FUERZA QUE EJERCE SOBRE EL DEPÓSITO EL AIRE QUE ENTRA

$\bar{F} = -\int_{\Sigma_e+\Sigma_i} p\bar{n}\,d\sigma$, $\int p_d \bar{n}\,d\sigma = -\int p_d \bar{n}\,d\sigma = p_d A \bar{n}_T$

DEFINIMOS $\bar{n}_T$ | PARA CALCULAR $\int_{\Sigma_e} p\bar{n}\,d\sigma$ APLICAMOS CANTIDAD DE MOVIMIENTO AL VOLUMEN DE CONTROL Σ_i

$R \gg A$

$\int \rho\bar{v}\,\bar{v}\cdot\bar{n}\,d\sigma = -\int p\bar{n}\,d\sigma$; LAS INTEGRALES SON DESPRECIABLES EN LA SUPERFICIE ESFÉRICA EXTERIOR

$-G v_T A = -\int_{\Sigma_p} p\bar{n}\,d\sigma + p_e A \bar{n}$; COMO $\int_{\Sigma_e} p\bar{n}\,d\sigma = -\int_{\Sigma_p} p\bar{n}\,d\sigma$

$$\boxed{\bar{F} = [G v_T + (p_e - p_d)] A \bar{n}_T}$$

DONDE p_e = PRESIÓN EN LA SECCIÓN MÍNIMA DE LA TOBERA ($\neq p_d$ SI LA TOBERA ESTÁ BLOQUEADA)

En un depósito de volumen V inicialmente vacio se abre un orificio pequeño de área mínima A ($A^{1/2} \ll V^{1/3}$) que lo comunica con la atmósfera, la cual se encuentra a temperatura T_a y presión p_a. Suponiendo que el depósito está aislado, calcular el tiempo que tarda en alcanzarse en el depósito una presión $0.99p_a$. Calcular, asi mismo, hasta ese instante la variación con el tiempo de la presión y densidad en el depósito. Calcular también en función del tiempo la fuerza que ejerce sobre el depósito el aire que entra. Tengase en cuenta que el área mínima del orificio se alcanza en el interior del depósito, de forma que el orificio se comporta a todos los efectos como una tobera convergente.

CAPAS DE MEZCLA DONDE VISCOSIDAD ES IMPORTANTE $S_{DEP} \neq CTE$

LLAMANDO V_T A LA VELOCIDAD CARACTERÍSTICA EN LA TOBERA EL TIEMPO CARACTERÍSTICO DE LLENADO Y EL TIEMPO CARACTERÍSTICO DE RESIDENCIA EN LA TOBERA SON RESPECTIVAMENTE

$$t_0 \sim \frac{V}{A V_T}, \quad t_R = \frac{A^{1/2}}{V_T}$$

DE DONDE

$$\frac{t_R}{t_0} \sim \frac{A^{3/2}}{V} \ll 1 \rightarrow \boxed{\text{EL MOVIMIENTO EN LA TOBERA ES CASI-ESTACIONARIO}}$$

$$V_d \sim \frac{V^{1/3}}{t_0} \sim \frac{A}{V^{2/3}} V_T$$

VELOCIDAD EN EL INTERIOR DEL DEPÓSITO MUY PEQUEÑA

EN EL INTERIOR DEL DEPÓSITO LAS VARIACIONES DE PRESIÓN SON $\Delta p_d \sim \rho V_d^2 \sim \rho \frac{A^2}{V^{4/3}} V_T^2 \sim \frac{A^2}{V^{4/3}} \Delta p_t$,

DE DONDE SON DESPRECIABLES COMPARADAS CON LA VARIACIÓN DE PRESIÓN EN LA TOBERA $\Delta p_t \sim \rho V_T^2 \sim p_a$. POR OTRA PARTE, SI ASUMIMOS QUE LA LONGITUD DE PENETRACIÓN TÉRMICA ASOCIADA A LA CONDUCCIÓN $\delta = \sqrt{\frac{K}{\rho c_v} t_0}$ CUMPLE $\delta \gg V^{1/3}$, ENTONCES

TODAS LAS PROPIEDADES TERMODINÁMICAS EN EL INTERIOR DEL DEPÓSITO SON UNIFORMES

EL GASTO EN LA TOBERA DEPENDE DE LAS CONDICIONES EN EL EXTERIOR Y DE LA PRESIÓN EN EL INTERIOR, DE FORMA QUE

SI $p_d < p_a / \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ (LO QUE SE SATISFACE NECESARIAMENTE AL PPIO DEL LLENADO) $\rightarrow$ TOBERA ADAPTADA, GASTO INDEPENDIENTE DE p_d DADO POR

$$\boxed{G = G^* = \rho v A = \rho_a a_a A \frac{\rho^*}{\rho_a}\frac{a^*}{a_a} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \rho_a a_a A} \quad (1)$$

