

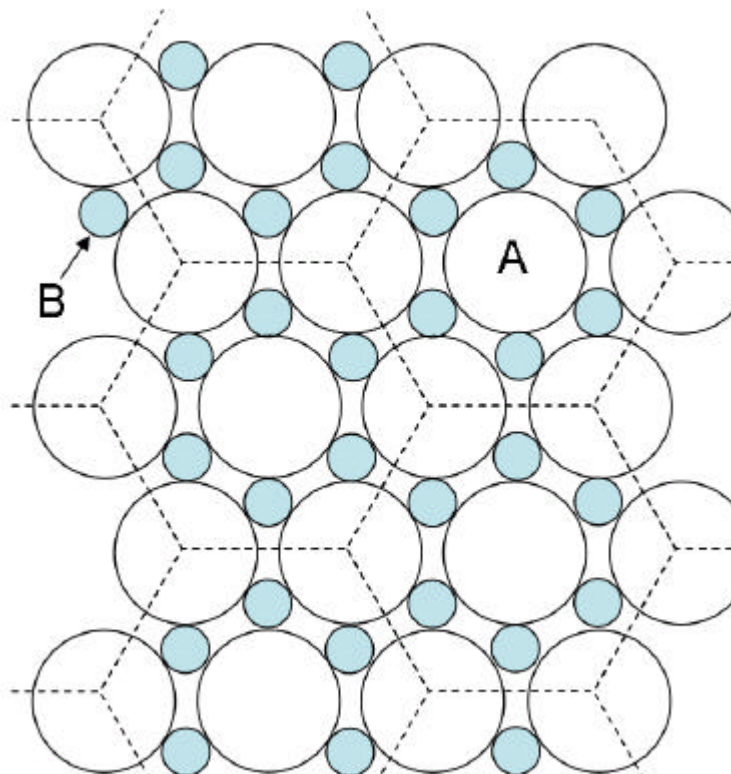
Nombre y apellidos:**Número de matrícula:**

- sólo una respuesta es correcta
- sólo puntuarán las respuestas con un razonamiento matemático, gráfico, etc.
- las respuestas incorrectas no restan puntos
- usar por favor bolígrafo, pluma o rotulador
- usar estas mismas hojas para hacer los cálculos
- 60 min, 0.5 puntos cada problema

Las soluciones aparecerán en AulaWeb dentro de los dos días hábiles siguientes a la finalización de la prueba.



1. Un cable eléctrico está formado por dos tipos de conductores A y B, y un aislante C como matriz. La sección transversal del cable está dibujada en la figura. Los cables de A y B son tangentes y están dispuestos hexagonalmente (el dibujo y la relación de radios de A y B no están a escala, son puramente indicativos). El espacio entre los cables está relleno de un aislante eléctrico C de resistividad infinita. Los radios de los conductores A y B son $r_A = 5 \times 10^{-3}$ m y $r_B = 1.3 \times 10^{-3}$ m, y sus resistividades eléctricas son $\rho_A = 1 \times 10^{-7}$ $\Omega \cdot m$ y $\rho_B = 6.89 \times 10^{-7}$ $\Omega \cdot m$. Determinar la resistividad eléctrica del cable, considerándolo como un material compuesto, en la dirección perpendicular al plano de la figura.



- $1.456 \cdot 10^{-7}$ $\Omega \cdot m$
- $1.288 \cdot 10^{-7}$ $\Omega \cdot m$
- $3.608 \cdot 10^{-7}$ $\Omega \cdot m$
- $2.996 \cdot 10^{-7}$ $\Omega \cdot m$
- $2.070 \cdot 10^{-7}$ $\Omega \cdot m$
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:



Sol.: las fracciones volumétricas de los dos conductores son directamente proporcionales a las fracciones de área en la sección transversal. Eligiendo, p.ej., un hexágono de los marcados con línea de trazos, las fracciones volumétricas son:

$$V_A = \frac{2 \cdot \pi}{3 \cdot \sqrt{3}} \cdot \frac{r_A^2}{(r_A + r_B)^2} \quad V_A = 0.762$$

$$V_B = \frac{4 \cdot \pi}{3 \cdot \sqrt{3}} \cdot \frac{r_B^2}{(r_A + r_B)^2} \quad V_B = 0.103$$

$$V_C = 1 - V_A - V_B \quad V_C = 0.135$$

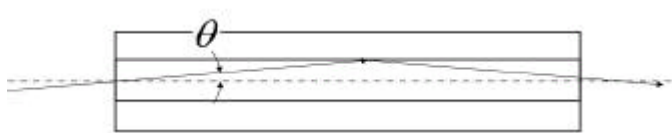
Los dos conductores están en paralelo (isotensión), por tanto la resistividad total será:

$$\rho_C = \left(V_A \cdot \frac{1}{\rho_A} + V_B \cdot \frac{1}{\rho_B} \right)^{-1} \quad \rho_C = 1.288 \times 10^{-7} \, \Omega \cdot m$$



2. Una fibra óptica monomodo está fabricada con dos tipos diferentes de vidrio. El vidrio del manto o recubrimiento tiene un índice de refracción $n_e = 1.36$, y el vidrio del núcleo de la fibra tiene un índice de refracción $f = 20 \, \%$ superior.

