Modelos avanzados de IO

Tema 3. Programación Multiobjetivo

3.1.– Introducción y conceptos básicos

3.1. Introducción y conceptos básicos

La programación multiobjetivo, **optimización multiobjetivo**, optimización multicriterio, etc. es un área del **análisis de la decisión multicriterio** que emplea técnicas cuantitativas para escoger una o varias alternativas (soluciones) cuando existen varios criterios (funciones objetivo).

Denominamos **S** al conjunto de soluciones factibles, el conjunto de las soluciones que cumplen todas las restricciones. Denominamos **P** a una solución, **P** $\in R^n$, $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Optimización uni-objetivo

Max $f(P)$
s.a. $P \in S$

Solución óptima: solución factible con un valor de la función objetivo no superado por ninguna otra solución factible.

Optimización multi-objetivo

Max $F(P)=(f_1(P), f_2(P), \ldots, f_k(P))$
s.a. $P \in S$

¿Solución óptima?

3.1. Introducción y conceptos básicos

Ejemplos (todos de **maximizar**)

a) $S = \{ x \in R /\ -2 \le x \le 2\}$, $f(x) = x^2$. ¿Cuál es la solución óptima y el valor óptimo?

b) $S = \{ x \in R /\ -2 \le x \le 2\}$, $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x$. ¿Cuál es la “mejor solución”?

c) La siguiente tabla da las soluciones factibles del problema y los valores en las funciones objetivo. ¿Cuál es la “mejor solución”? ¿Con cuál nunca nos quedaríamos?

Solución	$f_1(x)$	$f_2(x)$
x = 1	2	4
x = 2.5	1	4
x = 4	4	3
x = 7	5	3

3.1. Introducción y conceptos básicos

Consideramos las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_k(x)$. Queremos maximizarlas.

Solución dominada: Una solución **P** es dominada por una solución **Q** cuando $f_i(\mathbf{Q}) \geq f_i(\mathbf{P})$ $\forall$ i=1,…,k y existe j de manera que $f_j(\mathbf{Q}) > f_j(\mathbf{P})$

Es decir, **P** es al menos igualada por **Q** en todas las funciones y en al menos una de ellas **P** es superada por **Q**.

Solución eficiente o no dominada: Una solución factible **P** es eficiente cuando no está dominada por ninguna otra solución factible.

Conjunto eficiente: El conjunto de las soluciones eficientes.

Punto Pareto: El vector con los valores en las funciones objetivo de una solución eficiente.

Frontera de Pareto: El conjunto de los puntos Pareto.

Ejemplo: ¿Qué soluciones están dominadas por qué otras soluciones en el apartado c) del ejercicio anterior? ¿Cuáles son eficientes?¿Cuál es el conjunto de las soluciones eficientes? ¿Cuál es la frontera Pareto?

3.1. Introducción y conceptos básicos

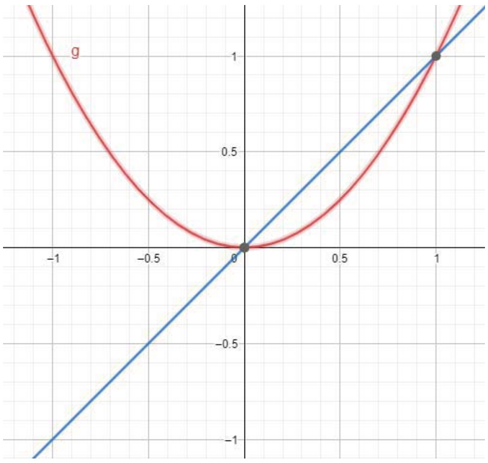
Ejemplo:

a) Calcular el conjunto eficiente y la frontera Pareto con las funciones f(x) = x, g(x) = x^2 en [-1,1]. Dibujar la frontera Pareto con Excel. Estudiar todas las combinaciones de maximizar y minimizar.
b) Supón en el apartado anterior que f_1 es el beneficio, f_2 es el coste ambiental. ¿Con cuál de los puntos de la frontera Pareto te quedarías?
c) Calcular el conjunto eficiente y la frontera Pareto con las funciones de la gráfica de la diapositiva. Dibujar la frontera Pareto con Excel.
d) Queremos maximizar una función y minimizar otra, que no conocemos. Inventarse 4 soluciones eficientes y 2 dominadas.
e) Queremos maximizar la 1ª y minimizar las dos últimas funciones. Calcular el conjunto eficiente y la frontera Pareto de entre estas soluciones

F(P1)=(10,15,20), F(P2)=(15,15,18), F(P3)=(17,17,12), F(P4)=(19,19,10), F(P5)=(17,16,18), F(P6)=(17,18,18), F(P7)=(20,17,8), F(P8)=(19,17,10), F(P9)=(15,15,18), F(P10)=(22,20,12), donde F= (f_1,f_2,f_3)

3.1. Introducción y conceptos básicos

a) Calcular el conjunto eficiente y la frontera Pareto si queremos maximizar $f1(x) = x$, $f2(x) = x^2$ en [-1,1]. Dibujar la frontera Pareto con Excel. Realizar lo mismo con max/min y min/max.



Esquema para calcular el conjunto eficiente si f_i: R $\rightarrow$ R

- Enumerar los puntos de cada gráfica donde alterne entre creciente - decreciente - constante.
- Incluir en esa lista el punto inicial y final
- Calcular las soluciones eficientes de la lista, comparándolas con las otras soluciones.
- Si en un segmento [a,b] los dos puntos son eficientes, todo el segmento es eficiente.

