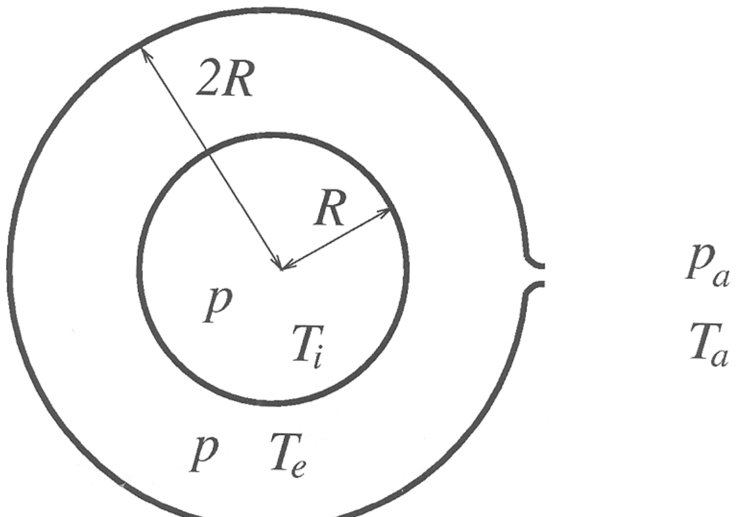
Un depósito esférico de radio R y pared elástica se encuentra situado dentro de otro de de radio $2R$, pared rígida y concentrico con él. Ambos depósitos están inicialmente llenos de aire a presión ~~$3p_a$~~ P_o y temperatura T_a. En el depósito exterior se abre un agujero de sección mínima A situada en el exterior, por el que el aire situado entre los dos depósitos se descarga al exterior, donde la presión y temperatura son p_a y T_a. Sabiendo que el aire se comporta como un fluido ideal en el proceso de descarga, que las paredes de los depósitos son aislantes perfectos, que la elasticidad del depósito interior es despreciable, ~~y~~ que y que el efecto de las fuerzas másicas es también despreciable, se pide calcular el radio de la esfera interior y la presión como función del tiempo. Y QUE $P_o > \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\gamma/\gamma-1} P_a$



1) PARA LA ESFERA INTERIOR $\quad \frac{d}{dt}(\rho_i r^3) = 0 \quad , \quad \frac{P}{\rho_i^\gamma} = \frac{P_o}{\rho_o^\gamma}$ $\quad \rho_o = \frac{P_o}{R_g T_a}$

PARA EL AIRE ENTRE DEPOSITOS $\quad \frac{4}{3}\pi \frac{d}{dt}\left(\rho_e (8R^3 - r^3)\right) = -G , \quad \frac{P}{\rho_e^\gamma} = \frac{P_o}{\rho_o^\gamma}$ $\quad \boxed{\rho_i = \rho_e}$ (1)

SUMANDO LAS DOS ECUACIONES ANTERIORES

$$\frac{32}{3}\pi R^3 \frac{d\rho_e}{dt} = -G \quad (2)$$

$$\frac{\rho_i}{\rho_o}\frac{r^3}{R^3} = 1 \rightarrow \boxed{\frac{r}{R} = \left(\frac{P}{P_o}\right)^{-\frac{1}{3\gamma}}} \quad (3)$$

COMO $\frac{P_o}{P_a} > \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\gamma/\gamma-1}$, LA TOBERA ESTA INICIALMENTE BLOQUEADA $\quad G = \rho_e a_e A \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$

COMO $\left(\frac{\rho_e}{\rho_o}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{a_e}{a_o}\right)^2 = \left(\frac{P}{P_o}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, (2) SE PUEDE REESCRIBIR COMO (4) $\boxed{\frac{d\Pi}{d\tau} = -\Pi^{\frac{3\gamma-1}{2\gamma}}}$

$$\boxed{\begin{aligned} \Pi &= \frac{P}{P_o} \\ t &= \frac{32}{3}\frac{\pi}{\gamma}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{R^3}{a_o A}\tau \end{aligned}}$$

INTEGRANDO SE OBTIENE $\boxed{\tau = \frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\Pi^{-\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1\right)}$ QUE SE COMPLEMENTA CON $\boxed{\frac{r}{R} = \Pi^{-\frac{1}{3\gamma}}}$

ESTA PRIMERA ETAPA ACABA CUANDO $\begin{cases} P = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\gamma/\gamma-1} P_a \rightarrow \Pi = \frac{P_a}{P_o}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\gamma/\gamma-1} \\ \text{o} \\ \frac{r}{R} = 2 \rightarrow \Pi = 2^{-3\gamma} \end{cases}$

SI $\frac{P_o}{P_a} > 2^{3\gamma}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\gamma/\gamma-1}$ EL VACIADO SE ACABA CON TOBERA ADAPTADA

$$\boxed{\tau_v = \frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(2^{\frac{3}{2}(\gamma-1)} - 1\right)}$$

SI $\frac{P_o}{P_a} < 2^{3\gamma}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\gamma/\gamma-1}$ EXISTE UNA 2ª ETAPA SIN TOBERA ADAPTADA QUE EMPIEZA EN $\tau^* = \frac{2\gamma}{\gamma-1}\left[\left(\frac{P_a}{P_o}\right)^{-\frac{\gamma-1}{2\gamma}}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right]$

$$\frac{d\Pi}{d\tau} = -\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{1/2}\left(\frac{P_o}{P_a}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \Pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left[\left(\frac{P_o}{P_a}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]^{\frac{1}{2}}$$

, EN τ^*, $\Pi = \frac{P_a}{P_o}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\gamma/\gamma-1}$

ESTA 2ª ETAPA ACABARIA CUANDO $\Pi = \frac{P_a}{P_o}$ O CUANDO $\Pi = 2^{-3\gamma}$

→ SI $\frac{P_o}{\ }> 2^{3\gamma}$ → EL VACIADO ACABA ...