Problema 1

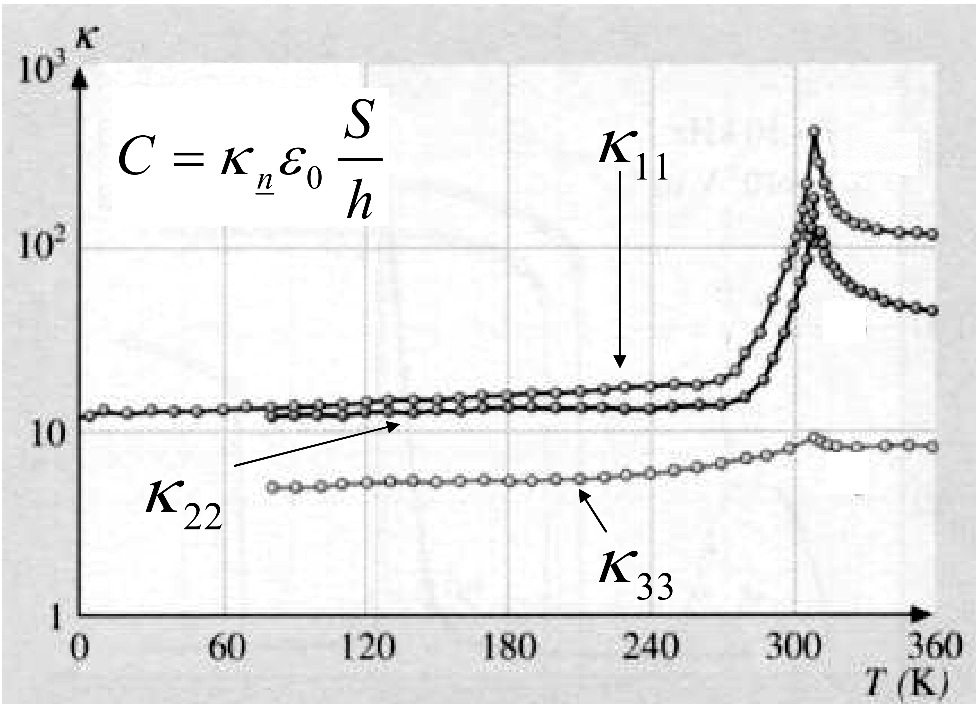
Nombre: **Número de matrícula:**

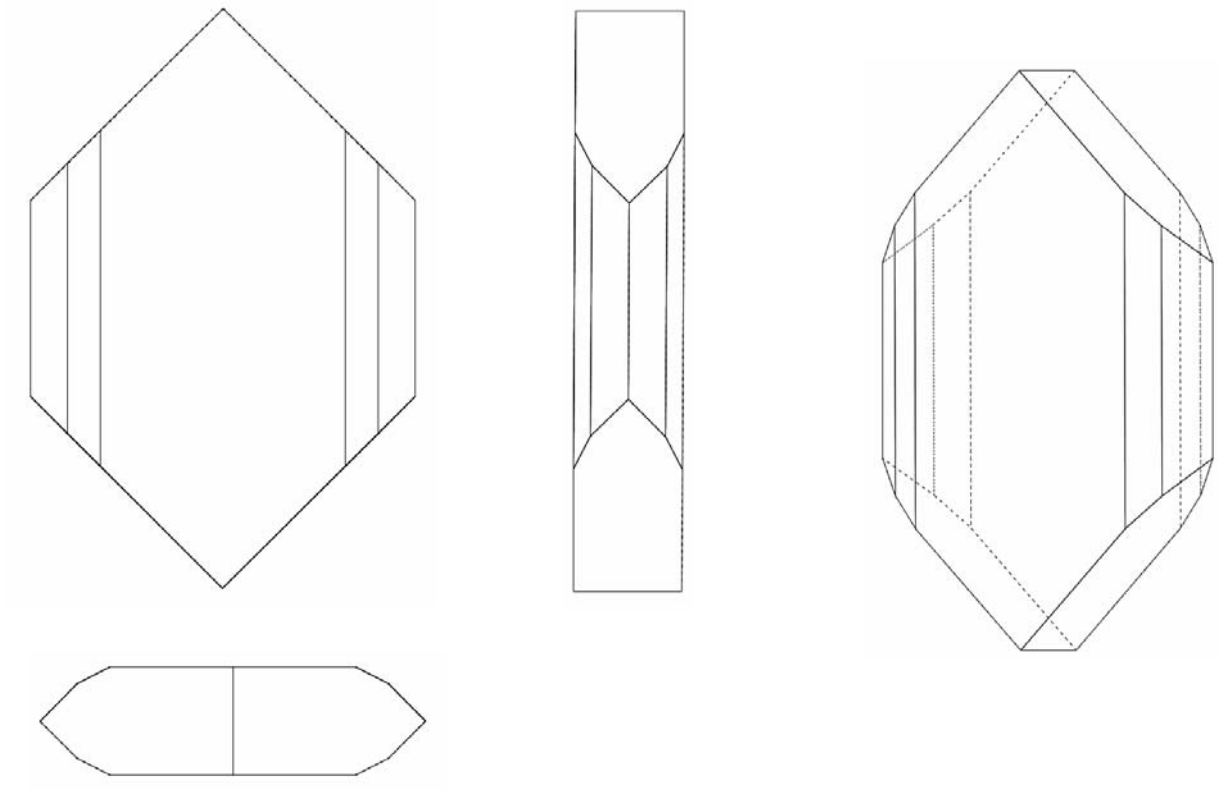
Un material cerámico se usa como dieléctrico en un condensador de alta capacidad. El dieléctrico es una lámina de dimensiones $L \times L \times h$ situada entre las placas del condensador, con $L = 5 \times 10^{-3}$ m, $h = 5 \times 10^{-4}$ m). Esta cerámica se sintetiza en el laboratorio en forma de monocristales como el de la figura, que tiene todos los elementos de simetría del material y puede usarse para determinar la clase.
Las componentes de la constante dieléctrica relativa κ_{ij} (prop. de segundo orden, simétrica) se conocen en función de la temperatura (ver figura; en esta figura, los índices de κ se corresponden con los ejes cartesianos convencionales). El condensador opera a 300 K.

