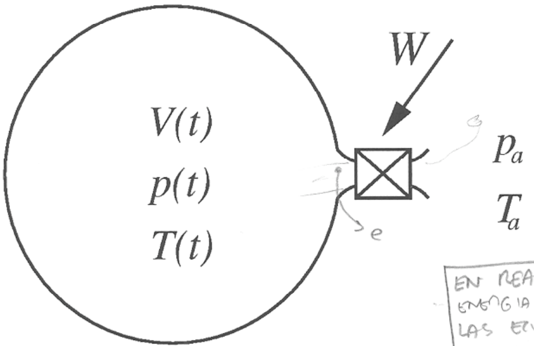
Se pide estudiar el proceso de llenado de un globo de pared adiabática, inicialmente vacio, por medio de un compresor ideal de potencia $W$. La pared elástica del globo pueden soportar diferencias de presión proporcionales a su área de acuerdo a la ley $p - p_a = KV^{2/3}$, donde $p$ es la presión en el interior del globo, $K$ es una constante de proporcionalidad y $V$ es el volumen del globo. Escriba las ecuaciones y condiciones iniciales que describen el proceso de llenado. Reduzca la solución a una cuadratura que permita calcular $p/p_a$ en función del tiempo adimensional $\tau = (WK^{3/2}/p_a^{5/2})t$.




EN REALIDAD, SI NO DESPRECIAMOS LA ENERGIA CINETICA A LA SALIDA DEL COMPRESOR, LAS ECUACIONES SON

$$\frac{h_e}{h_a} = \left(\frac{p_e}{p_a}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad W = G\left[h_e\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right) - h_a\right]$$

$$p - p_a = KV^{2/3}, \quad \frac{1}{\gamma-1}\frac{d}{dt}(pV) = Gh_a + W - p\frac{dV}{dt}$$

$$G = A_e \rho_e v_e = A_e \rho_a a_a M_e \left(\frac{p_e}{p_a}\right)^{1/\gamma}\left(\frac{p_e}{p_a}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$$

INC: $G, p, V, h_e, M_e$

LAS ECUACIONES QUE DESCRIBEN EL PROCESO SON

$$\boxed{W = G(h_e - h_a) = Gh_a\left(\left(\frac{p}{p_a}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)} \quad (1)$$

$$\boxed{\frac{d(\rho V)}{dt} = +G} \quad (2)$$

$$\boxed{V = \left(\frac{p_a}{K}\right)^{3/2}\left(\frac{p}{p_a} - 1\right)^{3/2}} \quad (3)$$


JUNTO CON LA ECUACION DE LA ENERGIA

$$\int \bar{v}_p \cdot \bar{n}\, d\sigma = \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\int \rho\left(e + \cancel{\frac{v^2}{2}}\right)dV + \int_{A_e} \rho\left(e + \cancel{\frac{v^2}{2}}\right)\bar{v}\cdot\bar{n}\, d\sigma = -\int_{A_e} \frac{p}{\rho}\rho\bar{v}\cdot\bar{n}\, d\sigma - \int_{A_p} p\,\bar{v}_p\cdot\bar{n}\, d\sigma$$

$$\frac{d}{dt}(\rho e V) = Gh_e - p\frac{dV}{dt} \rightarrow \boxed{\frac{1}{\gamma-1}\frac{d}{dt}(pV) = Gh_a + W - p\frac{dV}{dt}} \quad (4)$$

$t=0$, $p=p_a$, $V=0$ $\rightarrow$ ECS: 1, 3, 4 INC: $G, p, V$

LLAMANDO $\frac{p}{p_a} = \Pi$, $\tau = \frac{WK^{3/2}}{p_a^{5/2}}t$ PODEMOS ESCRIBIR

DE 1 $\rightarrow$ $G = \frac{W}{h_a}\frac{1}{\Pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}$ DE (3) $V = \left(\frac{p_a}{K}\right)^{3/2}(\Pi - 1)^{3/2}$

DE 4

$$\frac{p_a}{W}\left(\frac{p_a}{K}\right)^{3/2}\left\{\frac{1}{\gamma-1}\frac{d}{dt}\left[\Pi(\Pi-1)^{3/2}\right] + \Pi\frac{d}{dt}\left[(\Pi-1)^{3/2}\right]\right\} = \frac{\Pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\Pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}$$

$$\frac{\Pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\Pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}\left\{\frac{1}{\gamma-1}\left[(\Pi-1)^{3/2} + \frac{3}{2}\Pi(\Pi-1)^{1/2}\right] + \frac{3}{2}\Pi(\Pi-1)^{1/2}\right\}\frac{d\Pi}{d\tau} = 1$$

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\gamma-1}\int_1^{\Pi}\frac{\Pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\Pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}(\Pi-1)^{1/2}\left[\left(\frac{3}{2}\gamma+1\right)\Pi - 1\right]d\Pi}$$