INGENIERÍA DE FLUIDOS

16-11-09

Algunos diseños de los futuros aviones hipersónicos, como el Boeing X51, están basados en el concepto de *waverider*, en el que la sustentación se obtiene a partir de las sobrepresiones que se generan por las intensas ondas de choque que aparecen. Se quiere determinar una expresión sencilla para la sustentación que se genera en una superficie del ala o del fuselaje de uno de estos vehículos hipersónicos, suponiendo que ésta se encuentra casi alineada con la dirección del movimiento. Para ello, considere la superficie plana de la figura adjunta, que se encuentra situada a un ángulo de ataque $\alpha \ll 1$ respecto a la corriente hipersónica incidente, cuyo número de Mach $M_\infty \gg 1$ y presión p_∞ supondremos conocidos. Siendo p_i y p_e los valores de la presión en el intradós y extradós del perfil, se pide determinar una expresión simplificada para $(p_i - p_e)/p_\infty$ en función del cociente de calores específicos γ y de αM_∞, que supondremos en lo que sigue de orden unidad ($\alpha M_\infty \sim O(1)$). Para ello, siga los siguientes pasos:

1. Sabiendo que para $M \gg 1$ la función de Prandtl-Meyer $\nu(M)$ admite la forma simplificada

$$\nu = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1\right) - \frac{2}{(\gamma-1)M},$$

$\alpha = \nu(M_e) - \nu(M_\infty) = \frac{2}{(\gamma-1)M_\infty} - \frac{2}{(\gamma-1)M_e}$

$\boxed{\frac{M_e}{M_\infty} = \frac{1}{1 - \frac{\gamma-1}{2}\alpha M_\infty}}$

determine el número de Mach que aparece en el extradós, dando el resultado en la forma M_e/M_∞ en función de los parámetros del problema (γ y αM_∞).

2. Obtenga el valor de la presión en el extradós, demostrando que puede escribirse en la forma

$\frac{p_e}{p_\infty} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_e^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \underset{M_\infty \sim M_e \gg 1}{\simeq} \left(\frac{M_\infty}{M_e}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \Longrightarrow$

$$\frac{p_e}{p_\infty} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2}\alpha M_\infty\right)^{2\gamma/(\gamma-1)}.$$

3. A partir del estudio de la onda de choque oblicua que se forma en el intradós, demuestre que en el límite considerado aquí ($M_\infty \gg 1$ con $\alpha M_\infty \sim O(1)$), la componente normal del Mach indicente puede escribirse en la forma

$\tan\delta = 2\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}\frac{M_1^2\operatorname{sen}^2\beta - 1}{\underbrace{2 + M_1^2[\gamma + \cos 2\beta]}_{\to M_\infty^2(\gamma+1)}}$, $\delta \to \alpha$, $\cos\beta \to 1$, $M_1^2 \to M_\infty^2$

$\alpha M_\infty = \frac{2}{\gamma+1}\frac{(M_\infty \operatorname{sen}\beta)^2 - 1}{M_\infty \operatorname{sen}\beta}$

$$M_\infty \operatorname{sen}\beta = \frac{\gamma+1}{4}\alpha M_\infty + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\alpha M_\infty\right)^2 + 1}.$$

$\frac{p_i}{p_\infty} = 1 + \gamma\alpha M_\infty\left(\frac{\gamma+1}{4}\gamma M_\infty + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\gamma M_\infty\right)^2 + 1}\right)$

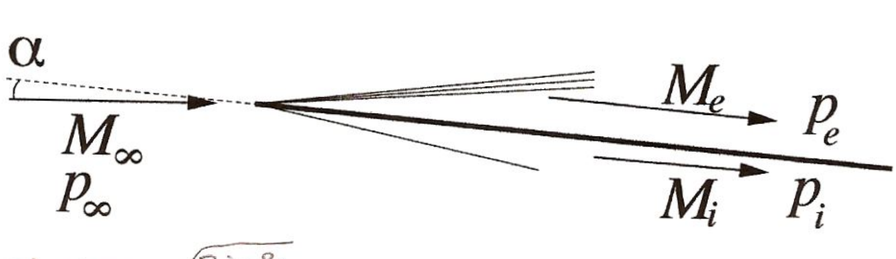
4. A partir del resultado anterior, obtenga una expresión para la presión en el intradós p_i/p_∞.

5. Haciendo uso de los resultados anteriores, obtenga finalmente $\frac{p_i}{p_\infty} = \frac{1-\gamma}{\gamma+1} + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_\infty \operatorname{sen}\beta)^2$

$$\frac{p_i - p_e}{p_\infty} = 1 + \frac{4\gamma H}{\gamma+1}(H + \sqrt{H^2+1}) - \left(1 - 2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}H\right)^{2\gamma/(\gamma-1)},$$

donde $H = (\gamma+1)\alpha M_\infty/4$.

6. Haga uso de la ecuación anterior en el caso $M_\infty = 10$ y $\alpha = 10^\circ$ ($\alpha = 0.1745$ radianes), comparando el resultado con el que sale que realizar el cálculo exacto.



$H = \frac{\gamma+1}{4}\alpha M_\infty = 1{,}047$, $\frac{p_i - p_e}{p_\infty} = 7.094 - 0.04955 = \boxed{7{,}044}$

PARA LA EXPANSION DE P.M. $\to \nu(M_e) = \nu(10) + 10 = 112.3 \to M_e \simeq 15.6$, $\frac{p_e}{p_\infty} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_e^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0.04913$

PARA LA O.C. OBLICUA $\to$ $\left.\begin{array}{l}\delta = \alpha = 10^\circ \\ M_1 = M_\infty = 10\end{array}\right\}$ $\beta = 14.5 \to M_{1n} = M_\infty \operatorname{sen}\beta = 2.50 \xrightarrow[\text{TABLAS O.C.}]{}$ $\boxed{\frac{p_i}{p_\infty} = 7{,}125}$ $\boxed{\frac{p_i - p_e}{p_\infty} = 7.076}$