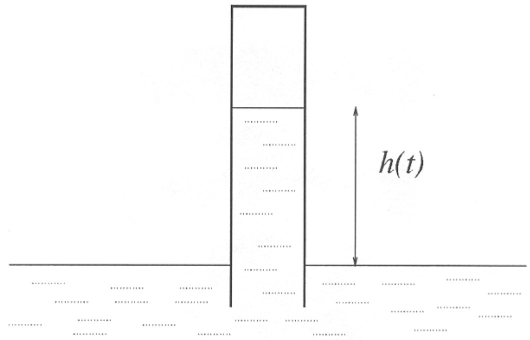
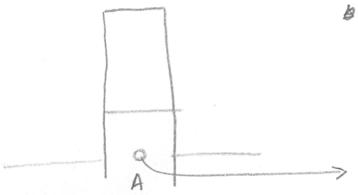
Un conducto cilíndrico de longitud L y diametro D, tales que $L \gg D$, está inicialmente vacio. Su extremo inferior se introduce en un momento dado en un depósito lleno de un fluido incompresible ideal de densidad ρ, de forma que éste comienza a ascender por el tubo. Se pide calcular la altura alcanzada por la superficie del fluido como función del tiempo, $h(t)$, asi como el tiempo que se tarda en llenar el tubo.





PRESION UNIFORME EN CADA SECCION, VELOCIDADES TRANSVERSALES PEQUEÑAS PORQUE L>>D

$t_L \sim L/U_c$ ~ VELOCIDAD CARACTERISTICA

tiempo de residencia en zona de entrada D/U_c

ESTA BIEN JUSTIFICADA LA CASI-ESTACIONARIEDAD EN ESTA ZONA

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{V_A^2}{2} = \frac{P_a}{\rho}$$

→ COMO LA PRESION ES UNIFORME EN LA SECCION, EN PARTICULAR EN A, V_A ES UNIFORME → V UNIFORME

$V(t) = V_A(t)$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{d}{dz}\left(gz + \frac{p}{\rho}\right) = 0 \Rightarrow \left(gz + \frac{p}{\rho}\right)_0^h = \frac{dv}{dt} h \Rightarrow \boxed{gh - \frac{P_a}{\rho} + \frac{v^2}{2} = -h\frac{dv}{dt}}$$

COMO ADEMAS $\frac{dh}{dt} = v$

$$h \frac{d\, v^2/2}{dh} + gh = \frac{P_a}{\rho} - \frac{v^2}{2} \qquad h = 0 \quad v = \sqrt{\frac{2P}{\rho}}$$

NOTA:

SI INTRODUCIMOS LAS VARIABLES ADIMENSIONALES $\boxed{\theta = \frac{\rho}{P_a}\frac{v^2}{2}}$, $\boxed{\frac{\rho g h}{P_a} = \eta}$ QUEDARIA

$$\boxed{\frac{d\theta}{d\eta} + \frac{\theta}{\eta} = \frac{1}{\eta} - 1} \qquad \underline{\theta = 1 \quad \eta = 0}$$

$$\theta = \frac{A}{\eta} + \frac{A(\eta)}{\eta} \qquad \frac{dA}{d\eta} = 1 - \eta \Rightarrow A = \eta - \frac{\eta^2}{2}$$

$$\boxed{\theta = 1 - \eta/2}$$

POR OTRA PARTE SE TIENE

$$\frac{dh}{dt} = v \Rightarrow \frac{d\eta}{d\tau} = \sqrt{1 - \eta/2} \qquad \int_0^\tau d\tau = \int_0^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta/2}}$$

$$\boxed{\tau = \sqrt{\frac{2\rho}{P_a}}\, g t} \qquad \tau = 4\left(1 - \sqrt{1 - \eta/2}\right)$$

$h = L$

$$\sqrt{\frac{2\rho}{P_a}}\, g t = 4\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\rho g L}{2P_a}}\right)$$