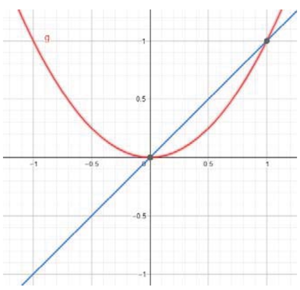
Lista = {-1, 0, 1}

	f1	**f2**
-1	-1	1
0	0	0
1	1	1

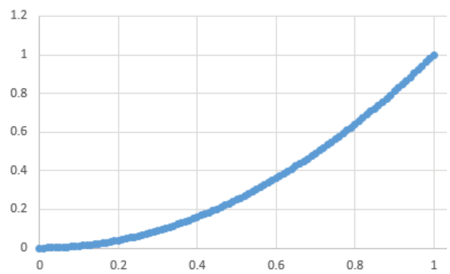
Max f1/ Max f2: La solución eficiente es 1
Max f1/ Min f2: Las soluciones eficientes son 0 y 1 $\rightarrow$ Cjto de soluciones eficientes [0,1]
Min f1/ Min f2: Las soluciones eficientes son -1 y 0 $\rightarrow$ Cjto de sols efic [-1,0]
Min f1/ Max f2: La solución eficiente es -1

3.1. Introducción y conceptos básicos

a) Dibujar la frontera Pareto con Excel si max f, min g



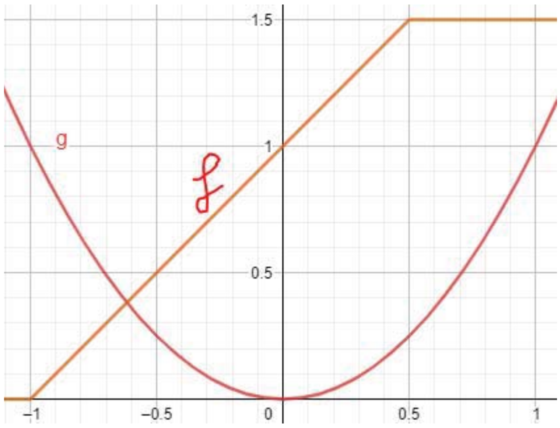
x	f(x)=x	g(x)=x^2
0	0	0
0.01	0.01	0.0001
0.02	0.02	0.0004
0.03	0.03	0.0009
0.04	0.04	0.0016
0.05	0.05	0.0025
0.06	0.06	0.0036
0.07	0.07	0.0049
0.08	0.08	0.0064
0.94	0.94	0.8836
0.95	0.95	0.9025
0.96	0.96	0.9216
0.97	0.97	0.9409
0.98	0.98	0.9604
0.99	0.99	0.9801
1	1	1



Max f/ Min g: Las soluciones eficientes son 0 y 1 $\rightarrow$ Cjto de soluciones eficientes [0,1]
La frontera Pareto es { (x,x^2), $x \in [0,1]$ }

3.1. Introducción y conceptos básicos

c) Calcular el conjunto eficiente y la frontera Pareto de las siguientes funciones en [-1,1]



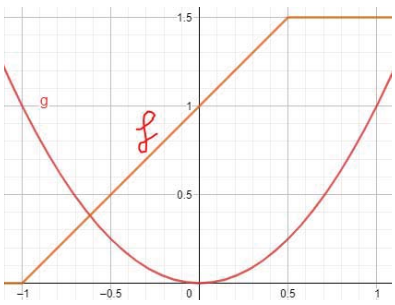
Lista = {-1, 0, 0.5, 1}

	f	g
-1	0	1
0	1	0
0.5	1.5	0.25
1	1.5	1

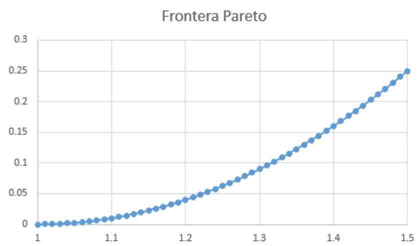
Max f/ Max g: La solución eficiente es 1
Max f/ Min g: Las soluciones eficientes son 0 y 0.5 $\rightarrow$ Cjto de soluciones eficientes [0,0.5]
Min f/ Min g: Las soluciones eficientes son -1 y 0 $\rightarrow$ Cjto de sols efic [-1,0]
Min f/ Max g: La solución eficiente es -1

3.1. Introducción y conceptos básicos

c) Dibujar la frontera Pareto con Excel si maximizamos f y minimizamos g.



x	f(x)=x+1	g(x)=x^2
0	1	0
0.01	1.01	0.0001
0.02	1.02	0.0004
0.03	1.03	0.0009
0.04	1.04	0.0016
0.05	1.05	0.0025
0.06	1.06	0.0036
0.07	1.07	0.0049
0.08	1.08	0.0064
0.42	1.42	0.1764
0.43	1.43	0.1849
0.44	1.44	0.1936
0.45	1.45	0.2025
0.46	1.46	0.2116
0.47	1.47	0.2209
0.48	1.48	0.2304
0.49	1.49	0.2401
0.5	1.5	0.25



Max f/ Min g: Las soluciones eficientes son 0 y 0.5 $\rightarrow$ Cjto de soluciones eficientes [0,0.5]

La frontera Pareto es { $(x+1,x^2)$, $x \in [0,0.5]$ }

3.1. Introducción y conceptos básicos

d) Queremos maximizar una función y minimizar otra, que no conocemos. Inventarse 4 soluciones eficientes y 2 dominadas (sin inventarse las funciones. Sólo los valores).

e) Queremos maximizar la 1ª y minimizar las dos últimas funciones. Calcular el conjunto eficiente y la frontera Pareto de entre estas soluciones

F(P1)=(10,15,20), F(P2)=(15,15,18), F(P3)=(17,17,12), F(P4)=(19,19,10), F(P5)=(17,16,18), F(P6)=(17,18,18), F(P7)=(20,17,8), F(P8)=(19,17,10), F(P9)=(15,15,18), F(P10)=(22,20,12), donde $F= (f_1,f_2,f_3)$

3.1. Introducción y conceptos básicos

La **matriz de pagos** contiene los valores en todas las funciones de las soluciones óptimas cuando optimizamos cada una de las funciones por separado. Cada fila contiene los valores en las funciones objetivo de una solución eficiente. Es decir, cada fila es un punto Pareto.

