3. Optimización con restricciones de desigualdad

El programa que se plantea resolver en este caso es el más general que trataremos este curso

$$(P)\begin{cases} Opt\ f(\bar{x}) \\ s.a. \\ g_1(\bar{x}) \leq 0 \\ g_2(\bar{x}) \leq 0 \\ \quad\vdots \\ g_m(\bar{x}) \leq 0 \end{cases} \qquad con\ \ f, g_1, \dots, g_m: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Son las más realistas en problemas económicos ya que no exigen el agotamiento de los recursos disponibles.

Abordaremos este problema de un modo similar al que hicimos en el caso de las restricciones de igualdad con el Teorema de Lagrange. En este caso, el modelo se basa en el Teorema de Kuhn-Tucker.

El modelo de Kuhn-Tucker

Definición: Diremos que un punto factible $\bar{a} \in F$ satura una restricción cuando cumple la igualdad ($g(\bar{a}) = 0$). En caso contrario ($g(\bar{a}) < 0$), se dirá que el punto no satura la restricción.

Ejemplo:

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq 0, x - 2y \leq 0\} \quad \bar{a} = (1,1)$$

Definición: Diremos que un punto factible $\bar{a} \in F$ es *regular* cuando, o bien no satura ninguna restricción, o bien los gradientes de las restricciones saturadas en $\bar{a}$ forman un conjunto de vectores linealmente independientes.

Observación: Si el punto satura únicamente una restricción, podemos asegurar que es regular.

Teorema (Kuhn-Tucker): Sea $\bar{a} \in F$ un ***mínimo local*** del programa (P), siendo además un punto regular. Entonces existen *m* números reales (*multiplicadores de Kuhn-Tucker de* (P) *en* $\bar{a}$) $\lambda_1,..,\lambda_m$ que verifican las siguientes condiciones (*condiciones de Kuhn-Tucker*):

$$
\begin{cases}
1) & \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} = 0 \end{array} \\
2) & \lambda_1 g_1(\bar{a}) = 0 \ , \ldots , \ \lambda_m g_m(\bar{a}) = 0 \\
 & \quad 3) \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0
\end{cases}
$$

Observación: El teorema para máximo local es igual SALVO los signos de los multiplicadores**:** $\boldsymbol{\lambda_1, \ldots, \lambda_m \leq 0}$**.**

Observación: El teorema es una condición necesaria, no suficiente. Por eso hablaremos de *candidatos* a máximos o mínimos. Combinando con el Teorema de Weierstrass o con el método gráfico lograremos resolver el problema completamente. La condición de regularidad es esencial.

Método práctico para resolver los ejercicios

Ejemplo: $\begin{cases} \boldsymbol{Opt}\ x^2 + 2y^2 - 6x \\ \quad s.a. \\ \quad x + y \geq 1 \end{cases}$

Programas cóncavos y convexos

Teorema: Sea P un programa convexo[1] Si el punto $\bar{a} \in F$ verifica las condiciones de Kuhn-Tucker de mínimo local, entonces $\bar{a}$ es un mínimo global de P. Del mismo modo, si el programa P es cóncavo[2] y $\bar{a} \in F$ verifica las condiciones de Kuhn-Tucker de máximo local, entonces $\bar{a}$ es un máximo global de P.

Definición: El programa P verifica la *condición de Slater* cuando existe un punto factible $\bar{b}$, tal que $g_i(\bar{b}) < 0 \;\; \forall\, i = 1, \dots, m$

Proposición: La condición de Sñlater es una condición de regularidad alternativa en los programas convexos y cóncavos. Por lo tanto, en un programa convexo o cóncavo que verifique la condición de Slater, las condiciones de Kuhn-Tucker son condiciones necesarias y suficientes de mínimo (máximo) global.

Observación: En un programa convexo (cóncavo) que verifica la condición de Slater, los "candidatos" a óptimos del Teorema de Kuhn-Tucker, lo son efectivamente.

[1] Esto supone que la función objetivo es convexa, y que el conjunto factible es convexo.
[2] Para ello es necesario que la función objetivo es cóncava, y que el conjunto factible es convexo