. Por tanto, el tiempo esperado y la varianza se calculan con las fórmulas:

$$t_{es}(i) = \frac{t_{op} + 4t_{mp} + t_{pe}}{6} \qquad \sigma^2(i) = \left(\frac{t_{pe} - t_{op}}{6}\right)^2$$

PERT (II)

Se calcula los tiempos más tempranos y tardíos de las actividades con las duraciones esperadas. A continuación se calcula el camino crítico.
La duración esperada del proyecto es una variable aleatoria que aproxima a la distribución normal. Esta aproximación es buena cuando el número de tareas > 30. Para menos de ese número deberíamos emplear la distribución de Student, pero por simplicidad usaremos también la normal.
La media empleada es la longitud esperada del proyecto, y la varianza es la suma de varianzas de las actividades críticas.

La probabilidad de que el proyecto se termine antes de una duración dada t_0, si T es la longitud del proyecto, $\bar{T}$ es su media y σ_T es la desviación estándar de esa longitud, está dada por:

$P(T \leq t_0) = P(Z \leq z_0)$, donde Z sigue una N(0,1) y

$$z_0 = \frac{t_0 - \bar{T}}{\sigma_T}$$

PERT (III)

Ejemplo
Supongamos que el camino crítico de un proyecto está formado por la siguientes actividades

Actividad	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Duración optimista	3	4	3	4	1	2
Duración más probable	5	7	4	7	4	3
Duración pesimista	7	9	7	10	5	6

a) Calcular la probabilidad de acabar el proyecto en 30 días o antes.
b) Queremos dar un día en el que tengamos la certeza al 99% de haber acabado. ¿Qué día sería?

Simulación I

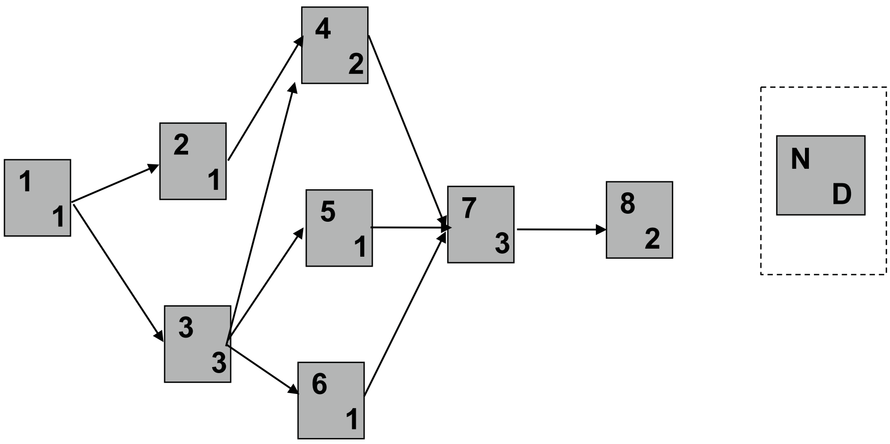
<u>Simulación por eventos discretos</u>

Trata de replicar un sistema dinámico donde interviene la incertidumbre. Se caracteriza porque el sistema se puede determinar si se controla la ocurrencia de un número concreto de eventos. Se calculan escenarios y se calculan los indicadores importantes del sistema para escenario. Permite la toma de decisiones en función de esos indicadores.

Ejemplo1: Servicio de urgencia. Un evento sería la llegada de un paciente. El sistema lo hace pasar por diferentes etapas. Se pueden comparar diferentes políticas de atención para minimizar el tiempo medio de espera (por ejemplo triaje). Las variables aleatorias son las llegadas y las duraciones de las atenciones.

Ejemplo2: Simulación de la duración de un proyecto. Los eventos son los inicios de las actividades. Conociendo cuando comienza cada actividad se puede calcular cuando tarda el proyecto. Además, si no consideramos recursos podemos calcular el inicio como el máximo de los finales de sus predecesoras.

Simulación II

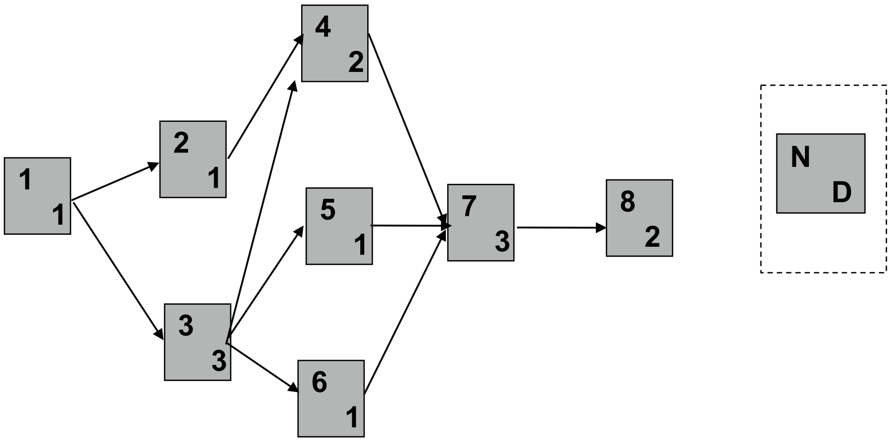


Mediante el Excel podemos simular las duraciones de las actividades, si siguen alguna distribución estocástica. Para calcular el inicio de una actividad, usaremos la fórmula Inicio(i) = max { finales(j); j predecesora de i }.