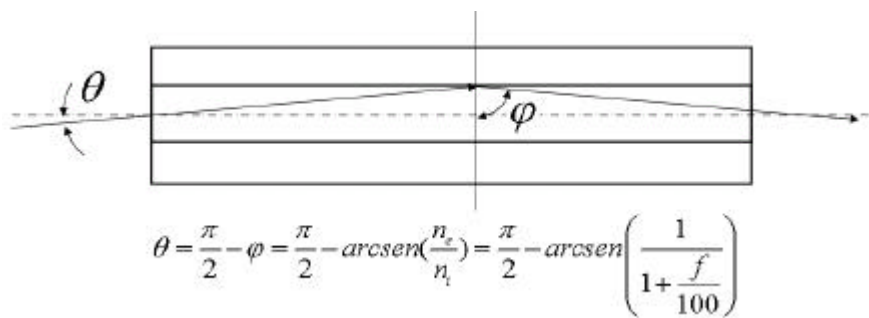
Determinar para esta fibra cuál es la máxima desalineación permisible θ .



- 25.7°
- 48.5°
- 33.6°
- 46.4°
- 42.7°
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:



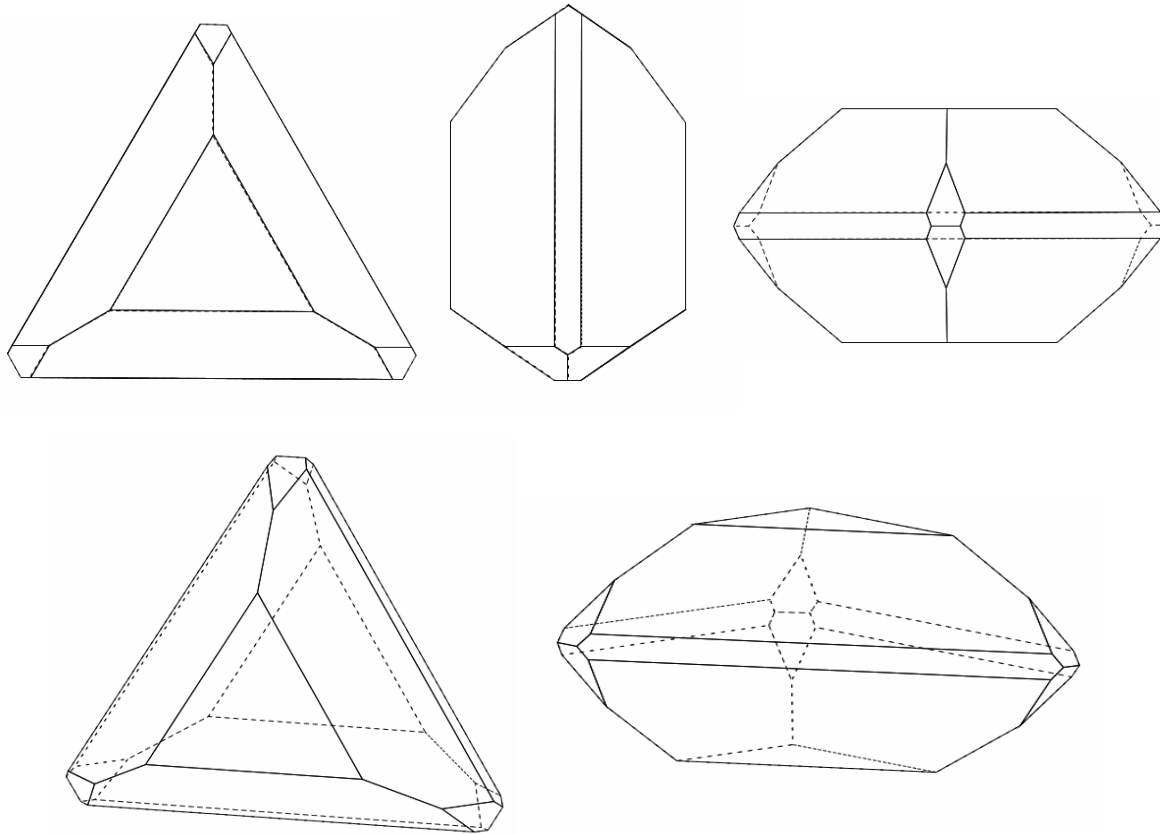
Sol.: la máxima desalineación permisible se obtiene cuando el ángulo de incidencia del rayo en la interfaz entre los dos vidrios es el ángulo crítico de reflexión interna, como se indica en la figura.



