Nombre y Apellidos: **Número de matrícula:**

- **sólo puntuarán las respuestas justificadas con desarrollo numérico, gráfico, etc.**
- **sólo una respuesta es correcta**
- **las respuestas incorrectas no restan puntos**
- **usar por favor bolígrafo, pluma o rotulador**
- **usar estas mismas hojas para hacer los cálculos**
- **60 min., 0.5 puntos cada problema**

Las soluciones aparecerán en AulaWeb dentro de los dos días hábiles siguientes a la finalización de la prueba.
Las preactas se publicarán no más tarde del día 2 de febrero y la revisión de examen será el martes 8 de febrero a las 12:00 en la sala de profesores de la 2ª planta.

1. La densidad de portadores intrínsecos (portadores/m^3) para un determinado elemento semiconductor del grupo IV a 300K es $n_i = 1.4\times10^{16}\ \frac{portadores}{m^3}$. Si la densidad del elemento es $\rho = 2.8\frac{g}{cm^3}$ y su masa atómica 51 g/mol, determina el porcentaje de átomos de este elemento que se encuentran ionizados a dicha temperatura. $\left(\frac{\acute{a}tomos\ ionizados}{\acute{a}tomos\ totales}\times100\right)$

- 5.86×10^{-11}
- 4.23×10^{-11}
- 7.12×10^{-11}
- 6.48×10^{-11}
- 4.70×10^{-11}
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es :

Sol.:
El número de átomos ionizados coincide con el número de portadores intrínsecos.

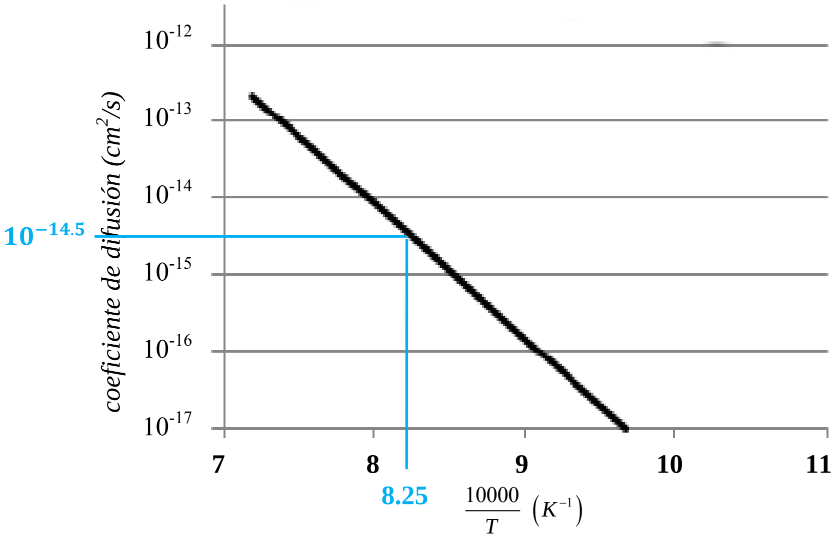
Los átomos totales por metro cúbico se calculan teniendo en cuenta la densidad y la masa atómica:

$$\frac{\acute{a}tomos\ totales}{m^3} = 2.8\frac{g}{cm^3}\times\frac{10^6 cm^3}{1m^3}\times\frac{1\ mol\ \acute{a}tomos}{51g}\times\frac{N_A\ \acute{a}tomos}{1\ mol\ \acute{a}tomos}$$
$$= 3.307\times10^{28}\frac{\acute{a}tomos\ totales}{m^3}$$

Por lo que:

$$\frac{\acute{a}tomos\ ionizados}{\acute{a}tomos\ totales}\times100 = \frac{1.4\times10^{16}}{3.307\times10^{28}}\times100 = 4.23\times10^{-11}$$

2. Si se difunde boro en una oblea de silicio puro a una temperatura de 940ºC durante 6 h. ¿cuál es la profundidad bajo la superficie a la que la concentración de los átomos de boro es de 10^{16} átomos/cm^3, si la concentración en la superficie es de 10^{18} átomos de boro/cm^3?
(*Indicar la lectura realizada sobre la gráfica*)



- 6.01×10^{-7} m
- 1.07×10^{-7} m
- 8.50×10^{-7} m
- 3.02×10^{-7} m
- 3.80×10^{-8} m
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es :

Sol:

La profundidad solicitada (x) se determina aplicando la 2ª Ley de Fick para la difusión en el caso de un medio semiinfinito:

$$\frac{C_s - C_x}{C_s - C_0} = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

Se conoce C_x=10^{16} átomos/cm^3; C_s=10^{18} átomos/cm^3 y $C_0=0$, por lo que la profundidad corresponde exactamente al espesor de la capa límite:

$$\frac{C_s - C_x}{C_s - C_0} = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) \Rightarrow \frac{10^{18} - 10^{16}}{10^{18}} = 0.99 = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) = erf(z) \Longrightarrow z = 1.8243$$

$$1.8243 = \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \Longrightarrow x = 1.8243 \times 2\sqrt{Dt}$$

El coeficiente de difusión se determina gráficamente y el tiempo es conocido.