Para calcular el fin usaremos Fin(i) = Inicio(i) + duración(i).

Calcularemos el makespan esperado del proyecto (longitud). También podemos calcular probabilidades acerca de ese makespan, Prob($T \leq k$) , Prob($k1 \leq T \leq k2$), etc

Simulación II



b) La longitud esperada actual del proyecto es demasiado larga. Tenemos cierto presupuesto para reducir la media de una actividad en una unidad (que no sea ni la uno ni la 8). ¿Cuál escogeríamos? ¿Cuánto se reduce en media la longitud?

Optimización de carteras

Un inversor debe invertir medio millón de euros. Ha seleccionado siete activos para distribuir la inversión con las características que se muestran en la tabla a continuación. Su objetivo es maximizar el rendimiento. Además, para evitar situaciones aún más inesperadas, quiere que la inversión en renta variable sea como máximo el doble de la inversión en renta fija.

Activo	Tipo rendimiento	Divisa	Rentabilidad optimista	Rentabilidad pesimista
Bonos del tesoro de EE.UU.	Fijo	Dólar	3%	1%
Acciones Microsoft	Variable	Dólar	12%	-5%
Bonos Alemania	Fijo	Euro	2%	2%
Acciones France Telecom	Variable	Euro	15%	-10%
Bonos del tesoro español	Fijo	Euro	5%	-1%
Acciones Telefónica	Variable	Euro	20%	-12%
Acciones Sony	Variable	Yen	10%	-2%

Calcula la solución óptima bajo el escenario optimista, pesimista y usando la esperanza. Además, evalúa las s.o. obtenidas usando los otros escenarios (escenario optimista, pesimista y usando la esperanza). ¿Cómo escoger la solución a implementar?

4.4.– Optimización fuzzy

Lógica difusa. Conjuntos fuzzy.

El objetivo de la lógica difusa es proporcionar las bases del **razonamiento aproximado** utilizando premisas como instrumento para formular el conocimiento.

El pensamiento humano utiliza etiquetas lingüísticas que permiten que los objetos puedan pertenecer a una clase y a otra de forma suave y flexible. Las personas usamos valores de verdad además del verdadero y falso.

En lógica clásica, un conjunto es una colección bien definida de elementos. Es posible determinar para un objeto cualquiera si éste pertenece al conjunto.

Consideramos X un conjunto al que denominaremos universo, cuyos elementos denotaremos como x. En la teoría clásica de conjuntos, un conjunto se define a partir de la **función característica**

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x \in A \\ 0, & si\ x \notin A \end{cases}$$

Lógica difusa. Conjuntos fuzzy.

X = {a,e,i,o,u}. A = {a,i,u}. Función característica:

$f_A(a)=1$, $f_A(e)=0$, $f_A(i)=1$, $f_A(o)=0$, $f_A(u)=1$

A es equivalente a {(a,1), (e,0), (i,1), (o,0), (u,1) }

Función de **pertenencia** $\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]$
$x \cdots > \mu_A(x)$

$\tilde{A}$ = {(a,0.7), (e,0), (i,1), (o,0.2), (u,1) }

Al conjunto $\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}$ se le llama conjunto fuzzy (borroso o difuso)

Lógica difusa. Conjuntos fuzzy.

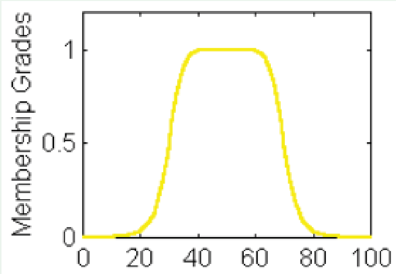
Ejemplo: ¿Cuándo una persona es alta? Alguien con 1.80 es más alta que alguien que mida 1.70. Pero tampoco podemos decir categóricamente que la que mide 1.70 no sea nada alta. Tiene más sentido definir una función de pertenencia

$\mu(2.00)=1$, $\mu(1.90)=1$, $\mu(1.80)=0.9$, $\mu(1.70)=0.7$, …. $\mu(1.50)=0$, $\mu(1.40)=0$ …

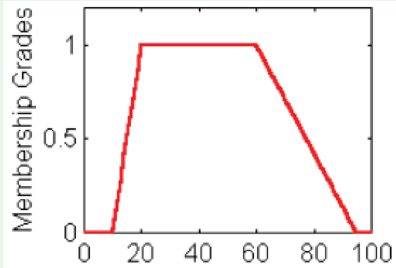
Ejemplos:
“Ser un número cercano a 10.”
“Vámonos a pasar el día a un sitio cerca de Valencia.”
“He sacado buena nota en el examen.”
“Los trabajadores realizarán una jornada de 8 horas.”

Es una extensión del concepto de función característica al de función de pertenencia, μ_A, para que los valores asignados a los elementos del conjunto caigan en un rango particular, y así indicar el grado de pertenencia de los elementos a ese conjunto.