Por tanto, la máxima desalineación es: $\theta = \frac{\pi}{2} - \arcsen\left(\frac{1}{1 + \frac{f}{100}}\right)$ radianes, o bien $\theta \cdot \frac{180}{\pi} = 33.6$ **grados**



3. Un material cerámico tiene una estructura cristalina como la que se muestra en la figura. Determinar a qué clase cristalográfica pertenece.



• $\overline{3}m$

• 3

• $3m$

• $\overline{6}/m$

• $\overline{6}m2$

• $\overline{6}$



Sol: la estructura tiene un eje ternario y un plano de reflexión perpendicular a él, eso equivale a un senario de inversión, luego la estructura es hexagonal. Además tiene otros tres planos de reflexión más y tres ejes binarios.
Por lo tanto es la clase:

$\overline{6}m2$





4. Los óxidos de dos metales A_2O y BO forman soluciones sólidas en un pequeño intervalo de concentraciones. Sabiendo que el óxido A_2O tiene la estructura cristalina de la antifluorita, y que la estructura, las dimensiones de la celda cristalina y el número de posiciones aniónicas no varían con la adición del óxido BO , calcular la densidad (kg/m^3) de una solución sólida que contiene una fracción molar de BO $x = 0.05$

Datos: radios iónicos de A^+ : $r_A = 9.9 \times 10^{-11}$ m, de O^{2-} : $r_O = 142 \times 10^{-12}$ m, y de B^{+2} : $r_B = 9.8 \times 10^{-11}$ m, y las masas atómicas: $Mw_A = 22.99$ kg/kmol, $Mw_O = 16$ kg/kmol y $Mw_B = 207.19$ kg/kmol

- 2155 kg/m^3
- 2455 kg/m^3
- 2698 kg/m^3
- 2515 kg/m^3
- 2610 kg/m^3
- ninguna de las respuestas anteriores, la respuesta correcta es:



Sol: Considerando el óxido A_2O puro, la celda unidad de la estructura de la antifluorita (ver 08_01_01.pdf) contiene aniones O^{2-} en las posiciones de una red FCC y cationes A^+ en los ocho huecos tetraédricos de la red FCC.

La celda contiene por tanto $n_O = 6 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1}{8}$ aniones oxígeno y $n_A = 8$ cationes A^+ . Si la diagonal de la celda unidad es:

$$\sqrt{3}a = 4(r_O + r_A)$$

entonces la arista de la celda cristalográfica es: $a = \frac{4}{\sqrt{3}}(r_O + r_A)$, $a = 5.566 \times 10^{-10}$ m y la densidad del óxido A_2O puro es:

$$\rho = \frac{n_O \cdot Mw_O + n_A \cdot Mw_A}{6.023 \cdot 10^{26} \cdot a^3} \quad \rho = 2388 \text{ kg/m}^3$$

En el caso de la solución sólida, la estructura es la misma en lo que se refiere a los aniones y al volumen de la celda. En cuanto a los cationes, cada ion B^{+2} que entra en la estructura reemplaza a dos iones A^+ . Esta sustitución es la única diferencia entre el A_2O puro y la solución sólida. La composición de la solución puede escribirse por tanto como $B_x A_{2(1-x)} O$, frente a A_2O para el óxido puro. La densidad de la solución sólida puede por tanto calcularse directamente como:

$$\rho_{sol} = \rho \cdot \frac{x \cdot Mw_B + 2(1-x) \cdot Mw_A + Mw_O}{2 \cdot Mw_A + Mw_O} \quad \rho_{sol} = 2698 \text{ kg/m}^3$$

También puede considerarse la celda unitaria: en el óxido A_2O puro, la celda contiene $n_O = 4$ aniones oxígeno y $n_A = 8$ cationes A^+ , es decir, $n_O = 4$ moléculas de A_2O . En la solución, la celda tiene el

mismo tamaño y contiene (en promedio) $n_O \cdot (1 - x) = 3.8$ moléculas de A_2O , y $n_O \cdot x = 0.2$ moléculas de

BO. La densidad es por tanto:

$$\rho_{sol} = \frac{n_O \cdot x \cdot (Mw_O + Mw_B) + n_O \cdot (1 - x) \cdot (2 \cdot Mw_A + Mw_O)}{6.023 \cdot 10^{26} \cdot a^3}$$

$$\rho_{sol} = 2698 \text{ kg/m}^3$$





5. Se construye un sensor de profundidad en forma de cubo de lado $L = 1.5 \cdot 10^{-3}$ m, con las caras cortadas perpendicularmente a los ejes cartesianos, a partir de un cerámico (BaTiO_3) policristalino polarizado.

