AM Prácticas 06-11-2020

Def 1 $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ es una subvariedad n-dimensional C^1 de $\mathbb{R}^{n+k}$ si $\forall\, a \in M$ existe un abierto $U \ni a$ con $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ y una función $F: U \to \mathbb{R}^k$ que es $C^1(U)$ y $DF(x)$ tiene rango k $\forall\, x \in U \cap M$ tal que

$$U \cap M = F^{-1}(\{0\}).$$

Teor 2. Dada $M < \mathbb{R}^{n+k}$, son equivalentes

A) M es una C^1-subvariedad n-dimensional de $\mathbb{R}^{n+k}$

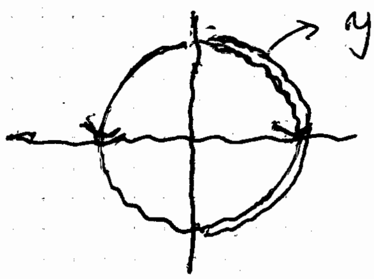
B) $\forall\, a \in M$, existe un abierto $U < \mathbb{R}^{n+k}$ con $a \in U$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\varphi: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ de clase $C^1(\Omega)$ tal que

i) $\varphi(\Omega) = U \cap M$ ii) rango $D\varphi(x) = n$ $\forall x \in \Omega$

iii) φ es homeomorfismo sobre $\varphi(\Omega)$.

Prop 3 Una subvariedad n-dimensional M de $\mathbb{R}^{n+k}$ es localmente como la gráfica de una función diferenciable.

$x^2 + y^2 = r^2$

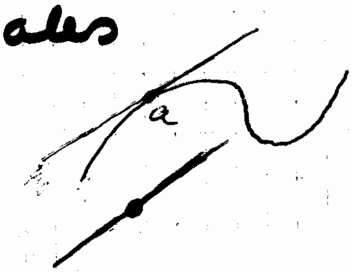


$y = +\sqrt{r^2 - x^2}$

$x = +\sqrt{r^2 - y^2}$

Prop 4. M es una subvariedad n-dim de $\mathbb{R}^{n+k}$.
Si $\varphi: V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ con $\varphi(V) \subset M$ y rango $D\varphi(x) = n$ $\forall x \in V$ y φ es inyectiva, entonces φ es un homeomorfismo.

Espacios tangentes y normales



Def 5. Sea M una sob. n-dim de $\mathbb{R}^{n+k}$. Un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^{n+k}$ es tangente a M en un punto $a \in M$ si existe una curva $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ diferenciable y tal que $\gamma(0) = a$ y $\gamma'(0) = v$

El ESPACIO TANGENTE a M en el punto a es $T_a(M)$ el conjunto de todos los vectores tangentes a M en el punto a

---

Teor 6. Sea M una sob. n-dim. de $\mathbb{R}^{n+k}$

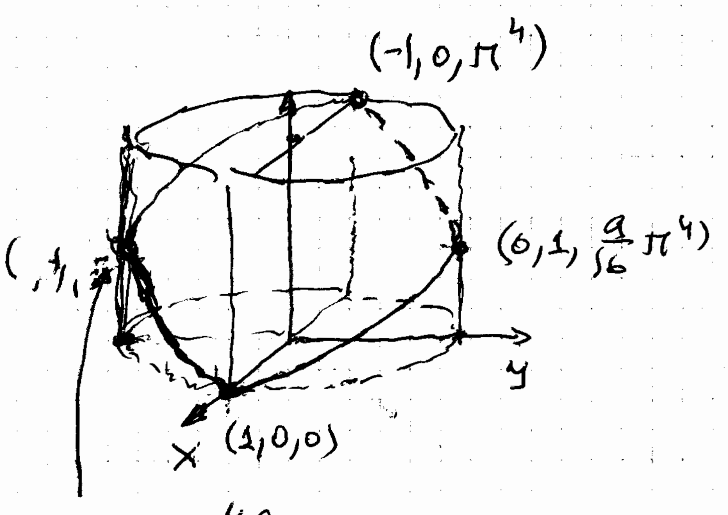
1. $T_a(M)$ es un sub. vectorial de $\mathbb{R}^{n+k}$ de dim. n
2. Si F es como en la Def 1, $T_a(M) = \ker DF(a)$
3. Si (φ, U) es una parametrización local de M cerca de a como en el Teorema 2, con $\varphi(0) = a$,

$$T_a(M) = \operatorname{Img} D\varphi(0)$$

HIPERPLANO TANGENTE: $\{x \in \mathbb{R}^{n+k} : x - a \in T_a(M)\}$
HIPERPLANO NORMAL: $\{x \in \mathbb{R}^{n+k} : x - a \in T_a(M)^{\perp}\}$

6.6. $C = \{(\cos t, \operatorname{sen} t, t^2(2\pi - t)^2) : 0 \le t \le 2\pi\}$