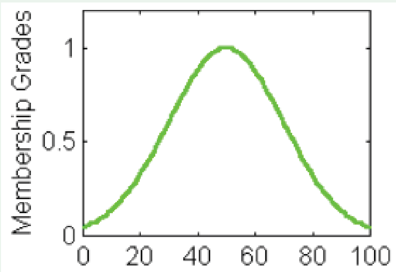
En muchas ocasiones podremos dibujar la función para comprenderla mejor. A partir de ese dibujo se puede calcular la función.



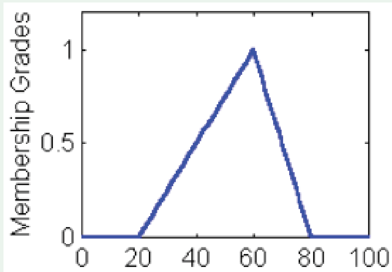
$$\mu(x)=\frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{b}\right|^{2b}}$$



$$\mu(x)=\max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a},1,\frac{d-x}{d-c}\right),0\right)$$



$$\mu(x)=e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$$



$$\mu(x)=\max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a},\frac{c-x}{c-b}\right),0\right)$$

Programación Lineal fuzzy (1er caso)

Sólo vamos a ver algunos de los muchos ejemplos y métodos existentes.

Ejemplo

Una empresa puede fabricar tres tipos de productos A, B, C. En las previsiones hechas para el próximo mes, se estima que el presupuesto mensual es aproximadamente 1200 unidades monetarias (u.m.) y que su capacidad de almacenaje de materia prima está alrededor de 1500 toneladas. Entre todos los productos debemos fabricar al menos 300 unidades. En la tabla siguiente se expresan los costes, las necesidades de materias primas y los beneficios por cada tm de los tres productos.

	A	B	C
Coste (u.m.)/ Tm producto	6	3	4
Tm de recurso/Tm producto	5	4	5
Beneficio (u.m.) por Tm de producto	30	41	46

Determina la producción que hace máximo el beneficio

Programación Lineal fuzzy (1er caso)

Llamamos x_i = tm producidas del producto i =1,2,3 (A,B,C). Si los datos son deterministas tenemos el siguiente modelo

Max 30x1 + 41x2 + 46x3

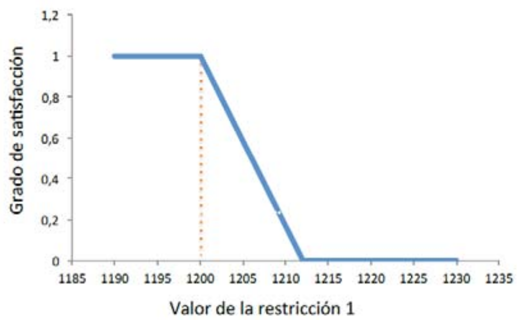
s.a. 6x1 + 3x2 + 4x3 $\leq$ 1200 (presupuesto)
5x1 + 4x2 + 5x3 $\leq$ 1500 (cap almacenaje mat prima)
x1 + x2 + x3 $\geq$ 300 (fabricación total)
x1, x2, x3 $\geq$ 0

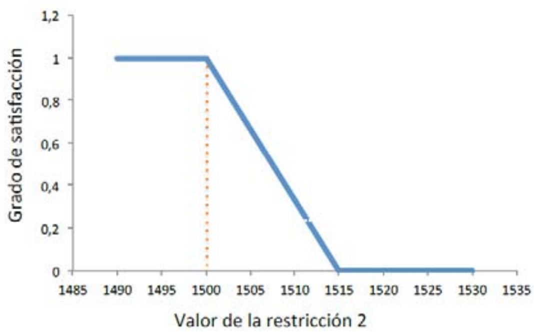
La solución óptima del problema es (0, 375, 0) y el valor óptimo es 15375 u.m.

Vamos a estudiar la incertidumbre de otra manera. Suponemos que tenemos cierta **flexibilidad** en los lados derechos. Podemos cambiarlos, pero eso conlleva **algo negativo** (incomodidad, exigencia continua, bajada de calidad, insatisfacción, …). Por tanto, preferimos no cambiarlos salvo que mejoremos la función objetivo. Queremos estudiar cuáles necesitamos cambiar obligatoriamente.

Programación Lineal fuzzy (1er caso)

Restricciones inciertas:
Si consideramos que las restricciones podrían incumplirse ligeramente, el problema se plantea asignando una tolerancia a cada restricción,
Tolerancia para presupuesto = p1, tolerancia para capacidad = p2
Vamos a superar las tolerancias con un 1% de los lados derechos b_i, p1=15, p2=12. Expresando esta incertidumbre como funciones de pertenencia lineales:





¿Cómo expresar esto matemáticamente?

Programación Lineal fuzzy (1^{er} caso)

Partimos de un modelo de PL en la siguiente forma

Max $c^T x$

s.a. $Ax \le b$

$x \ge 0$

$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, A matriz técnica mxn
$b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Tenemos n variables y m restricciones

Vamos a tratar la incertidumbre en diferentes casos. El primero ocurre en las restricciones, permitimos incumplirlas 'un poco' si conseguimos mejorar el valor óptimo.

Max $c^T x$

s.a. $Ax \lesssim b$

$x \ge 0$

El problema a resolver es:

Max $c^T x$

s.a. $\mu_{\widetilde{R_i}} \ge \alpha, \qquad i = 1, \ldots, m$

$x \ge 0$

Donde $\alpha = \min\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, siendo α_i el grado de satisfacción de la i-ésima restricción i =1, …, m y la función μ calcula si se satisface la restricción en términos fuzzy.