SI $p_d \geq p_a / \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\gamma/\gamma-1}$ $\rightarrow$ ENTRADA DEL FLUIDO AL INTERIOR EN FORMA DE CHORRO CON $p = p_d$. EN LA SECCIÓN MÍNIMA $M^2 = \frac{2}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p_a}{p_d}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$

$$\boxed{G = \rho_a a_a A \frac{\rho}{\rho_a}\frac{a}{a_a} M = \rho_a a_a A \left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{p_a}{p_d}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]^{1/2} \left(\frac{p_d}{p_a}\right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}} \quad (2)$$

APLICACIÓN DE LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD A UN VOLUMEN DE CONTROL QUE INCLUYA EL INTERIOR DEL DEPÓSITO DA

$$\frac{d}{dt}\int_V \underbrace{\rho}_{\text{UNIFORME EN EL INTERIOR}} dV = -\int_\Sigma \underbrace{\rho\bar{v}\cdot\bar{n}\,d\sigma}_{\text{NO NULA EN SEC. DE TOBERA}} \rightarrow \boxed{\frac{d\rho_d}{dt} = \frac{G}{V}} \quad (3)$$

NOTA: DE 3 Y 4 SE VE QUE, $\frac{dp_d}{d\rho_d} = \frac{p_a}{\rho_a}\gamma$ (5) $\rightarrow \boxed{T_d = \gamma T_a}$

APLICACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA ENERGÍA DA

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\Big(e + \underbrace{\tfrac{v^2}{2}}_{\text{DESPRECIABLE}}\Big) dV + \int_\Sigma \rho\left(e + \frac{v^2}{2}\right)\underbrace{\bar{v}\cdot\bar{n}\,d\sigma}_{\text{NULA EN PAREDES}} = \cancel{\int_\Sigma k\nabla T\cdot\bar{n}\,d\sigma} + \cancel{\int_\Sigma \bar{v}\cdot\bar{\tau}'\cdot\bar{n}\,d\sigma} - \underbrace{\int_\Sigma p\bar{v}\cdot\bar{n}\,d\sigma}_{\text{NULA EN PAREDES}}$$

NULA EN PAREDES $\rightarrow$ PORQUE $\bar{v}=0$ Y PAREDES AISLADAS
Y EN SEC. TOBERA $\rightarrow$ PORQUE ALLÍ $R_0 \gg 1$

$$\rightarrow \frac{V}{\gamma-1}\frac{dp_d}{dt} = -\int_{\Sigma_{\text{entrada tobera}}} \rho\left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right)\bar{v}\cdot\bar{n}\,d\sigma = G h_a$$

EN EL MOVIMIENTO ISENTRÓPICO CASI-ESTACIONARIO EN TOBERA $e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = h + \frac{v^2}{2} = h_a$

$\rho e = c_v \frac{p}{R_g}$

$$(4) \quad \boxed{\frac{dp_d}{dt} = \frac{\gamma-1}{V} G h_a}$$

1ª ETAPA $\rightarrow G = G^* = CTE$, $\left\{ \rho_d = \frac{G^*}{V} t, \quad p_d = \frac{\gamma-1}{V} G h_a t \right\}$ EN VARIABLES ADIMENSIONALES $\Pi = \frac{p_d}{p_a}$, $r = \frac{\rho_d}{\rho_a}$, $\tau = \gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{1/2} \frac{a_a A}{V} t$ $\rightarrow \Pi = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/\gamma-1} \tau$, de (5) $\rightarrow \boxed{r = \frac{\Pi}{\gamma}}$ $\rightarrow$ VÁLIDA SIEMPRE!!

2ª ETAPA $\rightarrow t > t_1$

$$\frac{d\, p_d/p_a}{dt} = \frac{\gamma-1}{V}\frac{h_a}{p_a}\rho_a a_a A\left[1 - \left(\frac{p_d}{p_a}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{1/2}\left(\frac{p_d}{p_a}\right)^{1/\gamma} \rightarrow \frac{d\Pi}{d\tau} = \frac{2}{(\gamma^2-1)^{1/2}}\left[1 - \Pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{1/2}\Pi^{1/\gamma}$$

LA ETAPA SE ACABA CUANDO $\Pi = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/\gamma-1} \rightarrow \tau = 1$

DE DONDE

$$\int_{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/\gamma-1}}^{\Pi} \frac{d\Pi}{\left[1-\Pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{1/2}\Pi^{1/\gamma}} = \frac{2}{(\gamma^2-1)^{1/2}}(\tau - 1)$$

DETERMINA JUNTO CON $r = \frac{\Pi}{\gamma}$ LA HISTORIA DE LA 2ª ETAPA $\rightarrow$ TIEMPO DE LLENADO: τ_F

$$\int_{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/\gamma-1}}^{0.99} \frac{d\Pi}{\left[1-\Pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{1/2}\Pi^{1/\gamma}} = \frac{2}{(\gamma^2-1)^{1/2}}(\tau_F - 1)$$

TIENE SOLUCIÓN ANALÍTICA CON EL CAMBIO $z = \Pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$