APÉNDICE: ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Los multiplicadores de Lagrange tienen una utilidad que va más allá de posibilitar el cálculo de los óptimos condicionados: nos indican la sensibilidad del programa ante variaciones en los términos independientes de las restricciones (los b_i). Em otras palabras, el multiplicador asociado al óptimo calculado permitirá aproximar el valor de la variación que experimenta la función objetivo cuando variamos los términos independientes de las restricciones, y esto sin volver a calcular el óptimo, lo que resulta muy útil.

Se puede probar que el opuesto del i-ésimo multiplicador de Lagrange mide el efecto de la variación de b_i (el término independiente de la restricción i-ésima) sobre el valor de la función objetivo en el punto máximo o mínimo que habíamos calculado.

Una de las principales aplicaciones de este hecho se da en problemas de planificación de la producción donde las restricciones representen la disponibilidad de recursos y la función objetivo el beneficio obtenido. Aquí λ_i medirá aproximadamente el aumento del beneficio provocado por la disponibilidad de una unidad más del recurso i-ésimo, y recibe el nombre de **precio sombra** del factor productivo:

- Si el precio de mercado es inferior al precio sombra, resultará rentable aumentar el uso de ese recurso.
- Si es mayor que el precio sombra, lo aconsejable será disminuir la utilización del recurso.

Veamos algunos detalles técnicos para poder realizar los cálculos:

Sean $\overline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ el vector de los términos independientes de las restricciones, $\bar{x}_b = (x_1^b, \dots, x_n^b)$ un extremo del Programa correspondiente a ese valor $\overline{b}$ de las restricciones, y $\bar{\lambda}_b = (\lambda_1^b, \dots, \lambda_n^b)$ los multiplicadores asociados al óptimo $\bar{x}_b$.

Definimos una aplicación F que transforma cada vector de términos independientes $\overline{b}$ en el valor de la función objetivo en el óptimo, $f(\bar{x}_b)$.

Entonces, las afirmaciones anteriores se traducen en que

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = -\lambda_i^b$$

Si utilizamos lo que ya conocemos sobre la aproximación lineal que nos proporciona la diferencial de una función, tendremos que

$$\Delta F(b_i) = F(b_i + \Delta b_i) - F(b_i) \cong \frac{\partial F}{\partial b_i} \cdot \Delta b_i = -\lambda_i^b \cdot \Delta b_i$$

O lo que es lo mismo, $\Delta f(\bar{x}_b) \cong -\lambda_i^b \cdot \Delta b_i$

Es decir, podemos calcular cuánto variaría aproximadamente el valor de la función objetivo en el punto óptimo cuando cambiamos levemente el valor de una de las restricciones **sin tener que calcular de nuevo cuánto vale el nuevo óptimo**. Simplemente sería ella variación que se produce en el término independiente por el valor del multiplicador asociado a la misma.

Ejemplo (libro Cálculo diferencial para la Economía_Vilar): Supongamos que una determinada empresa produce un determinado bien a partir de dos factores productivos. Sea $q(x, y) = x + 3y$la función de producción de la empresa, que relaciona la cantidad del bien producida con las cantidades de factores utilizadas (x e y), y sea $C(x, y) = x^2 + y^2$ la función de costes. Determínense las cantidades de factores con las que se minimiza el coste de producir 10 unidades de producto. ¿Resultaría rentable producir una unidad más de producto, suponiendo que su precio unitario fuese p=5?