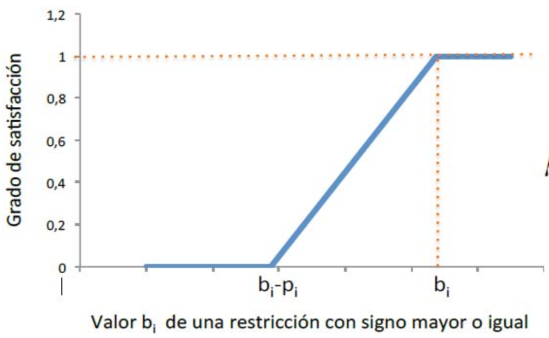
Programación Lineal fuzzy (1^{er} caso)

Funciones de pertenencia para las restricciones

Según sea el signo de la desigualdad que aparezca en la restricción se tienen los dos casos siguientes.

a) Si la restricción es de mayor o igual.

Como la función de pertenencia es lineal y queremos expresar que $\mu_{\widetilde{R_i}} \ge \alpha$
Consideramos una tolerancia de p_i. La 'z' representa el lado izquierdo de la restricción.



$$\mu_{\tilde{R}_i}(z) = \begin{cases} 0, & z < b_i - p_i \\ \dfrac{z - b_i + p_i}{p_i}, & b_i - p_i \le z \le b_i \\ 1, & z > b_i \end{cases}$$

Programación Lineal fuzzy (1^{er} caso)

$\mu_{\widetilde{R_i}} \geq \alpha$ *significa* $\dfrac{z - b_i + p_i}{p_i} \geq \alpha.$ Despejando z se tiene

$$z \geq b_i - p_i(1-\alpha)$$

Ejemplo 1:
Si a la restricción $30x_1+41x_2+46x_3 \geq 1500$

Le damos una tolerancia p=50, obtenemos

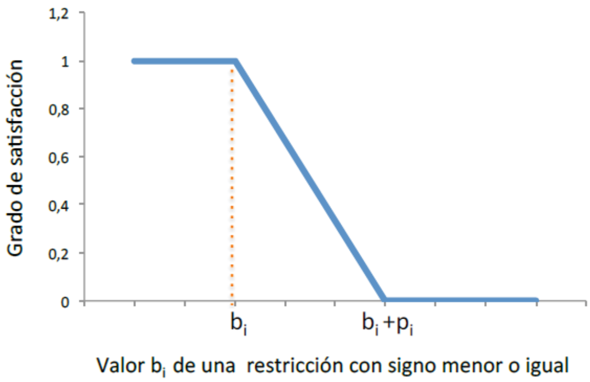
$30x_1+41x_2+46x_3 \geq 1500-50(1-\alpha)$

Programación Lineal fuzzy (1^{er} caso)

Funciones de pertenencia para las restricciones

b) Si la restricción es de menor o igual.

Como la función de pertenencia es lineal y queremos expresar que $\mu_{\widetilde{R_i}} \geq \alpha$



$$\mu_{\tilde{R}_i}(z) = \begin{cases} 1, & z < b_i \\ \dfrac{-z + b_i + p_i}{p_i}, & b_i \leq z \leq b_i + p_i \\ 0, & z > b_i + p_i \end{cases}$$

Programación Lineal fuzzy (1^{er} caso)

$\mu_{\widetilde{R_i}} \geq \alpha$ *significa* $\frac{-z + b_i + p_i}{p_i} \geq \alpha.$ Despejando z se tiene

$$z \leq b_i + p_i(1 - \alpha)$$

Ejemplo 1:
Si a la restricción $30x_1+41x_2+46x_3 \leq 1500$

Le damos una tolerancia p=50, obtenemos

$30x_1+41x_2+46x_3 \leq 1500+50(1-\alpha)$

Programación Lineal fuzzy (1^{er} caso)

Por tanto el modelo que seguiremos es el de Verdegay,

Max/Min $c^T x$

s.a. $g(x) \leq b_1$
$g(x) \geq b_2$
$g(x) = b_3$

Max/Min $c^T x$

s.a. $g_1(x) \leq b_1 + p_1(1- \alpha)$
$g_2(x) \geq b_2 - p_2(1- \alpha)$
$g_3(x) \leq b_3 + p_3(1- \alpha)$
$g_3(x) \geq b_3 - p_3(1- \alpha)$
…
$0 \leq \alpha \leq 1$

Donde $p=(p_1,\ldots,p_m)$ es el vector de tolerancias y $\alpha = \min\{\alpha_1,\ldots, \alpha_m\}$, siendo α_i el grado de satisfacción de la i-ésima restricción i =1,…,m

Programación Lineal fuzzy (1er caso)

Recordemos que el modelo original era el siguiente:

Max $30x1 + 41x2 + 46x3$ (beneficio)

s.a. $6x1 + 3x2 + 4x3 \leq 1200$ (presupuesto)
$5x1 + 4x2 + 5x3 \leq 1500$ (cap almacenaje mat prima)
$x1 + x2 + x3 \geq 300$ (fabricación total)
$x1, x2, x3 \geq 0$

Vamos a suponer unas tolerancias del 10%.