Dibujar y probar que es sub. de dim 1 en $\mathbb{R}^3$



$\varphi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t^2(2\pi - t)^2)$

$\varphi(0) = (1,0,0)$

$\varphi(\pi/2) = (0, 1, \frac{9}{16}\pi^4)$

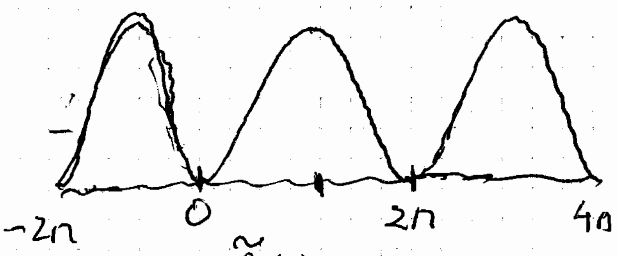
$\varphi(\pi) = (-1, 0, \pi^4)$

$\varphi(\frac{3}{2}\pi) = (0, -1, \frac{9}{16}\pi^4)$

$\varphi(2\pi) = (1,0,0)$

$\varphi : (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Sea $f(t) = t^2(2\pi - t)^2$



$\tilde{f}(t)$

es la periodizacion de $f(t)$ con per 2π

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} t^2(2\pi - t)^2 & 0 \le t < 2\pi \\ 0 & t = 0 \\ t^2(2\pi + t)^2 & -2\pi < t < 0 \end{cases}$$

continua

$$\tilde{f}'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2(2\pi + h)^2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} h(2\pi + h)^2 = 0$$

$$\|$$

$$\tilde{f}'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2(2\pi - h)^2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} h(2\pi - h)^2 = 0$$

Parametrizar $C - \{(1,0,0)\}$

$$\varphi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \underbrace{t^2(2\pi - t)^2}_{\tilde{f}(t)}) \quad , \quad t \in (0, 2\pi)$$

i) $U=\{(x,y,z);\ z>0\}\subset\mathbb{R}^3$, $\varphi((0,2\pi))=C\cap U$.

ii) $r(D\varphi(t))=$ rango $\begin{pmatrix}-\operatorname{sen}t\\ \cos t\\ 2t(2\pi-t)^2-2t^2(2\pi-t)\end{pmatrix}=1$ porque

sen t y cos t no se anulan a la vez.

$2t(2\pi-t)[2\pi-t-t]=2t(2\pi-t)(2\pi-2t)=0$

si $\cancel{t=0}$, $t=\cancel{2\pi}$, $t=\pi$; si $t=\pi$, $\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$

iii) φ inyectiva

$\cos t_1=\cos t_2 \Rightarrow t_1=t_2$ ó $t_1=-t_2$ $(2\pi-t_2)$

$\operatorname{sen}t_1=\operatorname{sen}t_2$ Si fuera $t_1=-t_2 \Rightarrow$

$t_1^2(2\pi-t_1)^2=t_2^2(2\pi-t_2)^2$

$\operatorname{sen}t_2=\operatorname{sen}t_1=\operatorname{sen}(-t_2)=-\operatorname{sen}t_2$

$2\operatorname{sen}t_2=0 \Rightarrow t_2=\cancel{0},\ \pi,\ \cancel{2\pi}$

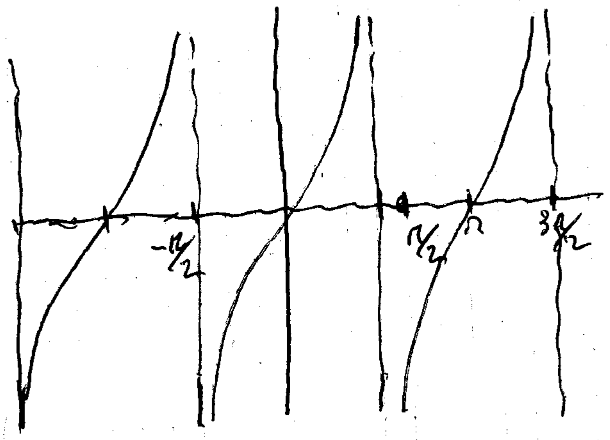
$t_1=-\pi\notin(0,2\pi)$ $\quad t_1=\frac{3}{2}\pi$

Inversa

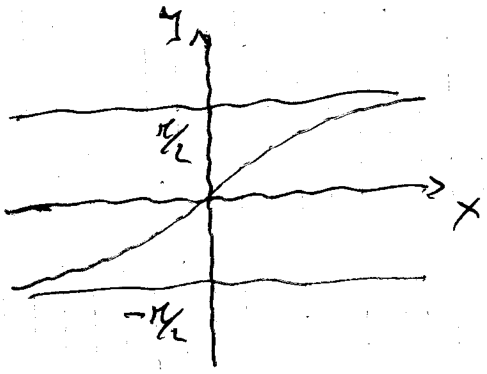
$$\left.\begin{aligned}x&=\cos t\\ y&=\operatorname{sen}t\\ z&=t^2(2\pi-t)^2\end{aligned}\right\}$$