Ejemplo: Max $10x+4y$; **Min** $5x-2y$; **Min** $(x-2)^2 + (y-5)^2$;
Conjunto de oportunidades $\{(x,y)\in R^2 / 2x+y \leq 10 , x,y\geq 0\}$

	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
P1 (5,0)	50	25	34
P2 (0,10)	40	-20	29
P3 (2,5)	40	0	0

Punto ideal: Un vector de k componentes con el mejor valor alcanzable para cada función. En este caso el punto ideal es (50, -20, 0). Son los valores de la diagonal principal.
Punto antiideal (o Nadir): un vector con los peores valores de esta matriz para cada función, (40, 25, 34). Estos puntos sirven para estandarizar las funciones y para saber **lo que no estamos dispuestos a admitir de cada función**.

3.1. Introducción y conceptos básicos

La **imagen del conjunto de oportunidades** en un problema lineal PL consiste en el conjunto $\{ f(x), x \in S \}$

En un problema lineal el conjunto de oportunidades se denomina **poliedro** (cuando el conjunto es acotado). Quiere decir que las caras son líneas o planos.

La imagen de un conjunto de oportunidades en un PL también es un poliedro. Para calcularlo en R^2 basta con calcular los vértices del conjunto de oportunidades, calcular sus imágenes y dibujar el poliedro correspondiente.

Estudiemos el siguiente ejemplo

Maximizar $Z_1 = 7 X_1 + 12 X_2$ (beneficio)

Minimizar $Z_2 = 6 X_1 + 3 X_2$ (impacto ambiental)

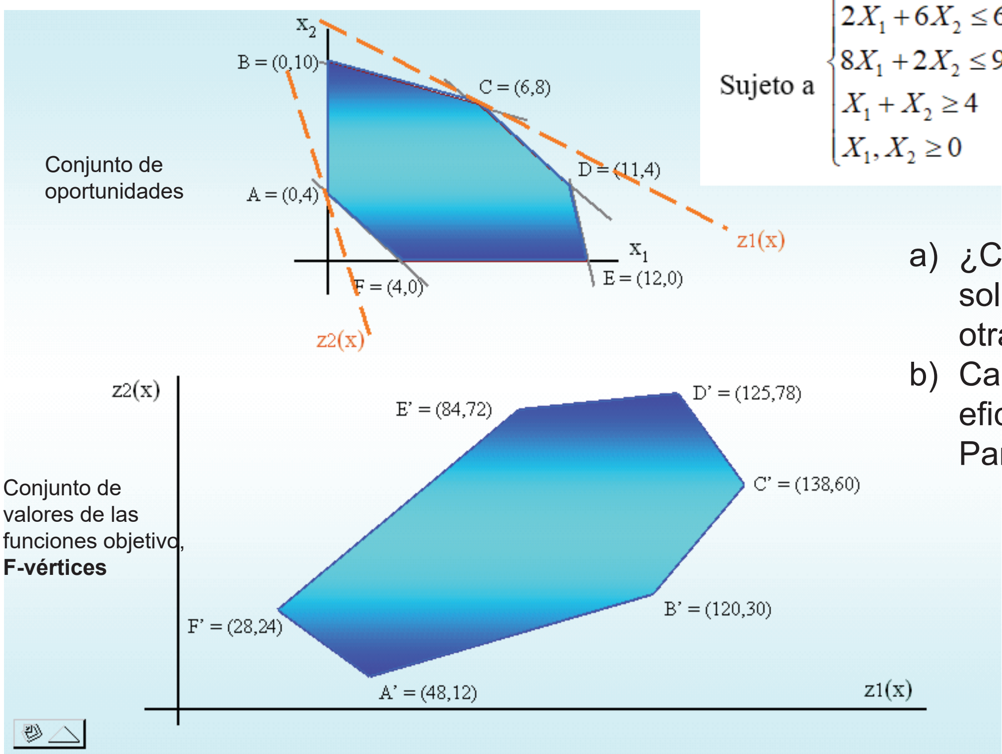
$$\text{Sujeto a} \begin{cases} 4X_1 + 5X_2 \le 64 & \text{(disponibi lidad recurso 1)} \\ 2X_1 + 6X_2 \le 60 & \text{(disponibi lidad recurso 2)} \\ 8X_1 + 2X_2 \le 96 & \text{(condicion es de producción)} \\ X_1 + X_2 \ge 4 & \text{(condicion es de producción)} \\ X_1, X_2 \ge 0 & \end{cases}$$

Consideramos el siguiente problema

Maximizar $Z_1 = 7 X_1 + 12 X_2$ (beneficio)

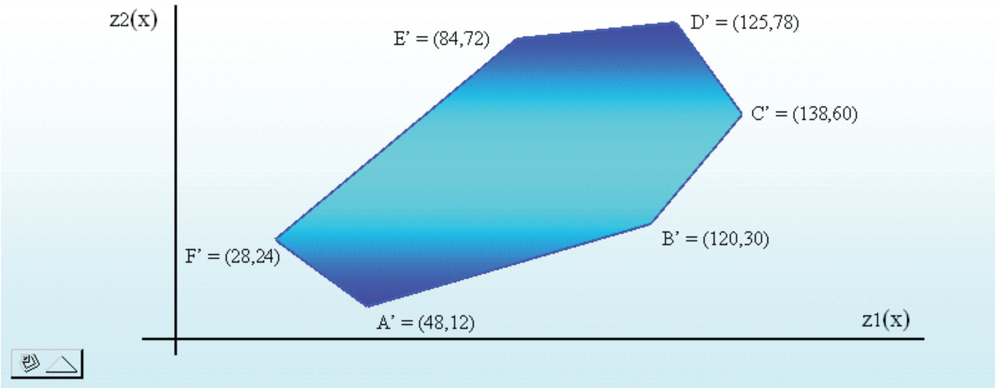
Minimizar $Z_2 = 6 X_1 + 3 X_2$ (impacto ambiental)

