Tema 3: Programación Lineal

Objetivos: Formular problemas de Programación Lineal, y estudiar los métodos para su resolución.

1. Formulación de un programa lineal

Definición: Un programa lineal está enunciado de **forma estándar** cuando es de la forma:

$$Max\ (min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$s.a. \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_i \geq 0\ \forall i \end{cases}$$

Definición: Un programa lineal está enunciado de **forma canónica** cuando es de la forma:

$$Min\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$s.a. \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ x_i \geq 0\ \forall i \end{cases}$$

$$Max\ \ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$s.a. \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_i \geq 0\ \forall i \end{cases}$$

Observación: Si tomamos:

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

la notación sería,

- Forma estándar:

- Forma canónica:

Proposición: Todo programa lineal puede reducirse a una de las dos formas anteriores, puesto que:

- Un programa de minimización se convierte en uno de maximización multiplicando por -1 la función objetivo.
- Una restricción de igualdad se puede descomponer en dos restricciones de desigualdad:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \rightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \end{cases}$$

- Una restricción del tipo $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$ se convierte en una de igualdad *sumando* una variable nueva no negativa llamada **variable de holgura**:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i, \qquad x_{n+i} \geq 0$$

Del mismo modo se puede convertir una restricción $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$ en una de igualdad *restando* una variable de holgura:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i, x_{n+i} \geq 0$$

Ejemplo: Hallar la forma estándar y la forma canónica de los siguientes programas, en el caso de que sean lineales:

a) $\begin{cases} Min\ x^2 + y \\ s.a. \\ 3x - y \leq 0 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} Min\ x + 2z \\ s.a. \\ x + y - 3z \leq 1 \\ x - 2y \geq 2 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} Max\ 3x + y \\ s.a. \\ x - 4y = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

2. Tipos de soluciones en un programa lineal

Dado el programa formulado en forma estándar $\begin{cases} Opt\ f(\bar{x}) \\ s.a.\ A\bar{x} = \bar{b}, \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$ llamamos:

- **Soluciones factibles**: aquellas que cumplen todo el conjunto de restricciones.
- **Soluciones factibles básicas**: si descomponemos la matriz A en dos submatrices, una, A_b formada por m columnas linealmente independientes (y por tanto, con determinante distinto de cero), y otra A_{nb} formada por el resto de columnas, y se verifica que ${A_b}^{-1} \cdot \bar{b} \geq \bar{0}$, entonces diremos que el vector $\bar{x} = (\bar{x}_b, \bar{x}_{nb})$ con $\bar{x}_b = {A_b}^{-1} \cdot \bar{b}$ y $\bar{x}_{nb} = \bar{0}$ es una **solución factible básica del programa**. A las componentes de $\bar{x}_b$ las llamaremos básicas y a las de $\bar{x}_{nb}$ no básicas.
- La solución factible básica es **no degenerada** si todas sus variables básicas son positivas, y **degenerada** si alguna de ellas se anula.

Ejemplo: Obtener las soluciones factibles básicas del programa $\begin{cases} Min -x + 2y \\ s.a. \\ x + 2y \leq 2 \\ 2x + y \leq 1 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$