La temperatura a la que se realiza el proceso de difusión

$$T = 940 + 273 = 1213 \Rightarrow \frac{1}{T} = 8.24 \times 10^{-4} K^{-1}$$

Leyendo en la gráfica directamente se obtiene $\mathrm{D} = 10^{-14.5} = 3.16 \times 10^{-15}$

Al sustituir $x = 1.8243 \times 2\sqrt{Dt} = 3.02 \times 10^{-5} cm = 3.02 \times 10^{-7} m$

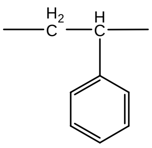
3. Uno de los cauchos sintéticos más importante es el caucho de estireno-butadieno (SBR), que es un copolímero de butadieno y estireno. Se desea preparar un SBR en el que el número de residuos de butadieno sea el triple que el de residuos de estireno. Determinar el precio (en materias primas) de una tonelada de este material sabiendo que

$$P_{estireno} = 1250 \frac{€}{tonelada} \qquad P_{butadieno} = 1600 \frac{€}{tonelada}$$

- 1512.5€
- 1386.9€
- 1463.2€
- 1503.4
- 1441.4€
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es :

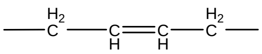
Sol.:
Las UER de estireno y butadieno son

$UER_{estireno}$



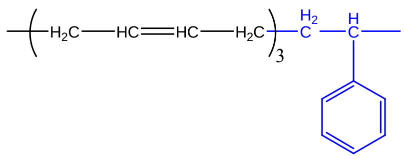
M=104g/mol

$UER_{butadieno}$:



M=54g/mol

El copolímero de SBR tiene el triple de residuos de butadieno que de estireno, lo que implica que aunque se desconozca la secuencia de los monómeros estireno y butadieno, sí se sabe que por cada 4 unidades de monómero en el polímero, 3 serán de butadieno y 1 de estireno, por ejemplo:



Como el precio de los monómeros se proporciona en €/tonelada, se calculan las fracciones másicas correspondientes a los monómeros en el copolímero:

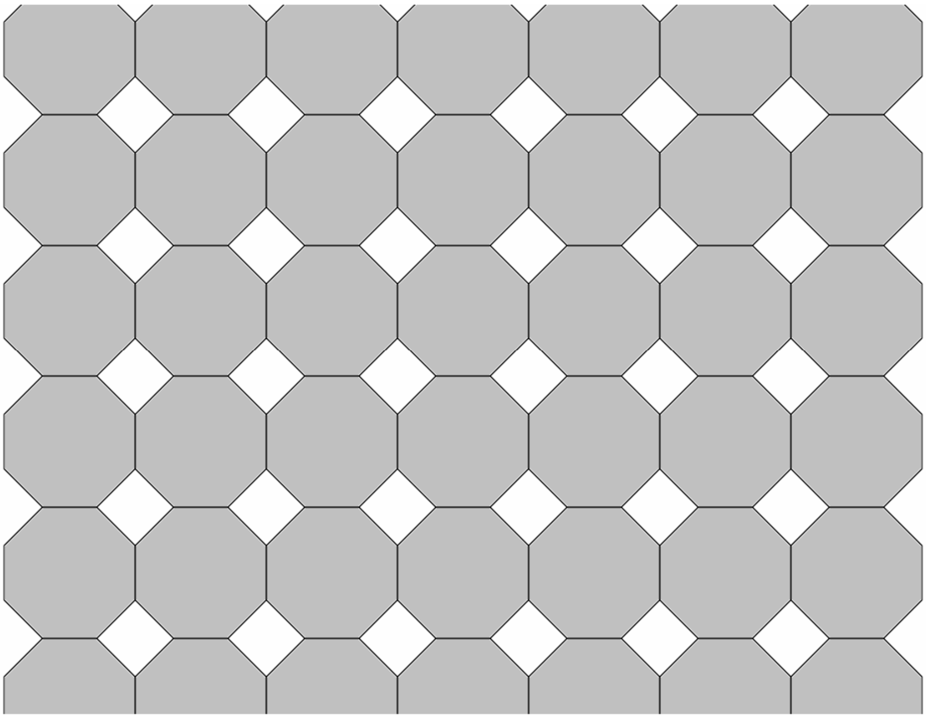
$$X_{butadieno} = \frac{3 \times 54}{3 \times 54 + 1 \times 104} = 0.6090$$

$$X_{estireno} = \frac{1 \times 104}{3 \times 54 + 1 \times 104} = 0.3910$$

y por lo tanto el precio de 1 tonelada de copolímero será:

$$P_{copolímero(1tonelada)} = X_{estireno} P_{estireno} + X_{butadieno} P_{butadieno} = 0.3910 \times 1250 + 0.6090 \times 1600 = 1463.15€$$

4. Un cable eléctrico está constituido por fibras iguales de sección octogonal regular de un metal cuya conductividad eléctrica es $\sigma = 5.8\times10^{7}\,(\Omega m)^{-1}$. Las fibras están colocadas tal como se indica en la figura que representa una sección transversal del cable (en gris aparecen las fibras del metal y en blanco el aire que queda entre las fibras).
Determinar la conductividad eléctrica en la dirección del eje de las fibras (perpendicular al plano de la figura).