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} 4X_1 + 5X_2 \le 64 & \text{(disponibi lidad recurso 1)} \\ 2X_1 + 6X_2 \le 60 & \text{(disponibi lidad recurso 2)} \\ 8X_1 + 2X_2 \le 96 & \text{(condicion es de producción)} \\ X_1 + X_2 \ge 4 & \text{(condicion es de producción)} \\ X_1, X_2 \ge 0 & \end{cases}$$



a) ¿Cómo saber si una solución domina a otra gráficamente?
b) Calcula el conjunto eficiente y la frontera Pareto

Calcula el conjunto eficiente y la frontera Pareto con todas las combinaciones de max/min



Esquema para calcular el conjunto eficiente si f_i: $R^n \rightarrow R^2$

- Enumerar los vértices de la imagen del conjunto de oportunidades (F-vértices).
- Calcular los puntos Pareto, comparando los F-vértices entre ellos.
- Si dos vértices adyacentes G y H son puntos Pareto, todo el segmento [G,H] pertenece a la frontera Pareto.
- Las soluciones correspondientes a la frontera Pareto son eficientes y forman el conjunto de soluciones eficientes.
- Ejemplo (max f1, min f2).

  Frontera Pareto: segmentos C'-B' y A'-B'. Conjunto eficiente: segmentos C-B-A.

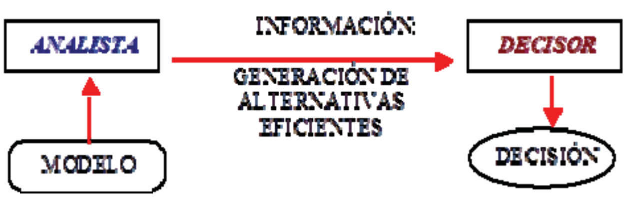
- La frontera Pareto también se puede calcular dándose cuenta que:
  - f1 max → cuanto más a la derecha, mejor
  - f1 min → cuanto más a la izquierda, mejor
  - f2 max → cuanto más arriba, mejor
  - f2 min → cuanto más abajo, mejor

3.1. Introducción y conceptos básicos

Analista: Persona ajena al problema con conocimientos de optimización
Decisor: Persona con conocimientos profundos del problema que entiende las diferencias de importancia de las distintas funciones/criterios.

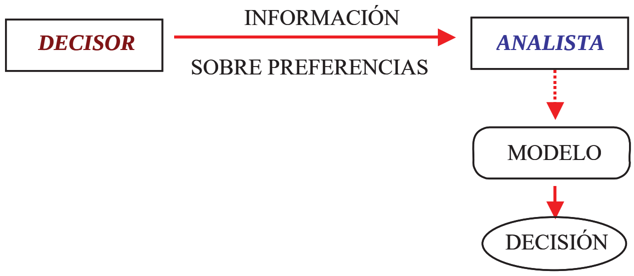
Clasificación de las técnicas de decisión multicriterio. Hay diferentes maneras de clasificar estas técnicas, dado que hay muchas de ellas, enfocando el problema de forma diferente. Una de las clasificaciones está basada en la relación entre las personas analista y decisor.

Técnicas generadoras

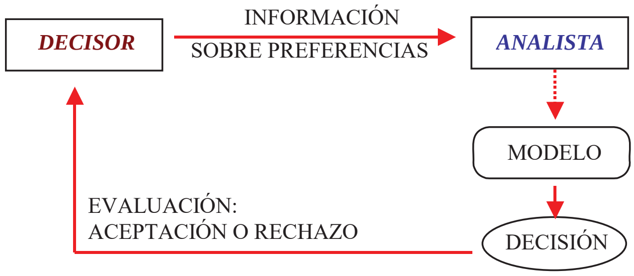


3.1. Introducción y conceptos básicos

Técnicas con información a priori



Técnicas interactivas



3.2.– Técnicas generadoras del conjunto eficiente

Problema Base

Consideramos las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_k(x)$. Queremos maximizarlas.
S es el conjunto de soluciones factibles.

Max $(f_1(\mathbf{P}), f_2(\mathbf{P}), \ldots, f_k(\mathbf{P}))$
s.a. $\mathbf{P} \in S$

Programación Multiobjetivo **Lineal**
$S = \{ \mathbf{x} \in R^n / \ A\mathbf{x} \leq b \ , \mathbf{x} \geq 0\}$. Las funciones f_1, f_2, …, f_k son **lineales**.

Programación Multiobjetivo **NO Lineal**: alguna de las funciones objetivo o restricciones son no lineales.

Programación Multiobjetivo **Entera**: Alguna o todas las variables tienen que ser enteras.

Método de las ponderaciones

- Consiste en crear un modelo con las restricciones del problema original y una suma de las funciones objetivo ponderadas.
- Primero se pasan todas las funciones objetivo a maximizar.
- Se escoge un vector de ponderaciones $w = (w_1, \ldots, w_k)$, de manera que sumen 1, y se suman las funciones objetivo multiplicadas por su peso correspondiente. La llamaremos SumFw.
- El modelo a resolver consiste en maximizar SumFw sujeta a las restricciones del problema original.

$$Max\ SumFw = \sum_{i=1}^{k} w_i f_i(P)$$

s.a. $\mathbf{P} \in S$

- Si todos los pesos son > 0 o la s.o. obtenida es única, **obtenemos una solución eficiente**.
- Muchas ponderaciones llevarán a la misma solución eficiente.
- En el caso lineal con este método podemos obtener todo el conjunto eficiente.
- Optimizar una función objetivo sola es darle un paso de 1. Por tanto, estaremos seguros de que es solución eficiente la s.o. obtenida si sabemos que es solución única.