Se conocen sus módulos piezoeléctricos: $d_{15} = -3.25 \cdot 10^{-12}$ C/N, $d_{31} = 2.95 \cdot 10^{-12}$ C/N y $d_{33} = 1.49 \cdot 10^{-12}$ C/N, y sus constantes dieléctricas relativas: $\kappa_1 = 500$ y $\kappa_3 = 250$.

Determinar el módulo de la señal (en voltios) que se medirá para una profundidad de 200 m (presión hidrostática $p = 2 \cdot 10^6$ Pa).

Dato: $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m

- 5.57 V
- 4.55 V
- 7.16 V
- 10.02 V
- 3.85 V
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:



Sol: La cerámica policristalina polarizada es de la clase ∞m y está sometido a un esfuerzo (presión hidrostática) que produce un momento dipolar. Es por tanto una aplicación del efecto piezoeléctrico directo, que en Notación de Voigt la escribimos como :

$$\underline{P} = \underline{d} \underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p \\ -p \\ -p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -p \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2d_{31} + d_{33} \end{bmatrix}$$

El vector polarización tiene sólo componente 3, luego la señal se medirá entre las caras 3 del sensor. Procediendo como en los problemas hechos en clase, consideramos el sensor como un condensador de caras planas paralelas y calculamos la diferencia de potencial a partir de la carga acumulada entre las caras 3 del sensor:

$$\begin{aligned} d_{31} &= 2.95 \times 10^{-12} \text{ C/N} & d_{33} &= 1.49 \times 10^{-12} \text{ C/N} \\ p_3 &= -p \cdot (2d_{31} + d_{33}) & p_3 &= -1.478 \times 10^{-5} \text{ C.m/m}^3 \end{aligned}$$

El sensor tiene un volumen de $\text{Vol} = (1.5 \cdot 10^{-3})^3 \text{ m}^3$ ($\text{Vol} = 3.375 \times 10^{-9} \text{ m}^3$) y las caras 3 están separadas por una distancia de $l_3 = 1.5 \cdot 10^{-3}$ m. La polarización p_3 corresponde por tanto a una carga:

$$Q = \frac{p_3 \cdot \text{Vol}}{l_3} \quad Q = -3.325 \times 10^{-11} \text{ C}$$

Puesto que: $A = 1.5 \cdot 10^{-3} \cdot 1.5 \cdot 10^{-3}$

el cristal piezoeléctrico es un condensador de capacidad:

$$C = \kappa_3 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{A}{l_3} \quad C = 3.319 \times 10^{-12} \text{ F}$$

Por tanto la señal (diferencia de potencial entre las caras 3 del sensor) es:

$$\Delta V = \frac{Q}{\kappa_3 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{A}{l_3}} \quad \Delta V = -10.020 \text{ V}$$

En este problema sólo se pide el módulo de la señal en Voltios, el signo no se pone.





6. Un tejido transpirable está formado por una matriz de un material A y una fase dispersa de un material B, dispuesta en forma de cilindros que atraviesan todo el espesor del tejido. A y B se consideran, cada uno por separado, homogéneos e isotrópicos.

Se conocen: las difusividades del vapor de agua en A, $D_A = 7.39 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$, y en B, $D_B = 1.44 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$ y las densidades de A y de B, $\rho_A = 890 \text{ kg/m}^3$ y $\rho_B = 1042 \text{ kg/m}^3$.

Determinar la difusividad del vapor de agua a través del espesor del tejido, considerado como material compuesto, si la fracción másica de B en el tejido es $x_B = 0.3$.

- $4.40 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$
- $5.00 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$
- $6.43 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$
- $3.11 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$
- $2.07 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:



Sol.: la difusión del vapor de agua a través del tejido se produce en condiciones de isogradiante (de concentración de vapor de agua), por lo tanto:

$$V_A = \frac{\frac{1-x_B}{\rho_A}}{\frac{1-x_B}{\rho_A} + \frac{x_B}{\rho_B}} \quad V_A = 0.732 \quad V_B = 1 - V_A \quad V_B = 0.268$$

$$D = V_A \cdot D_A + V_B \cdot D_B \quad D = 4.4 \times 10^{-9} \quad \text{m}^2/\text{s}$$