- 3.89×10^{7} $(\Omega m)^{-1}$
- 5.22×10^{7} $(\Omega m)^{-1}$
- 7.61×10^{7} $(\Omega m)^{-1}$
- 7.00×10^{7} $(\Omega m)^{-1}$
- 4.80×10^{7} $(\Omega m)^{-1}$
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es :

Sol.:

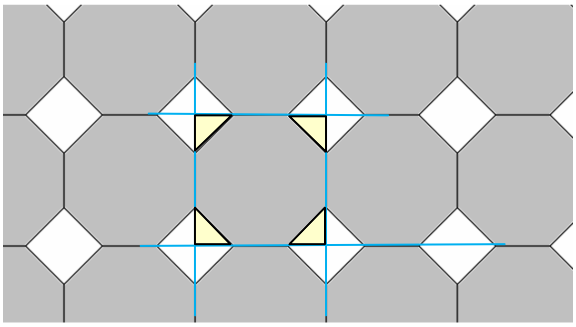
Las condiciones en que hay que determinar la conductividad (perpendicular al plano de la figura) corresponde a isogradiente, por lo que se aplicará la regla de mezclas de Voigt:

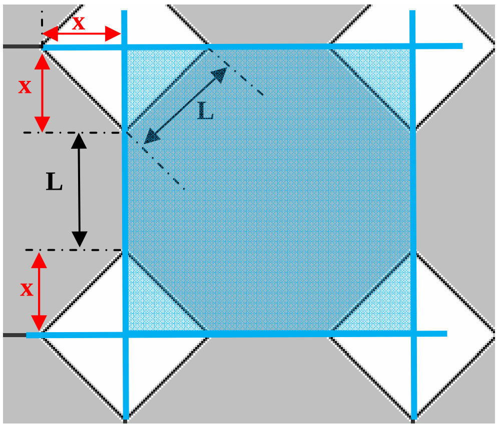
$$\sigma_{compuesto} = V_M\sigma_{metal} + V_A\sigma_{aire} = V_M\sigma_{metal}$$

ya que $\sigma_{aire}=0$

Solo es necesario conocer el valor de la fracción volumétrica del metal, que se determina a través de la siguiente relación de áreas:

$$V_M = \frac{Area_{metal}}{Area_{total}}$$





Teniendo en cuenta que se trata de octógonos regulares, si L= lado octógono, el área total corresponde al área de un cuadrado de lado L+2x (cuadrado azul de la figura)

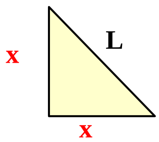
$$Area_{total} = (L + 2x)^2$$

Mientras que el área correspondiente al metal (octógono en gris) se puede calcular a partir de la anterior restando un cuadrado de lado L (cuadrado amarillo formado por los cuatro triángulos):

$$Area_{metal} = (L + 2x)^2 - L^2$$

La relación entre L y x es inmediata:

$L^2 = 2x^2$



Por lo que $V_M = \frac{Area_{metal}}{Area_{total}} = \frac{(L+2x)^2 - L^2}{(L+2x)^2} = 0.8284$ **y la conductividad**

$$\sigma_{compuesto} = V_M \sigma_{metal} = 0.8284 \times 5.8 \times 10^7 = 4.80 \times 10^7 (\Omega m)^{-1}$$

5. Calcular el factor de empaquetamiento iónico para un material cerámico AB que tiene una estructura tipo blenda de cinc.
   Datos radios iónicos:
   $r_{A^{+2}} = 0.080nm$ $r_{B^{-2}} = 0.180nm$
   - 0.340
   - 0.491
   - 0.462
   - 0.438
   - 0.548
   - ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es :

Sol.:

En una estructura tipo blenda de cinc los aniones (B^{-2}) forman una red cúbica centrada en las caras (FCC) y los cationes (A^{+2}) ocupan la mitad de huecos tetraédricos.

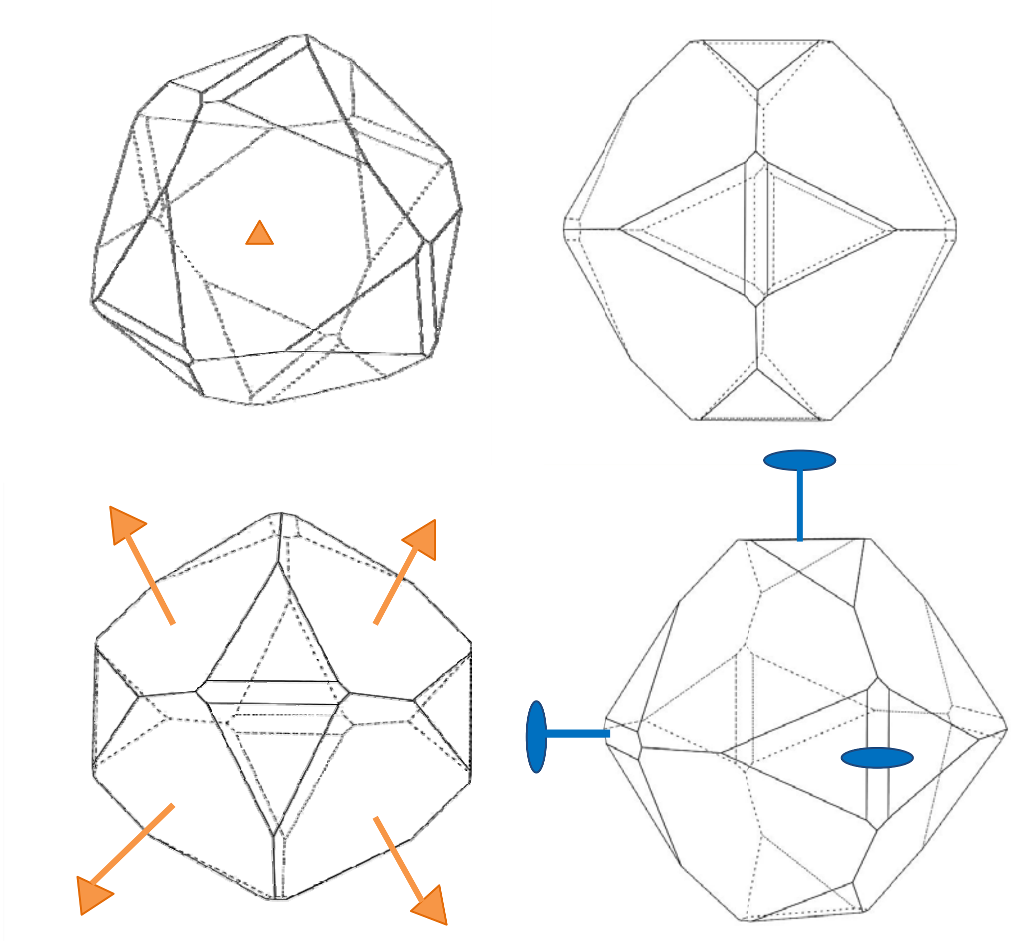
Se cumple además la siguiente relación entre la arista de la celda cristalina (a), el radio del catión (r_A) y el del anión (r_B):