Programación Lineal fuzzy (1er caso)

El modelo es el siguiente:

La solución óptima del problema es α **= 0**, X* = (0, 378.75, 0) y el valor óptimo es 15528.75 u.m.

Max $30x1 + 41x2 + 46x3$

s.a. $6x1 + 3x2 + 4x3 \leq 1200 + 12(1-\alpha)$
$5x1 + 4x2 + 5x3 \leq 1500 + 15(1-\alpha)$
$x1 + x2 + x3 \geq 300 - 3(1-\alpha)$
$\alpha \leq 1$
$\alpha, x1, x2, x3 \geq 0$

Row	Slack or Surplus
1	15528.75
2	75.75000
3	0.000000
4	81.75000
5	1.000000

En un principio, a cambio de superar las restricciones presupuestarias en 12 u.m., de 15 u.m. de materia prima usadas en un mes y de sólo exigir 297 unidades fabricadas, incrementamos el valor óptimo rígido en 153.75 u.m.
Sin embargo, hay que mirar el slack/surplus para ver si usamos todas las tolerancias. Por ejemplo en la 1ª restricción no usamos nada de la tolerancia.
Por tanto mejoramos el óptimo aumentando 15 la 2ª restricción y nada las otras.

Programación Lineal fuzzy (2º caso)

En el segundo caso tenemos objetivo y restricciones fuzzy. Queremos encontrar un equilibrio entre lo que podemos mejorar la función objetivo dejando todas las tolerancias y esas tolerancias. El objetivo es maximizar nuestra satisfacción, que en parte viene de mejorar la función objetivo y en parte por no usar mucho esas tolerancias.

$\widetilde{Max}$ $c^T x$

s.a. $Ax \ \widetilde{\leq} \ b$
$x \geq 0$

Max α
s.a. $\mu_{\widetilde{O}bj} \geq \alpha$
$\mu_{\widetilde{R_i}} \geq \alpha, \qquad i = 1, \dots, m$
$x \geq 0$
$0 \leq \alpha \leq 1$

Donde $\alpha = \min\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, siendo α_0 el grado de satisfacción del objetvio y α_i el grado de satisfacción de la i-ésima restricción i =1, …, m y la función μ calcula si se satisface la restricción en términos fuzzy.

Programación Lineal fuzzy (2º caso)

Funciones de pertenencia para el objetivo

Depende de si estamos maximizando o minimizando.

a) Si queremos maximizar.

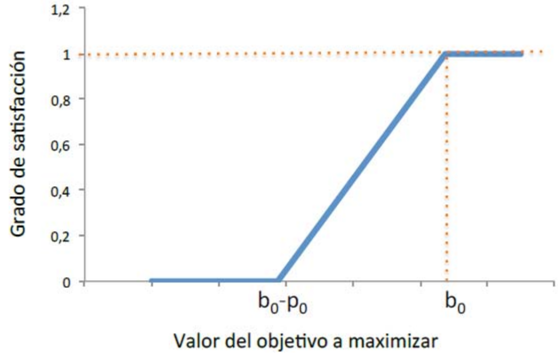
Debemos estimar un valor del objetivo que nos parece plenamente/totalmente satisfactorio, z_0, y una tolerancia p_0, de manera que si el objetivo está por debajo de $z_0 - p_0$ no estaríamos dispuesto a aceptarlo (la satisfacción es 0).

Para conseguir que el objetivo proporciones una satisfacción de al menos alfa hacemos $\mu_{\widetilde{O}bj} \geq \alpha$

Lo que significa que $(z - z_0 + p_0)/p_0 \geq \alpha$
Y despejando tenemos $z \geq z_0 - p_0 (1-\alpha)$

Por lo tanto, de acuerdo con el caso visto anteriormente el objetivo se transforma en la restricción siguiente: $c^t x \geq z_0 - p_0 (1-\alpha)$

Programación Lineal fuzzy (2º caso)



$$\mu_{\tilde{O}bj}(z) = \begin{cases} 0, & z < b_0 - p_0 \\ \dfrac{z - b_0 + p_0}{p_0}, & b_0 - p_0 \le z \le b_0 \\ 1, & z > b_0 \end{cases}$$

$b_0 = z_0$, valor plenamente satisfactorio

Ejemplo 3:
Supongamos que el objetivo es Max $3x_1+4x_2+x_3$ y por las restricciones del problema $z_0 = 1100$ es plenamente satisfactorio para el decisor. Si sólo estamos dispuestos a renunciar a un 1% de ese objetivo, tenemos una tolerancia de $p_0 = 11$. Entonces el objetivo se transforma en

$3x_1+4x_2+x_3 \geq 1100–11(1-\alpha)$

Programación Lineal fuzzy (2º caso)

Funciones de pertenencia para el objetivo

b) Si queremos minimizar.

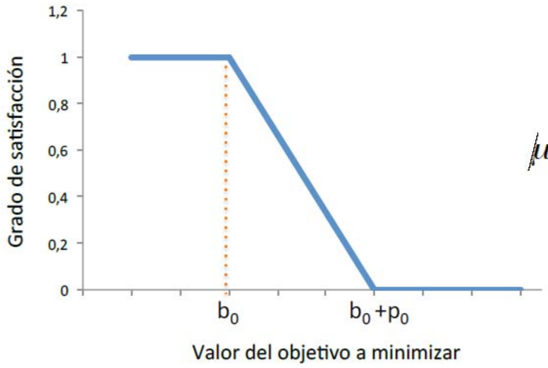
Debemos estimar un valor del objetivo Min $c^t x$ que nos parece totalmente satisfactorio, z_0, y una tolerancia p_0, de manera que si el objetivo está por encima de $z_0 + p_0$ no estaríamos dispuesto a aceptarlo (la satisfacción es 0).