7. Para hacer que la resistencia eléctrica total de una rama de un circuito sufra lo menos posible la influencia de la temperatura, se colocan dos resistencias en serie. Para las dos se cumple que su resistencia es proporcional a la resistividad del material de que están fabricadas y a su longitud, e inversamente proporcional al área de su sección transversal:

$$R = r(T) \frac{l}{S}$$

La primera es una resistencia metálica cuya resistividad aumenta linealmente con la temperatura según

$$\rho_M(T) = \rho_{M0} (1 + \alpha_M \cdot T) \text{ donde } T \text{ es la temperatura absoluta en K, } \rho_{M0} = 890 \text{ } \Omega \cdot \text{m y } \alpha_M = 3 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}.$$

La segunda resistencia es de un semiconductor cerámico, y su resistividad disminuye con la temperatura según:

$$\rho_C(T) = \rho_{C0} \cdot e^{\frac{Q}{T}}$$

donde $\rho_{C0} = 1.042 \times 10^3 \text{ } \Omega \cdot \text{m}$, $Q = 402 \text{ K}$ y T es la temperatura absoluta en K. A temperatura ambiente, $T_{\text{amb}} = 293 \text{ K}$, ambas resistencias (Ω) son iguales. Calcula la variación porcentual en la resistencia total (100 x variación en la resistencia total, dividida por el valor de la resistencia total a T_{amb}) cuando la temperatura aumenta $\Delta T = 5 \text{ K}$.

- - 0.739 %
- - 1.198 %
- - 1.570 %
- - 0.609 %
- - 1.364 %
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:



Sol.: puesto que las dos resistencias son iguales a temperatura ambiente, se cumple:

$$r_M(T_{\text{amb}}) \frac{l_M}{S_M} = r_C(T_{\text{amb}}) \frac{l_C}{S_C} \Rightarrow \frac{l_C}{S_C} = \frac{r_M(T_{\text{amb}})}{r_C(T_{\text{amb}})} \frac{l_M}{S_M}$$

$$R_{\text{tot}} = r_M(T_{\text{amb}}) \frac{l_M}{S_M} + r_C(T_{\text{amb}}) \frac{l_C}{S_C} = 2 r_M(T_{\text{amb}}) \frac{l_M}{S_M}$$

La variación de resistencia total al subir la temperatura será:

$$\Delta R_{\text{tot}} = \Delta r_M \frac{l_M}{S_M} + \Delta r_C \frac{l_C}{S_C}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores obtenemos la variación relativa:

$$\frac{\Delta R_{tot}}{R_{tot}} = \frac{\Delta r_M \frac{l_M}{S_M} + \Delta r_C \frac{l_C}{S_C}}{r_M(T_{amb}) \frac{l_M}{S_M} + r_C(T_{amb}) \frac{l_C}{S_C}} = \frac{\Delta r_M \frac{l_M}{S_M} + \Delta r_C \frac{r_M(T_{amb})}{r_C(T_{amb})} \frac{l_M}{S_M}}{2 r_M(T_{amb}) \frac{l_M}{S_M}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta r_M}{r_M(T_{amb})} + \frac{\Delta r_C}{r_C(T_{amb})} \right)$$

Calculamos las resistividades a temperatura ambiente y los incrementos de resistividades:

$$\rho_M(T_{amb}) = 1.672 \times 10^3 \quad \Omega$$

$$\rho_C(T_{amb}) = 4.109 \times 10^3 \quad \Omega$$

$$\Delta \rho_M = \rho_M(T_{amb} + \Delta T) - \rho_M(T_{amb})$$

$$\Delta \rho_C = \rho_C(T_{amb} + \Delta T) - \rho_C(T_{amb})$$

$$\Delta \rho_M = 13.35 \quad \Omega$$

$$\Delta \rho_C = -93.508 \quad \Omega$$

con lo que la variación porcentual es:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\Delta \rho_M}{\rho_M(T_{amb})} + \frac{\Delta \rho_C}{\rho_C(T_{amb})} \right) \cdot 100 = -0.739 \quad \%$$





8. La piezorresistividad es la propiedad que tienen algunos materiales como el Si de variar su resistividad eléctrica ($\Omega \cdot m$) cuando se les aplica un esfuerzo o tensión mecánica (Pa). La ley constitutiva que describe la piezorresistividad es completamente análoga a la de la elasticidad lineal (ley de Hooke):

$$\underline{\underline{\Delta r}} = \underline{\underline{\Pi}} : \underline{\underline{t}}$$

donde $\underline{\underline{\Delta r}}$ es el incremento de resistividad causado por la aplicación del esfuerzo $\underline{\underline{t}}$ y $\underline{\underline{\Pi}}$

son los coeficientes piezorresistivos ($\Omega \cdot m / Pa$), cuya estructura, como propiedad de cuarto orden, es la misma que la de la complianza y la rigidez elásticas. Si se somete un sensor piezorresistivo de silicio a un esfuerzo de compresión t_{33} la variación en la componente de la resistividad Δr_{pq} con $p = 1$, $q = 1$ del sensor está dada por:

- $\Pi_{1122} t_{33} \neq 0$
- $\Pi_{2233} t_{33} + \Pi_{1133} t_{33} \neq 0$
- $\Pi_{1111} t_{33} \neq 0$
- $\Pi_{2133} t_{33} \neq 0$
- $\Pi_{1333} t_{33} \neq 0$
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es:



Sol.: la ecuación constitutiva, escrita en componentes, es:

$$\underline{\underline{\Delta r}} = \underline{\underline{\Pi}} : \underline{\underline{t}} \Rightarrow \Delta r_{ij} = \Pi_{ijkl} t_{lk}$$

Para el esfuerzo aplicado del enunciado y para cualquier pareja de índices i, j :

$$\Delta r_{ij} = \Pi_{ij33} t_{33}$$

La estructura de la piezorresistividad es como la de la complianza (02_01_02). Por tanto, la estructura de la variación de la resistividad para el Si, que es cúbico (libro de texto, cap. de propiedades eléctricas), será:

Y por tanto, los resultados para cada una de las 5 variantes del examen son:

$$\begin{aligned} i=1, j=1 &\rightarrow \Delta r_{11} = \Pi_{1133} t_{33} \neq 0 \\ i=2, j=2 &\rightarrow \Delta r_{22} = \Pi_{2233} t_{33} \neq 0 \\ i=3, j=3 &\rightarrow \Delta r_{33} = \Pi_{3333} t_{33} \neq 0 \\ i=1, j=2 &\rightarrow \Delta r_{12} = \Pi_{1233} t_{33} = 0 \\ i=3, j=1 &\rightarrow \Delta r_{31} = \Pi_{3133} t_{33} = 0 \end{aligned}$$



Nombre y apellidos:**Número de matrícula:****Problema 1**

Las componentes del tensor conductividad eléctrica de un determinado monocristal medidas en los ejes convencionales son las siguientes:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \times 10^{-6} \Omega^{-1} m^{-1}$$

Se aplica un campo eléctrico de módulo 10^2 V/m a lo largo de la dirección [111] del monocristal. Sabiendo que los parámetros de red son $a=1.02 \times 10^{-9}$ m; $b=1.25 \times 10^{-9}$ m y $c=4.8 \times 10^{-10}$ m, determinar:

- el sistema cristalográfico al que pertenece el monocristal
- el vector densidad de corriente eléctrica (\underline{J})
- el ángulo formado por los vectores \underline{J} y \underline{E}
- la magnitud de la conductividad eléctrica a lo largo de la dirección [111]

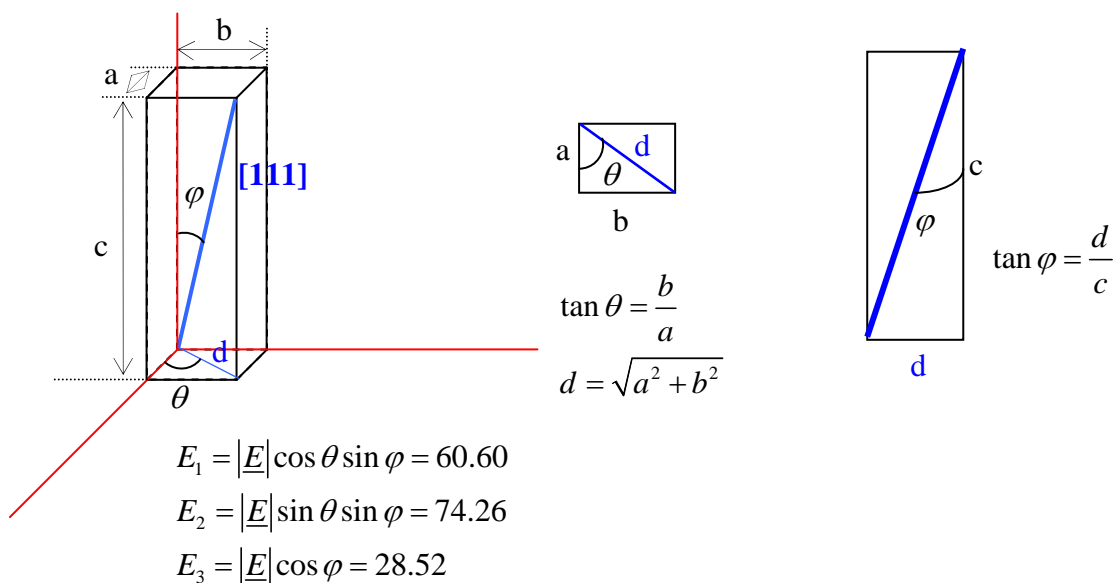
(3 puntos, 45 minutos)

Sol: A la vista de la estructura de la matriz de propiedades de 2º orden, el monocristal pertenece al sistema **ortorrómbico**.

