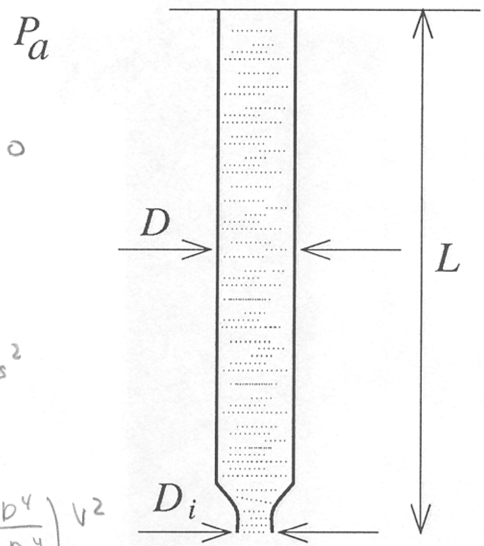
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

MECÁNICA DE FLUIDOS **17-9-97**

Un conducto vertical de diámetro D y longitud $L \gg D$ se encuentra inicialmente lleno con un líquido de densidad ρ abierto por arriba a la atmósfera. En un instante dado se abre la boquilla inferior de diámetro D_i, de manera que el líquido descarga a la atmósfera. Se pide:

1. Dar el criterio para que las fuerzas de viscosidad sean despreciables en el proceso de descarga.
2. Suponiendo que en el movimiento en el tubo se cumplen las condiciones del apartado anterior, obtener una ecuación diferencial que permita obtener la evolución de la altura de líquido como función del tiempo $h(t)$.
3. Integrar la ecuación diferencial obtenida en el apartado anterior



(1) $\rho g \gg \mu \dfrac{\sqrt{gL}}{D^2}$

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{p}{\rho} + gz\right) = 0$

En la boquilla:

$P(0) + \frac{1}{2}\rho V^2 = P_a + 1/2\, \rho V_s^2$

$V_s D_i^2 = V D^2$

$P(0) + \frac{1}{2}\rho V^2 = P_a + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{D^4}{D_i^4}\right)V^2$

$\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{P_a - P(0)}{\rho h} = \dfrac{1}{2}\dfrac{u^2}{h}\left(1 - \left(\dfrac{D}{D_i}\right)^4\right)$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2h}{dt^2} + \dfrac{1}{2h}\left(1 - \left(\dfrac{D}{D_i}\right)^4\right)\left(\dfrac{dh}{dt}\right)^2 + g = 0 \\ h(0) = L \\ \dfrac{dh}{dt}(0) = 0 \end{cases} \qquad \left(1 - \left(\frac{D}{D_i}\right)^4\right) = k$$

(3) $\dfrac{dh}{dt} = \sqrt{h\,r} \Rightarrow \dfrac{dr}{dh} + (k+1)\,r = 2g \Rightarrow \begin{cases} r = Ce^{-(k+1)h} + \underbrace{\dfrac{2g}{k+1}}_{=k_2} \\ r = 0 \Rightarrow h = L \Rightarrow C = -k_2 \cdot e^{(k+1} \end{cases}$

$\dfrac{dh}{dt} = \sqrt{h\left(Ce^{-(k+1)h} + k_2\right)} \Rightarrow \displaystyle\int_L^h \dfrac{dh}{\sqrt{h\left(Ce^{-(k+1)h} + k_2\right)}} = t$