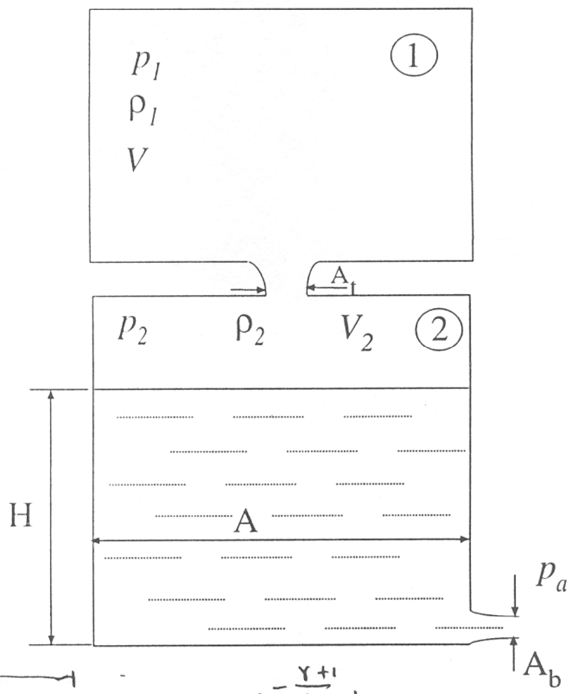
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

INGENIERÍA DE FLUIDOS **21-11-02**

Se pretende vaciar, a través de una boquilla de área A_b, un depósito de volumen V_0 (depósito ②) y sección A el cual está parcialmente lleno de un líquido hasta un altura H_0. Dado que la presión de la cámara de aire que se encuentra en la parte superior del líquido es inicialmente $p_2 = p_a - \rho\, g\, H_0$, éste no fluye libremente al exterior que se encuentra a la presión atmosférica, p_a. Para forzar la salida del líquido se conecta, a través de una tobera convergente de sección mínima A_t, el depósito que contiene el líquido a un segundo depósito de volumen V (depósito ①) el cuál contiene un gas a presión y densidad iniciales $p_{10} > p_2$ y ρ_{10} respectivamente. Siguiendo los siguientes pasos plantee las ecuaciones que describen la variación del nivel de líquido con el tiempo.

1. Suponiendo que la tobera se encuentra bloqueada durante la descarga del depósito de líquido, obtenga la variación de la densidad y de la presión en el depósito ①, $p_1(t)$ y $\rho_1(t)$. **(5 ptos).**
2. A partir de la ecuación de la energía aplicada al volumen de gas que se encuentra en el depósito ② así como al depósito ①, obtenga una ecuación diferencial que relacione la presión, $p_2(t)$ y el volumen, $V_2(t)$ en dicho depósito como función únicamente de V, γ y $p_1(t)$. **(2 ptos).**
3. Analizando la descarga del volumen de líquido obtenga una segunda ecuación diferencial que relacione la presión, $p_2(t)$ y el volumen, $V_2(t)$ como función únicamente de V_0, g, p_a, A y A_b. Indique las condiciones iniciales necesarias para resolver las dos ecuaciones diferenciales planteadas. **(3 ptos).**



① $V \dfrac{d\rho_1}{dt} = -G_t$

$\dfrac{d}{dt}(V_2\, \rho_2) = G_t$

$\dfrac{d}{dt}(\rho_1 V + \rho_2 V_2) = 0$

CON

$G_t = \sqrt{\gamma p_1 \rho_1}\; A_t \left(\dfrac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$

PROCESO ISENTROPICO

$\dfrac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \dfrac{p_{10}}{\rho_{10}^\gamma} \Rightarrow p_1 = p_{10}/\rho_{10}^\gamma\; \rho_1^\gamma$

$\dfrac{1}{\rho_{10}} \dfrac{d\rho_1}{dt} = -\dfrac{\rho_1^{\frac{\gamma+1}{2}}}{\rho_{10}^{\gamma+1/2}} \sqrt{\gamma \dfrac{p_{10}}{\rho_{10}}}\; \dfrac{A_t}{V} \left(\dfrac{\gamma-1}{2}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$; $\bar{\rho}_1 = \rho_1/\rho_{10}$. $\tau = t \sqrt{\dfrac{\gamma p_{10}}{\rho_{10}}}\, \dfrac{A}{V} \left(\dfrac{\gamma-1}{2}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$

$\bar{p}_1 = p_1/p_{10}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d\bar{\rho}_1}{d\tau} = -\bar{\rho}_1^{\frac{\gamma+1}{2}} && \tau = 0 \\ & && \bar{p}_1 = 1 \\ &\frac{d\bar{p}_1}{d\tau} = -\gamma\, \bar{p}_1^{\frac{3\gamma-1}{2\gamma}} && \bar{\rho}_1 = 1 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\rho}_1 &= \left(1 - \frac{1-\gamma}{2}\tau\right)^{2/1-\gamma} \\ \bar{p}_1 &= \left(1 - \frac{1-\gamma}{2}\tau\right)^{2\gamma/1-\gamma} \end{aligned}}$$