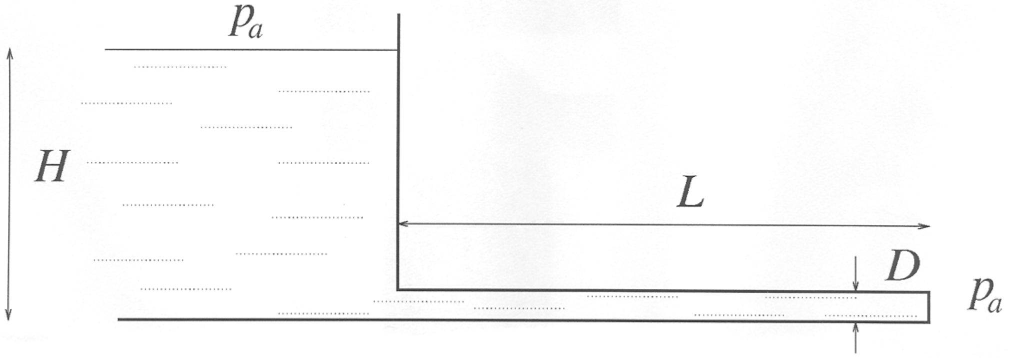
Un depósito de líquido de profundidad H abierto a la atmósfera tiene adosado en su parte inferior un conducto cilíndrico de ~~área transversal~~ DIAMETRO D y longitud L, tales que $L \gg D$. El extremo exterior del tubo permanece tapado para $t < 0$, de modo que el conducto está inicialmente lleno de líquido en reposo. En $t = 0$ se abre instantaneamente el extremo del tubo y el líquido comienza a fluir hacia el exterior. Sabiendo que el líquido se comporta como un fluido ideal en el proceso de descarga se pide hallar la evolución de la velocidad y de la presión en el conducto para $t > 0$. Repita el problema en el caso de que el área del conducto variara linealmente con la distancia al depósito s de acuerdo con la ley $A(s)/A_o = 1 - (1-\alpha)s/L$, donde A_o es el área a la entrada y $\alpha < 1$ es el cociente de la áreas de salida y entrada.



ZONA CASI-ESTACIONARIA A LA ENTRADA $\frac{p_a}{\rho} + gH = \frac{p_e}{\rho} + \frac{v^2}{2}$. $\boxed{v = v(t)}$

$t>0$ $\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{p}{\rho}\right) = 0$ $\quad L\frac{dv}{dt} + \frac{p_a}{\rho} - \frac{p_e}{\rho} = 0$ $\quad L\frac{dv}{dt} = gH - \frac{v^2}{2}$, $v(0) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} \bar v = \frac{v}{\sqrt{2gH}} \\ \tau = \sqrt{\frac{gH}{2L^2}}\, t \end{cases} \rightarrow \frac{d\bar v}{d\tau} = 1 - \bar v^2$, $\bar v = \mathrm{th}\,\tau$

EN FORMA DIMENSIONAL

$$\frac{v}{\sqrt{2gH}} = \mathrm{th}\left(\sqrt{\frac{gH}{2L^2}}\, t\right)$$

POR OTRA PARTE $s\frac{dv}{dt} + \frac{p}{\rho} - \frac{p_e}{\rho} = 0 \Rightarrow \frac{s}{L}\frac{p_e - p_a}{\rho} + \frac{p - p_a}{\rho} + \frac{p_a - p_e}{\rho} = 0$

$$p - p_a = (p_e - p_a)\left(1 - \frac{s}{L}\right) = \rho\left(gH - \frac{v^2}{2}\right)\left(1 - \frac{s}{L}\right) \rightarrow \boxed{\frac{p - p_a}{\rho g H} = \left(1 - \frac{s}{L}\right)\left[1 - \mathrm{th}\left(\sqrt{\frac{gH}{2L^2}}\, t\right)^2\right]}$$

NOTESE QUE PUESTO QUE EL TIEMPO CARACTERISTICO DEL TRANSITORIO ES $t_c \simeq \frac{L}{\sqrt{gH}}$, EL TIEMPO DE APERTURA, t_a, TIENE QUE SER TAL QUE $t_a \ll \frac{L}{\sqrt{gH}}$. POR OTRA PARTE, LA LONGITUD DEL TUBO ESTA LIMITADA; PARA QUE LOS EFECTOS DE LA VISCOSIDAD ESTEN LIMITADOS A UNA ZONA DELGADA CERCA DE LAS PAREDES

$$L \ll \frac{\rho\sqrt{gH}D}{\mu} D$$

SI $\frac{A(s)}{A_0} = 1 - (1-\alpha)\frac{s}{L}$ $\quad v(s,t) = \frac{Q(t)}{A(s)} \rightarrow$ CONOCIDO $\quad v_e = \frac{Q(t)}{A_0} \Rightarrow \boxed{v(s,t) = \frac{v_e(t)}{1 - (1-\alpha)\frac{s}{L}}}$

$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right)$ $\quad \frac{A(s)}{A_0} = \bar A(s) = 1 - (1-\alpha)\frac{s}{L}$, $\bar s = \frac{s}{L}$

$\frac{1}{\bar A(s)}\frac{dv_e}{dt} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right) = 0$ $\quad -\frac{dv_e}{dt} L \int_0^1 \frac{d\bar s}{1 - (1-\alpha)\bar s} = \frac{v_e^2}{2\alpha^2} - gH$

$-\frac{dv_e}{dt} L \frac{\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{1-\alpha} = \frac{v_e^2}{2\alpha^2} - gH$ $\quad \boxed{\bar v = \frac{v_e}{\alpha\sqrt{2gH}}}$ $\quad \boxed{\tau = \sqrt{\frac{gH}{2L^2}}\frac{(1-\alpha)}{\alpha\ln(1/\alpha)}\, t}$ $\rightarrow \frac{d\bar v}{d\tau} = 1 - \bar v^2$, $\bar v = \mathrm{th}(\tau)$