CALIFICACIÓN:

NOMBRE Y APELLIDOS						
CURSO	**1º**	GRUPO		Tiempo	**1 hora**	**A**

Cada pregunta vale 1 punto:
** 0,5 puntos si la respuesta elegida es la correcta*
** 0,5 puntos si la justificación de la respuesta es correcta*
** Se restará 0,25 puntos si la respuesta elegida es incorrecta*
No se permite escribir fuera de los recuadros ni tachaduras

Pregunta 1		Sabiendo que $g(2)=3$; $g'(2)=1$; $g''(2)=-1$; $g'''(2)=2$. Aproximar el valor de $g\,(1)$ mediante un polinomio de Taylor de 3er grado centrado en $x=2$
A	$\frac{3}{2}$	*Justificación:* El polinomio de tercer grado tiene como ecuación: $P_3(x)=g(2)+g'(2)(x-2)+\frac{g''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{g'''(2)}{3!}(x-2)^3$
B	$\frac{7}{6}$	Sustituyendo: $P_3(1)=3+1\cdot(-1)-\frac{1}{2}(-1)^2+\frac{2}{6}(-1)^3=3-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{7}{6}$
C	$\frac{7}{3}$	
D	$\frac{5}{6}$	

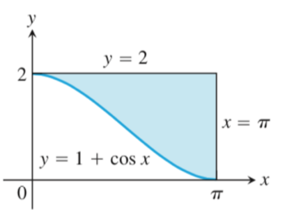
Pregunta 2		La n-ésima derivada de $g(x)$ en $x=0$ está dada por la expresión: $g^{(n)}(0)=\frac{2^{n-1}}{n!},\quad n\geq 1$ ¿cuál es el coeficiente del término en x^4 del polinomio de aproximación de Maclaurin de $g(x)$?
A	$\frac{1}{124}$	*Justificación:* El polinomio de Maclaurin de segundo grado tiene como ecuación: $P_2(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{IV}(0)}{4!}x^4$
B	$\frac{1}{72}$	El término en x^4 es: $\frac{f^{IV}(0)}{4!}=\frac{2^3}{4!\cdot 4!}=\frac{1}{72}$
C	$\frac{1}{36}$	
D	$\frac{1}{18}$	

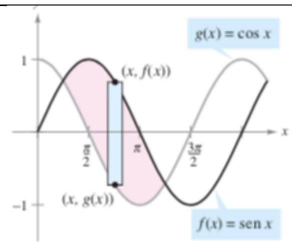
Pregunta 3		Acotar el error que se comete al calcular el valor de $\sqrt{10}$ mediante el polinomio de Taylor de segundo grado centrado en $x=9$
A	0,26	*Justificación:* El error se expresa como: $\lvert R_n(x)\rvert=\frac{f^{n+1}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}; z\in[c,x]$ En este caso: $\lvert R_2(10)\rvert=\left\lvert\frac{f'''(z)}{3!}(10-9)^3\right\rvert; z\in(9,10)$
B	0,026	Calculamos la derivada: $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}\quad f'(x)=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}\quad f''(x)=-\frac{1}{4\,x^{\frac{3}{2}}}\quad f'''(x)=\frac{3}{8\,x^{\frac{5}{2}}}=\frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$ Sustituyendo: $\lvert R_2(10)\rvert=\frac{3\cdot 1^3}{3!\cdot 8\cdot z^2\cdot\sqrt{z}}\leq\frac{1}{16\cdot z^2\cdot\sqrt{z}}$
C	0,0026	Como $z\in(9,10)$ y debo acotar superiormente el error, tomo $z=9$ y obtengo: $\lvert R_2(10)\rvert\leq\frac{1}{16\cdot 9^2\cdot 3}=\frac{1}{3888}\leq 0{,}00026$
D	0,00026	

Pregunta 4		Dada la función $F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} 2t\ \ dt$. Calcula $F'(x)$ mediante el Teorema Fundamental del Cálculo.
A	$2x$	*Justificación:* Por el Teorema Fundamenta del Cálculo sabemos que: $$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x 2t\ \ dt\right) = 2x$$ Aplicando la regla de la cadena: $$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^{\sqrt{x}} 2t\ dt\right) = \frac{d}{dx}\left(\int_2^x 2t\ \ dt\right) \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$$
B	$\sqrt{x}$	
C	2	
D	1	