Ejemplo método de las ponderaciones

Max $f_1 = 7x_1 + 12x_2$
Min $f_2 = 6x_1 + 3x_2$

[Pma(w)]

Max $8/3\,X_1 + 7\,X_2$

$$\text{Sujeto a}\begin{cases} 4X_1 + 5X_2 \le 64 \\ 2X_1 + 6X_2 \le 60 \\ 8X_1 + 2X_2 \le 96 \\ X_1 + X_2 \ge 4 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

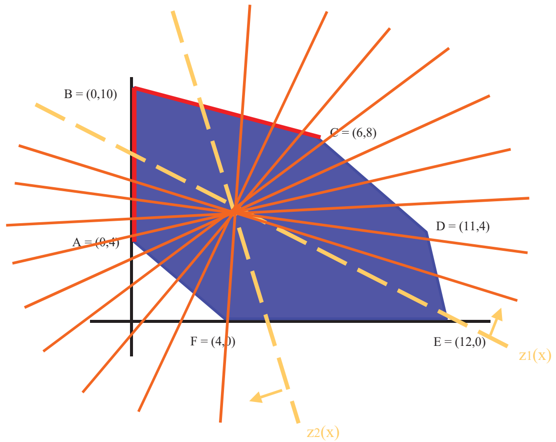
Cjto eficiente = A – B – C

Ejemplo: w = (2/3, 1/3)

2/3(7x1+12x2) +1/3(-6x1-3x2)) = 8/3x1 + 7x2

Solución: P* = (6,8) = C

w	P*
(1,0)	C
(3/4,1/4)	C
(2/3,1/3)	C
(1/2,1/2)	B
(1/3,2/3)	B
(1/5,4/5)	A
(0,1)	A



Conjunto de oportunidades
(**NO de valores de las funciones**)

Método de las ponderaciones estandarizado

Vamos a estudiar un caso concreto del método de las ponderaciones. La estandarización de las funciones tendríamos que realizarla siempre que las dos funciones tienen diferentes unidades de medida. Estamos optimizando dos funciones objetivo o criterios, f_1 y f_2. Suponemos que maximizando.

f_1^{Max} y f_1^{Min} son respectivamente el valor más alto y más bajo de f_1 en una solución eficiente. Análogamente para f_2, f_2^{Max} y f_2^{Min}.

Paso 1
Maximizamos f_1, obteniendo f_1^{Max}. Maximizamos f_2, pero sujeto a obtener el valor máximo de f_1. Obtenemos f_2^{Min}.

Paso 2
Maximizamos f_2, obteniendo f_2^{Max}. Maximizamos f_1, pero sujeto a obtener el valor máximo de f_2. Obtenemos f_1^{Min}.
Las frontera Pareto está incluida en el conjunto $[f_1^{Min}, f_1^{Max}] \times [f_2^{Min}, f_2^{Max}]$.

Paso 3
Escogemos unos pesos para f_1 y f_2, w_1 y w_2.

Método de las ponderaciones estandarizado

Paso 4
Optimizamos el siguiente problema.

$$Max \quad w_1 \cdot \frac{\left(f_1(P) - f_1^{Min}\right)}{\left(f_1^{Max} - f_1^{Min}\right)} + w_2 \cdot \frac{\left(f_2(P) - f_2^{Min}\right)}{\left(f_2^{Max} - f_2^{Min}\right)}$$

s.a. **P** $\in$ S

<u>Ejemplo</u>
Max 2000x1 + 3000x2
Max 2x1 + x2
s.a. x1 + x2 $\leq$ 100
x1, x2 $\geq$ 0

Maximizar $f_1 \rightarrow f_1^{Max}$ = 300000
Max f_2 con este valor $\rightarrow f_2^{Min}$ = 100

Maximizar $f_2 \rightarrow f_2^{Max}$ = 200
Max f_1 con este valor $\rightarrow f_1^{Min}$ = 200000

$$Max \quad w_1 \cdot \frac{(2000x1 + 3000x2 - 200000)}{100000} + w_2 \cdot \frac{(2x1 + x2 - 100)}{100}$$

s.a. x1 + x2 $\leq$ 100 ; x1, x2 $\geq$ 0

Método de las ε-restricciones

- No es necesario pasar las funciones objetivo a maximizar, se trabaja con la original.
- Partimos de un vector ε con cotas para todas las funciones, ε_j es la cota para f_j.
- Se resuelven k modelos. En cada uno de ellos se usa la cota para todas las funciones excepto una y se optimiza la otra. Si la s.o. de todos los modelos es la misma, esa **es solución eficiente**.
- Con que en uno de los modelos obtengamos una s.o. única, es eficiente directamente
- Para problemas lineales se pueden obtener todo el conjunto eficiente de esta manera.
- En la práctica se escogen o nos proporcionan cotas para las funciones. Al optimizar una función, la nueva cota para los siguientes modelos es el valor óptimo obtenido. De esta manera la s.o. del último modelo será seguro solución eficiente.

$$Max \ f_i(P)$$

s.a. $f_j(P) \geq \varepsilon_j$, j=1,…,i-1,i+1,…k

P $\in$ S

Max $f_1 = 7x_1 + 12x_2$
Min $f_2 = 6x_1 + 3x_2$

Ejemplo: Calcular una solución eficiente donde la 2ª función objetivo no sea peor de 35.

