Investigación Operativa

Tema 1: Convexidad.

Objetivos: Estudio de la convexidad de conjuntos. Funciones convexas.

Conceptos previos: Funciones de varias variables. Matriz Hessiana. Formas cuadráticas.

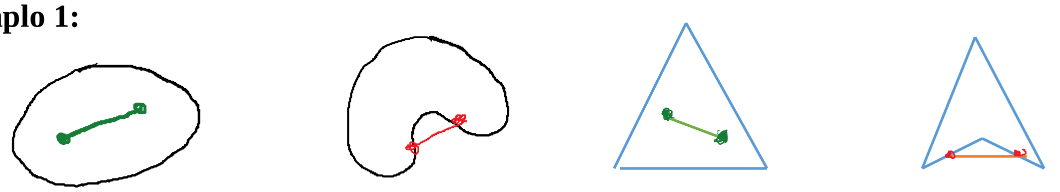
1. Conjuntos convexos

Idea: Un conjunto es convexo cuando el segmento que une dos puntos cualesquiera del conjuntos, está contenido en el conjunto.

Definición 1: Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es convexo cuando $\forall \bar{x}, \bar{y} \in A, \forall t \in [0,1]$ se tiene que

$$t\bar{x} + (1-t)\bar{y} \in A$$

Ejemplo 1:



Convexo **No convexo** **Convexo** **No convexo**

Propiedad: La intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

Conjuntos convexos importantes

Son los hiperplanos, los semiespacios y los poliedros:

Definición 2: Sean $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos hiperplano de $\mathbb{R}^n$ asociado a $\bar{c}$ y a α al conjunto $H = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n / \ \bar{c} \cdot \bar{x} = \alpha\}$.

Observación 1: En el plano ($\mathbb{R}^2$), los hiperplanos son las **rectas**, en el espacio $\mathbb{R}^3$ son los **planos**, y para dimensiones mayores (ya no hay representación gráfica) es para lo que realmente usamos el término *hiperplano*.

Definición 3: Dado el hiperplano $H = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n / \bar{c} \cdot \bar{x} = \alpha\}$, llamamos semiespacios cerrados[1] asociados a H a los conjuntos

$$H^{+} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n / \bar{c} \cdot \bar{x} \geq \alpha\}$$

$$H^{-} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n / \bar{c} \cdot \bar{x} \leq \alpha\}$$

Ejemplo 2: $\bar{c} = (1,2);\ \alpha = -2 \rightarrow H = \{x + 2y = -2\};\ H^{+} = \{x + 2y \geq -2\};\ H^{-} = \{x + 2y \leq -2\}$

Definición 4: La intersección de un número finito de semiespacios de $\mathbb{R}^n$ se llama polítopo. Si esa intersección es acotada[2], se denomina **poliedro**.

Observación 2: Polítopos y poliedros son conjuntos convexos por ser intersección de convexos.

Ejemplo 3:

[1] ***Definición intuitiva de conjunto cerrado*:** Un conjunto es cerrado si incluye los puntos de su frontera.

[2] ***Definición intuitiva de conjunto acotado:*** Un conjunto está acotado si se le puede encerrar en una "bola" de centro a y radio r.

2. Funciones convexas

Idea: Una función es convexa cuando el segmento que une cualquier par de puntos de la gráfica nunca está por debajo de la misma. Es cóncava en caso contrario.

Propiedad 1: Sean $k \in \mathbb{R}$ y $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y no vacío:

a) Si $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es convexa, entonces $\{\bar{x} \in A / f(\bar{x}) \leq k\}$ es un conjunto convexo.

b) Si $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es cóncava, entonces $\{\bar{x} \in A / f(\bar{x}) \geq k\}$ es un conjunto convexo.

Teorema 1: Sea *A* un subconjunto convexo y no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en *A*. Entonces:

a) La función es convexa (cóncava) sí, y sólo sí, su matriz Hessiana es semidefinida positiva (semidefinida negativa) para cualquier punto del conjunto *A*.

b) La función es estrictamente convexa (cóncava) sí, y sólo sí, su matriz Hessiana es definida positiva (definida negativa) para cualquier punto del conjunto *A*.

Ejemplo 4:

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x;\ f''(x) = e^x > 0\ \ \forall x \to La\ función\ es\ estrictamente\ convexa$$

Ejemplo 5: $f(x, y) = 5 + 3x^2 + y^4$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y);\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2$$

$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix}$; $H_1 = 6 > 0$; $H_2 = 72y^2 \geq 0\ Semidefinida\ Positiva.$ Por lo tanto, la función es convexa.

Definición 5: Llamamos Programa de Optimización al problema

$$(P)\begin{cases} Opt\, f(\bar{x}) \\ s.a.\, \bar{x}\ \in F \end{cases}$$

donde $\bar{x}$ son las variables de decisión, f es la función objetivo (valora las decisiones) y F es el conjunto factible (conjunto de restricciones que deben verificar las variables de decisión).

Definición 6: Diremos que el programa $(P)\begin{cases} Opt\, f(\bar{x}) \\ s.a.\, \bar{x}\ \in F \end{cases}$ es un <u>programa convexo</u> si la función objetivo es convexa y el conjunto factible es convexo. Si la función objetivo es cóncava y el conjunto factible es convexo, diremos que (P) es un <u>programa cóncavo</u>.

Ejemplo 6: Estudiar la convexidad del siguiente programa:

$$\begin{cases} Max\ 8x - 6y - 2x^2 - 3y^2 + 4xy \\ \qquad s.a.\ \ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

Empezamos por la convexidad del conjunto, puesto que, si el conjunto no es convexo, el programa no lo será.

En este caso, reconocemos en $x^2 + y^2 \leq 1$ la ecuación de un círculo de centro (0,0) y radio 1, que es un conjunto convexo.

Para estudiar la convexidad de la función, es suficiente con analizar el signo de la matriz Hessiana, como ya hemos visto:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 8 - 4x + 4y; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -6 - 6y + 4x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -4;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y);\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6$$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix};\ H_1 = -4 < 0;\ H_2 = 24 - 16 = 8 > 0\ \ Definida\ Negativa$$

Por lo tanto, la función objetivo es cóncava y el programa es cóncavo.