Para conseguir que el objetivo proporciones una satisfacción de al menos alfa hacemos $\mu_{\tilde{O}bj} \geq \alpha$

Lo que significa que $(-z + z_0 + p_0)/p_0 \geq \alpha$
Y despejando tenemos $z \leq z_0 + p_0 (1-\alpha)$

Por lo tanto, de acuerdo con el caso visto anteriormente el objetivo se transforma en la restricción siguiente: $c^t x \leq z_0 + p_0 (1- \alpha)$

Programación Lineal fuzzy (2º caso)



$$\mu_{\tilde{Obj}}(z) = \begin{cases} 1, & z < b_0 \\ \dfrac{-z + b_0 + p_0}{p_0}, & b_0 \le z \le b_0 + p_0 \\ 0, & z > b_0 + p_0 \end{cases}$$

$b_0 = z_0$, valor plenamente satisfactorio

Ejemplo 4:
Supongamos que el objetivo es Min $3x_1+4x_2+x_3$ y por las restricciones del problema z_0 = 1000 es plenamente satisfactorio para el decisor. Si sólo estamos dispuestos a renunciar a un 2% de ese objetivo, tenemos una tolerancia de p_0 = 20. Entonces el objetivo se transforma en

$3x_1+4x_2+x_3 \le 1000+20(1-\alpha)$

Programación Lineal fuzzy (2º caso)

El modelo que seguiremos es el enfoque simétrico de Zimmermann,

$\widetilde{Max}$ c^Tx

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Max } \alpha \\ \text{s.a. } c^tx \ge z_0 - p_0(1-\alpha) \\ \quad \text{Restricciones} \\ \quad 0 \le \alpha \le 1 \end{array}}$$

$\widetilde{Min}$ c^Tx

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Max } \alpha \\ \text{s.a. } c^tx \le z_0 + p_0(1-\alpha) \\ \quad \text{Restricciones} \\ \quad 0 \le \alpha \le 1 \end{array}}$$

Donde z_0 es una estimación satisfactoria del objetivo, p_0 es la tolerancia del objetivo, $p=(p_1,\ldots,p_m)$ es el vector de tolerancias y $\alpha = \min\{\alpha_0, \alpha_1,\ldots, \alpha_m\}$, con α_0 el grado de satisfacción del objetivo y α_i el grado de satisfacción de la i-ésima restricción i =1,…,m

Restricciones

$\le \rightarrow g_1(x) \le b_1 + p_1(1-\alpha)$

$\ge \rightarrow g_2(x) \ge b_2 - p_2(1-\alpha)$

$= \rightarrow g_3(x) \le b_3 + p_3(1-\alpha)$
$g_3(x) \ge b_3 - p_3(1-\alpha)$

Programación Lineal fuzzy (2º caso)

El modelo original

Max $30x1 + 41x2 + 46x3$

s.a. $6x1 + 3x2 + 4x3 \leq 1200$
$5x1 + 4x2 + 5x3 \leq 1500$
$x1 + x2 + x3 \geq 300$
$x1, x2, x3 \geq 0$

El modelo fuzzy es el siguiente:

Max α

s.a. $30x1 + 41x2 + 46x3 \geq z_0 – p_0 (1-\alpha)$
$6x1 + 3x2 + 4x3 \leq 1200 + p_1 (1-\alpha)$
$5x1 + 4x2 + 5x3 \leq 1500 + p_2 (1-\alpha)$
$x1 + x2 + x3 \geq 300 – p_3(1- \alpha)$
$\alpha \leq 1$
$\alpha, x1, x2, x3 \geq 0$

Para el beneficio plenamente satisfactorio utilizamos z_0 = 15875 y una tolerancia de 500. Con esta elección, nuestra intención es la siguiente: Estamos dispuestos a incumplir las restricciones ligeramente si con ello mejoramos el valor óptimo que se obtenía con los datos rígidos. Si consideramos que los valores de tolerancia son p_0 = 500, p_1 = 12, p_2 = 15, p_3 = 3, el problema resolver es el siguiente:

Programación Lineal fuzzy (2º caso)

Max α

s.a. $30x1 + 41x2 + 46x3 \geq z_0 – 500 (1-\alpha) = 15375 + 500\alpha$
$6x1 + 3x2 + 4x3 \leq 1200 + 12 (1-\alpha)$
$5x1 + 4x2 + 5x3 \leq 1500 + 15 (1-\alpha)$
$x1 + x2 + x3 \geq 300 – 3(1- \alpha)$
$\alpha \leq 1$
$\alpha, x1, x2, x3 \geq 0$

La solución óptima del problema es $\boldsymbol{\alpha}$ **= 0.235**, X* = (0, 377.87, 0) y el valor óptimo de la función objetivo es 15492.59 u.m.