$$a = \frac{4(r_A + r_B)}{\sqrt{3}}$$

Por lo que el factor de empaquetamiento iónico (IPF):

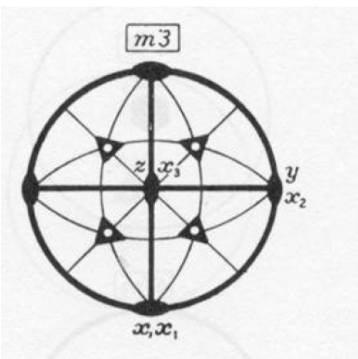
$$IPF = \frac{volumen\ iones}{volumen\ celda} = \frac{4V_A + 4V_B}{a^3} = \frac{4 \times \frac{4}{3}\pi(r_A^3 + r_B^3)}{\left(\frac{4(r_A + r_B)}{\sqrt{3}}\right)^3} = 0.491$$

6. Determinar la clase cristalográfica del siguiente monocristal de un material cerámico:



- $\boxed{mmm}$
- $\boxed{m3}$
- $\boxed{\bar{3}m}$
- 432
- $\boxed{m3m}$
- $mm2$

Sol.: $\boxed{m3}$ del sistema cúbico



En la figura aparecen indicados los tres ejes binarios y los cuatro ejes ternarios.

7. El Kevlar es una poliamida que debido a la rigidez de su estructura (poliparafenileno tereftalamida) ofrece excepcionales prestaciones mecánicas. Una fibra de este material estirada longitudinalmente presenta forma cilíndrica con las siguientes dimensiones: longitud L= 3 cm y radio R=5x10^{-4} m. Cuando la fibra anterior se somete al esfuerzo de tracción $\tau_1 = 10^6\,Pa$ (homogéneo en todos los puntos de la fibra), se obtienen los siguientes valores para las componentes del tensor deformación:

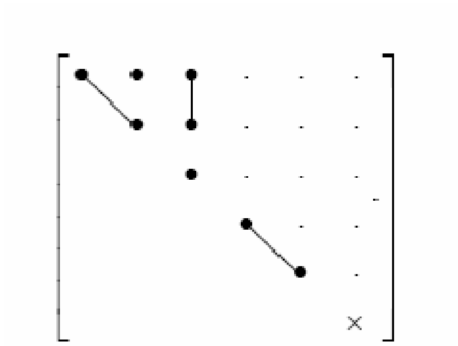
$\varepsilon_1 = 4.76\times10^{-5}; \varepsilon_2 = -1.47\times10^{-5}$

A partir de los datos anteriores determinar la componente s_{1212} del tensor complianza ($\underline{\underline{\underline{\underline{s}}}}$)

- 1.25 x 10^{-10} Pa^{-1}
- 6.23 x 10^{-11} Pa^{-1}
- 3.12 x 10^{-11} Pa^{-1}
- 1.19 x 10^{-10} Pa^{-1}
- 2.98 x 10^{-11} Pa^{-1}
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es :

Sol.:

Una fibra orientada uniaxialmente pertenece a la clase ∞/mm cuya matriz de complianza presenta la siguiente estructura:



La componente tensorial $s_{1212} = \frac{s_{66}}{4}$ **y la componente** $s_{66} = 2(s_{11} - s_{12})$ **(Ver 02_01_01/02_01_02)**

por lo que $s_{1212} = \frac{s_{66}}{4} = \frac{(s_{11}-s_{12})}{2}$

Aplicando la ley de Hooke los $\vec{\varepsilon} = s\vec{\tau}$ **valores de** s_{11} y s_{12} **se determinan identificando coeficientes, (ejercicio 09_02_03)**

$\varepsilon_1 = s_{11}\tau_1 \Longrightarrow s_{11} = \frac{\varepsilon_1}{\tau_1}$

$\varepsilon_2 = s_{12}\tau_1 \Longrightarrow s_{12} = \frac{\varepsilon_2}{\tau_1}$

$s_{1212} = \frac{(s_{11}-s_{12})}{2} = \frac{\left(\frac{\varepsilon_1}{\tau_1}-\frac{\varepsilon_2}{\tau_1}\right)}{2} = \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{2\tau_1} = \frac{\left(4.76\times10^{-5}-(-1.47\times10^{-5})\right)}{2\times10^{6}} = 3.115\times10^{-11}Pa^{-1}$

8. Un determinado material cerámico utilizado en recubrimiento para hornos cristaliza en el sistema tetragonal, siendo las componentes del tensor conductividad térmica en las direcciones convencionales las siguientes:

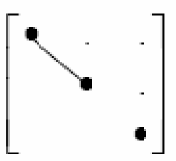
$k_{11} = 1.90\ (Wm^{-1}K^{-1}); k_{33} = 2.50(Wm^{-1}K^{-1})$

