TEMA 2: PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

PREVIO: Cálculo diferencial en varias variables. Formas cuadráticas.

Objetivo: Resolver problemas de optimización progresivamente hasta alcanzar el modelo más general. Comenzaremos por la optimización sin restricciones, continuaremos por la optimización con restricciones de igualdad, y finalizaremos por la optimización con relaciones de desigualdad.

1. Optimización sin restricciones (libre)

Una función real $f(\bar{x})$ alcanza un máximo relativo (mínimo relativo) en un punto *a* si para todo punto $\bar{x}$ en un entorno del punto $\bar{a}$ se verifica que $f(\bar{a}) \geq f(\bar{x})$ $(f(\bar{a}) \leq f(\bar{x}))$.

Si las desigualdades son estrictas, $f(\bar{a}) > f(\bar{x})$ $(f(\bar{a}) < f(\bar{x}))$, también lo son los extremos relativos.

En el caso de funciones reales de una variable ya sabemos que para encontrar los extremos relativos necesitamos obtener en primer lugar los puntos críticos (puntos en los que la derivada primera se anula) y posteriormente estudiar el signo de la derivada segunda en estos puntos críticos. En las funciones reales de varias variables, las condiciones son las mismas pero para todo el conjunto de derivadas que existen de cada orden, es decir, para que en un punto *a* exista un extremo relativo se tiene que cumplir:

Condición necesaria de extremo local:

Dada una función $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es condición necesaria para que *f* tenga en extremo relativo en el punto $\bar{a}$, que

$$f'_v(\bar{a}) = 0, \quad \forall \bar{v} \in R^n$$

Observación: Si la función f es diferenciable, esta condición se traduce, como vimos, en que el punto $\bar{a}$ sea un punto crítico de la función.

Condición suficiente de extremo local

Sea una función $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable, y sea $\bar{a}$ un punto crítico de *f*. Entonces:

- Si $f''_{\bar{v}}(\bar{a}) < 0, \quad \forall \bar{v} \in R^n$, $\bar{a}$ es un máximo local de *f*.

- Si $f''_{\bar{v}}(\bar{a}) > 0, \quad \forall \bar{v} \in R^n$, $\bar{a}$ es un mínimo local de *f*.

Observación: Si las funciones son de clase C^2 las condiciones anteriores pueden expresarse en términos de las derivadas parciales de segundo orden: dado que $\forall \bar{v} \in R^n$, $f_{\bar{v}}''(\bar{a}) = \bar{v}^t \cdot Hf(\bar{a}) \cdot \bar{v}$ es una forma cuadrática, si es definida negativa (definida positiva) en el punto $\bar{a}$ la función alcanzará un máximo relativo (mínimo relativo) y si es indefinida el punto $\bar{a}$ será un *punto de silla*.

<u>Ejemplo</u>

Encontrar y clasificar los puntos críticos de $f(x_1, x_2, x_3) = x_3^3 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_3$.

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - 2x_3 = 0; & x_1 = x_3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 = 0; & x_2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} = 3{x_3}^2 - 2x_1 = 0; & 3{x_3}^2 = 2x_1 \end{array}\right\} \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = x_3 = \frac{2}{3}, \ x_2 = 0$$

Puntos críticos: $(0,0,0)$, $\left(\dfrac{2}{3}, 0, \dfrac{2}{3}\right)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = 0 \qquad \rightarrow \quad Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 6x_3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial {x_3}^2} = 6x_3$$

$$Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} |A_1| = 2 \\ |A_2| = 4 \\ |A_3| = -8 \end{array} \quad \Rightarrow \ \text{Indefinida}$$

$(0,0,0)$ es un punto de inflexión de *f*.

$$Hf\left(\frac{2}{3},0,\frac{2}{3}\right)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} |A_1|=2 \\ |A_2|=4 \\ |A_3|=8 \end{matrix} \quad \Rightarrow \text{ Definida positiva}$$

$\left(\frac{2}{3},0,\frac{2}{3}\right)$ es un mínimo relativo de f.

EL CASO DE LAS FUNCIONES CONVEXAS Y CÓNCAVAS

Se puede demostrar que si la función objetivo es convexa (respectivamente, cóncava), entonces todo punto crítico es necesariamente mínimo global (respectivamente máximo global). Además, si la convexidad o concavidad lo es en sentido estricto, esos óptimos serán únicos (estrictos).

Observación: Es suficiente con que la matriz Hessiana de la función sea **semidefinida positiva** o **definida positiva** para que el punto crítico sea **mínimo global**. Del mismo modo, basta con que la Hessiana sea **semidefinida negativa** o **definida negativa** para clasificar el punto crítico como **máximo global**.

Ejemplo: