Nombre y apellidos: **Número de matrícula:**

- **sólo puntuarán las respuestas con un razonamiento matemático, gráfico, etc.**
- **sólo se calificarán los problemas en los que se haya marcado una respuesta. Si la opción elegida es "*ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:*", la respuesta debe aparecer sobre la línea de puntos inmediatamente a continuación.**
- **sólo una respuesta es correcta**
- **las respuestas incorrectas no restan puntos**
- **usar estas mismas hojas para hacer los cálculos, no usar ningún otro papel**
- **60 min, 0.5 puntos cada problema**

Las soluciones aparecerán en AulaWeb dentro de los dos días hábiles siguientes a la finalización de la prueba.
Las preactas se publicarán no más tarde del día 13 de julio y la revisión de examen será el martes 19 de julio a las 10:00 en la sala R1.

---

1. Calcular el factor de empaquetamiento iónico de una cerámica AO_2 cuya estructura es la de la fluorita, sabiendo que los radios iónicos son $r_A = 8.4 \times 10^{-11}$ m y $r_O = 0.132 \cdot 10^{-9}$ m:

- 0.867
- 0.745
- 0.797
- 0.878
- 0.701
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es: . . . .

Sol: el A^{+4} está en los vértices y centros de cara de la estructura tipo fluorita, mientras que el O^{-2} se encuentra en los 8 huecos tetraédricos, luego la arista de la celda cúbica se calcula como :

$$a = \frac{4}{\sqrt{3}}\left(r_A + r_O\right)$$

$$a = 4.988 \times 10^{-10} \quad \text{m}$$

$$V_{celda} = a^3$$

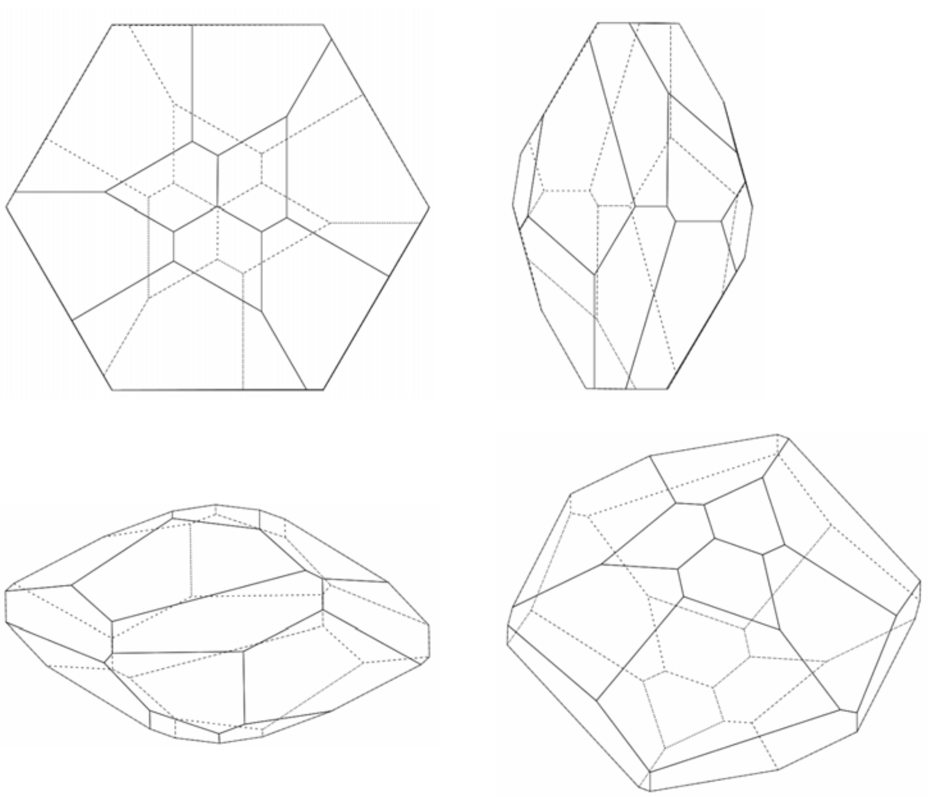
En la celda cúbica de lado "a" hay 4 iones A^{+4} y 8 iones O^{-2}. El factor de empaquetamiento iónico resulta:

$$APF = \frac{\left(8 \cdot r_O^{\ 3} + 4 r_A^{\ 3}\right) \cdot 4 \cdot \pi}{3 \cdot V_{celda}}$$

$$APF = 0.701$$

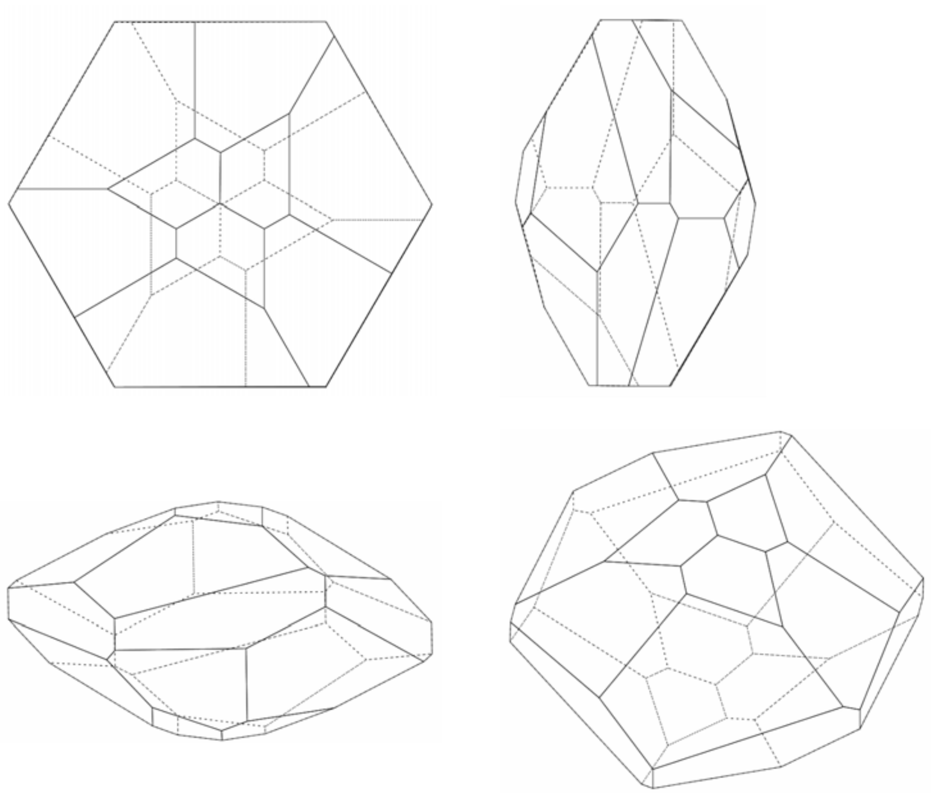
---

2. Determinar a qué clase cristalográfica pertenece un material que forma monocristales como el que se indica en la figura.



- $\bar{3}$
- $\bar{3}m$
- 32
- $\bar{6}m2$
- $3m$
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es: . . . .

Sol.: Encontramos un eje ternario de inversión, ningún plano, ningún eje binario.



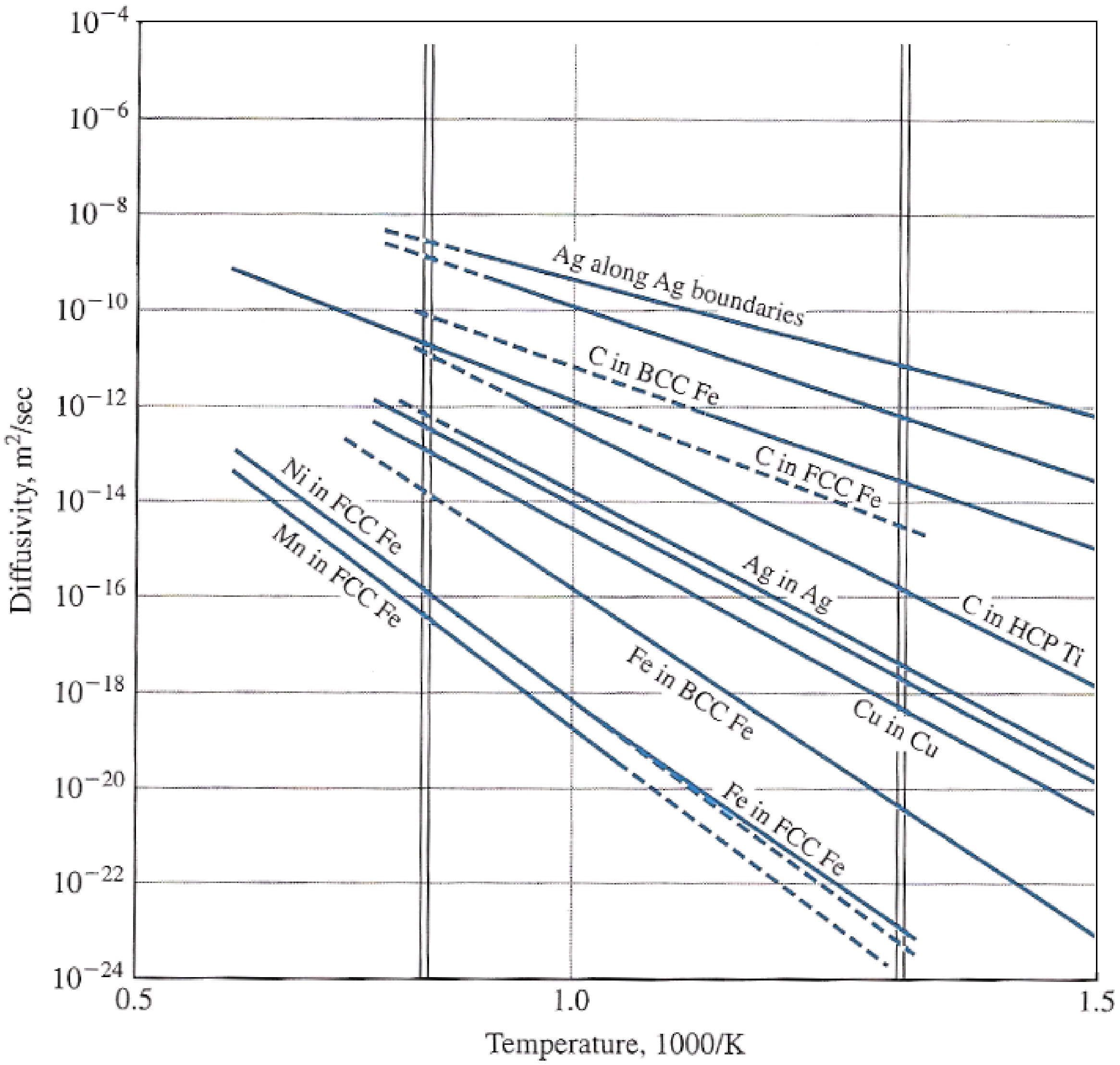
$\bar{3}$

3. Se desea hacer un tratamiento superficial de una lámina de gran espesor de Fe BCC puro. Para ello se expone la lámina a vapor de carbono durante $t = 6$ horas a una temperatura de 727 ºC.

Si la concentración de carbono en la superficie de la lámina es $C_S = 10^{21}$ at/cm^3, determinar a qué profundidad se alcanza una concentración $C_X = 2.7 \cdot 10^{20}$ at/cm^3.

Dato: curvas de difusividad de distintos elementos en distintos metales. Por favor, indica cómo has leído el valor correspondiente en la gráfica.

- $5.96 \cdot 10^{-4}$ m
- $1.30 \cdot 10^{-3}$ m
- $2.50 \cdot 10^{-3}$ m
- $1.85 \cdot 10^{-7}$ m
- $9.62 \cdot 10^{-8}$ m
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es: . . . .



Sol.: En la curva de difusividad de C en BCC Fe se lee un valor de la difusividad de:

$$D = 6.76 \cdot 10^{-12} \quad m^2/s$$

La variación de la concentración con la profundidad está dada por:

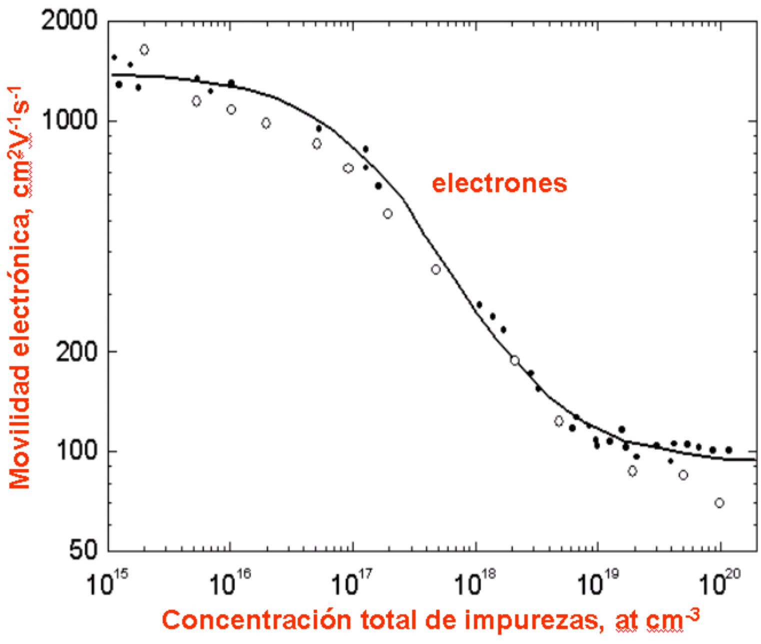
$$\frac{C_s - C_x}{C_s - C_0} = \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