$\frac{\operatorname{sen}t}{\cos t}=\operatorname{tg}t=\frac{x}{y}$

$t=\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{x}{y}$

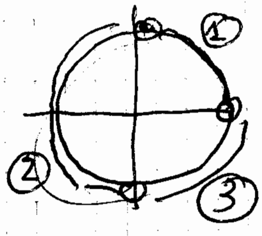


$y=\operatorname{tg}x$



$y=\operatorname{Arctg}x$

$$g^{-1}(x,y) = \begin{cases} \operatorname{Arctg} \frac{x}{y} & \text{si } (x,y) \in ① \\ \pi/2 & (x,y) = (0,1) \\ \left(\operatorname{Arctg} \frac{x}{y}\right) + \pi & \text{si } (x,y) \in ② \\ 3\pi/2 & (x,y) = (0,-1) \\ \left(\operatorname{Arctg} \frac{x}{y}\right) + 2\pi & \text{si } (x,y) \in ③ \end{cases}$$



es continua $(0, 2\pi)$

Definir $\varphi^{-1}(x,y,z) = g^{-1}(x,y)$ es continua.

Para $a = (1,0,0)$ tomar

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \qquad \varphi_1(t) = \begin{cases} (\cos t, \operatorname{sen} t, t^2(2\pi - t)^2) & \text{si } 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ (1,0,0) & \text{si } t = 0 \\ (\cos t, \operatorname{sen} t, t^2(2\pi + t)^2 & \text{si } -\frac{\pi}{2} < t < 0 \end{cases}$$

es diferenciable, rango $D\varphi_1(x) = 1$

y es homeomorfismo porque $\varphi^{-1}(x,y,z) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$

—x—

Espacio tangente $T_{(1,0,0)}(C) = \operatorname{Img} D\varphi_1(0)$

$$D\varphi_1(0) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} 0 \\ \cos 0 \\ f'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T_{(1,0,0)}(C) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \{ x = 0, z = 0 \}$$

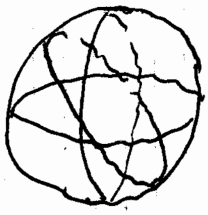
$$N_a(C) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \{ y = 0 \}$$

$$H_a(C) : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} x = 1 \\ y = t \\ z = 0 \end{Bmatrix}$$ Recta tangente

—x—

6.7 $ax+by+cz=d$ $\quad \perp \to (a,b,c)$

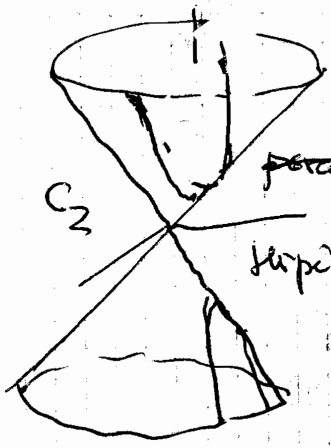
$x+y+z=0$ $\quad \perp \to (1,1,1)$



C_1

círculo

$x^2+y^2+z^2=1$



C_2

~~parábola~~

Hipérbola

$x^2+y^2=z^2$

$x+y+z=1$

Para C_1: $\quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2-1,\ x+y+z) \equiv (F_1, F_2)$$

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ Rag ≥ 1. y si Rango $= 1$

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 2x & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \cancel{\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 0$$

$x=y \qquad x=z \qquad \boxed{x=y=z} \Rightarrow 3x=0$

$\Rightarrow x=y=z=0 \notin C$ pq. $0^2+0^2+0^2 \neq 1$

Luego el rango es 2 en C_1

$F^{-1}(\{(0,0)\}) = C_1 \cap \mathbb{R}^3$ $\qquad$ Subvariedad

<u>Para C_2</u>

$$G(x,y,z) = (x^2+y^2-z^2,\ x+y+z-1) \equiv (G_1, G_2)$$

$$DG(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$; Rango $=1 \Leftrightarrow$

$x=y$, $z=-x$ $\qquad x^2+x^2=x^2 \Rightarrow x^2=0,\ x=0$

Rango $=2$ $\qquad G^{-1}(\{(0,0)\}) = C_2$

(7)

$$T_a(C_1) = \ker DF(a) = \ker \begin{pmatrix} 2/\sqrt{14} & 4/\sqrt{14} & -6/\sqrt{14} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2/\sqrt{14} & 4/\sqrt{14} & -6/\sqrt{14} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 2x+4y-6z&=0 \\ x+y+z&=0 \end{aligned}$$

$$T_a(C_1) = \left\langle \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$R_a(C_1) = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ -3/\sqrt{14} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

——— x ———

$$T_b(C_2) = \ker DG(b) = \ker \begin{pmatrix} 3+\sqrt{5} & \frac{3+\sqrt{5}}{2} & -\frac{5+3\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

——— x ———