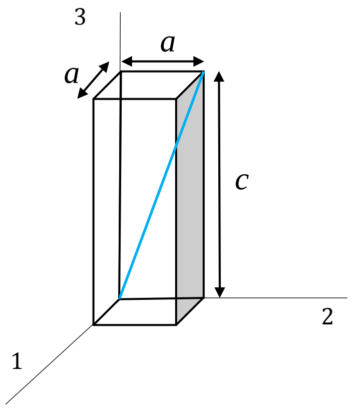
Si las dimensiones de la celda tetragonal son a = 2.5 *nm* y c = 5.0 *nm*, determinar la conductividad térmica a lo largo de la dirección [011]

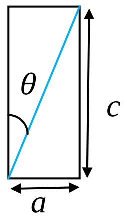
- 1.90
- 2.38
- 2.02
- 2.21
- 2.83
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es :

Sol.:

Se trata de calcular el valor de una propiedad de segundo orden ($\underline{\underline{k}}$) en una dirección dada, la dirección [011] de una celda tetragonal.







$$\tan\theta = \frac{a}{c} \Longrightarrow \theta = 26{,}56^{o}$$

$$\cos\theta = 0.894$$

$$\sin\theta = 0.447$$

$k = l_i l_j k_{ij}$ *siendo*

$l_1 = cos\,90 = 0$

$l_2 = \sin\theta$

$l_3 = \cos\theta$

Por lo que

$$k = (cos\,90)^2 k_{11} + (\sin\theta)^2 k_{11} + (\cos\theta)^2\, k_{33} = 2.38(Wm^{-1}K^{-1})$$

Problema 1

Nombre: **Número de matrícula:**

Los frenos de disco de los F1 son de un compuesto (C) de matriz de carburo de silicio SiC policristalino (A) y fibras de carbono (B). El compuesto contiene una fracción másica $X_B = 0.45$ de fibra de carbono. Los granos o cristales de la matriz de SiC están orientados aleatoriamente sin ninguna direcciór preferente (matriz isotrópica), y las fibras de carbono están orientadas uniaxialmente, como se indica cor líneas en la figura. De A y de B se conocen las densidades ($\rho_A = 3850$ kg/m^3, $\rho_B = 2500$ kg/m^3) y los calores específicos másicos ($Cp_A = 1220$ J/kg.K, $Cp_B = 1050$ J/kg.K), todos supuestos independientes de la temperatura en el intervalo de temperatura considerado.

Del material compuesto C se conocen también los coeficientes de dilatación térmica, que es una prop. tensorial de segundo orden, simétrica, que relaciona la deformación con la variación de temperatura segú

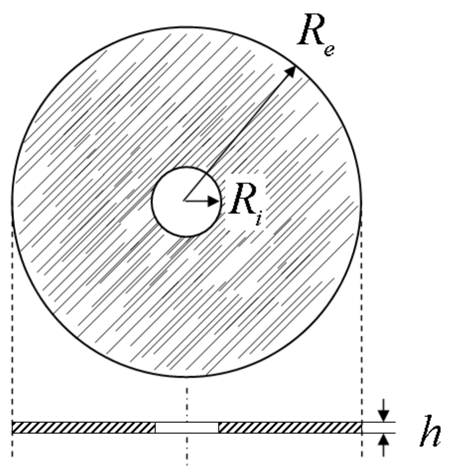
$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\alpha}}\left(T - T_{amb}\right)$$

Sus componentes son $\alpha_{11} = 1.45 \times 10^{-5}$ K^{-1} y $\alpha_{33} = 5.6 \times 10^{-6}$ K^{-1}. A temperatura ambiente $T_{amb} = 298$ K, las dimensiones del disco son: radio exterior $R_e = 0.16$ m, radio interior $R_i = 0.02$ m y espesor $h = 0.008$ m. En una frenada, el vehículo de masa $M = 1420$ kg decelera de $V_i = 55$ m/s a $V_f = 12$ m/s en un tiempo breve $\Delta t = 1.6$ s.

1. Calcular la densidad ρ_c (kg/m^3) del material del disco.
2. Calcular su calor específico másico Cp_c (J/kg.K).
3. Suponiendo que toda la energía cinética que se disipa en la frenada se reparte igualmente entre los cuatro discos (que son iguales), que la temperatura en todos los puntos del disco es la misma, y que n hay pérdidas térmicas de ningún tipo (aproximación adiabática), calcular la temperatura T (K) que alcanzan los discos al final de la frenada si antes de frenar su temperatura es la temperatura ambiente.
4. Calcular el tensor deformación del material del disco y escribirlo como matriz en el sistema de coordenadas convencional del material del disco.
5. Calcular las variaciones dimensionales (m) del radio exterior ΔR_e, del radio interior ΔR_i y del espes Δh y describir la forma que adquiere el disco.

Hacer los cálculos en pequeña deformación ($|\varepsilon_{ij}| << 1$)

(40 minutos, 3 puntos)