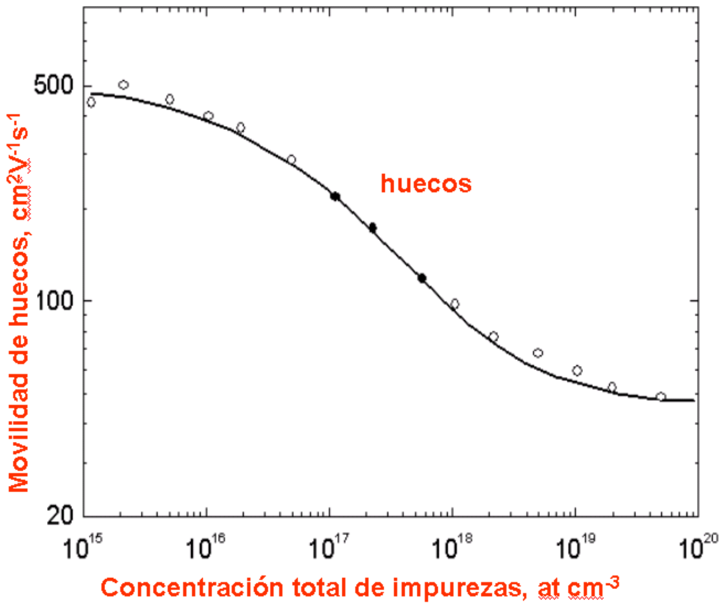
Usando $C_S = 1 \times 10^{21}$ **,** $C_X = 2.7 \times 10^{20}$ **y** $C_0 = 0$ **el valor de la función de error debe ser 0.73, que corresponde a un argumento de la función de 0.7804. Por tanto:**

$$x = 2 \cdot 0.7804 \sqrt{D \cdot t \cdot 3600} \qquad x = 5.96 \times 10^{-4} \quad m$$

4. Una oblea de Si se dopa con $N_{Ga} = 1.5 \times 10^{22}$ átomos de Ga / m^3 y con $N_{Te} = 1.3 \times 10^{22}$ átomos de Te / m^3 y. Determinar su conductividad eléctrica a 300 K.

- 200.15 S/m
- 473.2 S/m
- 637 S/m
- 418.6 S/m
- 309.4 S/m
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es: . . . .





La concentración de portadores mayoritarios es:

$$n_n = 2N_{Te} - N_{Ga} \qquad n_n = 1.1\times 10^{22} \quad e/m^3$$

y la concentración de impurezas (suma de las concentraciones de todos los dopantes, independientemente de que sean tipo n, o tipo p, e independientemente del número de portadores con que contribuyen a la conductividad):

$$C_T = N_{Te} + N_{Ga} \qquad C_T = 2.8\times 10^{22} \quad \text{átomos/m}^3$$

La movilidad de los portadores (electrones) a la temperatura dada y para esta concentración de impurezas se lee del diagrama para electrones:

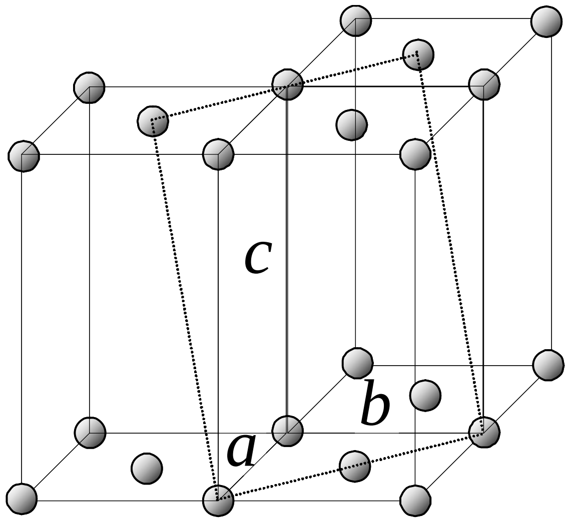
$$\mu_n = 0.1137 \quad m^2/V.s$$

de donde resulta una conductividad de: $\sigma = n_n\cdot 1.6\cdot 10^{-19}\cdot \mu_n$ $\quad \sigma = 200.1 \quad S/m$

5. Calcular la densidad atómica superficial (átomos/m^2) en los planos (1 1 1) de un material de estructura ortorrómbica C (centrada en el pinacoide C) con parámetros de red $a = 1.05\times 10^{-10}$ m, $b = 1.92\times 10^{-10}$ m y $c = 3.89\times 10^{-10}$ m.

- 3.854×10^{18} átomos/m^2
- 1.389×10^{18} átomos/m^2
- 4.989×10^{18} átomos/m^2
- 2.286×10^{19} átomos/m^2
- 2.594×10^{18} átomos/m^2

ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es: . . . .



La intersección de los planos (1 1 1) con la celda unitaria es el paralelogramo (no un rectángulo, aunque lo parezca en el dibujo) cuyo área se calcula mediante el módulo del producto vectorial de dos vectores:

$$\text{Área} = \sqrt{(a\cdot b)^2 + (a\cdot c)^2 + (b\cdot c)^2}$$

Cada paralelogramo contiene $n_{atomos} = 2\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{4}$ **átomos y la densidad superficial es:**

$$\frac{n_{atomos}}{\text{Área}} = 2.286 \times 10^{19}$$ **átomos/m²**

---

6. Un material compuesto **M** para corte de acero tiene una matriz metálica de cobalto y cristales de dos materiales cerámicos: carburo de wolframio WC y carburo de titanio TiC, estos dos últimos en proporción molar 1:1. La fracción volumétrica de cobalto en **M** es $V_{Co} = 0.7$. Los carburos se obtienen de las siguientes reacciones simplificadas:

$$TiO_2 + 2C \rightarrow CO_2 + TiC \qquad WO_2 + 2C \rightarrow CO_2 + WC$$

Las densidades de los componentes de **M** son: $\rho_{Co} = 8900\,kg/m^3$, $\rho_{WC} = 15800\,kg/m^3$, $\rho_{TiC} = 4930$ kg/m³. Calcular la cantidad de WO_2 necesaria para fabricar 1 kg de M.

- 0.413
- 0.326
- 0.191
- 0.145
- 0.282
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es: . . . .