[1er paso]

$$\textbf{Maximizar} \quad 7X_1 + 12X_2$$

$$\text{Sujeto a} \quad \begin{cases} 6X_1 + 3X_2 \le 35 \\ 4X_1 + 5X_2 \le 64 \\ 2X_1 + 6X_2 \le 60 \\ 8X_1 + 2X_2 \le 96 \\ X_1 + X_2 \ge 4 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

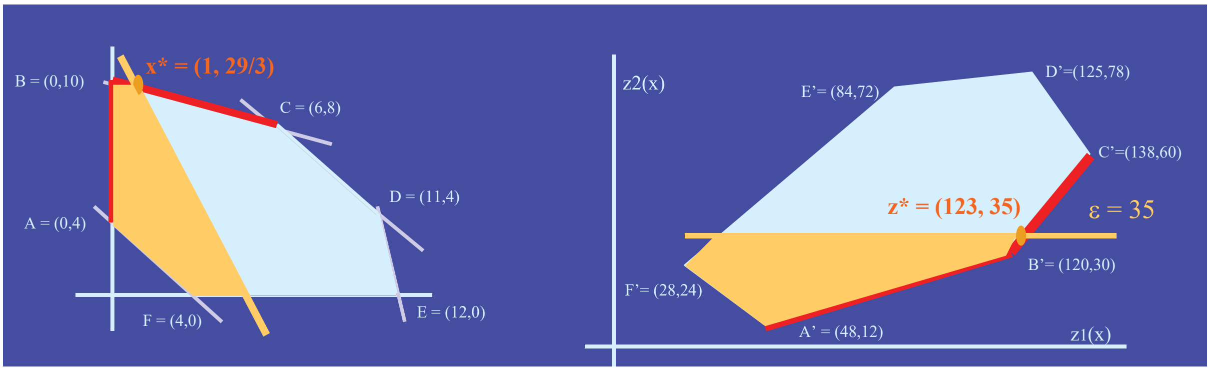
Solución: P* = (1,29/3) = (1, 9.67)
f(P*) = (123,35).
No sabemos si es única, igual no es eficiente

$$Min\ 6x_1 + 3x_2$$

[2º paso] s.a. $7x_1 + 12x_2 \ge 123$

$$\mathbf{P} \in S$$

Solución: P* = (1,29/3) = (1, 9.67)
f(P*) = (123,35). Por tanto P* es **eficiente** (incluso sin comprobar que sea única)



Simplex multiobjetivo

Teorema
Si el conjunto de oportunidades S tiene un punto eficiente, entonces existe al menos una SFB eficiente.

Teorema
Todos las SFB eficientes están conectadas mediante un camino de ejes eficientes.

Existe un Simplex multiobjetivo, que 1º calcula una SFB eficiente y a continuación explora otras SFB eficientes adyacentes.

Problema: Computacionalmente muy costoso. Además, el conjunto de soluciones eficientes puede ser muy extenso y en general es infinito.

3.3.– Técnicas con información a priori. Metas.

Técnicas con información a priori. Metas.

Nos vienen dados unos **niveles de aspiración** para cada $f_i(P)$: $\mathbf{a_i}$
Definimos la **distancia** de cada función a su nivel:

$$d_i^- = \begin{cases} a_i - f_i(P), & si\ f_i(P) < a_i \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases} \qquad d_i^+ = \begin{cases} f_i(P) - a_i, & si\ f_i(P) > a_i \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$f_i(P) + d_i^- - d_i^+ = a_i$$

Metas	Acción
$f_i(P) \leq a_i$	$minimizar\ d_i^+$
$f_i(P) \geq a_i$	$minimizar\ d_i^-$
$f_i(P) = a_i$	$minimizar\ d_i^- + d_i^+$

$$Min\ Función(d^+, d^-)$$

$$s.a.\ f_i(P) + d_i^- - d_i^+ = a_i \quad \forall i$$

$$d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad \forall i$$

$\mathbf{P} \in$ S

Técnicas con información a priori. Metas.

- Modelo de metas ponderadas
- Modelo de metas lexicográficas

Modelo de metas ponderadas

$$Min \sum_{i=1}^{k} (w_i^- d_i^- + w_i^+ d_i^+)$$
$$s.a.\ f_i(P) + d_i^- - d_i^+ = a_i \ \ \forall i$$
$$d_i^-, d_i^+ \geq 0 \ \ \forall i$$
$$\mathbf{P} \in S$$

<u>Modelo de metas lexicográficas</u>
Ordenamos las funciones objetivo por importancia

[Prob_1]

$$Min\ w_1^- d_1^- + w_1^+ d_1^+$$
$$s.a.\ f_1(P) + d_1^- - d_1^+ = a_1$$
$$d_1^-, d_1^+ \geq 0$$
$$\mathbf{P} \in S$$

Suponemos que obtenemos como s.o.

$d_1^-(*)$, $\quad d_1^+(*)$

Técnicas con información a priori. Metas.

<u>Modelo de metas lexicográficas</u>

[Prob_2]

$$Min\ w_2^- d_2^- + w_2^+ d_2^+$$
$$s.a.\ f_2(P) + d_2^- - d_2^+ = a_2$$
$$d_2^-, d_2^+ \geq 0$$
$$f_1(P) + d_1^-(*) - d_1^+(*) = a_1$$
$$\mathbf{P} \in S$$

El resto de problemas se resuelven de forma análoga. Si suponemos que las s.o. de los problemas son

$d_i^-(*)$, $\quad d_i^+(*), i = 1, \ldots, k-1$

El último problema a resolver sería el siguiente:

[Prob_k]

$$Min\ w_k^- d_k^- + w_k^+ d_k^+$$
$$s.a.\ f_k(P) + d_k^- - d_k^+ = a_k$$
$$d_k^-, d_k^+ \geq 0$$
$$f_1(P) + d_1^-(*) - d_1^+(*) = a_1$$
$$\ldots.$$
$$f_{k-1}(P) + d_{k-1}^-(*) - d_{k-1}^+(*) = a_{k-1}$$
$$\mathbf{P} \in S$$

En el caso en que se consiga una meta se incluye en los siguientes problemas $f_i(P) \geq a_i$, $f_i(P) \leq a_i$ o $f_i(P) = a_i$, la que corresponda.

Técnicas con información a priori. Metas.

