2. Optimización con restricciones de igualdad

Se trata de encontrar los extremos relativos de una función $f(x_1,...,x_n)$ cuando las variables $(x_1,...,x_n)$ han de cumplir un conjunto de restricciones $\begin{cases} g_1(x_1,...x_n) = b_1 \\ \quad ... \\ g_m(x_1,...,x_n) = b_m \end{cases}$ con $m < n$.

Ejemplo

La rentabilidad de una empresa depende de los precios de tres productos x_1, x_2, x_3 de la siguiente forma:

$$R(x_1, x_2, x_3) = x_1(2x_2 + x_3)$$

Las leyes del mercado determinan las siguientes relaciones entre los precios:

$$x_1^2 \cdot x_3 = 100\,, \quad x_2 + x_3 = 50$$

Se quiere conocer los valores de los precios de los productos que maximizan la rentabilidad de la empresa.

El modelo matemático que resuelve este problema es el siguiente:

Maximizar $f(x_1, x_2, x_3) = x_1(2x_2 + x_3)$

sujeto a $\begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 \cdot x_3 = 100 = b_1 \\ g_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3 = 50 = b_2 \end{array}$

Para resolver este tipo de problemas se construye la denominada **función lagrangiana**, o función de Lagrange, que tiene la siguiente forma:

$$L(x,\lambda) = f(x_1,...,x_n) + \lambda_1[g_1(x_1,...,x_n) - b_1] + ... + \lambda_m[g_m(x_1,...,x_n) - b_m]$$

$\lambda_1,...,\lambda_m$ son constantes desconocidas denominadas multiplicadores de Lagrange.

En el ejemplo, $L(x,\lambda) = x_1(2x_2 + x_3) + \lambda_1\left[x_1^2 \cdot x_3 - 100\right] + \lambda_2[x_2 + x_3 - 50]$.

Condición necesaria de primer orden

Teorema de los multiplicadores de Lagrange: Si en el punto $\bar{a} \in F$ la función alcanza un extremo relativo de manera que los gradientes de las restricciones en $\bar{a}$ son linealmente independientes, entonces existen m números reales (*multiplicadores de Lagrange*) $\lambda_1,..,\lambda_m$ tales que $\nabla L(\overline{a},\overline{\lambda}) = 0$ (*condición de Lagrange*).

Observación: Si sólo hay una restricción la condición sobre independencia lineal no es necesaria.

Observación: Para encontrar estos puntos tenemos que resolver el siguiente sistema de $n+m$ ecuaciones con $n+m$ incógnitas:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_1} = 0$$

....

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_n} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = g_1 - b_1 = 0$$

....

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = g_m - b_m = 0$$

Las soluciones de este sistema serán los puntos críticos condicionados, entre los que tendremos que buscar los extremos relativos condicionados.

<u>Condición suficiente de segundo orden</u>

Si $f, g_1,..., g_m \in C^2$ en un punto $\overline{a}$ que cumple la condición anterior, construimos la matriz hessiana *orlada* de $L(a,\lambda)$ del siguiente modo:

$$H_L(a) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots\ldots & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \ldots\ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) \\ & \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots & & \cdots \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(a) & \ldots\ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1{}^2}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots & \ldots\ldots & & \cdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(a) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n{}^2}(a) \end{pmatrix}$$

El criterio es:

- Si los *n-m* últimos menores principales tienen el mismo signo de $(-1)^m \Rightarrow$ la función alcanza un mínimo relativo en el punto *a*.
- Si los *n-m* últimos menores principales alternan de signo comenzando por el signo de $(-1)^{m+1} \Rightarrow$ la función alcanza un máximo relativo en el punto *a*.

Método práctico para resolver los ejercicios

Ejemplo

Optimizar $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

sujeto a $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$$L(x,\lambda) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda[x_1 + x_2 + x_3 - 1]$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= 4x_1 + \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} &= 2x_2 + \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_3} &= 2x_3 + \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0
\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 4x_1 &= 2x_2 \\ 2x_2 &= 2x_3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_2 &= 2x_1 \\ x_3 &= x_2 = 2x_1 \end{aligned}$$

$x_1 + 2x_1 + 2x_1 - 1 = 0; \quad x_1 = \frac{1}{5}, \quad x_3 = x_2 = \frac{2}{5}$

Punto crítico: $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$

$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 1 \qquad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 1 \qquad \frac{\partial g}{\partial x_3} = 1$

$\frac{\partial^2 L}{\partial {x_1}^2} = 4 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} = 0$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial {x_2}^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} = 0 \qquad \rightarrow \quad H_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } n - m = 2$$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial {x_3}^2} = 2$

Los dos últimos menores son $\left.\begin{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 < 0 \\ |H_L| = -20 < 0 \end{matrix}\right\}$ y $(-1)^m = (-1)^1 = -1 < 0 \Rightarrow$ la función alcanza un mínimo relativo en el punto $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

EL CASO DE LOS PROGRAMAS CONVEXOS Y CÓNCAVOS

Se puede demostrar que si el programa es convexo (es decir, si la función objetivo es convexa y el conjunto factible es convexo, entonces todo punto crítico condicionado es necesariamente mínimo global del programa. Además, si la convexidad lo es en sentido estricto, el óptimo será único (estrictos).

Del mismo modo, si el programa es cóncavo (es decir, si la función objetivo es cóncava y el conjunto factible es convexo, entonces todo punto crítico condicionado es necesariamente máximo global del programa. Además, si la función objetivo es cóncava en sentido estricto, el óptimo será único (estrictos)

Ejemplo: $\begin{bmatrix} Opt\ (e^x + e^y) \\ s.a. \quad x + y = 2 \end{bmatrix}$