Sol.: en primer lugar se puede calcular la densidad de la mezcla equimolar de carburos dividiendo la masa de una mezcla de 1 kmol de WC y 1 kmol de TiC entre el volumen de esta mezcla:

$$\rho_{WCTiC} = \frac{1\cdot Mw_{WC} + 1\cdot Mw_{TiC}}{\frac{1\cdot Mw_{WC}}{\rho_{WC}} + \frac{1\cdot Mw_{TiC}}{\rho_{TiC}}} \qquad \rho_{WCTiC} = 10420 \quad kg/m^3$$

Por tanto, la densidad del compuesto M es: $\rho_M = V_{Co}\cdot\rho_{Co} + \left(1 - V_{Co}\right)\cdot\rho_{WCTiC}$

$$\rho_M = 9356 \quad kg/m^3$$

También es inmediato calcular la fracción volumétrica de WC en la mezcla 1:1 de carburos:

$$V_{WC\_en\_WCTiC} = \frac{\frac{1\cdot Mw_{WC}}{\rho_{WC}}}{\frac{1\cdot Mw_{WC}}{\rho_{WC}} + \frac{1\cdot Mw_{TiC}}{\rho_{TiC}}}$$

Por tanto, la masa de WC contenida en 1 m^3 de M (cuya masa es $\rho_M = 9356$ kg/m^3) es:

$$\underbrace{\underset{\substack{\nearrow\\ \text{fracción volumétrica de}\\ \text{WC en la mezcla 1:1 de}\\ \text{carburos}}}{V_{WC\_en\_WCTiC}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\ \text{fracción volumétrica de}\\ \text{carburos en M}}}{\left(1 - V_{Co}\right)}}_{\text{fracción volumétrica de WC en M}}\cdot\rho_{WC} = 2394 \quad kg$$

Con lo que la masa de WO_2 necesaria para fabricar 1 kg de M será:

$$\boxed{\underset{\substack{\nearrow\\ \text{relación entre la masa de}\\ \text{WC en 1 m}^3\text{ de M y la}\\ \text{masa de 1 m}^3\text{ de M}}}{\frac{V_{WC\_en\_WCTiC}\cdot\left(1 - V_{Co}\right)\cdot\rho_{WC}}{\rho_M}}\cdot\underset{\substack{\nwarrow\\ \text{relación de masas molares}\\ \text{del WO}_2\text{ al WC}}}{\frac{Mw_W + 2Mw_O}{Mw_{WC}}} = 0.282} \quad kg$$

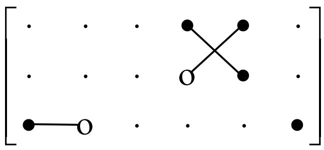
---

7. Un material cerámico piezoeléctrico no piroeléctrico del sistema tetragonal tiene, entre otros, los siguientes módulos piezoeléctricos: $d_{14} = -1.9\times 10^{-9}$ C/N, $d_{15} = -3.1\times 10^{-9}$ C/N y $d_{31} = -5.7\times 10^{-9}$ C/N. Determinar el valor del módulo d_{213}.

- $-1.9\cdot10^{-9}$ C/N
- $+0.475\cdot10^{-9}$ C/N
- $+ 0.95\cdot10^{-9}$ C/N
- $- 0.95\cdot10^{-9}$ C/N
- $- 0.475\cdot10^{-9}$ C/N
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es: . . . .

Sol: Un material tetragonal piezoeléctrico pero no piroeléctrico no puede ser de ninguna de las dos clases polares tetragonales, es decir, ni clase 4 ni clase 4mm. Según los módulos indicados sólo puede ser la clase: $\bar{4}$

Para esta clase la matriz de módulos piezoeléctricos es:
luego



$$d_{14} = d_{25} = 2d_{123} = 2d_{213}; \qquad d_{213} = \frac{d_{14}}{2}$$

$$d_{213} = \frac{d_{14}}{2} \qquad d_{213} = -9.5\times10^{-10} \ \text{C/N}$$

---

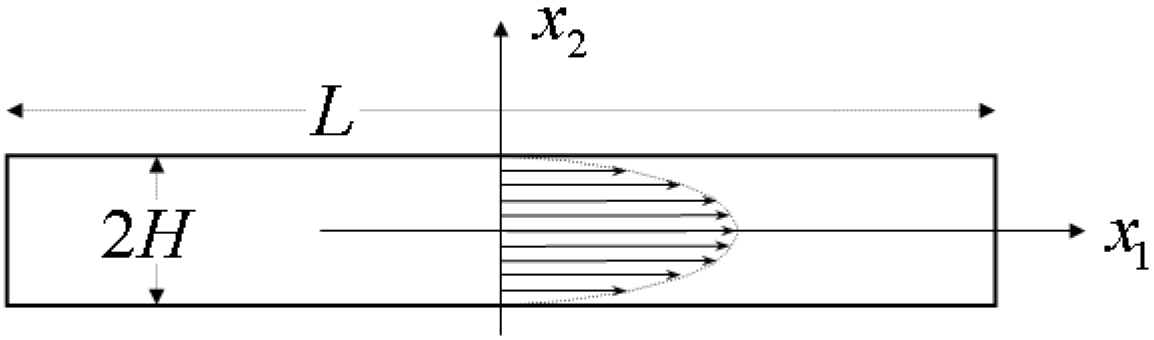
8. En una operación de inyección de un polímero fundido, éste circula por un conducto de longitud $L = 0.7$ m y $H = 7\times10^{-3}$ m (ver figura), y debido a una diferencia de presión $\Delta P = 7\times10^{5}$ Pa entre la entrada y la salida del conducto. El fundido es un fluido cuya viscosidad no es constante, sino que depende del módulo de la velocidad de deformación de la siguiente manera:

$$\eta(\dot\gamma) = m\dot\gamma^{n-1} \quad \text{donde:} \quad \dot\gamma \equiv \left|\underline{\underline{\dot\gamma}}\right| \quad \text{y} \quad \underline{\underline{\dot\gamma}} \equiv \left[\nabla\underline{v} + \left(\nabla\underline{v}\right)^{T}\right]$$

y donde $m = 1.2\times10^{5}$, $n = -0.7$ son dos constantes características del polímero. El perfil de velocidad del polímero en el conducto es conocido en función de los datos del problema y de la distancia x_2 medida desde el centro del conducto:

$$v_1(x_2) = \left(\frac{\Delta P\cdot H}{2m\cdot L}\right)\cdot\frac{H\cdot(n+1)}{2}\cdot\left[1-\left(\frac{x_2}{H}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right]$$

y las componentes v_2 y v_3 son nulas. Determinar la mínima viscosidad que presenta el polímero en el conducto.



- $1.049 \cdot 10^{10}$ Pa.s
- $1.587 \cdot 10^{8}$ Pa.s
- $6.172 \cdot 10^{8}$ Pa.s
- $4.266 \cdot 10^{8}$ Pa.s
- $2.916 \cdot 10^{9}$ Pa.s
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es: . . . .