Ejemplo

$a_1 = 125$ (al menos), $a_2 = 25$ (a lo sumo); $w_1=2$, $w_2=1$.

$$\text{Minimizar } \; 2\, d_1^- + d_2^+$$

$$\text{sujeto a} \begin{cases} 7X_1 + 12X_2 + d_1^- - d_1^+ = 125 \\ 6X_1 + 3X_2 + d_2^- - d_2^+ = 25 \\ 4X_1 + 5X_2 \le 64 \\ 2X_1 + 6X_2 \le 60 \\ 8X_1 + 2X_2 \le 96 \\ X_1 + X_2 \ge 4 \\ X_1, X_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+ \ge 0 \end{cases}$$

La solución a este problema es la solución eficiente
$P^* = (1.66, 9.44)$ $d_{1-} = d_{1+} = d_{2-} = 0$, $d_{2+} = 13.33$,
$f(P^*) = (125 , 38.33)$

Resumen enfoques

Posibles planteamientos respecto de los criterios

- Queremos optimizar una función objetivo
  Incluiremos la función objetivo en el Max/Min
  Ejemplo: Max f_1
- Exigimos una cota para una función
  Incluiremos una restricción en todos los modelos que resolvamos
  Ejemplo: $f_1 \le 100$
- Queremos que la función objetivo llegue a un cierto nivel y, si no, que se quede lo más cerca posible.
  Estamos hablando de una meta. Incluiremos las d's correspondientes en la función objetivo, la igualdad con las d´s como restricción y que las d's son ≥ 0

Dos posibles enfoques

A) Todas las funciones están en el mismo nivel de importancia (aunque unas pueden ser más importantes que otras): Un modelo, ponderación de func objs/metas
B) Hay niveles dentro de las funciones: Varios modelos jerárquicos
Tenemos un orden de importancia para cada función/meta. Realizamos modelos en ese orden, Exigiendo el nivel obtenido en los modelos anteriores (salvo en el caso de sobrepasar la meta).

Resumen enfoques

Ejemplo

Queremos alquilar una casa en la playa para el verano. Nuestro criterios son: f1 = distancia a la playa (min), f2 = coste (min), f3 = confort en la casa (max).

El decisor:

- Exige que el coste no sea más de 1500 un mes
- Quiere no estar a más de 300 metros de la playa
- Quiere maximizar el confort en la casa
- Piensa que los criterios están en el mismo nivel de importancia, pero el confort es más importante que el resto de criterios a optimizar

Max $0.8f3 - 0.2d1^{+}$

s.a. Restricciones originales

$f2 \leq 1500$

$f1 - d1^{+} + d1^{-} = 300$

$d1^{+}, d1^{-} \geq 0$

3.4.– Técnicas interactivas

3.4. Técnicas interactivas

- Mayor participación del decisor en el proceso.
- Alternancia de fases de decisión y de computación.
- Diferentes formas de interacción con el decisor.
- Numerosos métodos interactivos han sido propuestos en la literatura.

3.5.– Método Topsis

3.5. Método Topsis

- Tenemos un problema multiobjetivo con k criterios.
- Disponemos de m soluciones o alternativas entre las que escoger. Estas soluciones las podemos haber calculado con cualquiera de los métodos vistos hasta ahora o con cualquier otro.
- Este método permite escoger cuál de ellas es "mejor".

Hwang, C. L., Yoon, K. (1981). Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications. New York, Springer-Verlag.

3.5. Método Topsis

- **Paso 1**. Calculamos la matriz de decisión, con los valores de las m alternativas P_i en las k funciones $(f_j(P_i))$ i = 1,…,m ; j=1,…,k
- **Paso 2**. Construimos la matriz normalizada. Seguiremos el método de normalizar de Hwang y Yoon, (1981):

$$r_{ij} = \frac{f_j(P_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(f_j(P_i)\right)^2}} \qquad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, k$$

Así obtenemos la matriz de decisión normalizada MDN $=(mdn_{ij})_{mxk}$.

3.5. Método Topsis

- **Paso 3**. Determinamos los pesos normalizados y construimos la matriz normalizada y con pesos.

Los criterios no tienen porqué tener el mismo peso, les asignamos un peso $\Sigma w_i = 1$. Con ello se define $v_{ij} = w_j \, mdn_{ij}$, $i = 1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,k$

Y se construye la matriz $V = (v_{ij})_{mxn}$.

- **Paso 4**. Determinamos el ideal positivo (PIS) y el ideal negativo (NIS). El conjunto ideal positivo y el conjunto ideal negativo son los siguientes:

3.5. Método Topsis

$$A^+ = \{ v_1^+,\ldots,v_n^+ \} = \{ (\max_i v_{ij}, j \in J)(\min_i v_{ij}, j \in J') \} \quad i = 1,2,\ldots,m$$
$$A^- = \{ v_1^-,\ldots,v_n^- \} = \{ (\min_i v_{ij}, j \in J)(\max_i v_{ij}, j \in J') \} \quad i = 1,2,\ldots,m$$

donde J está asociado con los criterios de maximizar y J' los de minimizar.

- **Paso 5**. Calculamos la medida de separación. Medimos la distancia entre cada alternativa y la mejor solución PIS, y después con la peor solución NIS, de la siguiente manera:

$$d_i^+ = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left(v_{ij} - v_j^+\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad d_i^- = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left(v_{ij} - v_j^-\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad i = 1,2,\ldots,m$$

3.5. Método Topsis

- **Paso 6**. Medimos la proximidad relativa con una solución ideal.

  Calculamos la proximidad relativa de cada alternativa al PIS y al NIS utilizando el índice de proximidad. Por construcción, toma valores entre 0 y 1.

$$R_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-} \qquad i = 1,\dots, m$$

R_i = 1 sería la alternativa ideal, R_i = 0 sería la alternativa anti- ideal

- **Paso 7**. Escogemos la alternativa de mayor R.