Programación Lineal fuzzy (2º caso)

Max α

s.a. $30x1 + 41x2 + 46x3 \geq 15875 - 500\,(1-\alpha)$
$6x1 + 3x2 + 4x3 \leq 1200 + 12\,(1-\alpha)$
$5x1 + 4x2 + 5x3 \leq 1500 + 15\,(1-\alpha)$
$x1 + x2 + x3 \geq 300 - 3(1-\alpha)$
$\alpha \leq 1$
$\alpha, x1, x2, x3 \geq 0$

Variable	Value
ALFA	0.2351816
X1	0.000000
X2	377.8681
X3	0.000000

Row	Slack or Surplus
1	0.2351816
2	0.000000
3	75.57361
4	0.000000
5	80.16252
6	0.7648184

Interpretación de la solución en el contexto del problema

Tendríamos que producir 377.87 unidades del producto B. Gracias a flexibilizar las restricciones aumentamos el beneficio a 15492.59 u.m.

$6x1 + 3x2 + 4x3 \leq 1209.18$, **slack = 75.57**. Se usa 1133.61. No necesitamos flexibilizar NADA el presupuesto para mejorar el beneficio.
$5x1 + 4x2 + 5x3 \leq 1511.48$, **slack = 0**. Se usa 1511.48. Es decir, necesitamos flexibilizar la capacidad de almacenaje de la materia prima hasta 1511.48.
$x1 + x2 + x3 \geq 297.705$, slack = 80.16. Producimos 379.87. Es decir, no necesitamos flexibilizar nada la restricción de la producción.

Programación Lineal fuzzy

Aplicación a la viabilidad de problemas

La programación fuzzy se puede emplear para intentar paliar la infactibilidad de los modelos lineales. Nos planteamos el siguiente problema

Max $3x1 + 2x2 + x3$

s.a. $7x1 + 4x2 + 4x3 \geq 1800$
$2x1 + 3x2 + 4x3 \leq 1200$
$-5x1 + 4x2 + 5x3 \geq 1500$
$x1, x2, x3 \geq 0$

Este problema es infactible. Vamos a intentar realizar pequeñas modificaciones para convertirlo en factible. Vamos a utilizar el método de Verdegay con unas tolerancias del 5% para cada b_i, $p_1 = 90$, $p_2 = 60$, $p_3 = 75$. Nuestra intención es alejarnos "lo menos posible" del problema inicial, por lo que queremos maximizar el grado de satisfacción α.

Programación Lineal fuzzy

Aplicación a la viabilidad de problemas

Max α

s.a. $7x1 + 4x2 + 4x3 \geq 1800-90(1-\alpha)$

$2x1 + 3x2 + 4x3 \leq 1200+60(1-\alpha)$

$-5x1 + 4x2 + 5x3 \geq 1500-75(1-\alpha)$

$\alpha \leq 1$

$\alpha, x1, x2, x3 \geq 0$

Max $3x1 + 2x2 + x3$

s.a. $7x1 + 4x2 + 4x3 \geq 1749.87$

$2x1 + 3x2 + 4x3 \leq 1233.42$

$-5x1 + 4x2 + 5x3 \geq 1458.23$

$x1, x2, x3 \geq 0$

La solución óptima es α = 0.44, X*=(24.30,394.94,0). Por tanto hemos conseguido encontrar una solución a un problema "parecido" al que nos planteábamos. En las restricciones obtenemos los siguientes valores 1749.87, 1233.42, 1458.23, por lo que el problema factible más cercano sería el siguiente. Ojo al redondear que hay que hacerlo de manera que queden restricciones más laxas, para asegurar factibilidad.

a) Rest $\geq \rightarrow$ redondeo por defecto
b) Rest $\leq \rightarrow$ redondeo por exceso

Programación Lineal fuzzy

Aplicación a la viabilidad de problemas

En este ejemplo no es posible, pero en ocasiones se puede 'ajustar' más el problema y obtener un problema factible más cercano al original. Para ello emplearemos el slack/surplus que nos ofrece Lingo. Vamos a suponer que hemos obtenido los siguientes datos y calcularemos el problema resultante.

Aplicando el α obtenido, α = 0.44

Max $3x1 + 2x2 + x3$

s.a. $7x1 + 4x2 + 4x3 \geq 1749.87$

$2x1 + 3x2 + 4x3 \leq 1233.42$

$-5x1 + 4x2 + 5x3 \geq 1458.23$

$x1, x2, x3 \geq 0$

Variable	Value	Reduced Cost
ALFA	0.4430380	0.000000
X1	24.30380	0.000000
X2	394.9367	0.000000
X3	0.000000	0.5907173E-02

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.4430380	1.000000
2	0.000000	-0.3881857E-02
3	10.000000	0.8101266E-02
4	50.000000	-0.2194093E-02
5	0.5569620	0.000000

Max $3x1 + 2x2 + x3$

s.a. $7x1 + 4x2 + 4x3 \geq 1749.87$

$2x1 + 3x2 + 4x3 \leq$ **1223.42** (de los 33.42 de tolerancia no usamos 10 $\rightarrow$ se queda en 1223.42)

$-5x1 + 4x2 + 5x3 \geq$ **1500** (de los 41.77 de tol. no usamos 50. Nos pasamos, pero no queremos $\rightarrow$ nos quedamos con 1500)