La lámina de dieléctrico está cortada del monocristal de manera que un vector unitario normal a las caras cuadradas de la lámina forma un ángulo $\theta_1 = 48$ grados con el eje convencional 1, y un ángulo $\theta_2 = 55$ grados con el eje convencional 2. Determina:

1. a qué clase pertenece el dieléctrico.
2. los valores de las componentes κ_{ij} a la temperatura de operación.
3. la capacidad del condensador, según la fórmula indicada. La constante dieléctrica relativa que es necesario usar para calcular C es la que corresponde a la dirección del vector unitario normal $\underline{n}$.

(3 puntos, 40 minutos)





Sol.: para calcular la capacidad del condensador sólo se necesita calcular el valor de la constante dieléctrica relativa κ en la dirección indicada. El material es ortorrómbico, de la clase ***mmm.*** La estructura de la constante dieléctrica es por tanto:

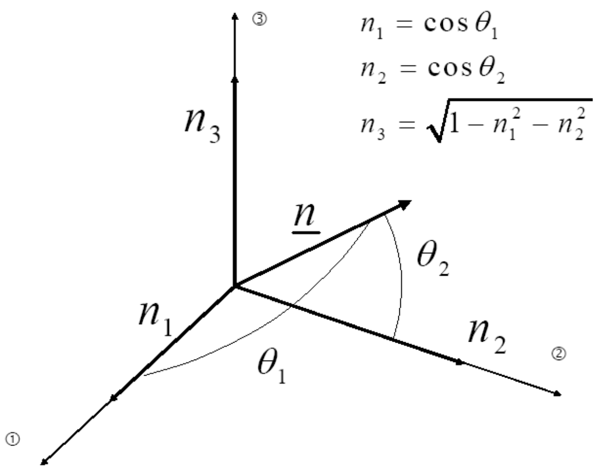
$$str(\underline{\underline{\kappa}}) = \begin{bmatrix} \bullet & . & . \\ . & \bullet & . \\ . & . & \bullet \end{bmatrix}$$

Los valores de sus componentes se leen de la gráfica:
y se aplica (ver 02_01_02):

$\kappa_{11} = 117$ $\kappa_{22} = 55.5$ $\kappa_{33} = 8.5$

$$\kappa_{\underline{n}} = n_i n_j \kappa_{ij}$$

$$n_1 = \cos\theta_1 \qquad n_2 = \cos\theta_2 \qquad n_3 = \sqrt{1 - n_1^2 - n_2^2}$$



$$n_1 = \cos\left(\frac{\theta_1 \cdot \pi}{180}\right)$$

$$n_2 = \cos\left(\frac{\theta_2 \cdot \pi}{180}\right)$$

$$n_3 = \sqrt{1 - n_1^2 - n_2^2}$$

$$n_1 = 0.669$$
$$n_2 = 0.574$$
$$n_3 = 0.473$$

$$\kappa_n = \kappa_{11} \cdot n_1^2 + \kappa_{22} \cdot n_2^2 + \kappa_{33} \cdot n_3^2 \qquad \kappa_n = 72.54$$