Sol.: puesto que la viscosidad disminuye con el módulo del gradiente (ya que n-1<0), la viscosidad será mínima donde el gradiente tenga el máximo módulo, es decir donde sea mayor la derivada de v_1 respecto a x_2. A la vista del perfil de velocidad esta condición se da en la pared del conducto. Por tanto

$$(\underline{\nabla v})_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} v_j ; \quad [\![\underline{\nabla v}]\!] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta P H^2}{4mL} \frac{\left(\frac{x_2}{H}\right)^{1/n+1}}{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\![\underline{\dot{\gamma}}]\!] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\Delta P H^2}{4mL} \frac{\left(\frac{x_2}{H}\right)^{1/n+1}}{x_2} & 0 \\ -\frac{\Delta P H^2}{4mL} \frac{\left(\frac{x_2}{H}\right)^{1/n+1}}{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{de donde} \quad \dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{\dot{\gamma}}} : \underline{\underline{\dot{\gamma}}}} = \frac{\Delta P H^2}{4mL} \frac{\left(\frac{x_2}{H}\right)^{1/n+1}}{x_2}$$

$$\gamma(x_2) = \frac{\Delta P \cdot H^2}{4m \cdot L} \cdot \frac{\left(\frac{x_2}{H}\right)^{\frac{1}{n+1}}}{x_2} \qquad \gamma_{max} = \gamma(H) \qquad \gamma_{max} = \frac{\Delta P \cdot H}{4m \cdot L} \qquad \gamma(H) = 0.015$$

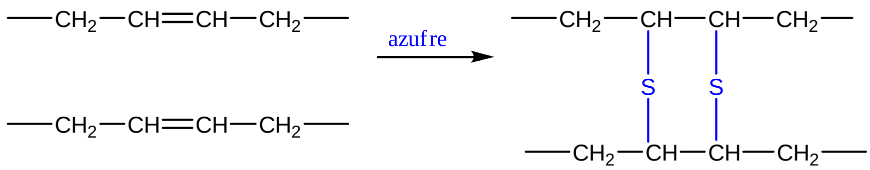
$$\eta_{min} = m \cdot \gamma(H)^{n-1} \qquad \eta_{min} = 1.587 \times 10^{8} \quad \text{Pa.s}$$

Problema 1

Nombre: **Número de matrícula:**

El ABS es un terpolímero formado por acrilonitrilo (**A**), butadieno (**B**) y estireno (**C**). Este termoplástico es muy utilizado en automoción por su buena resistencia mecánica y al impacto. El amplio rango de propiedades que presenta el ABS se debe tanto a la naturaleza de los monómeros que lo componen como a la posibilidad de combinarlos en diferentes proporciones. Una de las variedades comerciales de ABS presenta una arquitectura molecular en la que el número de residuos de butadieno es exactamente la mitad del total de residuos monoméricos. Este ABS (**D**) se puede obtener a partir de polibutadieno (**E**) y de un copolímero de acrilonitrilo-estireno (**F**). El copolímero **F** se prepara por polimerización radicalaria de una mezcla de estireno (**C**) y acrilonitrilo (**A**) siendo su composición másica del 80% en estireno.

- Determina la composición del terpolímero **D** en fracciones molares de butadieno, acrilonitrilo y estireno.
- Calcula la masa (en kg) de butadieno (**B**), acrilonitrilo (**A**) y estireno (**C)** necesarios para obtener 1 tonelada de ABS.
- Si el 10% de los dobles enlaces presentes en el terpolímero (derivados de las unidades de butadieno) se entrecruzan con azufre según la estequiometría de la figura, calcula la masa de azufre (en kg) necesaria para reticular una tonelada de ABS.

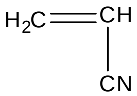


Este problema puede hacerse analíticamente o con ayuda del diagrama triangular que se adjunta.

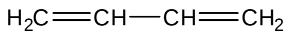
(3 puntos, 45 minutos)

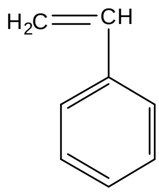
Sol:

Estructuras de los monómeros y masas moleculares:

A= 

Acrilonitrilo: $Mw_A = 53\,\frac{kg}{kmol}$

B=  **Butadieno:** $\boldsymbol{Mw_B = 54\frac{kg}{kmol}}$

C=  **Estireno:** $\boldsymbol{Mw_C = 104\frac{kg}{kmol}}$

A partir de los datos del enunciado, *"el número de residuos de butadieno es exactamente la mitad del total de residuos monoméricos"*, se deduce la fracción molar de butadieno en el terpolímero:

$$X_B = 0.5$$

Y por lo tanto,

$$X_A + X_C = 0.5 \ (en\ el\ terpolímero\ \boldsymbol{D})$$

El acrilonitrilo (**A**) y estireno (**C**) del terpolímero **D** provienen en su totalidad del copolímero **F**, del que se sabe su composición másica. A partir de esta información, es inmediato obtener las fracciones molares de **A** y **C** en el copolímero **F** ($X_{FC}\ y\ X_{FA}$), que evidentemente diferirán de las correspondientes fracciones molares de **A** y **C** en el terpolímero **D** ($X_C\ y\ X_A$). Sin embargo, la relación entre el número de residuos de acrilonitrilo y estireno en el copolímero **F** se tiene que mantener en el terpolímero **D**:

$$fracción\ molar\ de\ estireno\ en\ el\ copolímero\ F = X_{FC} = \frac{moles\ estireno}{moles\ estireno + moles\ acrilonitrilo}$$

$$X_{FC} = \frac{\frac{80}{104}}{\frac{80}{104} + \frac{20}{53}} = 0.671 \Rightarrow X_{FA} = 0.329 \Rightarrow \frac{X_{FC}}{X_{FA}} = \frac{residuos\ estireno}{residuos\ acrilonitrilo} = \frac{0.671}{0.329} = 2.04 = \frac{X_C}{X_A}$$

Por lo tanto, las fracciones molares de **A**, **B** y **C** en el terpolímero **D** serán:

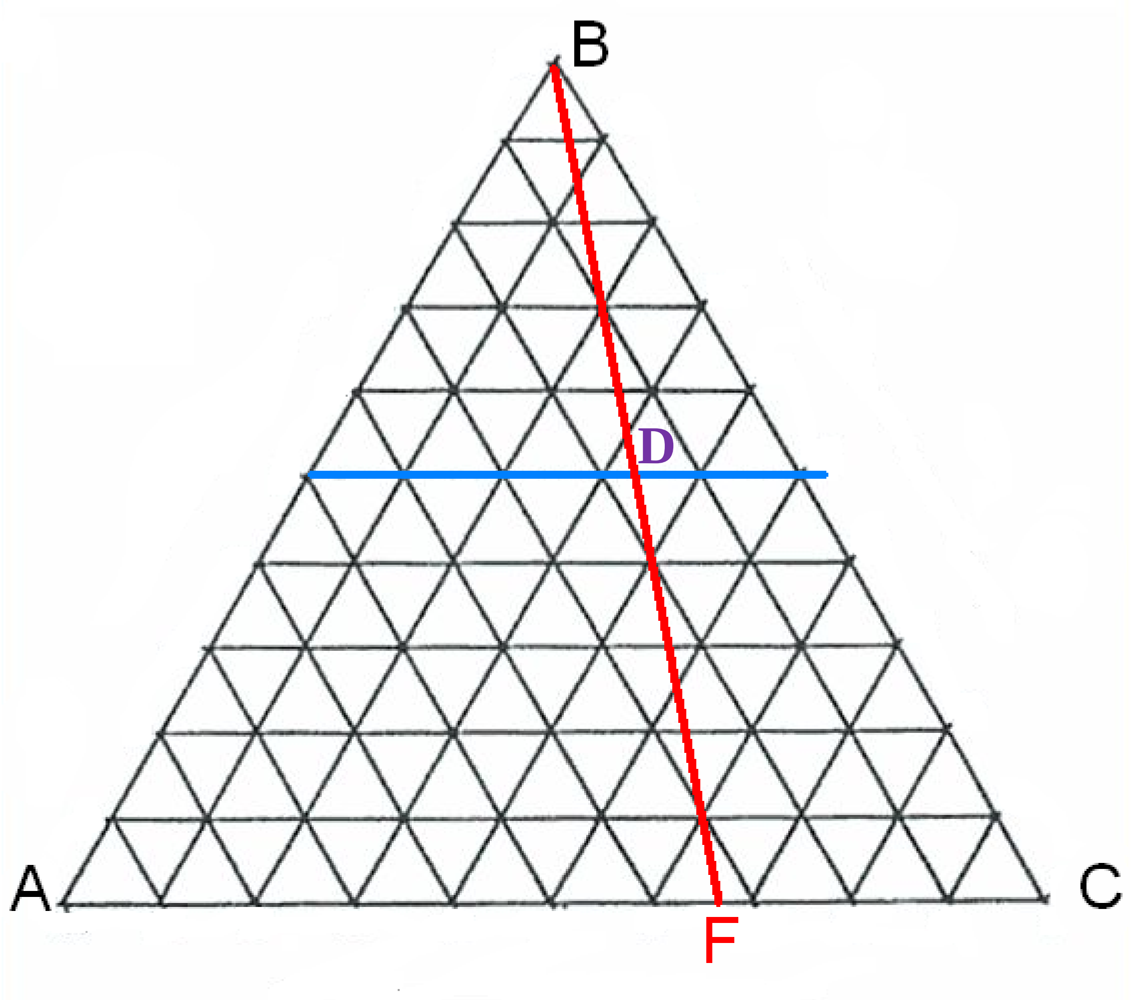
$$X_C = 2.04X_A \ \Rightarrow \ 3.04X_A = 0.5 \Rightarrow \quad X_A = 0.164 \ \ y \quad X_C = 0.336$$

$$X_B = 0.5$$

- **Gráficamente**

En el diagrama triangular (en fracciones molares) se determina la composición del terpolímero por intersección de la recta correspondiente a $X_B = 0.5$ (azul) y la recta BF (roja). El punto F se debe situar sobre el lado AC del diagrama triangular y con las composiciones molares calculadas anteriormente ($X_{FC} = 0.671 \Rightarrow X_{FA} = 0.329$)

La composición de D se lee directamente en el diagrama.



$X_A = 0.164$ $X_B = 0.5$ $X_C = 0.336$

Para calcular las cantidades de materias primas necesarias para obtener una tonelada de ABS se puede proceder de diferentes maneras, pero siempre recordando que las **fracciones de A, B y C determinadas son fracciones molares, y no másicas.**

Es inmediato obtener la equivalencia entre kg y kmol para el terpolímero D (su masa molecular), a partir de su composición en fracciones molares:

$$Mw_D = X_A Mw_A + X_B Mw_B + X_C Mw_C = 0.164 \times 53 + 0.5 \times 54 + 0.336 \times 104 = 70.64 \frac{kg}{kmol}$$

Y las cantidades de materias primas para obtener 1 Tm de ABS:

$$m_A = 1000\ kg\ D \times \frac{1\ kmol\ D}{70.64\ kg\ D} \times \frac{0.164\ kmol\ A}{1\ kmol\ D} \times \frac{53\ kg\ A}{1\ kmol\ A} = 123.05\ kg\ A$$

$$m_B = 1000\ kg\ D \times \frac{1\ kmol\ D}{70.64\ kg\ D} \times \frac{0.5\ kmol\ B}{1\ kmol\ D} \times \frac{54\ kg\ B}{1\ kmol\ B} = 382.22\ kg\ B$$

$$m_C = 1000\ kg\ D \times \frac{1\ kmol\ D}{70.64\ kg\ D} \times \frac{0.336\ kmol\ C}{1\ kmol\ D} \times \frac{104\ kg\ C}{1\ kmol\ C} = 494.67\ kg\ A$$

Otra posibilidad es transformar las fracciones molares obtenidas en fracciones másicas y determinar las cantidades de materias primas:

$$fracción\ másica\ de\ A = X_{A(m)} = \frac{masa\ de\ A}{masa\ de\ A + masa\ de\ B + masa\ de\ C}$$
$$= \frac{0.164 \times 53}{0.164 \times 53 + 0.5 \times 54 + 0.336 \times 104} = 0.123$$

Análogamente:

$$fracción\ másica\ de\ B = X_{B(m)} = \frac{masa\ de\ B}{masa\ de\ A + masa\ de\ B + masa\ de\ C}$$
$$= \frac{0.5 \times 54}{0.164 \times 53 + 0.5 \times 54 + 0.336 \times 104} = 0.382$$

$$fracción\ másica\ de\ C = X_{C(m)} = \frac{masa\ de\ C}{masa\ de\ A + masa\ de\ B + masa\ de\ C}$$
$$= \frac{0.336 \times 104}{0.164 \times 53 + 0.5 \times 54 + 0.336 \times 104} = 0.495$$

Por lo que las cantidades de materias primas para obtener una tonelada de ABS serán:

$$m_A = 123\ kg \qquad m_B = 382\ kg \qquad m_C = 495\ kg$$

También se puede resolver gráficamente. Aplicando la regla de la palanca (segmento BF) se determina, en una primera etapa, las cantidades (en kmol) de B y de F necesarias para obtener 1 kmol de D. A partir del valor obtenido para F, aplicando nuevamente la regla de la palanca (segmento AC) se obtienen los kmol de A y de C. Finalmente se rehace el cálculo para los kmol de D que hay en una tonelada, y se transforman las cantidades de A, B y C en kmol a cantidades en kg a través de las masas moleculares.