Sol.: la densidad del compuesto se calcula directamente a partir de los datos:

$$X_A = 1 - X_B$$

$$\rho_C^{-1} = X_A \rho_A^{-1} + X_B \rho_B^{-1}$$

sustituyendo valores numéricos: $\rho_c = \left(X_A \cdot \rho_A^{-1} + X_B \cdot \rho_B^{-1}\right)^{-1}$

$$\rho_c = 3.097 \times 10^3 \quad \text{kg/m}^3$$

Igualmente para el calor específico; al ser másico (referido a la unidad de masa) se cumple:

$$Cp_C = X_A Cp_A + X_B Cp_B$$

sustituyendo valores numéricos: $Cp_c = X_A \cdot Cp_A + X_B \cdot Cp_B$

$$Cp_c = 1.143 \times 10^3 \quad \text{kJ/kg.K}$$

De acuerdo con el enunciado, la energía mecánica (cinética) disipada en la frenada se convierte íntegramente en energía interna y se reparte igualmente entre los cuatro discos, lo que se traduce en un incremento de su temperatura. Este incremento se obtiene de un balance de energía, al igualar la energía disipada al incremento de energía interna:

$$\frac{1}{4}\frac{1}{2}M\left(V_i^2 - V_f^2\right) = \pi\left(R_e^2 - R_i^2\right) h \rho_C Cp_C \left(T - T_{amb}\right)$$

energía mecánica disipada = incremento de energía interna

$$T = T_{amb} + \frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}M\left(V_i^2 - V_f^2\right)}{\pi\left(R_e^2 - R_i^2\right) h \rho_C Cp_C}$$

sustituyendo valores numéricos:

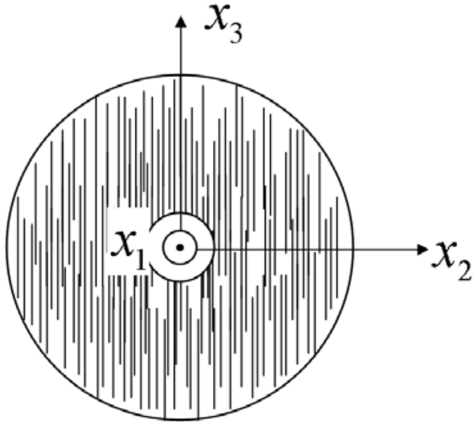
$$T = T_{amb} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot M \cdot \left(V_i^2 - V_f^2\right)}{\pi \cdot \left(R_e^2 - R_i^2\right) \cdot h \cdot \rho_c \cdot Cp_c} \qquad T = 526 \quad \text{K}$$

De acuerdo con la descripción del enunciado, el material posee un eje de orden infinito (en la dirección de las fibras de carbono), y no tiene un sentido preferencial. Pertenece a la clase

$$\infty / mm$$

Para esta clase, el eje convencional 3 es paralelo a la dirección del eje de orden infinito, y por tanto también paralelo a la dirección de las fibras de carbono. Los ejes 1 y 2 son equivalentes (material transversalmente isotrópico) y pueden elegirse arbitrariamente, con tal de que sean perpendiculares al eje 3 y perpendiculares entre sí. En este caso particular, lo más sencillo es elegir uno de ellos, p.ej. el 1, perpendicular al plano del disco, y el otro, contenido en el plano del

disco y perpendicular a los dos anteriores, como se indica en la figura.



En los ejes convencionales, puesto que las direcciones 1 y 2 son equivalentes, el coeficiente de dilatación tiene la estructura (ver también 02_01_02.pdf):

$$\begin{bmatrix} \bullet & \cdot & \cdot \\ & \bullet & \cdot \\ & & \bullet \end{bmatrix} \quad \textbf{es decir:} \quad [\![\underline{\underline{\alpha}}_C]\!] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

Por tanto el tensor deformación será:

$$[\![\underline{\underline{\varepsilon}}]\!] = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(T-T_{amb}) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11}(T-T_{amb}) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33}(T-T_{amb}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}\cdot(T-T_{amb}) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11}\cdot(T-T_{amb}) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33}\cdot(T-T_{amb}) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3.31\times10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 3.31\times10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 1.28\times10^{-3} \end{pmatrix}$$

Y las variaciones dimensionales:

En la dirección de las fibras (eje 3):

$$\Delta R_e = R_e\alpha_{33}(T-T_{amb});\ \Delta R_i = R_i\alpha_{33}(T-T_{amb})$$

$$\Delta R_e = R_e\cdot[\alpha_{33}\cdot(T-T_{amb})] \qquad \Delta R_e = 2.043\times10^{-4} \ \text{m}$$

$$\Delta R_i = R_i\cdot[\alpha_{33}\cdot(T-T_{amb})] \qquad \Delta R_i = 2.553\times10^{-5} \ \text{m}$$

En el plano del disco, perpendicular a las fibras (eje 2):

$$\Delta R_e = R_e\alpha_{11}(T-T_{amb});\ \Delta R_i = R_i\alpha_{11}(T-T_{amb})$$

$$\Delta R_e = R_e\cdot[\alpha_{11}\cdot(T-T_{amb})] \qquad \Delta R_e = 5.289\times10^{-4} \ \text{m}$$

En el espesor (eje 1):

$$\Delta h = h\alpha_{11}\left(T - T_{amb}\right)$$

$$\Delta h = h \cdot \left[\alpha_{11} \cdot \left(T - T_{amb}\right)\right] \qquad \Delta h = 2.644 \times 10^{-5} \quad m$$

Es decir, el disco aumenta de espesor, y de dimensiones radiales, y pasa de ser circular a tener una forma alargada (en pequeña deformación, una elipse).

Puesto que $\alpha_{11} > \alpha_{33}$ la mayor variación en el radio será en las direcciones transversales (perpendiculares a las fibras).

Problema 2

Nombre: **Número de matrícula:**

Se desea obtener por calcinación un ligante inorgánico (**P**) análogo al cemento. Se dispone de las siguientes materias primas:

- carbonato cálcico (caliza) $CaCO_3$ (**E**),
- la arcilla $3SiO_2.2Al_2O_3.2H_2O$ (**F**),
- la arcilla $5SiO_2.Al_2O_3.2H_2O$ (**G**).

