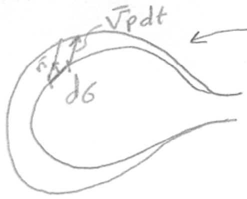
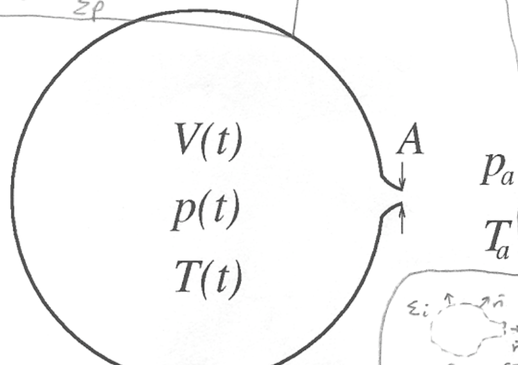
Un globo aislado termicamente posee una pared elástica que puede aguantar diferencias de presión proporcionales al volumen del globo V de acuerdo a la ley $p - p_a = K(V - V_o)$, donde p es la presión dentro del globo, K es una constante de proporcionalidad, p_a es la presión ambiente y V_o es el volumen del globo desinflado. En un instante dado, se comienza a vaciar el globo a traves de un pequeño orificio de área mínima A ($A^{3/2} \ll V$), situada en el exterior. Sabiendo que la presión inicial en el interior del globo es $p_i = 3p_a$ y que su temperatura inicial coincide con la ambiente, se pide: escribir las ecuaciones y condiciones iniciales que determinan las variaciones de presión y temperatura en el interior del globo durante el proceso de descarga.



$$\boxed{dV_g = \int_{\Sigma_p} \bar{v}_p \cdot \bar{n}\, d\sigma\, dt}$$



NOTA: FUERZA SOBRE EL GLOBO ? $\int_{\Sigma_i} \bar{\bar{\tau}}' \cdot \bar{n}\, d\sigma$

$$\boxed{\bar{F} = -\int_{\Sigma_g} p\bar{n}\, d\sigma + \int \bar{\bar{\tau}}' \cdot \bar{n}\, d\sigma} = \int_{\Sigma_i} p\bar{n}\, d\sigma - \int_{\Sigma_e} p_a \bar{n}\, d\sigma$$

$$= -V_T G \bar{n}_T - (p_s - \dots$$

$$\int \rho \bar{v}(\bar{v} - \bar{v}_c) \cdot \bar{n}\, d\sigma = -\int_{\Sigma_i} p\bar{n}\, d\sigma - \int_{\Sigma_T} p\bar{n}\, d\sigma + \int_{\Sigma_i} \bar{\bar{\tau}}' \cdot \bar{n}\, d\sigma$$

$$\int_{\Sigma_i} \bar{\bar{\tau}}' \cdot \bar{n}\, d\sigma + \int_{\Sigma_i} p\bar{n}\, d\sigma = -V_T G \bar{n}_T - p_s A \bar{n}_T$$

$$-\int_{\Sigma_g} p_a \bar{n}\, d\sigma = p_a A \bar{n}_T$$

EL PROCESO DE VACIADO ES ISENTROPICO

$$\frac{d}{dt}\int \rho\left(e + \cancel{\frac{v^2}{2}}\right) dV + \int_{\Sigma_A} \rho\left(e + \frac{v^2}{2}\right)\bar{v}\cdot\bar{n}\, d\sigma = -\int_{\Sigma_p} p\bar{v}\cdot\bar{n}\, d\sigma - \int_{\Sigma_A} p\bar{v}\cdot\bar{n}\, d\sigma \Rightarrow \frac{d}{dt}(\rho V e) + G\left(e + \frac{p}{\rho}\right) = -p\int_{\Sigma_p} \bar{v}_p\cdot\bar{n}\, d\sigma$$

COMO $\boxed{G = -\frac{d}{dt}(\rho V)}$ y $\frac{dV}{dt} = \int \bar{v}_p\cdot\bar{n}\, d\sigma \Rightarrow \cancel{e\frac{d}{dt}(\rho V)} + \rho V\frac{de}{dt} - \cancel{\left(e + \frac{p}{\rho}\right)\frac{d(V\rho)}{dt}} = -\cancel{\frac{p}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho V)} - \rho V p\frac{d}{dt}(1/\rho)$

(1)

$$\frac{de + p\, d(1/\rho)}{dt} = 0 \to d\left(\frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}\right) + p\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0 \quad d(p/\rho^\gamma) = 0 \to \boxed{\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_i}{\rho_i^\gamma}} \quad (2)$$

POR OTRA PARTE PARA LA TOBERA

$$(3) \begin{cases} \frac{p}{p_a} > \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} & \text{TOBERA ADAPTADA} \quad G = \rho a A\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \\ \frac{p}{p_a} < \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} & G = \rho a A\left[\left(\frac{p}{p_a}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]^{1/2}\left(\frac{p}{p_a}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2\gamma}}\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{1/2} \end{cases}$$

ADEMAS $\boxed{p - p_a = k(V - V_o)}$ (4) LA CONDICION INICIAL PARA LA INTEGRACION ES $t = 0$, $p = p_i = 3p_a$

$T = T_i = T_a$

$\rho = \rho_i = 3\rho_a$

$V = V_o + \frac{2p_a}{K}$

EL PROBLEMA ANTERIOR PUEDE REESCRIBIRSE EN FORMA ADIMENSIONAL DEFINIENDO $\Pi = p/p_a$ Y $\Lambda = \frac{p_a}{KV_o}$

DE (4) $\to \frac{V}{V_o} = 1 + \Lambda(\Pi - 1)$ DE (2) $\to \frac{\rho}{\rho_i} = \frac{1}{3^{1/\gamma}}\Pi^{1/\gamma}$, $\rho a A = A\sqrt{\gamma\rho p} = A\sqrt{\frac{\gamma\rho_i p_a}{3^{1/\gamma}}}\,\Pi^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}$

DE DONDE (1) PASA A SER $t = \frac{V_o}{A}\left(\frac{3\rho_a}{\gamma p_a 3^{1/\gamma}}\right)^{1/2}\tau = \frac{V_o}{A}\frac{3^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}}{a_a}\tau$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \frac{d}{d\tau}\left\{\Pi^{1/\gamma}\left[1 + \Lambda(\Pi - 1)\right]\right\} = -\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}\Pi^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} & \text{SI} \quad \Pi > \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \frac{d}{d\tau}\left\{\Pi^{1/\gamma}\left[1 + \Lambda(\Pi - 1)\right]\right\} = -\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{1/2}\left[\Pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]^{1/2} & \text{SI} \quad \Pi < \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \end{array}}$$

↳ PUEDE INTEGRARSE PARA DAR EXPLICITAMENTE $P(\tau)$