Para resolver el último apartado solo hay que tener en cuenta que en el proceso de reticulación indicado en la figura, la estequiometría azufre/doble enlace es 1:1, y los dobles enlaces que se entrecruzan provienen de los residuos de butadieno:

$$masa\ de\ azufre = 1000\ kg\ D \times \frac{1\ kmol\ D}{70.64\ kg\ D} \times \frac{0.5\ kmol\ B}{1\ kmol\ D} \times \frac{1\ kmol\ dobles\ enlaces}{1\ kmol\ B}$$
$$\times \frac{1\ kmol\ de\ azufre}{1\ kmol\ dobles\ enlaces} \times \frac{32\ kg\ S}{1\ kmol\ S} \times \frac{10}{100} = 22.65\ kg\ S$$

Problema 2

Nombre: **Número de matrícula:**

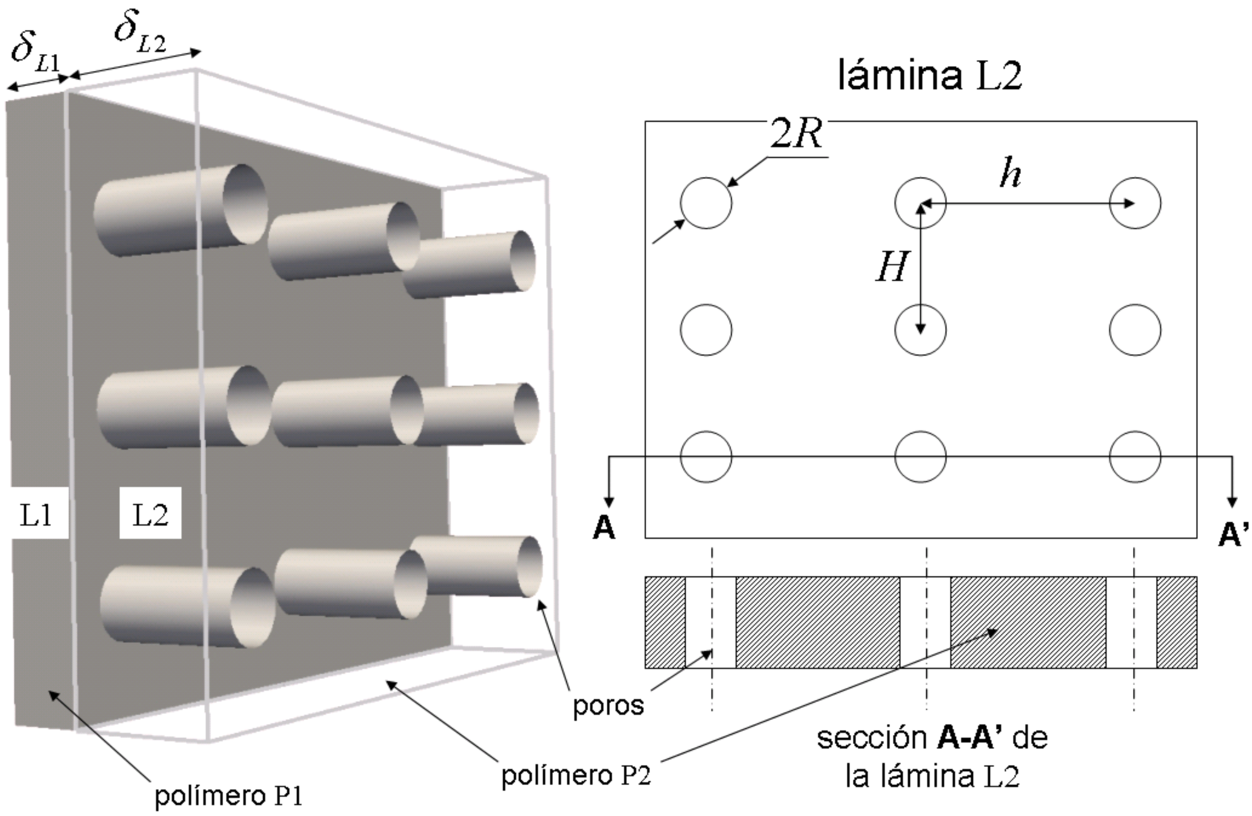
En la figura se representa un esquema simplificado de un tejido T (material compuesto) análogo al Gore-Tex. Consta de dos láminas de polímeros distintos. La primera lámina (L1) es de un polímero P1 (isótropo); la segunda (L2) es también una lámina de otro polímero isótropo P2 en la que existen poros o perforaciones circulares como se indica en la figura. Aunque P2 (sin poros) es isótropo, la lámina L2 no es isótropa debido a los poros.

Se desea calcular la difusividad másica D_T (propiedad de segundo orden) del vapor de agua a través del material compuesto T.

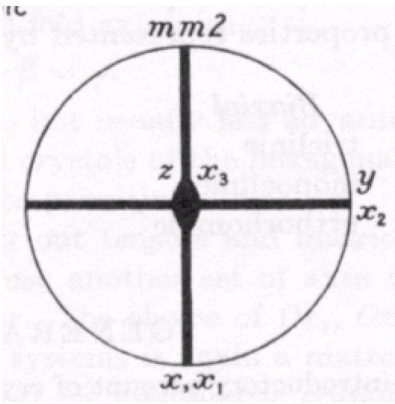
Los datos conocidos son los espesores de las dos láminas $\delta_{L1} = 1.5 \times 10^{-3}$ m, $\delta_{L2} = 1.6 \times 10^{-3}$ m, el radio de los poros $R = 4.6 \times 10^{-6}$ m, y la geometría $H = 2.024 \times 10^{-5}$ m, $h = 1.656 \times 10^{-5}$ m (ver figura). También se han medido las difusividades del vapor de agua a través del aire $D_a = 4 \times 10^{-5}$ m^2/s y a través de P1: $D_{P1} = 1.4 \times 10^{-6}$ m^2/s. Se sabe además que la difusividad del vapor de agua a través de P2 es $D_{P2} = 0$ m^2/s (es decir, P2, sin perforaciones, es absolutamente impermeable al vapor de agua). Las densidades son $\rho_{P1} = 490$ kg/m^3 y $\rho_{P2} = 902$ kg/m^3 y la del aire se considera despreciable.