Aplicando la ley de Ohm se puede calcular el vector densidad de corriente eléctrica (\underline{J}):

$$\underline{J} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{E}$$

Sólo es necesario conocer las componentes del vector \underline{E} . Observando la figura se obtienen los ángulos φ y θ e inmediatamente se determinan las tres componentes del vector campo eléctrico:



El cálculo del vector densidad de corriente eléctrica es ahora inmediato:

$$\underline{J} = \underline{\sigma} \cdot \underline{E} = 10^{-6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60.60 \\ 74.26 \\ 28.52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.636 \times 10^{-4} \\ 2.971 \times 10^{-4} \\ 2.852 \times 10^{-4} \end{pmatrix} (Am^{-2})$$

El producto escalar de los vectores campo eléctrico y densidad de corriente eléctrica permite calcular el ángulo solicitado:

$$\cos \alpha = \frac{\underline{J} \cdot \underline{E}}{|\underline{J}| |\underline{E}|} \Rightarrow \alpha = 18.06^\circ$$

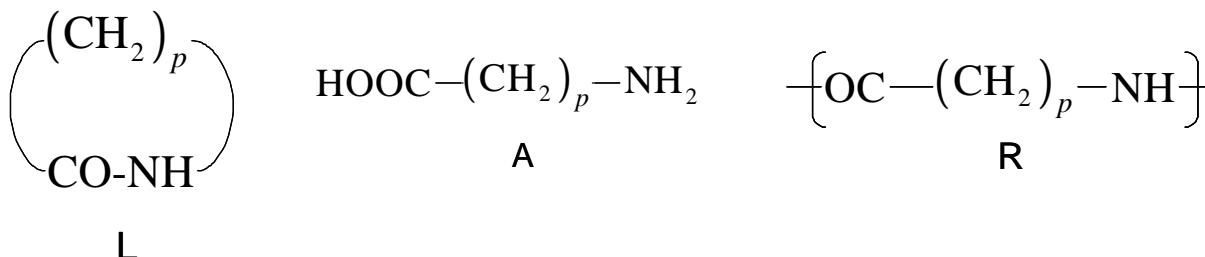
El valor de la conductividad eléctrica a lo largo de la dirección pedida será (ver 02_01_02, dia. 30 y siguientes):

$$\sigma'_{11} = l_i l_j \sigma_{ij} = l_{11} l_{11} \sigma_{11} + l_{12} l_{12} \sigma_{22} + l_{13} l_{13} \sigma_{33} =$$

$$(\cos \theta \sin \varphi)^2 \sigma_{11} + (\sin \theta \sin \varphi)^2 \sigma_{22} + (\cos \varphi)^2 \sigma_{33} = 5.223 \times 10^{-6} \Omega^{-1} m^{-1}$$

Nombre y apellidos:**Número de matrícula :****Problema 2**

Una empresa química puede sintetizar un nylon (cuya UER es R) por dos procesos distintos P1 y P2, que usan reactivos distintos: la lactama L en P1, y el aminoácido A en P2, y que se llevan a cabo en dos plantas distintas.



con $p = 4$ en las fórmulas anteriores.

- el proceso P1 es muy simple, no produce residuos, pero parte de una materia prima L cara.
- el proceso P2 requiere una planta más compleja y produce agua residual, pero la material prima A es barata.

Los costes fijos (amortización, personal, operación de la planta, etc) de los procesos P1 y P2 son respectivamente $f_1 = 0.2 \text{ €}$ y $f_2 = 0.1 \text{ €}$, independientes de la cantidad de R producido.

Los precios de las materias primas (L en el proceso P1 y A en el proceso P2) son respectivamente $m_1 = 0.8 \text{ €/kg de L}$ y $m_2 = 0.643 \text{ €/kg de A}$.

En el proceso P2 se produce agua residual. La legislación penaliza estas emisiones de modo más que proporcional (cuadrático), de manera que si se produce una cantidad de C kg de agua (W) en el proceso P2, el coste asociado es de $r_2 C^2 \text{ €}$, con $r_2 = 0.74 \text{ €/(kg de W)}^2$.

El objetivo de la empresa es repartir la producción entre las dos plantas (entre los dos procesos) de modo que el coste total de fabricación sea mínimo.