La mezcla que se alimente al horno debe contener **E** en todo caso, y además, bien una sóla de las arcilla o **G**, o bien una mezcla de ambas, en proporciones a determinar

En el horno, **E** se descompone térmicamente y pierde CO_2 según: $CaCO_3 \rightarrow CaO + CO_2$ para dar CaO (**A**). Igualmente, en el horno las arcillas pierden completamente el agua estructural.

La especificación técnica exige que el producto **P** debe tener una fracción másica de Al_2O_3 (**B**) superior $S1 = 0.16$, pero inferior a $S2 = 0.32$. Además, la fracción másica de CaO en **P** debe ser superior a $S3 = 0.49$ pero inferior a $S4 = 0.6$.
Los costes (extracción, transporte, etc.) de las materias primas **E**, **F** y **G** son: $p_E = 12$ €/Tm, $p_F = 25$ €/Tm, y $p_G = 19$ €/Tm.

Determinar:

1. las cantidades (Tm) de materias primas **E**, **F** y **G** que se necesitan para obtener 1 Tm de **P** que, cumpliendo todas las especificaciones, tenga un coste total (€/Tm de **P**) mínimo.
2. este precio mínimo de **P** (€/Tm de **P**).

3. la composición de **P** (expresada en % másicos de CaO, Al_2O_3 y SiO_2) .

(3 puntos, 45 minutos)

Por favor, no desgrapar el diagrama triangular adjunto.

Solución: puesto que las especificaciones están dadas en base másica, lo más inmediato es trabajar en un diagrama ternario en fracción másicas.

Se calculan en primer lugar las masas moleculares a partir de las masas atómicas: $Mw_{Si} = 28$ $Mw_O = 16$, $Mw_{Ca} = 40$, $Mw_{Al} = 27$, $Mw_H = 1$, $Mw_{Carb} = 12$.

En el diagrama ternario consideramos como vértices los componentes CaO (A), Al_2O_3 (B), SiO_2 (C). Puesto que el CO_2 y el agua estructural están en relaciones molares fijas respecto a A, B y C, se puede resolver el problema en base seca y sin CO_2. Las arcillas E y F, exentas de agua, son $3SiO_2.2Al_2O_3$ (Fs) y $5SiO_2.Al_2O_3$ (Gs).

$Mw_A = Mw_{Ca} + Mw_O$ $\quad$ $Mw_B = 2Mw_{Al} + 3Mw_O$ $\quad$ $Mw_C = Mw_{Si} + 2Mw_O$

$Mw_A = 56$ kg/kmol A $\quad$ $Mw_B = 102$ kg/kmol B $\quad$ $Mw_C = 60$ kg/kmol C

$Mw_{Agua} = 2Mw_H + Mw_O$ $\quad$ $Mw_E = Mw_{Carb} + 3Mw_O + Mw_{Ca}$

$Mw_{Agua} = 18$ kg/kmol Agua $\quad$ $Mw_E = 100$ kg/kmol $CaCO_3$

$Mw_F = 3Mw_C + 2Mw_B + 2Mw_{Agua}$ $\quad$ $Mw_G = 5Mw_C + Mw_B + 2Mw_{Agua}$

$Mw_F = 420$ kg/kmol F $\quad$ $Mw_G = 438$ kg/kmol G

$Mw_{Fs} = Mw_F - 2Mw_{Agua}$ $\quad$ $Mw_{Gs} = Mw_G - 2Mw_{Agua}$

$Mw_{Fs} = 384$ kg/kmol Fs $\quad$ $Mw_{Gs} = 402$ kg/kmol Gs

Las materias primas Fs y Gs tienen una composición másica:

$$xFs_B = \frac{2Mw_B}{2Mw_B + 3Mw_C} \qquad xGs_B = \frac{Mw_B}{Mw_B + 5Mw_C}$$

$$xFs_C = 1 - xFs_B \qquad xGs_C = 1 - xGs_B$$

$xFs_A = 0$ $\quad$ $xGs_A = 0$

$xFs_B = 0.531$ $\quad$ $xGs_B = 0.254$

$xFs_C = 0.469$ $\quad$ $xGs_C = 0.746$

Los precios másicos de A, Fs y Gs son:

$$p_A = p_E \cdot \frac{Mw_E}{Mw_A} \qquad p_{Fs} = p_F \cdot \frac{Mw_F}{Mw_{Fs}} \qquad p_{Gs} = p_G \cdot \frac{Mw_G}{Mw_{Gs}}$$

$p_A = 21.429$ €/kg de A $\qquad$ $p_{Fs} = 27.344$ €/kg de F seco $\qquad$ $p_{Gs} = 20.701$ €/kg de G seco

La primera y segunda especificaciones están representadas por líneas rectas (en azul) trazadas por los valores de x_B constante:

$$xP_B = S1 \qquad\qquad xP_B = S2$$

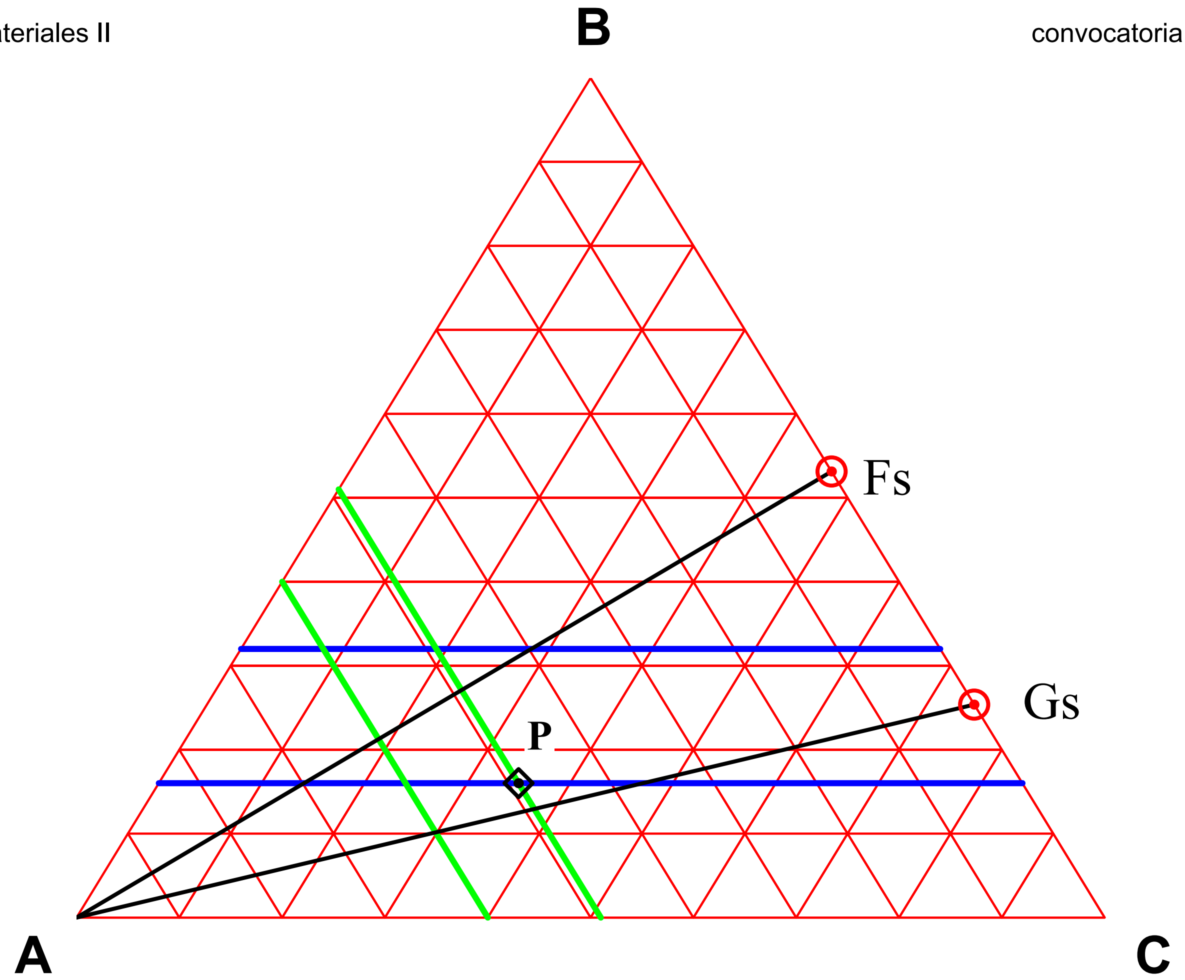
La tercera y cuarta especificaciones están representadas igualmente por líneas rectas (en verde) trazadas por los valores de x_A constante:

$$xP_A = S3 \qquad\qquad xP_A = S4$$

Además, puesto que el producto se obtiene por mezcla de las materias primas dadas (A, Fx y Gs, en base seca y exenta de CO_2), el punto P debe encontrarse en la región triangular delimitada por las líneas en trazo negro. Una de ellas representa el caso extremo de mezclar A sólo con F, y la otra el otro caso extremo de mezclar A sólo con G. Cualquier mezcla de A con F y G debe encontrarse necesariamente en la región triangular definida por estas dos líneas y el lado del diagrama.

Por tanto, la composición pedida debe estar dentro del área (polígono) delimitada por las cuatro especificaciones S1, S2, S3 y S4, y además dentro del área triángular descrita en el párrafo anterior.

Como también se especifica que el precio másico sea mínimo, y este precio es una función lineal de la composición másica, el mínimo del precio se encontrará en uno de los vértices del polígono.



- **del diagrama se leen directamente las composiciones de los vértices de la zona que cumple todas las especificaciones.**
- **para cada vértice se calcula su precio,**
- **el producto P deseado se encuentra en el vértice en el que el precio es menor,**
- **finalmente se convierten las cantidades de A, Fs y Gs a cantidades de E (añadiendo el CO_2), F y G (volviendo a base húmeda) usando la relación de masas moleculares.**

$xP_{Fs} = 0.1103$ $xP_{Gs} = 0.3997$ $xP_A = 0.49$ $Precio_{min} = 21.79$ €/Tm

La composición del punto P puede leerse directamente del diagrama:

$xP_A = 0.49$ $xP_B = 0.16$ $xP_C = 0.35$

o bien obtenerse a partir de las fracciones de A, Fs y Gs en P:

$$x_B^P = \frac{x_{Fs}^P x_B^{Fs} + x_{Gs}^P x_B^{Gs}}{x_A^P + x_{Fs}^P x_B^{Fs} + x_{Gs}^P x_B^{Gs} + x_{Fs}^P x_C^{Fs} + x_{Gs}^P x_C^{Gs}}$$

$$x_C^P = 1 - x_A^P - x_B^P$$

Las cantidades de materias primas A, F y G son entonces:

$Z_E = xP_A \cdot \frac{Mw_E}{Mw_A}$ $Z_F = xP_{Fs} \cdot \frac{Mw_F}{Mw_{Fs}}$ $Z_G = xP_{Gs} \cdot \frac{Mw_G}{Mw_{Gs}}$

$Z_E = 0.875$ Tm de L / Tm de P $Z_F = 0.121$ Tm de L / Tm de P $Z_G = 0.436$ Tm de L / Tm de P