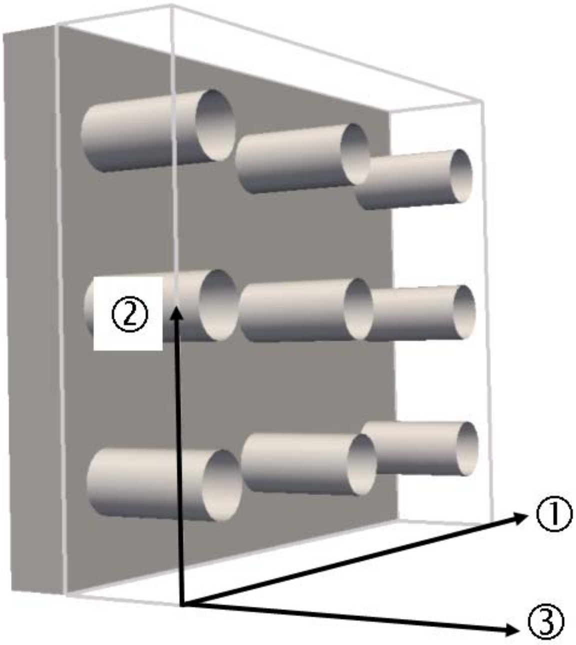
- determinar a qué clase cristalográfica o límite pertenece el tejido T,
- dibujar y numerar los ejes convencionales de T especificando claramente su orientación respecto a las láminas. Estos ejes convencionales se usarán en los restantes apartados.
- calcular la masa de un metro cuadrado de T (densidad superficial, en kg/m^2),
- calcular la densidad de T, en kg/m^3,
- calcular la componente de la difusividad másica del vapor de agua sólo para la lámina L2 y en la dirección normal al plano de las láminas,
- calcular la componente de D_T (es decir, para el tejido T completo) en esta misma dirección.
- calcular las componentes de la difusividad másica del vapor de agua sólo para la lámina L2 en las dos direcciones convencionales contenidas en el plano de las láminas,
- calcular las componentes de D_T (es decir, para el tejido T completo) en estas mismas direcciones,
- escribir D_T como matriz expresada en los ejes convencionales del segundo apartado.

(45 minutos, 3 puntos)



Sol.: el material tiene dos planos de simetría perpendiculares al plano de las láminas y un eje binario, igualmente perpendicular el plano de las láminas. Tiene por tanto tres elementos binarios de simetría (dos planos y un eje, ortogonales entre sí), por lo que pertenece al sistema ortorrómbico. Puesto que no tiene un plano de simetría paralelo la plano de las láminas, pertenece a la clase mm2. La orientación de los ejes convencionales, a la vista del estereograma de la clase, es como se indica en la figura.



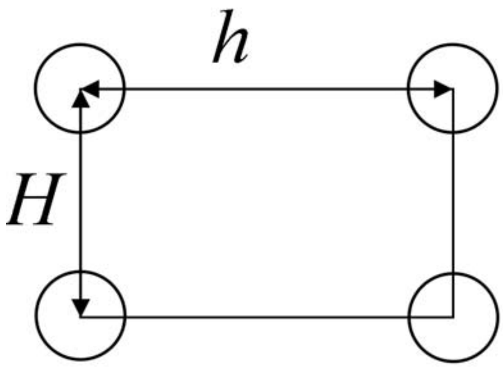


La densidad superficial (por m²), se obtiene sumando la masa de L1 y de L2 que hay en 1 m² . En primer lugar se calculan las fracciones volumétricas de aire y de P2 en L2, y de L1 y L2 en T:

$$V_{aire\_L2} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \delta_{L2}}{H \cdot h \cdot \delta_{L2}}$$

← **volumen de un poro**

← **volumen de la porción rectangular de L2 que contiene un poro**



$$V_{P2\_L2} = 1 - V_{aire\_L2}$$ $V_{aire\_L2} = 0.198$ $V_{P2\_L2} = 0.802$

$$V_{L1\_T} = \frac{\delta_{L1}}{\delta_{L1} + \delta_{L2}} \qquad V_{L2\_T} = \frac{\delta_{L2}}{\delta_{L1} + \delta_{L2}}$$ $V_{L1\_T} = 0.484$ $V_{L2\_T} = 0.516$

La densidad superficial del tejido T es: $1 \cdot 1 \cdot \left(\delta_{L1} \cdot \rho_{P1} + \delta_{L2} \cdot \rho_{P2} \cdot V_{P2\_L2}\right) = 1.892$ **kg/m²**

La densidad de la lámina L2 es: $\rho_{L2} = V_{P2\_L2} \cdot \rho_{P2}$ $\rho_{L2} = 723.104$ **kg/m³**

y la densidad del tejido T: $\rho_T = V_{L1\_T} \cdot \rho_{P1} + V_{L2\_T} \cdot \rho_{L2}$ $\rho_T = 610.312$ **kg/m³**

Para un material ortorrómbico, la estructura de cualquier propiedad de segundo orden simétrica, por tanto de la difusividad, es:

$$\mathrm{str}(D_T) = \begin{bmatrix} \bullet & \cdot & \cdot \\ & \bullet & \cdot \\ & & \bullet \end{bmatrix}$$

Para la lámina L2 y en la dirección normal a las láminas (eje 3 en la figura), el polímero P2 y los poros están en paralelo, con lo cual la regla de mezcla para la difusividad másica (que es análoga a una conductividad eléctrica) es la aritmética (Voigt). Puesto que P2 es totalmente impermeable al vapor de agua:

$$D_{L2\_3} = V_{aire\_L2} \cdot D_a \qquad D_{L2\_3} = 7.933 \times 10^{-6} \ \mathrm{m^2/s}$$

Para el tejido T y en la dirección normal a las láminas, las dos láminas están en serie, con lo cual la regla de mezcla para la difusividad másica (que es análoga a una conductividad eléctrica) es la armónica (Reuss):

$$D_{T\_3} = \left(\frac{\delta_{L1}}{\delta_{L1} + \delta_{L2}} \cdot D_{P1}^{-1} + \frac{\delta_{L2}}{\delta_{L1} + \delta_{L2}} \cdot D_{L2\_3}^{-1} \right)^{-1} \qquad D_{T\_3} = 2.435 \times 10^{-6} \ \mathrm{m^2/s}$$

Para la lámina L2 y en las dos direcciones paralelas a las láminas (direcciones 1 y 2), puesto que P2 es totalmente impermeable y los poros por donde sí podría difundirse el vapor de agua están desconectados unos de otros, no puede haber difusión, con lo cual:

$$D_{L2\_1} = 0 \quad \mathrm{m^2/s}$$

$$D_{L2\_2} = 0 \quad \mathrm{m^2/s}$$

Para el tejido T y en las dos direcciones paralelas a las láminas (direcciones 1 y 2), L1 y L2 están en paralelo (regla de mezcla aritmética para la difusión) y puesto que L2 es totalmente impermeable :

$$D_{T\_1} = \frac{\delta_{L1}}{\delta_{L1} + \delta_{L2}} \cdot D_{P1} \qquad D_{T\_1} = 6.774 \times 10^{-7} \ \mathrm{m^2/s}$$

$$D_{T\_2} = D_{T\_1} \qquad D_{T\_2} = 6.774 \times 10^{-7} \ \mathrm{m^2/s}$$

La difusividad, representada como matriz, y de acuerdo con la estructura que corresponde al siste ortorrómbico, es:

$$\begin{pmatrix} D_{T\_1} & 0 & 0 \\ 0 & D_{T\_2} & 0 \\ 0 & 0 & D_{T\_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.774 \times 10^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & 6.774 \times 10^{-7} & 0 \\ 0 & 0 & 2.435 \times 10^{-6} \end{pmatrix} \ \mathrm{m^2/s}$$