3.5. Método Topsis

Ejemplo. Aplicar el método Topsis para escoger entre las siguientes soluciones f(P1)=(4,5), f(P2)=(3,3), f(P3)=(1,2). Queremos minimizar el primer criterio y maximizar el segundo. **¿Cuál creéis que va a salir si los pesos son (0.8 0.2)?**

Paso 1

	f_1	f_2
P1	4	5
P2	3	3
P3	1	2

Paso 2 I

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(f_1(P_i)\right)^2} = \sqrt{4^2+3^2+1^2} = \sqrt{26} \qquad \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(f_2(P_i)\right)^2} = \sqrt{5^2+3^2+2^2} = \sqrt{38}$$

3.5. Método Topsis

Paso 2 II

MDN=

	f_1	f_2
P1	$4/\sqrt{26} \approx 0.784$	$5/\sqrt{38} \approx 0.811$
P2	$3/\sqrt{26} \approx 0.588$	$3/\sqrt{38} \approx 0.487$
P3	$1/\sqrt{26} \approx 0.196$	$2/\sqrt{38} \approx 0.324$

Paso 3 **w = (0.8 0.2)** **¿Cuál creéis que va a salir?**

V =

Paso 4 (Ideal PIS, Antiideal NIS)

	f_1	f_2
P1	$0.8 \cdot 0.784 \approx 0.628$	$0.2 \cdot 0.811 \approx 0.162$
P2	$0.8 \cdot 0.588 \approx 0.471$	$0.2 \cdot 0.487 \approx 0.097$
P3	$0.8 \cdot 0.196 \approx 0.157$	$0.2 \cdot 0.324 \approx 0.065$
Ideal PIS	0.157	0.162
Antiideal NIS	0.628	0.065

3.5. Método Topsis

Paso 5

	d^+	d^-
P1	$\sqrt{(0.628-0.157)^2+(0.162-0.162)^2}$	$\sqrt{(0.628-0.628)^2+(0.162-0.065)^2}$
P2	$\sqrt{(0.471-0.157)^2+(0.097-0.162)^2}$	$\sqrt{(0.471-0.628)^2+(0.097-0.065)^2}$
P3	$\sqrt{(0.157-0.157)^2+(0.065-0.162)^2}$	$\sqrt{(0.157-0.628)^2+(0.065-0.065)^2}$

Paso 6

	d_i^+	d_i^-	R_i
P1	0.471	0.097	0.097/(0.471+0.097) = 0.171
P2	0.321	0.160	0.160/(0.321+0.160) = 0.333
P3	0.097	0.471	0.471/(0.097+0.471) = 0.829

Paso 7: Escogemos P3.

3.5. Método Topsis

Paso 1

Alternativas	I1	I2	I3	I4 (Min)	I5	I6 (Min)
P1	0,7	0,8	0,9	0,7	0,8	0,7
P2	0,6	0,8	0,7	0,9	0,6	0,6
P3	0,6	0,5	0,5	0,5	0,3	0,9
P4	0,2	0,7	0,6	0,7	0,9	0,3
P5	0,7	0,8	0,4	0,6	0,8	0,6
max	0,7	0,8	0,9	0,9	0,9	0,9
min	0,2	0,5	0,4	0,5	0,3	0,3

3.5. Método Topsis

Paso 2 (I)

I1 CUAD	I2 CUAD	I3 CUAD	I4 CUAD	I5 CUAD	I6 CUAD
0,49	0,64	0,81	0,49	0,64	0,49
0,36	0,64	0,49	0,81	0,36	0,36
0,36	0,25	0,25	0,25	0,09	0,81
0,04	0,49	0,36	0,49	0,81	0,09
0,49	0,64	0,16	0,36	0,64	0,36
1,319090596	1,630950643	1,438749457	1,549193338	1,593737745	1,452583905

Paso 2 (II). Matriz R

	I1^2/Σ(I1^2)	I2^2/Σ(I2^2)	I3^2/Σ(I3^2)	I4^2/Σ(I4^2)	I1^5/Σ(I5^2)	I1^6/Σ(I6^2)
P1	0.53066863	0.49051147	0.62554324	0.45184806	0.50196464	0.48189987
P2	0.45485883	0.49051147	0.48653363	0.5809475	0.37647348	0.41305703
P3	0.45485883	0.30656967	0.34752402	0.32274861	0.18823674	0.61958555
P4	0.15161961	0.42919754	0.41702883	0.45184806	0.56471022	0.20652852
P5	0.53066863	0.49051147	0.27801922	0.38729833	0.50196464	0.41305703

3.5. Método Topsis

	I1	I2	I3	I4	I5	I6
Escenario 1	0,166	0,166	0,166	0,166	0,166	0,166
Escenario 2	0,25	0,25	0,15	0,15	0,1	0,1

Paso 3
(Escenario 2)

I1 NORM	I2 NORM	I3 NORM	I4 NORM	I5 NORM	I6 NORM
0,132667158	0,122627868	0,093831486	0,067777209	0,050196464	0,048189987
0,113714707	0,122627868	0,072980045	0,087142125	0,037647348	0,041305703
0,113714707	0,076642417	0,052128604	0,048412292	0,018823674	0,061958555
0,037904902	0,107299384	0,062554324	0,067777209	0,056471022	0,020652852
0,132667158	0,122627868	0,041702883	0,05809475	0,050196464	0,041305703
0,132667158	**0,122627868**	**0,093831486**	**0,087142125**	**0,056471022**	0,061958555
0,037904902	0,076642417	**0,041702883**	**0,048412292**	0,018823674	**0,020652852**

Paso 4

	I1	I2	I3	I4	I5	I6
IDEAL	**0,132667158**	**0,122627868**	**0,093831486**	**0,048412292**	**0,056471022**	**0,020652852**
ANTIIDEAL	**0,037904902**	**0,076642417**	**0,041702883**	**0,087142125**	**0,018823674**	**0,061958555**

3.5. Método Topsis

al ideal	al anti-ideal
0,034244181	0,123938547
0,055451321	0,098086288
0,085653205	0,085766089
0,102801305	0,069807709
0,057245538	0,115538258

Paso 5

Paso 6

0,78352
0,63884
0,50033
0,40443
0,66869

RESULTADO

P1	0,78352
P5	0,66869
P2	0,63884
P3	0,50033
P4	0,40443

Paso 7. Escogemos la alternativa 1