Pregunta 5		La velocidad de una partícula que se mueve a lo largo del eje OX es $v(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, en $t = 4$ su posición es 2. ¿Cuál es la posición de la partícula $s(t)$ en cualquier instante t?
A	$s(t) = 2t^{\frac{1}{2}}$	*Justificación* $$v(t) = \frac{ds}{dt} \Rightarrow s(t) = \int v(t)\, dt = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\ \ dt = 2\sqrt{t} + C_1$$ Calculamos C_2 con la condición inicial $s(4) = 2 = 2\sqrt{4} + C_1 \Longrightarrow C_2 = -2$ La expresión de la posición viene dada por: $s(t) = 2\sqrt{t} - 2$
B	$s(t) = 2t^{\frac{1}{2}} - 2$	
C	$s(t) = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}$	
D	$s(t) = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{10}{3}$	

Pregunta 6		Dada la función $f(x) = \begin{cases} 6\sqrt{x} & para\ x > 1 \\ 2x + 4 & para\ x \leq 1 \end{cases}$ Calcular: $$\int_{-2}^{4} f(x)\, dx$$
A	19	*Justificación:* Debemos dividir la integral en dos partes: $$\int_{-2}^{4} f(x)\, dx = \int_{-2}^{1} f(x)\, dx + \int_{1}^{4} f(x)\, dx = \int_{-2}^{1} (2x+4)\, dx + \int_{1}^{4} 6\sqrt{x}\, dx =$$ $$= [x^2 + 4x]_{-2}^{1} + \left[4x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = [(1+4) - (4-8] + \left[(4\sqrt{4^3} - 4\sqrt{1}\right] = 9 + 28 = 37$$
B	37	
C	21	
D	29	

Pregunta 7		 Calcular el área de la zona sombreada de la figura
A	π	*Justificación:* Calculamos el área de la zona bajo la curva: $$A_1 = \int_0^{\pi} (1 + \cos x)\ \ dx = [x + sen\, x]_0^{\pi} = \pi$$ El área del rectángulo es: $A_2 = 2\pi$ El área sombreada es: $$A = A_2 - A_1 = 2\pi - \pi = \pi$$
B	2π	
C	3π	
D	$\frac{\pi}{2}$	

<table>
<tr><td colspan="2">Pregunta 8</td><td>Las gráficas del seno y coseno se intersecan infinitas veces, acotando regiones de áreas iguales. Encontrar el área de una de esas regiones.</td></tr>
<tr><td>A</td><td>1</td><td rowspan="4">Justificación
Determinamos los puntos de corte de ambas funciones:
$$sen\, x = \cos x \Rightarrow \frac{sen\, x}{\cos x} = 1 \Rightarrow tg\, x = 1 \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \\ \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$


En el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ se cumple que $sen\, x > \cos x$ por tanto el área viene dada por la integral:
$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (sen\, x - \cos x)\, dx = [-\cos x - sen\, x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] - \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>$\sqrt{2}$</td></tr>
<tr><td>C</td><td>$2\sqrt{2}$</td></tr>
<tr><td>D</td><td>π</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Pregunta 9</td><td>Sabiendo que $\int_{-1}^{1} h(r)\, dr = 2$ y que $\int_{-1}^{3} h(r)\, dr = 6$.
Calcular:
$$\int_{1}^{3} h(r)\, dr$$</td></tr>
<tr><td>A</td><td>-4</td><td rowspan="4">Justificación:
$$\int_{1}^{3} h(r)\, dr = -\int_{-1}^{1} h(r)\, dr + \int_{-1}^{3} h(r)\, dr = -2 + 6 = 4$$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>8</td></tr>
<tr><td>C</td><td>4</td></tr>
<tr><td>D</td><td>-8</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Pregunta 10</td><td>Calcular el área superficial de un tronco de cono obtenido al girar alrededor del eje OX el segmento de recta $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ comprendido entre las rectas $x = 1$ y $x = 3$</td></tr>
<tr><td>A</td><td>$\frac{7\pi}{2}$</td><td rowspan="4">Justificación:
$$f'(x) = \frac{1}{2}$$
$$1 + (f'(x))^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$
$$A = 2\pi \int_a^b \left(f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\right) dx = 2\pi \int_1^3 \left(\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}\right) dx = \frac{\pi\sqrt{5}}{2} \int_1^3 (x+1)\, dx = \frac{\pi\sqrt{5}}{2} \cdot \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_1^3 =$$
$$= \frac{\pi\sqrt{5}}{2}\left[\left(\frac{9}{2} + 3\right) - \left(\frac{1}{2} + 1\right)\right] = 3\pi\sqrt{5}$$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>3π</td></tr>
<tr><td>C</td><td>$\frac{\pi\sqrt{3}}{5}$</td></tr>
<tr><td>D</td><td>$3\pi\sqrt{5}$</td></tr>
</table>