La capacidad del condensador es: $C = \kappa_n \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{L^2}{h}$ $\quad C = 3.21 \times 10^{-11}$ F

Problema 2

Nombre: **Número de matrícula:**

Los residuos urbanos (U) se pueden considerar globalmente como un material compuesto de materia orgánica biológica (O), materia inorgánica/metales (M), y plásticos (P). Si la concentración de componentes orgánicos M y P es excesiva (tal y como se especifica en (*) más abajo), existe riesgo de autocombustión en el vertedero. Experimentalmente se ha comprobado que la autocombustión de un compuesto de composición (x_M, x_O, x_P) tiene lugar si se cumple la condición:

$$A \cdot x_O + B \cdot x_P > C \qquad (*)$$

donde x_O es la fracción másica de O, y x_P es la fracción másica de P, y las constantes A, B y C son:
$A = 0.77$, $B = 0.65$ y $C = 0.501$.

Para eliminar el riesgo de autocombustión, los residuos se someten a una separación previa al vertido. En esta operación se separa selectivamente de U parte de su contenido en plástico P (que se recicla).

Dada una composición de U de $xU_M = 0.2$, $xU_P = 0.51$ (fracciones másicas), determina:

1. cuál es la cantidad mínima de P (kg) que es preciso separar de cada kg de U para que no exista riesgo de autocombustión,
2. cuál es la composición (en fracciones másicas, xV_M, xV_O, xV_P) del producto resultante V del apartado

anterior, es decir, la composición de lo que queda de U después de haber reducido su contenido de P.

Este problema puede hacerse analíticamente o con ayuda del diagrama triangular que se adjunta.

(3 puntos, 40 minutos)

Sol.: usamos como base de cálculo 1 kg de U, cuya composición es:

$$xU_O = 1 - xU_M - xU_P$$

$xU_M = 0.2$ $\qquad$ $xU_P = 0.51$ $\qquad$ $xU_O = 0.29$

puesto que $A \cdot xU_O + B \cdot xU_P = 0.555$ **y** $C = 0.501$

la composición de U dada excede el límite de autocombustión, por tanto será necesario realizar la operación de separación.

Método 1: la cantidad mínima de P que hay que separar se puede obtener resolviendo dos ecuaciones que expresan a) que el producto resultante (V) de la separacióm está exactamente en el límite de autocombustión, y b) que U es una mezcla de P puro y del producto V resultante de la separación:

La condición a), expresando xV_O como 1 - xV_M - xV_P, implica:

$$\boxed{A \cdot (1 - xV_M - xV_P) + B \cdot xV_P = C}$$

(V está exactamente en el límite de autocombustión)

La condición b) implica:

$$\boxed{\frac{xV_M - xU_M}{0 - xU_M} = \frac{xV_P - xU_P}{1 - xU_P}}$$

(U es una mezcla de P puro y del producto V resultante de la separación)

De estas dos ecuaciones lineales en xV_M y xV_P, y en las que A, B, C, xU_M, xU_P son datos del problema, se obtiene la composición xV_M , xV_P (fracciones másicas) de V, y por diferencia a 1, se obtiene xV_O :

$xV_M = 0.314$ $xV_P = 0.231$ $xV_O = 1 - xV_M - xV_P$ $xV_O = 0.455$

La cantidad de P que es necesario separar por cada kg de U se obtiene, por ejemplo, de un balance (conservación) de P: la cantidad de P que hay en U tiene que ser igual a la cantidad de P que hay en V, más la cantidad de P que se ha separado. Es decir:

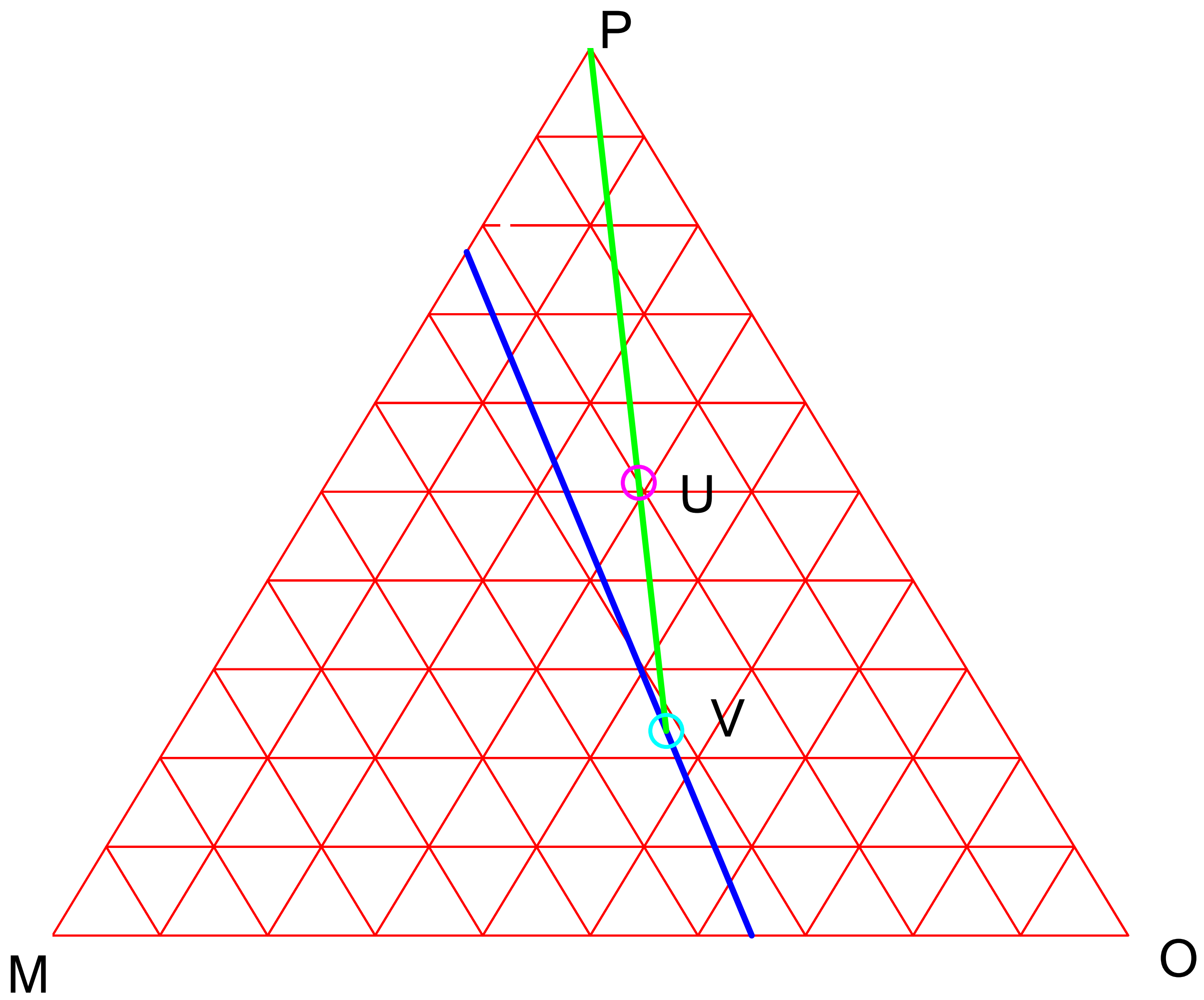
$$V \cdot xV_P + (1 - V)1 = 1 \cdot xU_P \quad \Rightarrow \quad V = \frac{xU_P - 1}{xV_P - 1} \qquad P = 1 - V$$

$V = 0.637$ kg de V / kg de U $P = 0.363$ kg de P / kg de U

Método 2: (solución gráfica) el límite de autocombustión del compuesto (la especificación del problema, es decir, la Ec. 1 con el signo igual en vez ">") es una línea recta en el diagrama triangular. Para representarla basta con dibujar dos puntos de la misma dando valores a xU_M y xU_P y uniendo los dos puntos (línea azul en el diagrama triangular).

Como V debe obtenerse separando P de U, para obtener el punto representativo de V se prolonga la recta que une P con U (línea verde en el diagrama triangular) hasta que corte con la línea de la especificación. La composición de V se lee directamente del diagrama.

La cantidad de P que se separa por cada kg de U se calcula c on ayuda de la regla de la palanca (relación entre las longitudes de los segmentos UV y PV), y se obtienen los mismos resultados.


P
U
V
M
O