Determinar:

1. las masa moleculares de todos las especies químicas (L, A, R y W) que intervienen en los dos procesos.
2. la cantidad (kg) de L y el coste de materias primas (€/kg de R) necesarios para sintetizar 1 kg de R por el proceso P1.
3. lo mismo para el proceso P2.
4. la cantidad (kg) de agua residual W que se produce al sintetizar 1 kg de R por el proceso P2.
5. el coste total de producción (€) de 1 kg de R por el proceso P1.
6. lo mismo para el proceso P2.
7. para 1 kg de producción total de R, qué fracción X conviene fabricar por el proceso P1 (el resto del 1 kg de R se producirá por el proceso P2) para que el coste total de producción (€/kg de R) sea mínimo.
8. en este caso óptimo, cuál es el coste de producción de R, en €/kg de R.

Masas atómicas: $M_{wC} = 12$, $M_{wO} = 16$, $M_{wN} = 14$, $M_{wH} = 1$

IMPORTANTE: usar los valores numéricos de los datos con todos los decimales que aparecen en el enunciado.

(3 puntos, 45 min)



Sol.: las masas moleculares de las especies químicas que intervienen son:

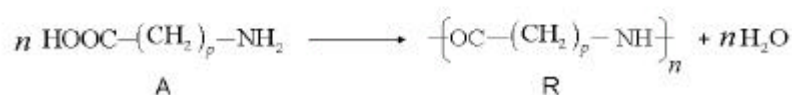
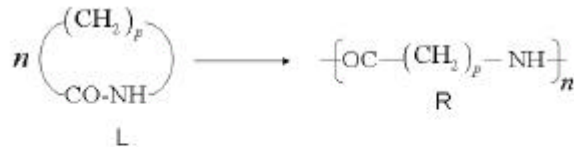
$$Mw_L = 99 \text{ kg/kmol de L}$$

$$Mw_A = 117 \text{ kg/kmol de A}$$

$$Mw_R = 99 \text{ kg/kmol de R}$$

$$Mw_W = 18 \text{ kg/kmol de W}$$

Las reacciones de síntesis de R en los dos procesos son respectivamente:



Por la estequiometría de las reacciones, por cada kg de R que se produce, las cantidades (X, en kg) de materias primas que se necesitan y los costes (en €) de estas materias primas en cada proceso son:

$$X_L = \frac{1}{Mw_R} \cdot Mw_L$$

$$X_L = 1$$

kg de L por cada kg de R en el proceso P1

$$X_L \cdot m_1 = 0.8$$

€ por cada kg de R en el proceso P1

$$X_A = \frac{1}{Mw_R} \cdot Mw_A$$

$$X_A = 1.182$$

kg de A por cada kg de R en el proceso P2

$$X_A \cdot m_2 = 0.76$$

€ por cada kg de R en el proceso P2

La cantidad (kg) de agua residual W que se produce al sintetizar 1 kg de R por el proceso P2 es:

$$X_W = \frac{1}{Mw_R} \cdot Mw_W$$

$$X_W = 0.182$$

kg de W por cada kg de R en el proceso P2

El coste total de producción (€) para una cantidad X (kg de R) por el proceso P1 será por tanto:

$$C_1(X) = f_1 + m_1 \cdot X_L \cdot X$$

y el coste de producción de 1 kg de R por el proceso P1 es:

$$C_1(1) = 1$$

€/kg de R

Por el proceso 2, el coste total de producción (€) para una cantidad X (kg de R) será:

$$C_2(X) = f_2 + m_2 \cdot X_A \cdot X + r_2 \cdot (X_W \cdot X)^2$$

y el coste de producción de 1 kg de R por el proceso P2 es:

$$C_2(1) = 0.884 \text{ €/kg de R}$$

Si se producen X kg de R por el proceso P1 y el resto, 1-X kg, por el proceso P2, el coste total será:

$$C_{\text{total}}(X) = C_1(X) + C_2(1 - X)$$

El coste total se minimiza para el valor de X para el que

$$\frac{d}{dX} C_{\text{total}}(X) = 0$$

es decir:

$$m_1 \cdot X_L - m_2 \cdot X_A - 2 \cdot r_2 \cdot X_W^2 \cdot (1 - X) = 0$$

de donde se obtiene el mínimo para:

$$X_{\min} = 1 - \frac{m_1 - m_2 \cdot \frac{M_{wA}}{M_{wR}}}{2r_2 \cdot \left(\frac{M_{wW}}{M_{wR}} \right)^2} \quad X_{\min} = 0.182$$

El coste total se minimiza produciendo $X_{\min} = 0.182$ kg de R en la planta del proceso P1 y $1 - X_{\min} = 0.818$ kg de R en la planta del proceso P2.

El coste mínimo es $C_{\text{total}}(X_{\min}) = 1.08$ €/kg de R.

