Universidad Francisco de Vitoria
UFV Madrid

Escuela Politécnica Superior
1er Curso · Grado en Ingeniería Informática
Cálculo · Examen Final · Conv. Ordinaria · Parte 2

CALIFICACIÓN:

NOMBRE Y APELLIDOS						
CURSO	**1º**	GRUPO		Tiempo	**1 hora**	**B**

Cada pregunta vale 1 punto:
0,5 puntos si la respuesta elegida es la correcta
0,5 puntos si la justificación de la respuesta es correcta
Se restará 0,25 puntos si la respuesta elegida es incorrecta
No se permite escribir fuera de los recuadros ni tachaduras

Pregunta 1

Sabiendo que $f(3)=4$; $f'(3)=5$; $f''(3)=\frac{1}{4}$; $f'''(3)=\frac{2}{3}$. Aproximar el valor de $f\,(1)$ mediante un polinomio de Taylor de 3er grado centrado en $x=3$

A	$-\frac{113}{9}$
B	$\frac{57}{8}$
C	$-\frac{77}{6}$
D	$-\frac{115}{18}$

Justificación:

El polinomio de tercer grado tiene como ecuación:

$$P_3(x)=f(3)+f'(3)(x-3)+\frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2+\frac{f'''(3)}{3!}(x-3)^3$$

Sustituyendo:

$$P_3(x)=4+5\cdot(x-3)+\frac{1}{8}(x-3)^2+\frac{1}{9}(x-3)^3$$

Para $x=1$:

$$P_3(x)=4+5\cdot(1-3)+\frac{1}{8}(1-3)^2+\frac{1}{9}(1-3)^3=$$
$$=4-10+\frac{1}{2}-\frac{8}{9}=-\frac{115}{18}$$

Pregunta 2

La n-ésima derivada de $g(x)$ en $x=0$ está dada por la expresión:

$$g^{(n)}(0)=\frac{\sqrt{n+7}}{n^3},\quad n\geq 1$$

¿cuál es el coeficiente del término en x^2 del polinomio de aproximación de Maclaurin de $g(x)$?

A	$\frac{3}{8}$
B	$\frac{3}{16}$
C	$\frac{3}{64}$
D	$\frac{3}{32}$

Justificación:

El polinomio de Maclaurin de segundo grado tiene como ecuación:

$$P_2(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2$$

El término en x^2 es:

$$\frac{f''(0)}{2!}=\frac{\sqrt{2+7}}{2\cdot 2^3}=\frac{3}{16}$$

Pregunta 3

Acotar el error que se comete al calcular el valor de cos (0,3) mediante el polinomio de Maclaurin de segundo grado.

A	0,45
B	0,045
C	0,0045
D	0,00045

Justificación:

El error se expresa como: $|R_n(x)|\leq\left|\frac{f^{n+1}(z)}{(n+1)!}(x)^{n+1}\right|; z\in[0,x]$

En este caso: $|R_2(0{,}3)|=\frac{f'''(z)}{3!}(0{,}3)^3; z\in(0,0.3)$

Calculamos la derivada:

$$f(x)=\cos x\,;\quad f'(x)=-sen\,x;\quad f''(x)=-\cos x;\quad f'''(x)=sen\,x$$

Sustituyendo:

$$|R_2(0{,}3)|=\frac{\operatorname{sen} z}{3!}\cdot(0{,}3)^3$$

Como $z\in(0,0.3)$ y debo acotar superiormente el error, tomo $sen\,z=1$ y obtengo:

$$|R_2(10)|\leq\frac{1}{3!}\cdot(0{,}3)^3=0{,}0045$$

Pregunta 4

Calcula $F'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ mediante el Teorema Fundamental del Cálculo sabiendo que:

$$F(x) = \int_x^5 3t\ sen\ t\ \ dt$$

A	$\frac{3\pi}{2}$
B	$-\frac{\pi}{2}$
C	$\frac{\pi}{2}$
D	$-\frac{3\pi}{2}$

Justificación

Por las propiedades de las integrales sabemos que:

$$F(x) = \int_x^5 3t\ sen\ t\ \ dt = -\int_5^x 3t\ sen\ t\ \ dt$$

Por el TFC sabemos que:

$$F'(x) = \frac{d(-\int_5^x 3t\ sen\ t\ \ dt)}{dx} = -3xsen\ x$$

Sustituyendo:

$$F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 = -\frac{3\pi}{2}$$

Pregunta 5

La velocidad de una partícula que se mueve a lo largo del eje x viene dada por: $v(t) = t^2 + t$. En el instante $t = 1$ su posición es 1. ¿Cuál es la expresión que nos da la posición de la partícula en cualquier instante t?