$x1, x2, x3 \geq 0$

Programación Lineal fuzzy

Bibliografía

Lai, Y. J., Hwang, C. L. (1992) Fuzzy Mathematical Programming: Theory and applications, Springer, Berlin

Cadenas, J. M., Verdegay, J.L. (2004) Métodos y modelos de Programación Lineal Borrosa. hhttp://www.uv.es/asepuma/recta/extraordinarios/Vol_02/4.pdf

Carlsson, C., Korhonen, P. (1986) A parametric approach to fuzzy linear programming, Fuzzy Sets and Systems 20, 17-30

4.5.– Sinergia entre temas

Sinergia entre temas

- Fuzzy y multiobjetivo
- Obtención de factibilidad mediante metas y programación multiobjetivo
- Metas y multiobjetivo para obtener el nivelado de quirófanos con escenarios
- Algoritmo heurístico de rejilla para calcular aproximación de conjunto eficiente y frontera Pareto

Combinación fuzzy y multiobjetivo

Aplicaremos el 2º método al caso que tenemos varios objetivos. Recordemos que min f es lo mismo que – max -f

Max $f_1, f_2, \ldots, f_k$ (multiobjetivo)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Max } \alpha & \\ \text{s.a.} & f_1(x) \geq z_1 - pobj_1(1-\alpha) \\ & \ldots \\ & f_k(x) \geq z_k - pobj_k(1-\alpha) \\ & \text{Restricciones con } \alpha \\ & 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array}}$$

Donde z_i es una estimación satisfactoria del objetivo i-ésimo, $pobj_i$ es la tolerancia del objetivo i-ésimo.

Combinación fuzzy y multiobjetivo

El modelo original

Max 30x1 + 41x2 + 46x3 (benef)
Min 20x1 + 30x2 + 15x3 (impacto ambiental)

s.a. $6x1 + 3x2 + 4x3 \leq 1200$
$5x1 + 4x2 + 5x3 \leq 1500$
$x1 + x2 + x3 \geq 300$
$x1, x2, x3 \geq 0$

El modelo fuzzy es el siguiente:

Max α

s.a. $30x1 + 41x2 + 46x3 \geq z_1 - pobj_1\,(1-\alpha)$
$20x1 + 30x2 + 15x3 \leq z_2 + pobj_2\,(1-\alpha)$
$6x1 + 3x2 + 4x3 \leq 1200 + p_1\,(1-\alpha)$
$5x1 + 4x2 + 5x3 \leq 1500 + p_2\,(1-\alpha)$
$x1 + x2 + x3 \geq 300 - p_3(1-\alpha)$
$\alpha \leq 1$
$\alpha, x1, x2, x3 \geq 0$

El significado de las tolerancias es el mismo que antes. La diferencia aquí es la definición de los valores plenamente satisfactorios para cada objetivo y de sus tolerancias. Para ello realizaremos lo siguiente:

1) Calculamos una solución eficiente en el problema rígido con alguno de los métodos estudiados. Dentro de las soluciones eficientes, tenemos que escoger una “con la que estemos satisfechos”.
2) Nosotros usaremos unas tolerancias que proporcionen como valor plenamente satisfactorio el óptimo de cada criterio por separado en el problema flexible.

Combinación fuzzy y multiobjetivo

Matriz de pagos del problema rígido

	f1	f2
P1	15375	11250
P2	13800	4500

Matriz de pagos del problema flexible

	f1	f2
P1	15528.8	11362.5
P2	13622	4455

Supongamos que queremos una solución eficiente del problema rígido, donde exigimos al menos un beneficio de 14500, ¿cuál sería? (0,166.67,166.67), con (f1,f2) = (14500 7500)

Tolerancia 1ª función objetivo = 15528.8-14500 = 1028.8
Tolerancia 2ª función objetivo = 7500 – 4455 = 3045

El problema final sería

Combinación fuzzy y multiobjetivo

Max α

s.a. $30x1 + 41x2 + 46x3 \geq 15528.8 - 1028.8(1-\alpha)$
$20x1 + 30x2 + 15x3 \leq 4455 + 3045(1-\alpha)$
$6x1 + 3x2 + 4x3 \leq 1200 + 12(1-\alpha)$
$5x1 + 4x2 + 5x3 \leq 1500 + 15(1-\alpha)$
$x1 + x2 + x3 \geq 300 - 3(1-\alpha)$
$\alpha \leq 1$
$\alpha, x1, x2, x3 \geq 0$

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.6829869E-01	1.000000
2	0.000000	-0.5356760E-03
3	0.000000	0.1249911E-03
4	30.55671	0.000000
5	0.000000	0.4553246E-02
6	36.14692	0.000000
7	0.9317013	0.000000

La solución óptima del problema es **α = 0.068**, X* = (0, 152.78, 180.57) y el valor óptimo de las funciones objetivo es 14570.27, 7292.03.

Esta solución no es necesariamente eficiente, por lo que acabaremos el problema buscando una solución eficiente con las tolerancias de las restricciones **realmente utilizadas**. Tenemos holgura en la 3ª y 5ª restricción, usando los modelos correspondientes obtenemos la solución eficiente que lleva a (14578.97, 7292.014)
Estamos dispuesto a usar una tolerancia de 15 en la capacidad de almacenaje para mejorar (14500, 7500) a (14578.97, 7292.014). No necesitamos usar nada de las otras tolerancias.