A	$\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + \frac{5}{6}$
B	$t^3 + t^2 - 1$
C	$\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{6}$
D	$\frac{t^3}{3} + 1$

Justificación:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \Longrightarrow s(t) = \int v(t)\ dt = \int (t^2 + t)\ dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + C$$

Sabiendo que $s(1) = 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + C \Longrightarrow C = \frac{1}{6}$

La expresión de la posición es:

$$\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{6}$$

Pregunta 6

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x} & para\ x > 5 \\ x - 4 & para\ x \leq 5 \end{cases}$

Calcular:

$$\int_4^6 f(x)\ dx$$

A	$\frac{3}{2} + 5\ln\frac{5}{4}$
B	$\frac{1}{2} + 5\ln\frac{6}{5}$
C	$\frac{1}{2} + 6\ln\frac{5}{6}$
D	$\frac{1}{2} - 5\ln\frac{5}{4}$

Justificación:

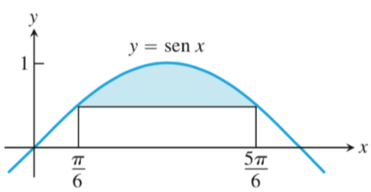
Debemos dividir la integral en dos partes:

$$\int_4^6 f(x)\ dx = \int_4^5 f(x)\ dx + \int_5^6 f(x)\ dx = \int_4^5 (x-4)\ dx + \int_5^6 \left(\frac{5}{x}\right)\ dx =$$

$$\left[\frac{x^2}{2} - 4x\right]_4^5 + [5\ln x]_5^6 = \left[\left(\frac{5^2}{2} - 4 \cdot 5\right) - \left(\frac{4^2}{2} - 4^2\right)\right] + [(5\ln 6) - (5\ln 5)] =$$

$$\frac{1}{2} + 5\ln\frac{6}{5}$$

Pregunta 7



Calcular el área de la zona sombreada de la figura

A	$\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$
B	2π
C	$\frac{3\pi}{2} - 1$
D	$\sqrt{3} + \frac{\pi}{2}$

Justificación:

La altura del rectángulo es: $h = sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

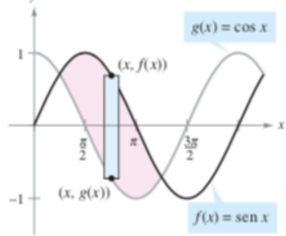
El área del rectángulo es: $A_1 = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

El área bajo la curva $y = sen\ x$ entre $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{5\pi}{6}$ es:

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} sen\ x\ dx = [-\cos x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \left(-\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\right) = -\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Por tanto el área de la zona sombreada es: $A = A_2 - A_1 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

Pregunta 8		Las gráficas del seno y coseno se intersecan infinitas veces, acotando regiones de áreas iguales. Encontrar el área de una de esas regiones.
A	1	*Justificación* Determinamos los puntos de corte de ambas funciones: $$sen\,x = \cos x \Longrightarrow \frac{sen\,x}{\cos x} = 1 \Longrightarrow tg\,x = 1 \Longrightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \\ \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$ En el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ se cumple que $sen\,x > \cos x$ por tanto el área viene dada por la integral: $$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (sen\,x - \cos x)\,dx = [-\cos x - sen\,x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] - \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$
B	$\sqrt{2}$	
C	$2\sqrt{2}$	
D	π	



Pregunta 9		Sabiendo que: $\int_2^9 f(x)\,dx = 10$ y que $\int_2^3 f(x)\,dx = -1$. Calcular: $$\int_3^9 f(x)\,dx$$
A	-9	*Justificación:* $$\int_3^9 f(x)\,dx = \int_2^9 f(x)\,dx - \int_2^3 f(x)\,dx = 10 - (-1) = 11$$
B	0	
C	11	
D	-11	

Pregunta 10		Calcular el área superficial de un tronco de cono obtenido al girar alrededor del eje OY el segmento de recta $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ para $1 \leq x \leq 3$
A	$\frac{7\sqrt{3}\pi}{2}$	*Justificación:* Debemos integrar respecto de y ya que el giro se hace alrededor de ese eje, en ese caso la función es: $$x = f(y) = 2y - 1$$ Y los límites de integración ahora son: 1 y 2 $$f'(y) = 2$$ $$1 + \left(f'(x)\right)^2 = 1 + (2)^2 = 5$$ $$A = 2\pi \int_a^b \left(f(y) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(y)\right)^2}\right) dy = 2\pi \int_1^2 \left((2y-1) \cdot \sqrt{5}\right) dy = 2\sqrt{5}\pi \int_1^2 (2y-1)\,dy =$$ $$= 2\sqrt{5}\pi[y^2 - y]_1^2 = 2\sqrt{5}\pi(4-2) = 4\pi\sqrt{5}$$
B	$3\pi\sqrt{5}$	
C	$\frac{\pi\sqrt{3}}{5}$	
D	$4\pi\sqrt{5}$	